ДЗ №2 Хоменко Павел

Задача 1 (4 балла). Величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0;1]$. Используя свойства сходимости по вероятности и ЗБЧ найдите при $n \to \infty$

а) $\operatorname{plim} X_1/\bar{X}$,

б) $\operatorname{plim} 1/(1+\bar{X}_n)$,

в) $\operatorname{plim} \sum_{i=1}^{n} \ln X_i/n$,

г) $\operatorname{plim} \sqrt[n]{X_1 \cdot \ldots \cdot X_n}$,

д) $\operatorname{plim}(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)$,

е) $\operatorname{plim} \max\{X_1, \ldots, X_n\}$,

ё) $\operatorname{plim} \min\{X_1, \ldots, X_n\}$,

ж) $\operatorname{plim} \frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n}$

а) Сои ЗБЧ $\left(\frac{X_1+X_2\ldots+X_n}{n}\right) \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X)$

$\mathbb{E}(X) = 0{,}5$ для $X \sim U[0,1]$

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(|X_n - 0{,}5| \geqslant \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$

Для $0.5-\varepsilon<0$ $\quad \mathbb{P}(X_n < 0{,}5-\varepsilon) = 0$

Для $0{,}5+\varepsilon>1$ $\quad \mathbb{P}(X_n > 0{,}5+\varepsilon) = 0$

$\mathbb{P}(X_n < 0{,}5-\varepsilon) = (0{,}5-\varepsilon) = 0{,}5$

$\mathbb{P}(X_n > 0{,}5+\varepsilon) = 1-0{,}5+\varepsilon = 0{,}5$

$\Rightarrow \operatorname{plim} X_n = 0{,}5$ для $X_n \sim U[0,1]$

Т.о. $\operatorname{plim} \frac{X_n}{\bar{X}} = \frac{0,5}{0,5} = 1$

б) С учетом а)

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2 \sim 0,7$$

в) По теореме Манна-Вальда-Слуцкого

$$X_n \xrightarrow{P} a \qquad g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$$

$$\operatorname{plim} \ln\left(\frac{X_n}{n}\right) = \ln \operatorname{plim} \frac{X_n}{n} = \ln 0,5 \sim -0,7$$

г) $\operatorname{plim} \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_n} = \sqrt[n]{\operatorname{plim}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_n)}$ (т. Манна-Вальда-Слуцкого)

$$\operatorname{plim}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = \operatorname{plim} X_1 \cdot \operatorname{plim} X_2 \cdot \ldots \operatorname{plim} X_n =$$
$$= (\operatorname{plim} X_n)^n \text{ (по т. Слуцкого)}$$

Т.о. $\operatorname{plim} \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_n} = \sqrt[n]{X_n^n} = \operatorname{plim} X_n = \mathbb{E}(X) =$

$= 0,5$

g) $\operatorname{plim}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots X_n) = \operatorname{plim} X_1 \cdot \operatorname{plim} X_2 \ldots \operatorname{plim} X_n =$

$= \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}(X_n) = (\mathbb{E}(X))^n = (0.5)^n$

$$\lim_{n \to \infty} 0{,}5^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

e) $\mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\max\{X_1, X_2 \ldots X_n\} \le y) =$

$= \mathbb{P}(X_1 \le y \cap X_2 \le y \cap \ldots \cap X_n \le y)$

т.к. $X_1, X_2 \ldots X_n$ – н.с.в.

$\mathbb{P}(X_1 \le y \cap X_2 \le y \cap \ldots \cap X_n \le y) = \mathbb{P}(X_1 \le y) \mathbb{P}(X_2 \le y) \cdot$

$\cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \le y) = y^n$

Для $y \in [0,1]$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^n & y \in [0,1] \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} n y^{n-1} & y \in [0,1] \\ 0 & \text{ост.} \end{cases}$$

Для $B[\alpha = n, \beta = 1]$ $\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

ё) $\mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots X_n\} \leq x) = 1 -$

$- \mathbb{P}(\min\{X_1, X_2, \dots X_n\} > x) = 1 - (\mathbb{P}(X_i > x))^n = 1 -$
$- (1 - x)^n$

$\lim\limits_{n \to \infty} (1 - (1 - x)^n) = \lim\limits_{n \to \infty} (1 - 1) = 0$, т.к $x \in [0, 1]$

ж) $\text{plim} \frac{\sum_i (X_i - \tilde{X})^2}{n} = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}^2(X_i) = Var(X_i)$

$Var(X) = \frac{(b-1)^2}{12} = \frac{1}{12}$

Задача 2 (2 балла). Известно, что X — неотрицательная случайная величина с $E(X) = 10$. В каких пределах может лежать вероятность $\mathbb{P}(X < 20)$?

$\mathbb{P}(|X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$

$\mathbb{P}(X < 20) \geq 1 - \frac{10}{20}$

$\mathbb{P}(X < 20) \geq 0{,}5 \Rightarrow \mathbb{P}(X < 20) \in [0{,}5, 1]$

Задача 3 (4 балла). С помощью неравенства Чебышева оцените вероятности

а) $\mathbb{P}(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma)$, если $\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

б) $\mathbb{P}(8 < Y < 12)$, если $\mathrm{E}(Y) = 10$, $\mathrm{Var}(Y) = 400/12$

в) $\mathbb{P}(-2 < Z - \mathrm{E}(Z) < 2)$, если $\mathrm{E}(Z) = 1$, $\mathrm{Var}(Z) = 1$

г) Найдите точные значения, если дополнительно известно, что

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2), \quad Y \sim U[0; 20], \quad Z \sim \mathrm{Exp}(1)$$

а) $\mathbb{P}(-2\sigma < X-\mu < 2\sigma) = \mathbb{P}(|X-\mu| < 2\sigma)$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(|X-\mu| < 2\sigma) \geq \frac{3}{4}$$

б) $\mathbb{P}(8 < Y < 12) = \mathbb{P}(|Y-10| < 2)$

$$\mathbb{P}(|Y-10| < 2) \geq 1 - \frac{400}{12 \cdot 2^2}$$

$$\mathbb{P}(|Y-10| < 2) \geq 1 - \frac{400}{48}$$

$$\mathbb{P}(|Y-10| < 2) \geq -7{,}3$$

В целом да - вероятность не может быть отрицательной! Но слишком грубо в) $\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| < 2) \geq 1 - \frac{1}{2^2}$

$\mathbb{P}(|Z - 1| < 2) \geq \frac{3}{4}$

г) $\mathbb{P}(-2\sigma + \mu \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) -$
$\Phi\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) =$
$= 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$

$\mathbb{P}(8 < Y < 12) = \int_8^{12} \frac{1}{20} dx = \frac{x}{20}\Big|_8^{12} = \frac{12}{20} - \frac{8}{20} = \frac{4}{20} = 0{,}2$

$\mathbb{P}(-2 < Z - 1 < 2) = \mathbb{P}(-1 < Z < 3) = \mathbb{P}(0 < Z < 3) =$
$= 1 - e^{-3} = 0{,}95$