Домашняя работа №7
Студент: Хоменко Павел

Задача 1 (3 балла). Найдите все экстремумы функции $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ при условии, что $\ln x + \ln y + \ln z = 0$ и классифицируйте их.

Решение:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x + 2y + 3z \to \underset{x,y,z}{extr} \\ \ln x + \ln y + \ln z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} f(x,y,z) = x + 2y + 3z \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$$L = x + 2y + 3z + \lambda(xyz - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda yz = 0 \Rightarrow \lambda yz = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda z} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + \lambda xz = 0 \Rightarrow \lambda xz = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{\lambda z} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 3 + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\lambda z} \cdot \frac{2}{\lambda z} \cdot z = 1 \Rightarrow \lambda^2 z = 2 \quad z = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$y = -\frac{1}{\lambda} : \frac{2}{\lambda^2} = -\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = -2y$$

$$x = -\frac{2}{\lambda} : \frac{2}{\lambda^2} = -\lambda \Rightarrow \lambda = -x$$

$$3 - x \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0 \to x^3 = 6 \quad x = \sqrt[3]{6}$$

$$y = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} \quad z = \frac{2}{x^2} = \frac{2}{\sqrt[3]{36}} \quad xyz = \frac{\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot 2}{2\sqrt[3]{36}} = 1$$

Критическая точка: $\left(\sqrt[3]{6}, \frac{\sqrt[3]{6}}{2}, \frac{2}{\sqrt[3]{36}}\right)$ $\lambda = -\sqrt[3]{6}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x} = 0$ $\frac{\partial^2 L}{\partial^2 y} = 0$ $\frac{\partial^2 L}{\partial^2 z} = 0$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \lambda z = -\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = \lambda z = -\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ $\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = \lambda y = -\frac{\sqrt[3]{36}}{2}$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = \lambda y = -\frac{\sqrt[3]{36}}{2}$ $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = \lambda x = -\sqrt[3]{36}$ $\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = \lambda x = -\sqrt[3]{36}$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt[3]{6}} & -\frac{\sqrt[3]{36}}{2} \\ -\frac{2}{\sqrt[3]{6}} & 0 & -\sqrt[3]{36} \\ -\frac{\sqrt[3]{36}}{2} & -\sqrt[3]{36} & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_0 = 0$

$\Delta_1 < 0$

найденная точка – седло

Задача 2 (4 балла). Найдите все экстремумы функции $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z$ при условиях, что $x - y + z = -1$ и $-2x + 12y + 3z = 7$. Классифицируйте их.

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3z \to \underset{x,y,z}{extr} \\ x - y + z + 1 = 0 \\ -2x + 12y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

$L = x^2 + 2y^2 - 3z + \lambda_1 (x - y + z + 1) +$
$+ \lambda_2 (-2x + 12y + 3z - 7)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda_1 + 12\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = -3 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \\ -2x + 12y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$$

Решая СЛАУ

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 12 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

$x = -1{,}1 \quad y = 0{,}3 \quad z = 0{,}4 \quad \lambda_1 = 2{,}52 \quad \lambda_2 = 0{,}16$

Критическая точка: $(-1{,}1,\ 0{,}3,\ 0{,}4)$

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial^2 x} = 2 \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 0$

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial^2 y} = 2 \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 0$

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 0 \quad \dfrac{\partial^2 L}{\partial^2 z} = 0$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_0 = 2 \quad \Delta_1 = 4$

$\Delta_2 = 0 \Rightarrow$ найденная точка - седло

Задача 3 (3 балла). Найдите минимум функции

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2, \text{ при ограничении } x + y + z \leqslant -23.$$

Решение:

$$\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+3y^2+5z^2 \to \min\limits_{x,y,z} \\ x+y+z \leq -23 \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = x^2+3y^2+5z^2+\mu(x+y+z+23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x+\mu \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 6y+\mu \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 10z+\mu$$

$$x+y+z-23 \leq 0 \qquad \mu \geq 0 \qquad \mu(x+y+z-23)=0$$

① $$\begin{cases} 2x+\mu=0 \\ 6y+\mu=0 \\ 10z+\mu=0 \\ x+y+z-23=0 \\ \mu \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} -\frac{\mu}{2}-\frac{\mu}{6}-\frac{\mu}{10}=23 \to \underline{\mu=-30} \\ 2x+\mu=0 \\ 6y+\mu=0 \\ 10z+\mu=0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$$

$\mu < 0 \Rightarrow \varnothing$

② $$\begin{cases} 2x+\mu=0 \\ 6y+\mu=0 \\ 10z+\mu=0 \\ x+y+z-23 \geq 0 \\ \mu=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ \mu=0 \end{cases}$$

$x+y+z-23=-23$

$-23<0 \Rightarrow \varnothing$