

Домашняя контрольная работа по матанализу 2

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n} + k\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n} + k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{n\sqrt{k}}{n\sqrt{n} + k\sqrt{k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n} + \frac{k\sqrt{k}}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{-\frac{1}{2}} + x} = \frac{\sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} dx = \left[t = \sqrt{x} \right]_{dt = \frac{dx}{2t}} = \int \frac{2t^2}{1 + t^3} dt = 2 \left(\int \frac{1}{3(t+1)} dt + \int \frac{2t-1}{3(1-t+t^2)} dt \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} \ln|t+1| + \int \frac{2t-1}{3(1-t+t^2)} dt \right) = \left[\frac{u=1-t+t^2}{du=(2t-1)dt} \right] = 2 \left(\frac{1}{3} \ln|t+1| + \frac{1}{3} \ln|u| \right) =$$

$$= \frac{2}{3} (\ln|t+1| + \ln|1-t+t^2|) + C =$$

$$= \frac{2}{3} (\ln|\sqrt{x}+1| + \ln|1-\sqrt{x}+x|) + C$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3} (\ln|\sqrt{x}+1| + \ln|1-\sqrt{x}+x|) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (\ln 2 + \ln 1 - \ln 1 - \ln 1) = \frac{2 \ln 2}{3}$$

Ответ: $\frac{2 \ln 2}{3}$

$$2. y = \sqrt{4-x^2}, y=0, 0 \leq x \leq 1$$

$$\int \sqrt{4-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \\ t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \end{array} \right] = 2 \int \cos^2 t dt = 4 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \sin 2t + 2t + C =$$

$$= \sin \left(2 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + 2 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

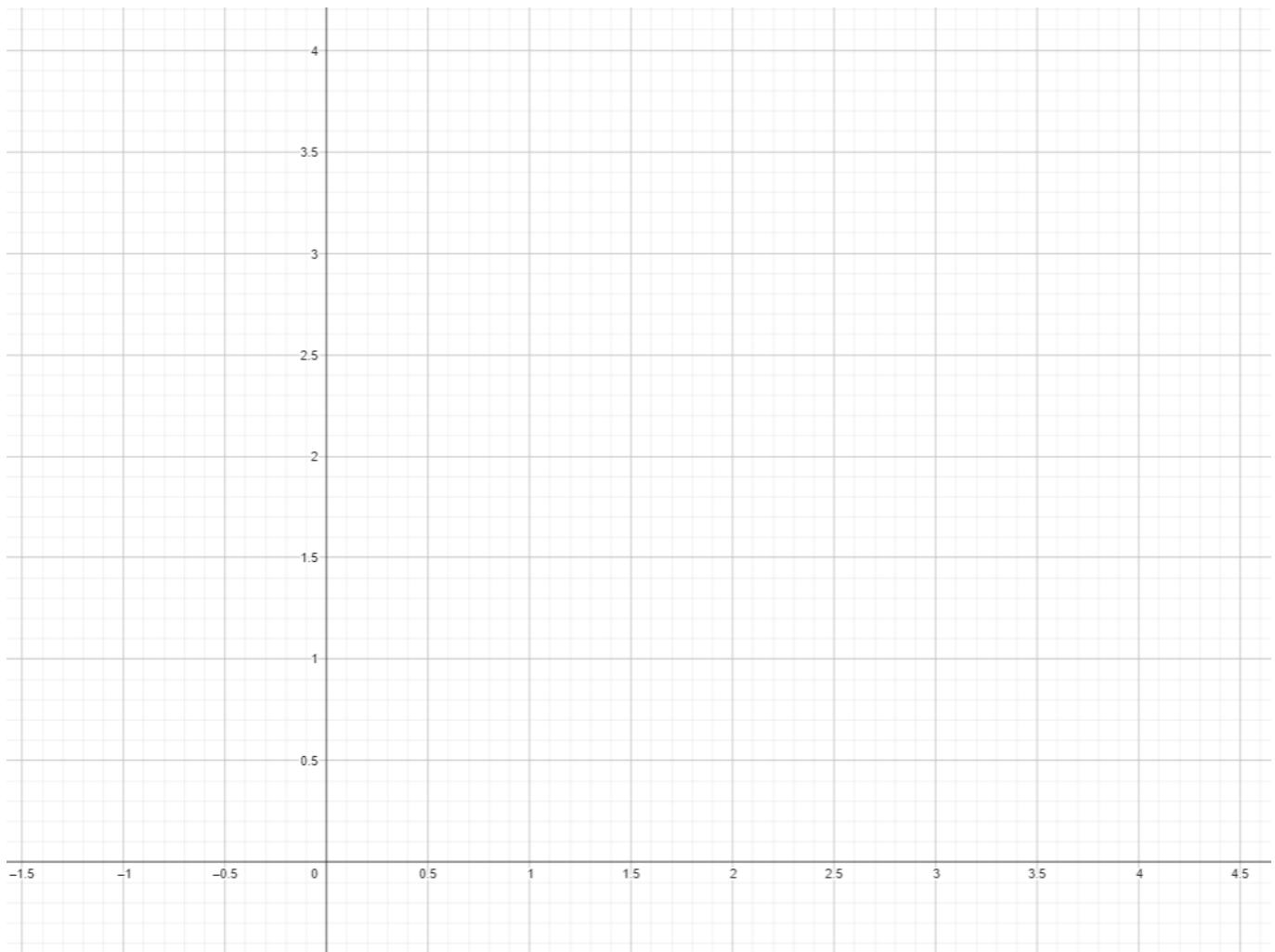
$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \left(\sin \left(2 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + 2 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \left(2 \sin \left(\arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \cos \left(\arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) + 2 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \left(2 \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + 2 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \left(\frac{x}{2} \right) \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$



