

# HOW TO заботать коллоквиум по матанализу (2 семестр)

## Список билетов

1. ~~Понятие определённого интеграла~~
2. ~~Интегрируемость суммы функций~~
3. ~~Ограниченность интегрируемой функции~~
4. ~~Пример ограниченной неинтегрируемой функции~~
5. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости
6. ~~Аддитивность интеграла по множеству~~
7. ~~Интегрируемость непрерывной функции~~
8. ~~Интегрируемость монотонной функции~~
9. ~~Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек~~
10. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций - **много недочётов!**
11. ~~Интегрируемость произведения функций~~
12. ~~Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость~~
13. ~~Формула Ньютона-Лейбница~~
14. ~~Пример неинтегрируемой функции с первообразной~~
15. ~~Пример интегрируемой функции без первообразной~~
16. ~~Интегрирование по частям~~
17. ~~Замена переменной~~
18. ~~Первая теорема о среднем~~
19. Вычисление площадей - **что здесь писать, друзья?**
20. ~~Вычисление длины дуги~~
21. ~~Приближённое вычисление интеграла: методы прямоугольников, трапеций, Симпсона~~

## Несколько задач для подготовки с решением

## Понятие определённого интеграла

*Разбиение* отрезка  $[a, b]$  -  $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ ,  $x_i < x_{i+1}$

*Мелкость* разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \max(x_k - x_{k-1})$$

*Интегральная сумма*:  $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = S_\tau$

**Определение**  $f$ , определённая на  $[a, b]$ , интегрируема по Риману на  $[a, b]$ , если

$$\exists I \in \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_t < \delta \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon)$$

Обозначаем  $I = \int_a^b f(x) dx$

## Интегрируемость суммы функций

**Теорема.** Пусть  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\alpha f + \beta g$  интегрируема на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) &= \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi) \end{aligned}$$

$$\left| S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) - \left( \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \right) \right| \leq |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right|$$

В определении интегрируемости  $f$  и  $g$  берём не  $\varepsilon$ , а  $\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| &\leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{и} \quad \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

## Ограниченность интегрируемой функции

**Теорема.** Если  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то она ограничена на  $[a, b]$ .

### Доказательство.

Проведём от противного: пусть  $f$  не ограничена, но интегрируема.

Тогда  $I - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < I + \varepsilon$  для какого-то разбиения  $\tau$  при заданном  $\varepsilon > 0$  и любом выборе  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .

Так как  $f$  не ограничена, то найдётся такой отрезок  $[x_{k-1}, x_k]$ , на котором  $f$  не ограничена  $\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$  можно сделать сколь угодно большим по модулю. Противоречие.

### Пример ограниченной неинтегрируемой функции

Например, функция Дирихле  $D(x)$ :

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\forall x \in [a, b] \quad D(x)$  не интегрируема на  $[a, b]$ , так как

1.  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 0 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = 0$
2.  $\{\xi_k\} \subset \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 1 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = \sum \Delta x_k = b - a$

### Аддитивность интеграла по множеству

Пусть  $c \in (a, b)$  и функция  $f(x)$  определена и интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда интеграл функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  равен сумме интегралов функции  $f(x)$  на отрезках  $[a, c]$  и  $[c, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

### Доказательство:

Поскольку  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , для любого  $\varepsilon > 0$  существует разбиение  $\tau = \{a, x_1, \dots, x_{n-1}, b\}$  отрезка  $[a, b]$  такое, что верхняя сумма Дарбу  $\overline{S}_\tau$  и нижняя сумма Дарбу  $\underline{S}_\tau$  удовлетворяют условию:

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon$$

Выберем такое разбиение, которое включает точку  $c$ . Теперь разбиваем  $\tau$  на два подмножества  $\tau'$  и  $\tau''$ , соответствующие отрезкам  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , так что  $\tau = \{x_i \in \tau \mid x_i \leq c\}$  и  $\tau'' = \{x_i \in \tau \mid x_i \geq c\}$ .

Тогда верхние и нижние суммы Дарбу для  $f(x)$  на отрезках  $[a, c]$  и  $[c, b]$  будут равны  $\overline{S}_{\tau'}$  и  $\underline{S}_{\tau'}$ , а также  $\overline{S}_{\tau''}$  и  $\underline{S}_{\tau''}$  соответственно.

