Ботаем экзамен по матанализу

Билет 1. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне, их равносильность

- По Коши:

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon \tag{1}$$

- По Гейне:

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq D(f) \backslash \{x_0\} : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a \tag{2}$$

Теорема. Коши $\Leftrightarrow$ Гейне

Доказательство.
Пусть a - предел по Гейне, то есть $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq D(f) \backslash \{x_0\} : x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a$.
Хотим $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$.
От противного: пусть $\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - a| \geq \epsilon$.
Возьмём $\delta = \dfrac{1}{2}, \delta = \dfrac{1}{2}, ..., \delta = \dfrac{1}{n}, ...$
$|x - x_0| < \dfrac{1}{n}$ и $|f(x) - a| \geq$, то есть $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x_0) \Rightarrow x_n \to x_0$, но $f(x_n) \nrightarrow a$