HOW TO заботать зачёт по матанализу 2

Интегралы

Пусть $f(x)$ собственно интегрируема на любом $[a, b] (b > a)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Если $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b и собственно интегрируема на $[a, b-\varepsilon] (\varepsilon > 0)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится.

Признаки сравнения

1 признак сравнения
Если:

1. $|f(x)| \leq F(x)$
2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)dx$ сходится

Тогда $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.

2 признак сравнения
Пусть $\psi(x) > 0, \phi(x) = O^*(\psi(x))$ при $x \to +\infty$.

$$\phi(x) = O^*(\psi(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = c \neq 0$$

Тогда $\displaystyle\int_a^{+\infty} \psi(x)dx$ и $\displaystyle\int_a^{+\infty} \phi(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

3 признак сравнения

- Если $f(x) = O^*\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$ при $x \to +\infty$ то
  1. $p > 1 \Rightarrow$ сходится;
  2. $p \leq 1 \Rightarrow$ расходится.
- Если $f(x) = O^*\left(\dfrac{1}{(x-b)^p}\right)$ при $x \to b+0$, то $\displaystyle\int_b^a f(x)dx$:
  1. при $p \geq 1$ расходится;
  2. при $p < 1$ сходится.

Ряды

Признаки сходимости

Д'Аламбера
Если с некоторого момента $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, то сходится. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$, то расходится. При $q = 1$ непонятно.

Коши
$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a^n} = q.$

- $q < 1 \Rightarrow$ сходится.
- $q > 1 \Rightarrow$ расходится.

Признак сравнения для знакопостоянных рядов
$\forall n > N : b_n \geq a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$:

1. сходится при $k > 1$
2. расходится при $k \leq 1$

Признак Лейбница для знакочередующихся рядов
Если ряд знакочередующийся и $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$ и $|a_n|$ убывают монотонно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Признаки равномерной сходимости

Признак Вейерштрасса
Если существует a_n — числовая последовательность такая, что $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ сходится. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx$ равномерно сходится на X.

Признак Дирихле
Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ограничена в совокупности на X и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in X$ и равномерно сходится к 0, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномерно сходится на X.

Признак Абеля
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на X и $|b_n(x)|$ ограничена в совокупности и $b_n(x)$ монотонна по n.
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ сходится равномерно на X.

Функциональные последовательности

Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к $f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Дифференцируемость рядов

Если

1. $f_n(x)$ непрерывно дифференцируема при $a < x < b$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ - равномерно сходится на (a, b)

Тогда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

Если

1. $f_n(x)$ непрерывна
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно

Тогда $\int_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right)$