Geometrie pro počítačovou grafiku

Pavel Drábek, DRA0042

February 28, 2017

Contents

1 Průsečík přímky s kulovou plochou

Cílem této kapitoly je nahradit metodu rtcIntersect z knihovny Embree pro výpočet průsečíku přímky s kulovou plochou zadanou analyticky.

1.1 Parametrické vyjádření přímky

Parametrické vyjádření přímky je dáno bodem A, vektorem $\vec{u}$, parametrem t a předpisem:

$$X(t) = A + \vec{u} * t \qquad t \in \langle 0; 1 \rangle \tag{1}$$

Kdy dosazením parametru t do rovnice získáme bod X, který je od bodu A vzdálený $t|\vec{u}|$ ve směru vektoru $\vec{u}$.

1.2 Parametrické vyjádření kulové plochy

Parametrické vyjádření kulové plochy je dáno středem $S = [S_x, S_y, S_z]$ kulové plochy, poloměrem kulové plochy r a předpisem:

$$(x - S_x)^2 + (y - S_y)^2 + (z - S_z)^2 = r^2 \tag{2}$$

Složky x, y, z tvoří souřadnice bodu, o kterém chceme zjistit zda leží na kulové ploše.

1.3 Výpočet průsečíku

Pokud chceme spočítat průsečík přímky a kulové plochy, musíme rovnice přímky (1) a kulové plochy (2) sloučit. Rovnice pracuje s jednotlivými složkami bodů, takže si rozepíšeme rovnici přímky na jednotlivé složky:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x + u_x * t \\ y(t) &= A_y + u_y * t \\ z(t) &= A_z + u_z * t \end{aligned}$$

Nyní můžeme dosadit rovnici přímky (1) do rovnice kulové plochy (2):

$$(A_x + \vec{u}_x * t - s_x)^2 + (A_y + \vec{u}_y * t - s_y)^2 + (A_z + \vec{u}_z * t - s_z)^2 = r^2 \tag{3}$$

Abychom získali hodnoty parametru t, převedeme rovnici do tvaru kvadratické rovnice:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2ac} \tag{4}$$

$$D = b^2 - 4ac \tag{5}$$

Získané koeficienty a, b, c z upravené rovnice (3) můžeme dosadit do kvadratické rovnice pro získání parametru t.

$$\begin{aligned} a &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \\ b &= 2(u_x(A_x - s_x) + u_y(A_y - s_y) + u_z(A_z - s_z)) \\ c &= (A_x - s_x)^2 + (A_y - s_y)^2 + (A_z - s_z)^2 - r^2 \end{aligned}$$

Spočítaný diskriminant D z rovnice (3) může nabývat tří hodnot:

1. $D < 0$: přímka je mimoběžná (neexistuje průsečík)
2. $D = 0$: přímka je tečna (existuje právě jeden průsečík)
3. $D > 0$: přímka je sečna (existují 2 průsečíky)

Nyní můžeme spočítat parametr t. Pokud chceme spočítat průsečík ve směru přímky, musí být parametr $t \geq 0$. V opačném případě přímka v daném směru kulovou plochu neprotíná. Pokud vyjdou 2 parametry t_1, t_2 a chceme bod, který protne přímka v daném směru první, pak platí:

$$t = MIN(t_1, t_2) \qquad t_1, t_2 \geq 0$$

Kde funkce MIN vrací menší hodnotu ze zadaných parametrů.

2 Barycentrické souřadnice

Barycentrické souřadnice jsou váhové koeficienty vyjadřující blízkost vnitřního bodu X trojúhelníku ABC k jeho jednotlivých vrcholům A, B, C.

2.1 Parametrické vyjádření

Barycentrické souřadnice definujeme předpisem:

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \langle 0; 1 \rangle$$

2.2 Odvození souřadnic

Pokud známe všechny body trojúhelníku, můžeme odvodit koeficienty α, β, γ. Nejprve upravíme jednu rovnici tak, abychom ji mohli odečíst od druhé:

$$X_x = \alpha A_x + \beta B_x + (1 - \alpha - \beta) C_x$$
$$X_y = \alpha A_y + \beta B_y + (1 - \alpha - \beta) C_y$$

Následně rešíme soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\alpha = \frac{(B_y - C_y)(X_x - C_x) + (C_x - B_x)(X_y - C_y)}{(B_y - C_y)(A_x - C_x) + (C_x - B_x)(A_y - C_y)}$$
$$\beta = \frac{(C_y - A_y)(X_x - C_x) + (A_x - C_x)(X_y - C_y)}{(B_y - C_y)(A_x - C_x) + (C_x - B_x)(A_y - C_y)}$$
$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$