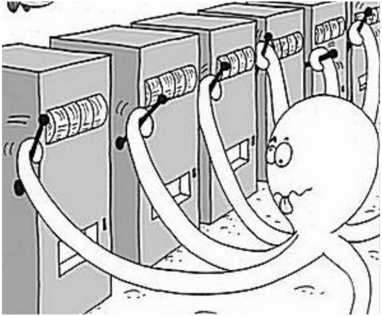
Задача о многоруком бандите

Васильев Павел, Стахеев Константин

14 мая 2024 г.

Есть n игровых автоматов. Дёргая ручку $i = 1, ..., n$ мы каждый раз с вероятностью p_i получаем 1 рубль, а с вероятностью $1 - p_i$ не получаем ничего. Разрешается сделать $N >> 1$ шагов, на каждом шаге можно дёргать только одну ручку. Сами p_i априорно не известны. Но мы знаем, что $p_i \sim U[0, 1]$. Нужно найти стратегию выбора ручек такую, чтобы максимизировать доход.



Первая идея - давайте изучим все ручки, а затем жадно будем выбирать ту, которая в среднем даёт лучшую награду, и будем всегда её выбирать

Проблема: как понимать, сколько раз мы будем изучать эти действия до того, как начнем пользоваться.

Слово про управляемые марковские процессы

S - конечноче множество состояний.
В момент времени $t = 0, 1, ...$ система претерпевает изменения, и на каждом шаге мы вольны выбирать состояние исходя из своей стратегии и истории переходов.

- s - исходное состояние
- a - действие, переводящее состояние агента из состояния s в s' в момент времени t

$$\sum_{s' \in S} p(s, a; s') = 1$$

Слово про управляемые марковские процессы

В каждый момент времени мы получаем вознаграждение $r(s, a)$
Цель - получить максимальное итоговое вознаграждение:

$$V^*(s) = \max_a \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(s_t, a(s_t)), \quad s_0 = s$$

$\gamma \in (0, 1]$ - инфляция

$$
\begin{aligned}
V^*(s_0) &= \max_a \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(s_t, a(s_t)) = \\
&= \max_a \mathbb{E} \left(r(s_0, a(s_0)) + \gamma \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r(s_{t+1}, a(s_{t+1})) \right) = \\
&= \max_a (R(s_0, a) + \gamma \mathbb{E}_{s_1} V^*(s_1)) = \\
&\max_a \left(R(s_0, a) + \gamma \sum_{s_1} p(s, a; s_1) V^*(s_1) \right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Нужно сопоставить описание процесса выбора ручек с управляемым марковским процессом и получить соответствующее уравнение Вальда-Беллмана.
Пространства состояний: w-win, l-lose.

$$s = (w_1, l_1; ...; w_n, l_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i + l_i) = k$$

- k - номер шага
- w_i - то, сколько выигрышей было связано с i-ой ручкой к k-ому шагу
- l_i - сколько неудач принесла i-ая ручка к шагу k

Ближе к задачке

Стратегия - это выбор на каждом шаге одной из ручек $a(s) \in \{1, ..., n\}$.
При этом мы ничего не знаем про вероятности переходов из одного состояния в другое:

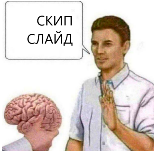
$$(w_1, l_1; ..., w_i, l_i; ...; w_n, l_n) \to (w_1, l_1; ...; w_i + 1, l_i; ...; w_n, l_n)$$

$$(w_1, l_1; ..., w_i, l_i; ...; w_n, l_n) \to (w_1, l_1; ...; w_i, l_i + 1; ...; w_n, l_n)$$

Пусть

$$\rho_i^w(w_i, l_i) = P(w_i \leftarrow w_i + 1)$$
$$\rho_i^l(w_i, l_i) = P(l_i \leftarrow l_i + 1)$$

В нашей задаче уравнение Вальда-Беллмана будет иметь такой вид:



$$V^*(w_1, l_1; ...; w_n, l_n) =$$
$$= \max_{i=1,...,n} \mathbb{E}_{\rho_i^w, \rho_i^l}(\rho_i^w(w_i, l_i) \cdot (1 + \gamma V^*(w_1, l_1; ...; w_i + 1, l_i; ...; w_n, l_n)) +$$
$$+\rho_i^l(w_i, l_i)\gamma V^*(w_1, l_1; ...; w_i, l_i + 1; ...; w_n, l_n)|(w_i, l_i)) \tag{2}$$

Решение такого уравнения дорогое экспоненциально.

