

Geometrie pro počítačovou grafiku

Pavel Drábek, DRA0042

11. dubna 2017

Obsah

1	Průsečík přímky s kulovou plochou	3
1.1	Parametrické vyjádření přímky	3
1.2	Analytické vyjádření kulové plochy	3
1.3	Výpočet průsečíku	3
2	Barycentrické souřadnice	5
2.1	Analytické vyjádření	5
2.2	Odvození souřadnic	5
3	Kvadriky	6
4	Kvaterniony	7
4.1	Definice	7
5	Aproximace přímky metodou nejmenších čtverců	8
5.1	Metoda nejmenších čtverců	8
5.2	Příklad	8
5.2.1	Výpočet	8

1 Průsečík přímky s kulovou plochou

Cílem této kapitoly je nahradit metodu `rtcIntersect` z knihovny Embree pro výpočet průsečíku přímky s kulovou plochou zadanou analyticky.

1.1 Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky je dáno bodem A , vektorem \vec{u} , parametrem t a předpisem:

$$X(t) = A + \vec{u}t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Kdy dosazením parametru t do rovnice získáme bod X , který je od bodu A vzdálený $t|\vec{u}|$ ve směru vektoru \vec{u} .

1.2 Analytické vyjádření kulové plochy

Parametrické vyjádření kulové plochy je dáno středem $S = [S_x, S_y, S_z]$ kulové plochy, poloměrem kulové plochy r a předpisem:

$$(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 + (z - S_z)^2 = r^2. \quad (2)$$

Složky x , y , z tvoří souřadnice bodu, o kterém chceme zjistit zda leží na kulové ploše.

1.3 Výpočet průsečíku

Pokud chceme spočítat průsečík přímky a kulové plochy, musíme rovnice přímky (1) a kulové plochy (2) sloučit. Rovnice pracuje s jednotlivými složkami bodů, takže si rozepíšeme rovnici přímky na jednotlivé složky:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x + u_x t, \\ y(t) &= A_y + u_y t, \\ z(t) &= A_z + u_z t. \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit rovnici přímky (1) do rovnice kulové plochy (2):

$$(A_x + \vec{u}_x t - s_x)^2 + (A_y + \vec{u}_y t - s_y)^2 + (A_z + \vec{u}_z t - s_z)^2 = r^2 \quad (3)$$

Abychom získali hodnoty parametru t , převedeme rovnici do tvaru kvadratické rovnice:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2ac}, \quad (4)$$

$$D = b^2 - 4ac \quad (5)$$

Získané koeficienty a , b , c z upravené rovnice (3) můžeme dosadit do kvadratické rovnice (4) pro získání parametru t .

$$\begin{aligned}a &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2), \\b &= 2(u_x(A_x - s_x) + u_y(A_y - s_y) + u_z(A_z - s_z)), \\c &= (A_x - s_x)^2 + (A_y - s_y)^2 + (A_z - s_z)^2 - r^2.\end{aligned}$$

Spočítaný diskriminant D z rovnice (5) může nabývat tří hodnot:

1. $D < 0$: přímka je mimoběžná (neexistuje průsečík)
2. $D = 0$: přímka je tečna (existuje právě jeden průsečík)
3. $D > 0$: přímka je sečna (existují 2 průsečíky)

Nyní můžeme spočítat parametr t . Pokud chceme spočítat průsečík ve směru přímky, musí být parametr $t \geq 0$. V opačném případě přímka v daném směru kulovou plochu neprotíná. Pokud vyjdou 2 parametry t_1 , t_2 a chceme bod, který protne přímka v daném směru první, pak platí:

$$t = \min(t_1, t_2) \quad t_1, t_2 \geq 0$$

Kde funkce \min vrací menší hodnotu ze zadaných parametrů.

2 Barycentrické souřadnice

Barycentrické souřadnice jsou váhové koeficienty vyjadřující blízkost bodu X trojúhelníku ABC k jeho jednotlivým vrcholům A , B , C .

2.1 Analytické vyjádření

Barycentrické souřadnice definujeme předpisem:

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \langle 0; 1 \rangle.$$

2.2 Odvození souřadnic

Pokud známe body A , B , C trojúhelníku, můžeme odvodit koeficienty α , β , γ . Nejprve upravíme jednu rovnici tak, abychom ji mohli odečíst od druhé:

$$X_x = \alpha A_x + \beta B_x + (1 - \alpha - \beta)C_x,$$
$$X_y = \alpha A_y + \beta B_y + (1 - \alpha - \beta)C_y.$$

Následně řešíme soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\alpha = \frac{(B_y - C_y)(X_x - C_x) + (C_x - B_x)(X_y - C_y)}{(B_y - C_y)(A_x - C_x) + (C_x - B_x)(A_y - C_y)},$$
$$\beta = \frac{(C_y - A_y)(X_x - C_x) + (A_x - C_x)(X_y - C_y)}{(B_y - C_y)(A_x - C_x) + (C_x - B_x)(A_y - C_y)},$$
$$\gamma = 1 - \alpha - \beta.$$

3 Kvadriky

place holder [1]

4 Kvaterniony

Kvaterniony se využívají v počítačové grafice k definování rotace v prostoru.

