ДЗ №1 Хоменко Павел

Задача 1 (2 балла). Величина X нормально распределена $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Выпишите функцию плотности случайной величины X. Найдите её точку максимума и точки перегиба.

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$

2. $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}\right)' = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \cdot$

$\cdot \left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)' = -\dfrac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \cdot (x-\mu)$

3. $f'(x) = 0 \qquad e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} > 0 \Rightarrow x - \mu = 0,$

$\mu = 0 \Rightarrow f'(\mu) = 0 \qquad x_{max} = \mu$

$f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad \left(x_{max}, f_{max}(x)\right) = \left(\mu, \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$

4. $f''(x) = -\dfrac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left(\left(e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)' \cdot (x-\mu) + \right.$

$+ (x-\mu)' \cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} = -\dfrac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \cdot$

$$\cdot\left(-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2\cdot e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}+e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}\right)=$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}\right)}}_{>0}\left(1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$f''(x)=0$ если $1-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}=0$

$$(x-\mu)^2=\sigma^2$$

$$x-\mu=\pm\sigma$$

$$x_{1/2}=\mu\pm\sigma$$

$$f(\mu+\sigma)=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$x_1, f_1(x_1)=\left(\mu+\sigma, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$x_2, f_2(x_2)=\left(\mu-\sigma, \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

Задача 2 (2 балла). Известно, что $\ln Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Найдите $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$, медиану и моду Y.

$$M_X(t)=\mathbb{E}(e^{tX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}p^X\,dx$$

Для $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\quad M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

① $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(e^X) = M_X(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

② $\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$

$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(e^{2x}) = e^{2\mu + 2\sigma^2} \Rightarrow$

$\mathrm{Var}(Y) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - \left(e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2} =$

$= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$

③ Поскольку $\ln Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $\mathrm{Med}(Y) =$

$= e^{\mathrm{Med}(\ln Y)} = e^{\mu}$

④ $-\frac{1}{x^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x) - \mu)^2} -$

$-\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x) - \mu)^2} \frac{\ln x - \mu}{\sigma^2} \frac{1}{x}$

Mode = x при котором $f(x)$ max, $\Rightarrow$

$-1 - \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma^2} = 0$ или Mode $= X = e^{\mu - \sigma^2}$

Задача 3 (2 балла). Величины X_1, X_2, X_3, X_4 независимы и имеют распределение $\mathcal{N}(0, 4)$.

1. Как распределена величина $\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2}{2}$?
2. Как распределена величина $\frac{X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2}}$?
3. Как распределена величина $\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2}$?
4. Как распределена величина $\frac{\sqrt{2}\cdot X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2}}$?

① $X_1^2+X_2^2+X_3^2+x_4^2 \sim \chi^2$ $df=4$

$$\frac{\chi^2}{8} \sim \Gamma(2,1)$$

② $X_1 \sim \mathcal{N}(0,4)$

$$\sqrt{X_2^2+X_3^2} \sim \chi(2)$$

$$\frac{X_1}{\sqrt{X_2^2+X_3^2}} \sim t(2)$$

③ $X_1^2+X_2^2 \sim \chi^2$ $df=2$

$X_3^2+X_4^2 \sim \chi^2$ $df=2$

$$\frac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2} \sim F(2,2)$$

④ $t(2)$, аналогично п.2

Задача 4 (4 балла). Пара X и Y имеет двумерное нормальное распределение

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

1. Найдите $E(X)$, $Var(X)$, $E(X+3Y-7)$, $Var(X+3Y-7)$, $Cov(X-Y, 2X+3Y)$, $Corr(X-9, X+3Y)$.
2. Найдите $\mathbb{P}(X > 5)$, $\mathbb{P}(X+Y > 5)$.

①

а) $\mu = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = 1$

б) $\begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Var(X) = 9$

в) $\mathbb{E}(X+3Y-7) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(3Y) + \mathbb{E}(-7) =$

$= \mathbb{E}(X) + 3\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(7) = 1 - 3\cdot 2 - 7 = -12$

г) $Var(X+3Y-7) = Var(X+3Y)$ т.к $Var(7) = 0$

$Var(X+3Y) = 1^2 \cdot Var(X) + 3^2 Var(Y) + 2\cdot 1\cdot 3\cdot$

$\cdot \ Cov(X,Y) = 1\cdot 9 + 9\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 3\cdot(-1) = 9 + 36 -$
$- 6 = 39$

д) $Cov(X-Y, 2X+3Y) = 1\cdot 2\ Var(X) - 3\,Var(Y) +$
$+ (1\cdot 3 - 1\cdot 2)\cdot Cov(X,Y) = 2\cdot 9 - 3\cdot 4 - 1 = 5$

е) $Corr(X-9, X+3Y)$

$Cov(X-9, X+3Y) = Cov(X, X+3Y) - Cov(9, X+3Y) =$
$= Cov(X, X+3Y) = Cov(X,X) + 3\,Cov(X,Y) = Var(X) +$
$+ 3\,Cov(X,Y) = 9 + 3\cdot(-1) = 6$

$Var(X-9) = Var(X) = 9$

$Var(X+3Y) = 39$ (см. выше)

$$Corr(X-9, X+3Y) = \frac{Cov(X-9, X+3Y)}{\sqrt{Var(X-9)\cdot Var(X+3Y)}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{39\cdot 9}} \approx \frac{6}{19} \approx 0{,}3$$