Поскольку разбиение  $\tau$  является объединением  $\tau'$  и  $\tau''$ , имеем:

$$\overline{S}_\tau = \overline{S}_{\tau'} + \overline{S}_{\tau''}$$

$$\underline{S}_\tau = \underline{S}_{\tau'} + \underline{S}_{\tau''}$$

Из этого следует, что:

$$(\overline{S}_{\tau'} + \overline{S}_{\tau''} - (\underline{S}_{\tau'} + \underline{S}_{\tau''})) < \varepsilon$$

$$(\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}}) < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}} < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}} < \varepsilon$$

Докажем уже наконец-то, что  $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$$\left| \int_a^b - \left( \int_a^c + \int_c^b \right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - \left( \int_a^c + \int_c^b \right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - \left( \int_a^c + \int_c^b \right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| \leq \left| \int_a^b - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| + \left| \int_a^c - S_{\tau'} \right| + \left| \int_c^b - S_{\tau''} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_a^c - S_{\tau'} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_c^b - S_{\tau''} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

## Интегрируемость непрерывной функции

**Теорема.**

Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , тогда  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ .

**Доказательство.**

$f$  непрерывна на  $[a, b]$ , значит она равномерно непрерывна на  $[a, b]$  (теорема Кантора):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Теперь поймём, что

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta'(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta' \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon')$$

Рассмотрим разбиение  $\tau$ , у которого  $\lambda_\tau < \delta$  ( $\delta$  берём из определения равномерной непрерывности).

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

$$\forall \xi'_j, \xi''_j \in [x_j, x_{j+1}] \quad |\xi'_j - \xi''_j| < \delta, \quad \text{так как} \quad \lambda_\tau < \delta$$

И по равномерной непрерывности получаем

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon$$

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

Докажем это утверждение (*sup - inf*):

1.  $\Leftarrow$ :

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(\xi'_j) \leq M_j \\ f(\xi''_j) \geq m_j \end{cases} \Rightarrow f(\xi'_j) - f(\xi''_j) \leq M_j - m_j < \varepsilon$$

2.  $\Rightarrow$ :

Знаем  $|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon$ .

Возьмём *sup* по  $\xi'_j$ :

$$\sup_{\xi'_j} (f(\xi'_j) - f(\xi''_j)) = M_j - f(\xi''_j) \leq \varepsilon$$

А затем возьмём *inf* по  $\xi''_j$  и получим:

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

Мы доказали

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$$

## Интегрируемость монотонной функции

### Теорема.

Пусть  $f$  монотонна на  $[a, b]$ . Тогда  $f$  интегрируема  $[a, b]$ .

### Доказательство.

Б.о.о. скажем, что  $f$  монотонно возрастает.

Определение интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta \Rightarrow \overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon)$$

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k \leq \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a)$$

Ну и чтобы  $\delta(f(b) - f(a))$  было меньше  $\varepsilon$ , возьмём  $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ .

## Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек

### Теорема.

Пусть  $f$  интегрируема  $[a, b]$ . Тогда если поменяем  $f$  в конечном числе точек, то площадь останется неизменной.

### Доказательство.

Пусть  $\check{f}$  это  $f$ , у которой поменяли  $f(x_0)$  на  $c$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ f(x_0) - c, & x = x_0 \end{cases}$$

$$\int_a^b g(x) dx = 0$$

$$\forall \tau |s_\tau| \leq |c - f(x_0)| \cdot \lambda_\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f = \int_a^b (\check{f} + g) = \int_a^b \check{f} + 0 = \int_a^b \check{f}$$

## Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций

### Теорема.

Пусть  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  и принимает значения в  $[c, d]$ . Пусть  $\Phi$  непрерывна на  $[c, d]$ . Тогда  $\Phi(f(x))$  интегрируема на  $[a, b]$ .

### Доказательство.

$\Phi$  равномерно непрерывна на  $[c, d]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [c, d] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Хотим  $\overline{S_\tau(\Phi(f))} - \underline{S_\tau(\Phi(f))} < \varepsilon$ .

