Исследование функций с помощью старших производных. Выпуклость функции. Асимптоты.

Теорема. Пусть $\exists f^{(n)}(x_0) \neq 0, n \geq 2$ и $\forall i \in (1, ..., n-1) f^{(n)} = 0$.
Тогда

1. Если n чётное:
   (a) если $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ - точка локального минимума
   (b) если $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ - точка локального максимума
2. Иначе экстремума нет, но:
   (a) Если $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ строго возрастает
   (b) Если $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ строго убывает

Доказательство.
Посмотрим на формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \tag{1}$$

Поскольку по условию $\forall i \in (1, ..., n-1) f^{(n)} = 0$, то $\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$
Перенесём $f(x_0)$ влево и посмотрим на знак $f(x)-f(x_0)$: $f(x)-f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), x \to x_0$

1. n чётное:

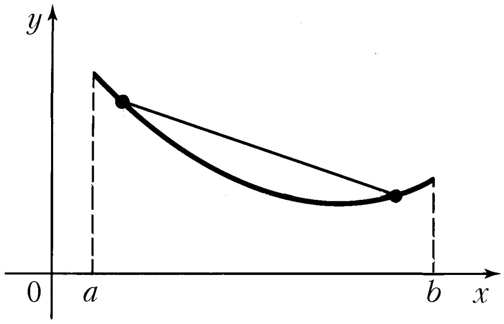
   $(x-x_0)^n > 0, n! > 0 \Rightarrow$ знак выражения $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ определяет $f^{(n)}(x_0)$, при этом $o((x-x_0)^n)$ не влияет на знак, потому что это бесконечно малая величина.

   Поэтому если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ - локальный минимум.

   Аналогично если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то $f(x) - f(x_0) < 0$ - локальный максимум.

2. n нечётное:
   У $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ величина $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0$.
   Если $x < x_0$, то $(x-x_0)^n < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0$. Если $x > x_0$, то $(x-x_0)^n > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$. Следовательно если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то f возрастает в x_0, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то f убывает в x_0 $\blacksquare$

Выпуклость функции на промежутке



Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$.Возьмём две точки $x_1, x_2 \in [a,b], x_1, x_2$ и обозначим за $l(x)$ хорду, соединяющую $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Тогда f **выпуклая** на $[a,b]$ если $\forall x_1, x_2 : a \leq x_1 < x_2 \leq b : \forall x \in (x_1, x_2) : f(x) \leq l(x)$

Теорема. f выпукла на $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ надграфик $(\{(x,y) : x \in [a,b]$ и $y \geq f(x)\})$ - выпуклое множество.

Доказательство.
Доказательство самостоятельно.

Давайте выведем уравнение прямой $l(x)$.

$l(x)$ имеет коэффициент, равный отношению $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, а в точке x_1 имеет значение, равное $f(x_1)$. Тогда $l(x) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}x + f(x_1)$

Пусть f дважды дифференцируема на $[a,b]$. Тогда $f''(x) \geq 0, x \in [a,b] \Rightarrow f$ выпукла.

Хотим, чтобы $f(x) - l(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

$$f(x) - \frac{f(x)(x-x_2)+f(x_2)(x_1-x)}{x_1-x_2} = \frac{f(x)(x_1-x_2)-f(x_1)(x-x_2)-f(x_2)(x_1-x)}{x_1-x_2} =$$

$$= \frac{f(x)((x_1-x)+(x-x_2))-f(x_1)(x-x_2)-f(x_2)(x_1-x)}{x_1-x_2} =$$

$$= \frac{(f(x)-f(x_1))(x-x_2)+(f(x)-f(x_2))(x_1-x)}{x_1-x_2} =$$

$$= \{\text{Используем теорему Лагранжа}\} = \frac{(x-x_2)f'(\xi)(x-x_1)-(x-x_1)f'(\eta)(x-x_2)}{x_1-x_2}$$

(здесь $\xi \in [x_1, x], \eta \in [x, x_2]$, то есть $\xi < \eta$) $= \dfrac{(x-x_2)(x-x_1)f''(\tau)}{x_1-x_2}, \tau \in [\xi, \eta]$

Теперь посмотрим на выражение $\dfrac{(x-x_2)(x-x_1)f''(\tau)}{x_1-x_2}$

$(x-x_1) > 0, (x-x_2) < 0, x_1 - x_2 < 0, f''(\tau) \leq 0, \xi - \eta < 0 \Rightarrow$ всё выражение ≤ 0.

Теорема (без доказательства).
Выпуклая функция непрерывна на (a,b).
Во всех точках (a,b) есть f'_-, f'_+.

Определение. Точка x_0 - точка перегиба у f, если в левой и правой окрестностях x_0 функция имеет разный характер выпуклости.

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема (f'' непрерывна) на $[a,b]$. Тогда если $x_0 \in (a,b)$ - точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. От противного.
Если $f''(x_0) > 0$ и f'' непрерывна, то в $O(x_0)$ сохраняется знка, то есть $f(x) > 0 \quad \forall x \in O(x_0) \Rightarrow f$ выпуклая вниз в $O(x_0)$, что противоречит тому, что x_0 - точка перегиба.
Аналогично доказываем от противного когда $f''(x_0) < 0$. ■

Асимптота

Определение. Говорят, что $y(x) = kx + b$ **асимптота** для $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0$

Говорят, что $y(x) = kx + b$ **асимптота** для $f(x)$ при $x \to a$, если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

How to найти асимптоту?

Получим необходимое условие на k.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k\right) = \dfrac{b}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k\right) = \dfrac{b}{\infty} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = k$. Найдём k. Затем найдём b из $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$.