4.1 Definice

placeholder

5 Aproximace přímky metodou nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je aproximační metoda, která prokládá n -ticí bodů přímkou tak, aby celková odchylka bodů od přímky byla co nejmenší. Metoda předpokládá, že pro dané body platí lineární vztah.

5.1 Metoda nejmenších čtverců

Předpokládejme, že mezi veličinami x a y je lineární vztah ve tvaru

$$f : y = ax + b. \quad (6)$$

Tato rovnice nám vyjadřuje funkci přímky $f(x)$. Metoda se snaží vystihnout chování bodů pomocí lineární závislosti. Přímka nebude procházet všemi body. Chceme tedy, aby procházela co nejbližší okolo nich. Za optimální přímku považujeme tu, která minimalizuje součet ploch čtverců (kvadrátů). Tento součet reprezentujeme funkcí $c(a, b)$, kde a, b jsou koeficienty aproximované přímky a n je počet zadaných bodů:

$$c(a, b) = \sum_{i=0}^n (f(x) - y_i)^2. \quad (7)$$

Minimální hodnotu funkce $c(a, b)$ získáme parciální derivací jejími argumenty:

$$\frac{\partial c(a, b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial c(a, b)}{\partial b} = 0. \quad (8)$$

Parciální derivací (8) získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Dosazením výsledných koeficientů do explicitní rovnice přímky (6) získáme aproximovanou přímku mezi danými body.

5.2 Příklad

Najděte funkci aproximační přímky bodů $A[0, 1]$, $B[2, 3]$, $C[3, 3]$, $D[4, 5]$ pomocí metody nejmenších čtverců.

5.2.1 Výpočet

Složky jednotlivých bodů dosadíme do rovnice (7) pro výpočet funkce $c(a, b)$:

$$c(a, b) = (a + b)^2 + (2a + b - 3)^2 + (3a + b - 3)^2 + (4a + b - 5)^2,$$

abychom mohli koeficienty a , b vyjádřit explicitně rovnicí přímky (6). Nyní podle rovnice (8) provedeme parciální derivaci:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c(a, b)}{\partial a} &= 2(a + b) + 2(2a + b - 3)2 + 2(3a + b - 3)3 + 2(4a + b - 5)4 = \\ &= 60a + 20b - 70\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c(a, b)}{\partial b} &= 2(a + b) + 2(2a + b - 3) + 2(3a + b - 3) + 2(4a + b - 5) = \\ &= 20a + 8b - 22.\end{aligned}$$

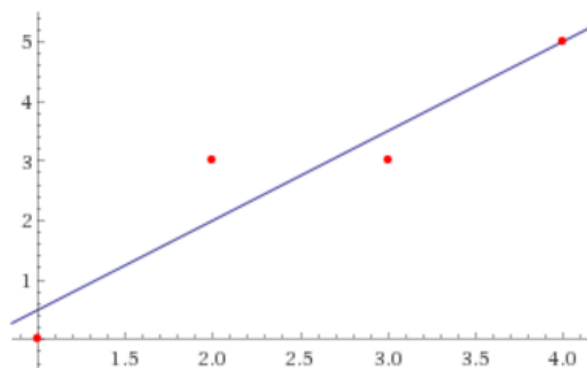
Následně řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a hledáme koeficienty aproximované přímky:

$$\begin{aligned}60a + 20b &= 70 \\ 20a + 8b &= 22 \\ a &= \frac{3}{2} \\ b &= -1.\end{aligned}$$

Dosazením koeficientů do funkce přímky (6) získáme rovnici aproximované přímky:

$$f(y) = \frac{3}{2}x - 1$$

Derivace této přímky je $f'(x) = \frac{3}{2}$. Jedná se o směrnici přímky, která se využívá k určení úhlu mezi přímkou a osou x .



Obrázek 1: Vizualizace aproximované přímky pomocí metody nejmenších čtverců

Reference

- [1] Embree. Embree: High Performance Ray Tracing Kernels [online]. 2017 [cit. 2017-02-20]. Dostupné z: <https://embree.github.io/index.html>