$f$  интегрируема  $\Rightarrow$  если  $\lambda_\tau < \delta$ , то

$$\overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

Это мы так взяли  $\varepsilon = \delta^2$ .

$$\text{Хотим оценить } \overline{S_\tau(\Phi(f))} - \underline{S_\tau(\Phi(f))} = \sum_{k=1}^n (M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)))$$

Имеем здесь 2 семейства индексов:

$$1. \ I = \{k : M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$$

$$2. \ J = \{k : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta\}$$

$$1. \ k \in I:$$

По лемме (*sup - inf*)

$$f(\xi'_k) - f(\xi''_k) < \delta \Rightarrow |\Phi(f(\xi'_k)) - \Phi(f(\xi''_k))| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по этой же лемме} \quad M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) < \varepsilon$$

$$\sum_{k \in I} (M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f))) \Delta x_k < \varepsilon(b - a)$$

$$2. \ k \in J:$$

$$\overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

$$\sum_{k \in J} (M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f))) \Delta x_k < \varepsilon(b - a)$$

$$k \in J \Rightarrow M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) < \delta$$

$$\delta \sum_{k \in J} \Delta x_k \leq \overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

$$\sum_{k \in J} \Delta x_k \leq \delta$$

$\Phi$  непрерывна на  $[c, d] \Rightarrow$  ограничена числом  $L$ .

$$\sum_{k \in J} M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) \Delta x_k \leq 2L \sum_{k \in J} \Delta x_k \leq 2L\varepsilon$$

## Интегрируемость произведения функций

**Теорема.** Пусть  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $[a, b]$ . Тогда  $f \cdot g$  тоже интегрируема на  $[a, b]$ .

**Доказательство.**

$$(f - g)^2 = f^2 - 2fg + g^2$$

$(f - g)^2$  интегрируема, так как  $f - g$  интегрируема и  $(\dots)^2$  интегрируемо.

$$fg = \frac{f^2 + g^2 - (f - g)^2}{2}$$

Правая часть равенства интегрируема, значит левая тоже.

## Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость

**Определение.** Пусть  $f$  интегрируема на  $[a, b] \Rightarrow \forall x \in (a, b) \quad \exists \int_a^x f(t)dt$ .

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  - интеграл с переменным верхним пределом (договоримся, что  $\int_a^a = 0$ ).

**Теорема.**

Пусть  $f$  ограничена на  $[a, b]$ . Тогда  $\Phi$  непрерывна и  
 $\exists C : |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in (a, b)$  (липшицевость).

**Доказательство.** Из липшицевости следует непрерывность по определению непрерывности ( $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ ) (типа множество липшицевостных функций является подмножеством непрерывных функций)

Предположим  $x < y$ :

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(y)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \left[ \begin{array}{l} \left| \sum f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum |f(\xi_k)| \Delta x_k \\ \left| \sum f(\xi_k) \Delta x_k \right| \rightarrow \left| \int f \right| \\ \sum |f(\xi_k)| \Delta x_k \rightarrow \int |f| \end{array} \right] \leq \\ &\leq [ |f| \leq B ] \leq B \cdot \left| \int_x^y dt \right| \leq B(y - x) \end{aligned}$$

**Теорема.**

Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда  $\forall x_0 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$ .



### Доказательство.

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \\ \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) = \\ &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt}{h} + f(x_0) \\ \left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt}{h} \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt\end{aligned}$$

О, а ведь  $f$  непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Тут мы берём любой  $\varepsilon$ , по нему находим  $\delta$  и берём  $h < \delta$ . Тогда  $|x_0 - t| < h$ .

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

## Формула Ньютона-Лейбница

### Теорема.

Пусть  $f$  интегрируема на  $[a, b]$  и имеет на  $[a, b]$  первообразную  $F$ . Тогда  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

### Доказательство.

Рассмотрим равномерное разбиение  $[a, b]$  (на  $n$  равных частей). Тогда  $\frac{b-a}{n}$  - длина отрезка разбиения.

