

Описание фильтра Калмана

Фильтр Калмана - рекурсивный фильтр, который оценивает состояние динамической системы, используя ряд зашумленных измерений. Данный фильтр с большой точностью (при наличии достаточного кол-ва измерений) предсказывает следующий вектор состояния динамической системы, также сглаживая погрешность, выдаваемую в результате обработки измерений. В нашем проекте угловая скорость считалась как $\omega_k = \frac{2\pi}{\Delta t_k}$, где $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. В результате чего в измерениях возникал шум из-за погрешности, выдаваемой ардуинкой. С другой стороны был шум подаваемой мощности на маховик Р. Таким образом в проекте возникали два шума: 1) шум связанный с измеренным значением, 2) шум, связанный с подающей мощностью на маховик, чью угловую скорость мы и хотим определить. В таком случае применим фильтр Калмана. А именно, для его применения нам необходимо знать дисперсию R, связанную с шумом измерений с ардуинки и дисперсию Q, связанную с шумом подаваемой мощности на маховик.

Одномерный вектор состояние системы: $x_k = \omega_k$. Уравнение состояние динамической системы записывается следующим образом: $\omega_{k+1} = \omega_k + \xi_k$

где ω_k - угловая скорость на ком шаге,

ξ_k - шум процесса.

С другой стороны можно записать уравнение вращения маховика при подаваемой мощности Р: $\Delta\omega = \frac{P\Delta t}{I\omega}$, тогда погрешность перепишется в виде: $\delta(\Delta\omega) \approx \frac{\Delta t \Delta P}{I\omega}$ откуда после преобразований и учета дисперсии шума от ардуинки (считаем случайные величины независимыми) получаем итоговое выражение для дисперсии:

$\sigma_\omega = \sqrt{\left(\frac{2\pi\sigma_{\Delta t}}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t \sigma_P}{I\omega}\right)^2}$, где в качестве дисперсии мощности можно взять дисперсию нормального распределения случайной величины Р. Таким образом можно было оценить погрешность выдаваемой угловой скорости

Применение фильтра Калмана

Для начала определим начальное состояние системы как $\hat{\omega}_{0|0} = 0$ или первому измерению.

Поскольку в нашей задаче нет дрейфа, то есть сдвиг измерений равен 0, то запишем прогноз угловой скорости:

$\hat{\omega}_{k|k-1} = \hat{\omega}_{k-1|k-1}$. Дисперсия прогноза увеличивается из-за шума процесса Q:

$P_{k|k-1} = P_{k-1|k-1} + Q$, дальше запишем коррекцию на ком шаге. Для этого вычислим коэффициент Калмана: $K_k = \frac{P_{k|k-1}}{P_{k|k-1} + R}$. Теперь можем записать обновленную оценку

вектора динамической системы: $\hat{\omega}_{k|k} = \hat{\omega}_{k|k-1} + K_k(z_k - \hat{\omega}_{k|k-1})$, где скобка в правой части называется инновацией, то есть разницей между измерением и прогнозом. Далее происходит обновление дисперсии: $P_{k|k} = (1 - K_k)P_{k|k-1}$, чем больше K_k , тем фильтр становится увереннее.