HOW TO заботать экзамен по алгебре (2 семестр)

Должен признаться, что не планирую делать полный конспект к экзамену по линейной алгебре, так как это слишком долгий процесс.

Список билетов

1. Многочлены
   (a) Основные понятия теории делимости. Отношение ассоциированности
   (b) Деление многочленов с остатком
   (c) Теорема о наибольшем общем делителе. Алгоритм Евклида
   (d) Существование и однозначность разложения на неприводимые многочлены в кольце многочленов над полем
   (e) Поле частных области. Рациональные дроби.
   (f) Кольцо многочленов над областью с однозначным разложением. Лемма Гаусса и ее следствия
   (g) Однозначность разложения на неприводимые многочлены в кольце многочленов над областью с однозначным разложением
   (h) Теорема Безу. Корни многочлена.
   (i) Классификация неприводимых многочленов над полями комплексных и действительных чисел
   (j) Неприводимые многочлены с целыми коэффициентами. Критерий Эйзенштейна. Алгоритм Кронекера
   (k) Неприводимые многочлены над полями вычетов
   (l) Отделение кратных множителей
   (m) Кратные корни. Число корней многочлена n-й степени
   (n) Поле разложения многочлена. Конечные поля
   (o) Симметрические многочлены. Формулы Виета. Основная теорема о симметрических многочленах
   (p) Лемма о модуле старшего члена. Основная теорема алгебры комплексных чисел.
2. Линейные операторы
   (a) Изменение матрицы при замене базиса
   (b) Собственные числа и собственные значения линейного оператора. Линейные операторы простой структуры
   (c) Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на унитарном (евклидовом) пространстве.
   (d) Сопряженный оператор. Линейность сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения. Матрица сопряженного оператора
   (e) Теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
   (f) Нормальный оператор. Теорема о строении нормального оператора.
   (g) Унитарные и ортогональные операторы.
   (h) Самосопряженные операторы.

(i) Неотрицательные самосопряженные операторы. Квадратные корни из неотрицательных самосопряженных операторов.

(j) Полярное разложение оператора на унитарном (евклидовом) пространстве

(k) Сингулярные числа и их применения. Теорема Эккарта-Янга

(l) Псевдообратный оператор. Нормальное псевдорешение несовместной системы линейных уравнений.

3. Жорданова теория

(a) Разложение Фиттинга. Корневое разложение. Теорема о корневом разложении.

(b) Теорема о минимальном многочлене. Теорема Гамильтона-Кэли

(c) Жорданов базис нильпотентного оператора

(d) Теорема Жордана

4. Квадратичные формы

(a) Метод Лагранжа

(b) Закон инерции действительных квадратичных форм

(c) Критерий Сильвестра

5. Квадрики на плоскости и в пространстве

(a) Эллипс, гипербола, парабола

(b) Упрощение уравнения 2-го порядка от двух переменных. Классификация плоских квадрик

(c) Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы, цилиндры

(d) Упрощение уравнения 2-го порядка от трех переменных. Классификация пространственных квадрик

Линейные операторы

Изменение матрицы при замене базиса

Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем F, а $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ и $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ - два базиса этого пространства. **Матрицей перехода от базиса P к базису Q** называется $n \times n$ матрицы, i-ый столбец которой (для каждого $i = 1, ..., n$) есть координатный столбец вектора q_i в базисе P.

Обозначается как $T_{P\to Q}$.

Предложение.
Пусть P и Q - два базиса пространства V. Тогда для любого $x \in V$

$$[x]_P = T_{P\to Q}[x]_Q$$

$$[x]_P = T_{P\to Q}T_{Q\to P}[x]_P$$

Предложение.
Пусть P и Q - два базиса пространства V. Матрица $T_{P\to Q}$ обратима и обратной к ней является матрицаа обратного перехода $T_{Q\to P}$.

Теорема (о замене матрицы).
Пусть V и W - конечномерные векторные пространства над полем F, P_1, P_2 - базисы пространства V, Q_1, Q_2 - базисы пространства W, а $\mathcal{A} : V \to W$ - линейный оператор. Тогда

$$A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2 \to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1 \to P_2}$$

Важный частный случай $W = V$. Тогда $Q_1 = P_1, Q_2 = P_2$.

Определение. Квадратные матрицы A и B над некоторым полем F называются подобными над F, если существует невырожденная квадратная матрица над F такая, что $B = T^{-1}AT$.

Таким образом, все матрицы одного и тогоже линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$ подобны между собой.

Собственные числа и собственные значения линейного оператора. Линейные операторы простой структуры

Пусть V - векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ - линейный оператор на V. Вектор $x \in V$ нызвается **собственным вектором** оператора $\mathcal{A}$, если $x \neq 0$ и существует скаляр $\lambda \in F$ такой, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x$$

Замечание. Характеристические многочлены подобных матриц равны.
Справка:
Квадратные матрицы A и B одинакового порядка называются подобными, если существует невырожденная матрица P того же порядка, такая что $B = P^{-1}AP$
Характеристический многочлен матрицы — многочлен, определяющий её собственные значения.

Замечания

У линейного оператора на n-мерном пространстве не более n собственных значений (так как у многочлена n степени не более n корней).

У любого линейного оператора обычного трехмерного пространства есть собственный вектор. Геометрически это отнюдь не очевидно, но сразу следует из наличия действительного корня у многочленов третьей степени.

В силу основной теоремы алгебры комплексных чисел у любого оператора на любом конечномерном пространстве над полем C есть собственные значения и собственные вектора.