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \left[ \begin{array}{l} \text{теорема Лагранжа} \\ \exists \xi_k \in [x_k, x_{k-1}] : \\ F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ = f(\xi_k) \Delta x_k \end{array} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (F(b) - F(a)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

## Пример неинтегрируемой функции с первообразной

$$F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), x \in (0, 1]$$

$$f = F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$f$  неинтегрируема на  $(0, 1]$ , потому что не ограничена на этом множестве.

### Пример интегрируемой функции без первообразной

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & x > 0 \\ -x + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Добьёмся того, чтобы в нуле первообразная была непрерывна. Тогда  $C_1 = C_2 = C$ . Тогда первообразная представляет собой функцию  $|x| + c$ , которая, конечно, не дифференцируема в нуле.

### Интегрирование по частям

#### Теорема.

Пусть  $u$  и  $v$  непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

$$uv|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

#### Доказательство.

По условиям теоремы, оба интеграла существуют как интегралы от кусочно непрерывных функций.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

За исключением конечного числа точек, так как кусочная дифференцируемость.

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$$

### Замена переменной

#### Теорема.

Пусть  $f$  непрерывна на  $[x_1, x_2]$ , а  $g$  непрерывно дифференцируема на  $[t_1, t_2]$  и  $g(t_1) = x_1, g(t_2) = x_2$  и  $g(t) \in [x_1, x_2], t \in [t_1, t_2]$ . Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) d'(t) dt$$

**Доказательство.**

$f$  непрерывна. А если  $f$  непрерывна, то существует первообразная  $F$ .

По теореме (?)  $\Phi = \int_{x_1}^x f(t)dt$  - дифференцируема и  $\Phi'(x) = f(x)$ . Тогда  $\Phi(x)$  - перво-

образная  $\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$ .

Рассмотрим  $F(g(t)), t \in [t_1, t_2]$ .

$$F'(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$F(g(t))$  - первообразная для  $f(g(t))g'(t) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t)dt = F(g(t_2)) - F(g(t_1)) =$

$F(x_2) - F(x_1)$

Итого  $F(x_2) - F(x_1) = F(x_2) - F(x_1)$ . Доказано.

**Теорема.** Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда  $\forall x_0 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$

**Доказательство.**

$$\Phi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h}$$

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t) - f(x_0))dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t) - f(x_0))dt}{h} \right| \leq$$

$$\leq \left[ \begin{array}{l} \text{О, а ведь } f \text{ непрерывна : } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \quad 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \text{Берём любой } \varepsilon \text{ и по нему находим } \delta \text{ и берём } h < \delta \end{array} \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

## Первая теорема о среднем

### Теорема.

Пусть  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ ,  $\Phi$  - весовая функция ( $\geq 0$  и интегрируемая)

и  $m \leq f \leq M$  на  $[a, b]$ . Тогда существует  $\mu \in [m, M]$  : 
$$\mu \int_a^b \Phi = \int_a^b \Phi f$$

### Замечание.

В частности, если  $f$  непрерывная, то она достигает  $\min = m$  и  $\max = M$  на  $[a, b]$  и по теореме Коши о промежуточных значениях

$$\forall \mu \in [m, M] \quad \exists x_0 \in [a, b] : \quad \mu = f(x_0)$$

### Замечание.

Важно, чтобы  $\Phi$  была знакопостоянной. Контрпример -  $f = x$ ,  $\Phi = \operatorname{sgn} x$  на  $[-1, 1]$ .

$$\int_{-1}^1 x \operatorname{sgn} x dx = 1$$

$$\mu \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0 \quad \forall \mu$$

### Доказательство.

Рассмотрим 2 случая:

$$1. \int_a^b \Phi = 0 \Rightarrow m \int_a^b \Phi \leq \int_a^b f \Phi \leq M \int_a^b \Phi$$

$$\begin{cases} m \int_a^b \Phi = 0 \\ M \int_a^b \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f \Phi = 0$$

$$2. \int_a^b \Phi \neq 0$$

Поделим неравенство из предыдущего пункта на  $\int_a^b \Phi$ :

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f \Phi}{\int_a^b \Phi} \leq M$$

## Вторая теорема о среднем

Пусть на  $[a, b]$  функция  $f$  монотонна (б.о.о. убывает) и  $\Phi$  интегрируема на  $[a, b]$ . Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] : \quad \int_a^b \Phi f = f(a) \int_a^\xi \Phi(x) dx + f(b) \int_\xi^b \Phi(x) dx$$

Эта теорема без доказательства (а почему не знаю)

## Вычисление площадей

.

