HOW TO заботать коллоквиум по матанализу (2 семестр)

Список билетов

1. ~~Понятие определённого интеграла~~
2. ~~Интегрируемость суммы функций~~
3. ~~Ограниченность интегрируемой функции~~
4. Пример ограниченной неинтегрируемой функции
5. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости
6. Аддитивность интеграла по множеству
7. Интегрируемость непрерывной функции
8. Интегрируемость монотонной функции
9. Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек
10. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций
11. Интегрируемость произведения функций
12. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость
13. Формула Ньютона-Лейбница
14. Пример неинтегрируемой функции с первообразной
15. Пример интегрируемой функции без первообразной
16. Интегрирование по частям
17. Замена переменной
18. Первая теорема о среднем
19. Вычисление площадей
20. Вычисление длины дуги
21. Приближённое вычисление интеграла: методы прямоугольников, трапеций, Симпсона

Понятие определённого интеграла

Разбиение отрезка $[a,b]$ - $\{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, $x_i < x_{i+1}$
Мелкость разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k = \max(x_k - x_{k-1})$$

Интегральная сумма: $S(f,\tau,\xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = S_\tau$

Определение f, определённая на $[a,b]$, интегрируема по Риману на $[a,b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}: \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_t < \delta \Rightarrow |S(f,\tau,\xi) - I| < \epsilon)$$

Обозначаем $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Интегрируемость суммы функций

Теорема. Пусть f и g интегрируемы на $[a,b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрирума на $[a,b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Доказательство.

$$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k =$$

$$= \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$$

$$\left| S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) - \left(\alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \right) \right| \leq |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right|$$

В определении интегрируемости f и g берём не ϵ, а $\dfrac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|}$

Тогда

$$\left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| \leq \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{и} \quad \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| \leq \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| < \epsilon$$

Ограниченность интегрируемой функции

Теорема. Если f интегрируема на $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$.

Доказательство.
Проведём от противного: пусть f не ограничена, но интегрируема.

Тогда $I - \epsilon < \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < I + \epsilon$ для какого-то разбиения τ при заданном $\epsilon > 0$ и любом выборе $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Так как f не ограничена, то найдётся такой отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором f не ограничена $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ можно сделать сколь угодно большим по модулю. Противоречие.