Алгоритм поиска собственных значений и собственных векторов оператора $\mathcal{A}$:

1. Взять матрицу A оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе
2. Вычислить характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$
3. Найти корни характеристического многочлена $\lambda_1, ..., \lambda_k$.
4. Для каждого λ_i найти ненулевые решения системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda_i E)x = 0$

Теорема.
Собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Следствие.
Если у линеуного опретора $\mathcal{A}$ на n-мерном пространстве имеется n различных собственных значений, то в V существует базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Определение. Оператор с n различными собственными значениями нызвают **операторами простой структуры**.

В базисе из собственных векторов оператора его матрица диагональна, причем по диагонали идут собственные значения, которым принадлежат вектора базиса. Поэтому операторы, допускающие такой базис, называют приводимыми к диагональному виду или **диагонализируемыми**.

Из отмеченного выше следствия вытекает, что операторы простой структуры диагонализируемы. Обратное, разумеется, неверно: например, тождественный оператор и нулевой оператор диагонализируемы, так как у каждого из них любой ненулевой вектор собственный. Бывают ли недиагонализируемые операторы? Конечно, некоторые операторы недиагонализируемы из-за нехватки собственных значений. Например, оператор поворота плоскости на угол $\dfrac{\pi}{2}$ недиагонализируем. Но бывают и недиагонализируемые операторы, у которых есть собственные значения.

Сопряжённые операторы

Оператора $\mathcal{A}^*$ называется сопряжённым с $\mathcal{A}$, если $\forall x, y \in V$

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}^*(y))$$

Свойства:

1. $\mathcal{A}^*$ — линейный оператор
2. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3. $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$
4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$
5. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

Предложение (матрица сопряжённого оператора).
Если линейный оператор $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ имеет в ортонормированных базисах пространств V_1 и V_2 матрицу A, то сопряжённый ему оператор $\mathcal{A}^* : V_2 \to V_1$ имеет в тех же базисах матрицу A^*

Да, это верно. Ортогональная матрица - это квадратная матрица Q, для которой выполняется условие $Q^TQ = QQ^T = I$, где ^{T} обозначает транспонирование матрицы и I - единичная матрица.

Пусть $\vec{v}$ - некоторый вектор, такой что $Q\vec{v} = \vec{0}$, где $\vec{0}$ - нулевой вектор. Тогда мы можем умножить обе стороны на Q^T: $Q^TQ\vec{v} = Q^T\vec{0}$, то есть $I\vec{v} = \vec{0}$, так как $Q^TQ = I$. Следовательно, $\vec{v} = \vec{0}$, что означает, что ядро ортогональной матрицы состоит только из нулевого вектора. Таким образом, ортогональная матрица инъективна (взаимно-однозначное соответствие) и является линейным оператором на всем пространстве.

Для доказательства данного утверждения необходимо воспользоваться определением изометрического оператора и сингулярным разложением матрицы оператора.

Определение изометрического оператора. Линейный оператор A называется изометрическим, если выполняется условие $\|Ax\| = \|x\|$ для всех $x \in V$, где $\|x\|$ - норма вектора x.

Сингулярное разложение. Любую матрицу A размера $m \times n$ можно представить в виде произведения трех матриц: $A = U\Sigma V^T$, где U и V - ортогональные матрицы размера $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, а Σ - диагональная матрица размера $n \times m$, элементы главной диагонали которой являются сингулярными числами матрицы A.

Доказательство:

Пусть A - изометрический оператор и $A = U\Sigma V^T$ - его сингулярное разложение. Мы можем проверить, что все сингулярные числа матрицы A равны 1, используя определение изометрического оператора и свойства ортогональных матриц.

Для любого вектора $x \in V$ мы можем записать x в виде линейной комбинации столбцов матрицы V: $x = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$, где u_i - столбцы матрицы U, а v_i - элементы вектора $V^T x$. Тогда:

$$\|Ax\|^2 = \|U\Sigma V^T x\|^2 = \|\Sigma V^T x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 (V^T x)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (V^T x)_i^2 = \|x\|^2$$

где σ_i - i-ое сингулярное число матрицы A.

Таким образом, мы получаем, что для любого вектора $x \in V$ выполняется условие $\|Ax\|^2 = \|x\|^2$, откуда следует, что $\|Ax\| = \|x\|$ (в силу неотрицательности нормы вектора), что означает, что линейный оператор A является изометрическим.

С учетом этого мы можем заключить, что все сингулярные числа матрицы A равны единице, так как:

$\|Ax\| = \|x\|$ для любого $x \in V$. Рассмотрим сингулярное разложение $A = U\Sigma V^T$. Тогда σ_i^2 равны квадратам собственных значений $A^T A$. Так как $\|Ax\| = \|x\|$, собственные значения $A^T A$ равны 1 (или можно записать, что $\|A^T Ax\| = \|x\|$ для любого $x \in V$). Следовательно, $\sigma_i^2 = 1$ для всех i. Таким образом, доказано, что если линейный оператор является изометрическим, то все сингулярные числа его матрицы равны 1.

чтобы показать, что $\sigma_1^2 (v_1^T x)^2 \leq |x|^2/n$, мы воспользовались тем фактом, что $|Ax| = |\Sigma V^T x|$. Для этого мы заметили, что слагаемые в выражении $|\Sigma V^T x|$ (которые представляют собой произведения сингулярных чисел на координаты вектора $V^T x$) являются неотрицательными. Следовательно, наибольшим значением выражения $\sigma_1^2 (v_1^T x)^2$ может быть само значение $|\Sigma V^T x|^2$, которое является равным $|x|^2$.