Я не знаю, что здесь писать, друзья. Жду Issue, если хотите:0

## Вычисление длины дуги

**Определение.** *Кривой* называется непрерывное отображение отрезка на плоскость.

**Определение.** Кривая  $L$  называется *спрямляемой*, если множество длин вписанных в неё ломаных  $l$  ограничено сверху.

Пусть  $l$  - это какая-то ломаная.

$$|l| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k$$

$$|L| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

### Теорема.

Пусть  $x(t)$  и  $y(t)$  непрерывно дифференцируема на  $[\alpha, \beta]$ . Тогда кривая  $L = (x(t), y(t))$  спрямляемая и её длина равна  $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .

**Доказательство.**

$$|l| = [\text{теорема Лагранжа}] = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k$$

$$\begin{aligned} ||l| - \sigma| &= \left| \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \right) \Delta t_k \right| \leq \\ &\leq [\text{не понял почему так}] \leq \sum_{k=1}^n |x'(\xi_k) - y'(\eta_k)| \Delta t_k \end{aligned}$$

$y'$  непрерывна по условию  $\Rightarrow$  ограничена. Тогда

$$\sum_{k=1}^n |x'(\xi_k) - y'(\eta_k)| \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta t_k \leq \overline{S(y', \tau)} - \underline{S(y', \tau)}$$

$y'$  интегрируема, так как непрерывна  $\Rightarrow \overline{S(y', \tau)} - \underline{S(y', \tau)} < \varepsilon$ .

Мы выяснили, что при достаточно маленьких разбиениях  $||l| - \sigma| < \varepsilon$ .

$|l| \leq B \sum_{k=1}^n \Delta t_k = B(\beta - \alpha) \Rightarrow L$  - спрямляемая.

$$\begin{cases} |l| \approx \sigma \\ |l| \approx |L| (\text{определение супремума}) \end{cases} \Rightarrow \sigma \approx |L|$$

$$\begin{aligned} \left| |L| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| &\leq ||L| - |l|| + \left| |l| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \leq \\ &\leq ||L| - |l|| + ||l| - \sigma| + \left| \sigma - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \end{aligned}$$

Почему это меньше  $3\varepsilon$ ?

1.

$$\forall \varepsilon \exists l_{\varepsilon} : |L| - |l_{\varepsilon}| < \varepsilon$$

Если ломаная меньше, чем  $l_{\varepsilon}$ , то она точно не короче, чем  $l_{\varepsilon}$ . Давайте мы будем рассматривать только такие ломаные.

Тогда  $|L| - |l| < \varepsilon$ .

2.  $||l| - \sigma| < \varepsilon$  при мелких  $\tau$  (это мы выяснили в начале)

3.  $\left| \sigma - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| < \varepsilon$  - по определению интеграла.

Итого, имеем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \left| |L| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \leq 3\varepsilon \Rightarrow |L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

## Численное интегрирование

# Лекция 10.04.2023

## Численное интегрирование

Пусть точки  $x_1, \dots, x_n$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ , и известны значения  $f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Существует **единственный** многочлен  $p$  степени не выше  $n - 1$  со свойством

$$p(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Такой многочлен называется **интерполяционным**.

Две формы записи  $p$ :

- Форма Лагранжа (проходят в курсе алгебры)

$$\sum_{j=1}^n f(x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

- Форма Ньютона

$$f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \dots + f(x_1, \dots, x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

где  $f(x_1, x_2)$  — разделённая разность 1 порядка, ...,  $f(x_1, \dots, x_n)$  — разделённая разность  $n - 1$  порядка. Разделённые разности определяются по индукции:

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_2, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_1}.$$

Формы записи Лагранжа и Ньютона разные, но на самом деле это один и тот же многочлен. Форма Ньютона нам пригодится.

**Идея:**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx$$

## Методы прямоугольников

Заменяем  $f$  на интерполяционный многочлен нулевой степени (константа).

1. Левые прямоугольники. Заменяем  $f$  на  $f(a)$ .



