20.03.2023 Интеграл Римана.

$a = x_0 < x_1 < ..., x_{n-1} < x_n = b$
$\lambda_\tau = max(x_j - x_{j-1})$
$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$
$S(f, \tau, \xi) = \sum_{j=1}^{w} f(\xi_j)\delta x_j$
$\exists I" \forall \epsilon \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 : \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_\tau \Rightarrow |S(f, \tau\xi) - I| < \epsilon)$
$I = \int_a^b f(x)dx$
Верхняя и нижняя сумма Дарбу:

$$\overline{S_\tau} = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j (M_j = [x_{j-1}, x_j])$$

$$\underline{S_\tau} = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j (M_j = [x_{j-1}, x_j])$$

Теорема. $\forall \tau_1, \tau_2 \underline{S_{\tau_1}} \leq \overline{S_{\tau_2}}$

Следствие. $\underline{S_\tau} \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S_\tau}$

Теорема. Пустть f определена на $[a, b]$, f интегрируема на $[a, b] \Leftrightarrow \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon$

Доказательство.

- $\Rightarrow$. Пусть f интегрируема на $[a, b]$. По определению интегрируемости, $\exists \delta : \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_\tau < \delta \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \dfrac{\epsilon}{3}$

  $I - \dfrac{\epsilon}{3} < S(f, \tau, \xi) < I + \dfrac{\epsilon}{3}$

  Мы хотим получить $I - \dfrac{\epsilon}{3} < \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} < I + \dfrac{\epsilon}{3}$

  Рассмотрим левую часть неравенства $I - \dfrac{\epsilon}{3} < S(f, \tau, \xi) < I + \dfrac{\epsilon}{3}$ $I - \dfrac{\epsilon}{3} < S(f, \tau, \xi)$. Возьмём инфимум по $\xi \Rightarrow I - \frac{\epsilon}{3} \leq inf S(f, \tau, \xi) = \underline{S_\tau}$.

  $\underline{S_\tau} = \sum_{j=1, x \in [x_{j-1}, x_j]}^{w} inf f(x) \Delta x_j$

  $S(f, \tau, \xi) < I + \frac{\epsilon}{3}$

  $\overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow I - \frac{\epsilon}{3} \leq \underline{S_\tau} \leq \overline{S_\tau} \leq I + \frac{\epsilon}{3}$.

- $\Leftarrow$. $\underline{S_\tau} \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S_\tau}$ (следствие из теоремы)ю

  Знаем, что $\forall \epsilon \quad \exists \delta : \forall \tau (\lambda_\tau < \delta \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon$

  $\underline{S_\tau} \leq S_\tau \leq \overline{S_\tau}$

  $|S_\tau - I_*| < \epsilon \Rightarrow I_*$ по определению интеграла является интегралом Римана.

Следствие. f интегрируема по Римана на $[a, b] \Rightarrow I_* = I^* = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Теорема (без доказательства. f интегрируема на $[a, b] \Leftrightarrow I_* = I^*$, и при этом всегда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = I_* = I^*$

Некоторые свойства интеграла

1. Аддитивность интеграла: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f + \int_c^b f, (c \in [a,b])$.

   Доказательство. Возьмём произвольное разбиение τ на $[a,b]$

   $c \in [x_{j-1}, x_j]$

   Рассмотрим вспомогательное разбиение отрезка τ' на $[a,c]$ и τ'' на $[c,b]$:

   - $\tau' : a < x_1 < ... < x_{j-1} < x$
   - $\tau'' : x < x_j < ... < b$

   (a) Пусть f интегрируема на $[a,b]$. Покажем, что $\exists \int_a^c$ и $\exists \int_a^b$.
   f интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \epsilon$ для $\tau : \lambda_\tau < \delta(\epsilon)$.
   $\overline{S_\tau} \geq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}$ - очевидно, так как в одной из сумм $sup_[x_j, x_{j+1}]f(x)$ может стать меньше, а больше стать не может.
   Также $\underline{S_\tau} \leq \underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}$ - тоже очевидно.
   Итого $\epsilon > \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \geq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} - (\underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}) = (\overline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}}) \leq \epsilon$.
   Значит $\overline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau'}} < \epsilon$ и $\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}} < \epsilon$.

   (b) Пусть f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. Так что есть $\int_a^b f$.
   $\overline{S_\tau} = \sum_{k\neq j} + M_j\Delta x_j, \underline{S_\tau} = \sum_{k\neq j} + m_j \Delta x_j$
   Ужмём $|f(x)| \leq B, x \in [a,b]$.
   Мы хотии получить такую оценку: $\overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} +$ еще что-то.
   $\overline{S_\tau} - (\overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}) \leq$ еще что-то
   $\overline{S_\tau} - (\overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}) = \{\sum\limits_{k\neq j}\text{сокращается}\} = M_j\Delta x_j - (sup_{[x_{j-1},c]}f(x)(c - x_{j-1}) + sup_{[c,x_j]}f(x)(x_j - c)) \leq$
   $B\Delta x_j + B(c - x_{j-1} + x_j - c) = 2B\Delta x_j \qquad (c - x_{j-1} + x_j - c = \Delta x_j)$
   $[x_{j-1}, c] \geq -B$
   $[c, x_j] \leq -B$
   $\overline{S_\tau} - (\overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}) \leq 2B\lambda_\tau$
   А для инфимумов получается $\underline{S_\tau} \geq (\underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}) - 2B\lambda_\tau$
   $\overline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + 2B\lambda_\tau$
   $\underline{S_\tau} \geq \underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}} - 2B\lambda_\tau$
   $\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} \leq \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} + 2B\lambda_\tau - \underline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau''}} + 2B\lambda_\tau = (\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}}) + 4B\lambda_\tau < \epsilon$
   $\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}} < \dfrac{\epsilon}{3}$
   $\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}} < \dfrac{\epsilon}{3}$
   Потому что берем минимальную дельту.

   (c) Докажем уже наконец-то, что $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ (я уже устал техать)

   $$\left|\int_a^b - \left(\int_a^b + \int_a^b\right)\right| < \epsilon$$
   $$\left|\int_a^b - \left(\int_a^b + \int_a^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| < \epsilon$$
   $$\left|\int_a^b - \left(\int_a^b + \int_a^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| \leq \left|\int_a^b - S_{\tau'} + S_{\tau''}\right| + \left|\int_a^b - S_{\tau'}\right| + \left|\int_c^b - S_{\tau''}\right| < \epsilon$$
   $\left|\int_a^b - S_{\tau'} + S_{\tau''}\right| < \frac{\epsilon}{3}$

$\left|\int_a^b - S_{\tau'}\right| < \frac{\epsilon}{3}$

$\left|\int_c^b - S_{\tau''}\right| < \frac{\epsilon}{3}$

Утверждение. Есть интегрируемая функция. Если мы поменяем значения функции в конечном числе точек, то площадь остаентся той же.

Доказательство. Докажем для одной точки x_0.

Давайте поменяем значение $f(x_0)$ на c. Рассмотрим функуцию $g(x) = \begin{cases} 0, x \neq x_0 \\ f(x_0) + c, x = x_0 \end{cases}$

Покажем, что $\displaystyle\int_a *Bg(x)dx = 0$.

Рассмотрим проомзвольное разбиение.

$\forall \tau \quad |S_\tau| \leq |C - f(x_0)| \cdot \lambda_\tau \to 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a *Bg(x)dx = 0$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f + 0 = \int_a^b f$$