Две ручки

Рассмотрим случай, когда всего 2 ручки, вероятность на одной из которых известна и равна p.
Выигрыш: $V^*(w, l; p)$
Тогда уравнение Вальда-Беллмана будет такое:

$$V^*(w, l; p) = \max(\frac{p}{1-\gamma},$$
$$\frac{w+1}{w+l+2}[1 + \gamma V^*(w+1, l; p)] + \frac{l+1}{w+l+2}\gamma V^*(w, l+1; p)) \tag{3}$$

При $w + l >> 1$ $V^*(w, l; p)$ недалеко от $(1-\gamma)^{-1} \max\left(p, \frac{w}{w+l}\right)$

Индекс Гиттинса

$$\gamma < 1$$

$$V^*(w, l; p) = \frac{p}{1-\gamma}$$

Индекс Гиттинса - это решение этого уравнения.
Есть некая гарантированная сумма выигрыша. Индекс Гиттинса предлагает очевидную стратегию поведения в казино: всегда играйте на автомате с наивысшим индексом.
Индекс Гиттинса дает нам формальное обоснование, почему мы всегда предпочитаем узнавать нечто новое при условии, что у нас есть некоторая возможность воспользоваться результатами исследования.

Введём Q-функцию

$$Q(s,a) = \sum_{s' \in S} p(s,a;s') \left(r(s,a;s') + \gamma V^*(s') \right)$$

$$V^*(s) = \max_a Q(s,a)$$

$$Q(s,a) = \sum_{s' \in S} p(s,a;s') \left(r(s,a;s') + \gamma \max_{a'} Q(s',a') \right)$$

Это уравнение можно решить методом последовательных итераций. Можно смотреть на $Q = \{Q(s,a)\}_{s \in S, a \in A}$ как на вектор. Тогда надо решить уравнение

$$Q = H(Q)$$

где H - сжимающий оператор, который мы не можем посчитать явно.

$$Q_{t+1} = H(Q_t)$$

Суть Q-обучения - заменить невычислимое $H(Q_t)$ (так как мы не знаем H) на его вычислимую несмещённую оценку:

$$Q_{t+1}(s,a) = Q_t(s,a) + \\ +\alpha_t(s,a)\left(r(s,a;s'(s,a)) + \gamma \max_{a'} Q_t(s'(s,a),a') - Q_t(s,a)\right) \tag{4}$$

НоваяОценка := СтараяОценка + Шаг[Цель-СтараяОценка]

Здесь $s'(s,a)$ - положение процесса на шаге $t+1$, если на шаге t процесс был в состоянии s и было выбрано действие a.
Тут всё умеем считать.

Если (s, a) будет бесконечное число раз встречаться, то хотим

$$\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t(s, a) = \infty$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^2(s, a) < \infty$$

Тогда процесс $Q_{t+1} = H(Q_t)$ сойдётся:

$$\lim_{t \to \infty} Q_t(s, a) = Q(s, a)$$

Проделав большое число шагов, мы можем определить оптимальную стратегию, не зная никакую информацию про управляемый марковский процесс.
Правда проблема в том, что мы не знаем, сколько шагов нужно сделать, чтобы считать, что можно закончить обучение. Мы не знаем, в какой момент можно переходить на стратегию

$$a_t(s) = \arg\max_a Q_t(s, a)$$

Асимптотические оценки

Будем считать $\gamma = 1$. Пусть нам дали N шагов и предположим, что мы знаем оптимальную ручку (у неё успех $p_{\max}$). Тогда можем получить ожидаемое вознаграждение $p_{\max}N$. Оказывается, что если мы ничего о ручках не знаем, то мы не сможем получить ожидаемое вознаграждение больше, чем

$$p_{\max}N - 0.05\sqrt{Nn}$$

Как можно приблизиться к такой оценке?

- Алгоритм $Exp3$ обеспечивает вознаграждение не меньше чем
$$p_{\max}N - 2\sqrt{Nn\ln n}$$

Ещё стратегии

- Сэмплирование по Томпсону
- ε-жадный алгоритм
- $Softmax$
- Доверительные интервалы
- Байесовские бандиты

А как на практике