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a)$$

2. Средние прямоугольники. Заменяем  $f$  на  $f((a+b)/2)$  — значение в середине отрезка.

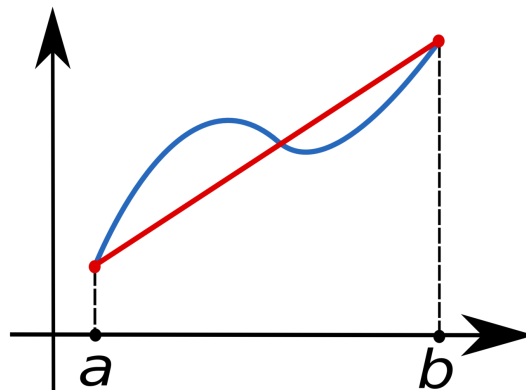
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f((a+b)/2)dx = f((a+b)/2)(b-a)$$

3. Правые прямоугольники. Заменяем  $f$  на  $f(b)$ .

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = f(b)(b-a)$$

## Метод трапеций

Заменяем  $f$  на интерполяционный многочлен первой степени. В качестве узлов интерполяции возьмём концы отрезка  $a$  и  $b$ . Получается хорда.

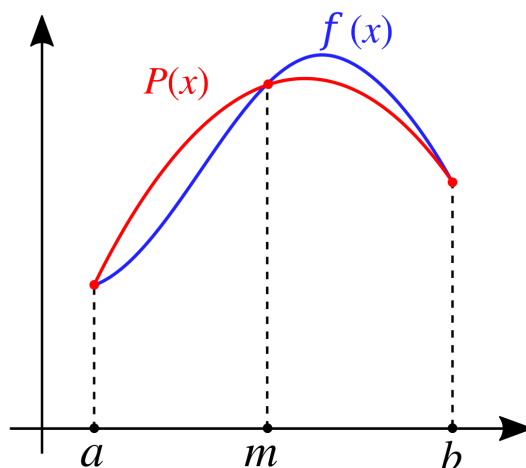


По формуле площади трапеции,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)$$

## Метод Симпсона

Заменяем  $f$  на интерполяционный многочлен второй степени. В качестве узлов возьмём  $a$ ,  $\frac{a+b}{2}$ ,  $b$  — три равноотстоящие точки.



Интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$f(a) + f(a, (a+b)/2)(x-a) + f(a, (a+b)/2, b)(x-a)(x-(a+b)/2) =: \heartsuit$$

Здесь

$$f(a, (a+b)/2) = \frac{f((a+b)/2) - f(a)}{(b-a)/2},$$

$$f(a, (a+b)/2, b) = \frac{\frac{f(b) - f((a+b)/2)}{(b-a)/2} - \frac{f((a+b)/2) - f(a)}{(b-a)/2}}{b-a}.$$

Эти разделённые разности — это суммы  $f(a)$ ,  $f((a+b)/2)$ ,  $f(b)$  с какими-то коэффициентами (линейные комбинации). Значит, если подставить их в  $\heartsuit$ , получится сумма, в которой складываются  $f(a)$ ,  $f((a+b)/2)$ ,  $f(b)$ , умноженные на скобочки от  $x$ . Назовём эти скобочки  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$ . То есть

$$\heartsuit = A(x)f(a) + B(x)f((a+b)/2) + C(x)f(b),$$

причём  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  не зависят от функции  $f$ .

Поэтому для любой  $f$

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a) \int_a^b A(x)dx + f((a+b)/2) \int_a^b B(x)dx + f(b) \int_a^b C(x)dx$$

Интегралы от  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  — это просто числа. Назовём их  $M$ ,  $N$ ,  $K$ .

$$\int_a^b f(x)dx \approx M \cdot f(a) + N \cdot f((a+b)/2) + K \cdot f(b) \quad *$$

Это и есть метод Симпсона, осталось найти коэффициенты  $M$ ,  $N$ ,  $K$ .

Возьмём  $f \equiv 1$ ,  $f(x) = x - a$ ,  $f(x) = (x - a)^2$ . Теперь заметим, что

- Интерполяционный многочлен в трёх узлах — это многочлен не выше второй степени
- Интерполяционный многочлен **единственен**

Значит, для таких  $f$ , как выше (это многочлены не выше второй степени), интерполяционный многочлен — это и есть  $f$ . Итак, если  $f$  — многочлен не выше второй степени, то

$$p(x) \equiv f(x).$$

Значит, для таких  $f$  имеем равенство в  $*$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx = M \cdot f(a) + N \cdot f((a+b)/2) + K \cdot f(b).$$

Подставляя сюда  $f \equiv 1$ ,  $f(x) = x - a$ ,  $f(x) = (x - a)^2$ , получим систему для  $M$ ,  $N$ ,  $K$ .

$$\begin{cases} \int_a^b dx = M + N + K, \\ \int_a^b (x - a)dx = M \cdot 0 + N \cdot (b - a)/2 + K \cdot (b - a), \\ \int_a^b (x - a)^2 dx = M \cdot 0 + N \cdot (b - a)^2/4 + K \cdot (b - a)^2. \end{cases}$$

Считаем интегралы и сокращаем степени  $b - a$ , получаем

$$\begin{cases} b - a = M + N + K, \\ (b - a)/2 = N/2 + K, \\ (b - a)/3 = N/4 + K. \end{cases}$$

Решение системы

$$M = \frac{b - a}{6}, \quad N = \frac{4}{6}(b - a), \quad K = \frac{1}{6}(b - a).$$

Получили **формулу Симпсона**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4 \cdot f((a+b)/2) + f(b)).$$

Сделайте сами эти выкладки, проверьте.

### Формула “3/8”

Аналогично строится метод, когда в качестве узлов интерполяции берутся четыре равноотстоящие точки:  $a$ ,  $\frac{2a+b}{3}$ ,  $\frac{a+2b}{3}$ ,  $b$ . Не буду приводить выкладки, они аналогичны методу Симпсона.

Получается такая формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8} \left( f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right).$$

Название 3/8 — потому что этот коэффициент дважды встречается в формуле (если раскрыть скобки).

## Составные формулы численного интегрирования

Для более точных вычислений эти методы применяют не на всём  $[a, b]$  сразу, а на его равномерном разбиении. Пусть всего  $m$  точек разбиения  $\{x_j\}_{j=1}^m$  и  $h := \frac{b-a}{m-1}$  — это длина каждого отрезка разбиения (шаг):

$$\begin{aligned} a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b, \\ x_{j+1} - x_j = h, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Применяя к каждому из отрезков разбиения полученные методы и складывая результаты, получаем так называемые составные формулы.

### 1. Левые прямоугольники

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j).$$

### 2. Средние прямоугольники

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j + h/2).$$

### 3. Правые прямоугольники

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{j+1}).$$

### 4. Трапеции

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} = \\ h \cdot &\frac{[f(a) + f(x_2)] + [f(x_2) + f(x_3)] + [f(x_3) + f(x_4)] + \dots + [f(x_{m-1}) + f(b)]}{2} = \\ &h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=2}^{m-1} f(x_j) \right). \end{aligned}$$

Промежуточные слагаемые повторяются дважды. Так преобразовали, чтобы меньше раз вычислять значения  $f$ .

### 5. Симпсон

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{m-1} (f(x_j) + 4f(x_j + h/2) + f(x_{j+1})).$$

### 6. "3/8"

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \\ &\frac{h}{8} \sum_{j=1}^{m-1} (f(x_j) + 3f(x_j + h/3) + 3f(x_j + 2h/3) + f(x_{j+1})). \end{aligned}$$

## Метод Рунге оценки погрешности

Обозначим  $I = \int_a^b f(x)dx$ .

Пусть  $S_h$  — результат численного интегрирования по составной формуле с шагом  $h$ ,

$R_h = I - S_h$  — погрешность вычислений.

Предположим, что  $R_h \sim C \cdot h^p$  при  $h \rightarrow 0$ , где  $p > 0$  — некоторое число.

Известно, что

- левые и правые прямоугольники  $\Rightarrow p = 1$ ,
- средние прямоугольники и трапеции  $\Rightarrow p = 2$ ,
- 3/8 и Симпсон  $\Rightarrow p = 4$ .

Имеем

$$\begin{cases} I = S_h + R_h, \\ I = S_{h/2} + R_{h/2}. \end{cases}$$

Значит,

$$S_{h/2} - S_h + R_{h/2} - R_h = 0. \quad *$$

При маленьких  $h$  имеем  $R_h \approx C \cdot h^p$ ,  $R_{h/2} \approx C \cdot (h/2)^p$ . Следовательно,

$$R_h \approx 2^p R_{h/2}, \quad R_{h/2} \approx \frac{1}{2^p} R_h.$$

Подставляя это в  $*$ , получаем

$$R_{h/2} \approx \frac{S_{h/2} - S_h}{2^p - 1}, \quad R_h = \frac{2^p}{2^p - 1} (S_{h/2} - S_h).$$

Это формулы Рунге оценки погрешности.

## Несколько задач

**0.1**  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  и  $\int_a^b f = 0$ ,  $f$  знакопостоянна на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

**Доказательство.** От противного. Пусть  $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$  (б.о.о  $f(c) > 0$ , для  $f(c) < 0$  аналогично).

Так как  $f$  непрерывна, то найдётся окрестность  $O_\varepsilon(c)$  такая, что  $\forall x \in O_\varepsilon(c) \quad f(x) > 0$ . Получается, на отрезке  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$   $f$  положительна.

Учитывая, что  $f$  знакопостоянна, то есть в нашем случае положительна на  $[a, b]$ , то мы не можем «компенсировать» ту положительную часть под графиком на отрезке  $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , так как на  $[a, b]$  функция неотрицательна. Тогда  $\int_a^b f(x)dx > 0$ . Противоречие с условием задачи доказывает требуемое.

**0.2** Пусть  $|f(x)| \leq M \quad \forall x > 0, \quad \forall x > 0 \quad \exists \int_0^x f(t)dt$ . Доказать, что  $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$  равномерно непрерывна на  $[0, +\infty)$ .

**Доказательство.** Запишем определение равномерной непрерывности для  $\Phi$ , которое мы хотим доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x' > x'' \geq 0 \quad x' - x'' < \delta \Rightarrow |\Phi(x') - \Phi(x'')| < \varepsilon$$

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| = \left| \int_0^{x'} f(t)dt - \int_0^{x''} f(t)dt \right| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t)dt \right| \leq M(x' - x'') < M\delta$$

Сейчас мы хотим сделать  $M\delta < \varepsilon$ . Поэтому сделаем  $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$

**0.3** Пусть  $f$  интегрируема на  $[0, 1]$  и  $\int_0^1 f(x)dx < 0$ . Доказать, что  $\exists[\alpha, \beta] \quad f \leq 0$  на  $[\alpha, \beta]$ .

**Доказательство.** От противного.

$$\forall[\alpha, \beta] \subset [0, 1] \quad \exists c \in [\alpha, \beta] \quad f(c) > 0$$

По условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < 0$$

Зафиксируем  $n$ . Разобьём наш отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  отрезочков, для каждого из которых найдём  $\xi_i$  такое, что  $f(\xi_i) > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > 0$ . Противоречие. Значит существует такой отрезок, на котором  $f$  неположительна.

Докажите, что если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[-1, 1]$  и для каждой непрерывной на  $[-1, 1]$  чётной функции  $g(x)$  и  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ , то функция  $f(x)$  нечётна.

**Доказательство.** Наша  $f$  представляется как

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Причём  $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$  чётная,  $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$  - нечётная.

Возьмём  $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) + f(-x)}{2}g(x)dx + \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(-x)}{2}g(x)dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{f(x) + f(-x)}{2}g(x)dx + \int_{-1}^1 g(x) \cdot g(x)dx = 0 \end{aligned}$$

$\frac{f(x) + f(-x)}{2}g(x)$  - нечётная,  $g(x) \cdot g(x)$  - чётная.

Очевидно  $\int_{-1}^1 \frac{f(x) + f(-x)}{2}g(x)dx = 0$ , тогда  $\int_{-1}^1 g(x) \cdot g(x)dx = 0$ , тогда  $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = 0$ , то есть чётная часть функции равна нулю. Другими словами,  $f$  нечётная.