$$3. \begin{cases} x(t) = 4(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$L = (x(t), y(t))$$

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$x'(t) = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t$$

$$y'(t) = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t$$

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(4t)^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} 4t dt = 2t^2 \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2$$

Отвеч: $8\pi^2$

$$4. \int_0^{\arctan(\frac{1}{3})} \frac{8 + \tan x}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$$

$$I = \int_0^{\arctan(\frac{1}{3})} \frac{8 + \tan x}{18 \sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx = \left[\begin{matrix} t = \tan x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right] = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{8 + t}{18t^2 + 2} dt$$

$$\int \frac{8 + t}{18t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{8 + t}{9t^2 + 1} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\int \frac{8}{9t^2 + 1} dt + \int \frac{t}{9t^2 + 1} dt \right) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \\
I_1 &= \int \frac{8}{9t^2 + 1} dt = \left[\begin{array}{l} u = 3t \\ du = 3dt \end{array} \right] = \frac{1}{3} \int \frac{8}{u^2 + 1} du = \frac{8}{3} \arctan(3t) \\
I_2 &= \int \frac{t}{9t^2 + 1} dt = \left[\begin{array}{l} u = 9t^2 + 1 \\ du = 18t dt \end{array} \right] = \frac{1}{18} \int \frac{du}{u} = \frac{\ln|u|}{18} = \frac{\ln(9t^2 + 1)}{18} \\
I &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \arctan(3t) + \frac{1}{18} \ln(9t^2 + 1) \right) \Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{18} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\ln 2}{36}
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\ln 2}{36}$

5. $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)} \frac{1}{x} \arctan \frac{x+1}{\sin x} dx$

$\Phi(x) = \frac{1}{x}$ - положительная функция на отрезке $[\frac{\varepsilon}{2}; \ln(1+\varepsilon)]$, $f(x) = \arctan \frac{x+1}{\sin x}$ - непрерывная на этом же отрезке при достаточно малом ε .

Тогда при достаточно малых ε справедлива теорема о среднем и тогда исходный интеграл под знаком предела равен

$$\mu \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)} \frac{1}{x} dx$$

где $\mu \in [\min f, \max f]$.

Найдём $\min f$ и $\max f$:

$$\left(\arctan \frac{x+1}{\sin x} \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{\sin x} \right)'}{1 + \left(\frac{x+1}{\sin x} \right)^2} = \frac{\sin x - (x+1) \cos x}{1 + \left(\frac{x+1}{\sin x} \right)^2}$$

Посмотрим на $\sin x - (x+1) \cos x$. При достаточно малых ε , например, меньше, чем $\frac{\pi}{3}$ имеем $\sin x < \frac{1}{2}$, $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x+1 > 1$. Поэтому

$$\sin x - (x+1) \cos x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

Значит $\max f = f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\min f = f(\ln(1+\varepsilon))$.

Устремляя ε к нулю и учитывая, что $\mu \in [f(\ln(1+\varepsilon)), f(\frac{\varepsilon}{2})]$ и то, что $\ln(1+\varepsilon)$ и $\frac{\varepsilon}{2}$ стремятся к нулю, получаем (по лемме о двух милиционерах), что

$$\begin{aligned}
\mu &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arctan \frac{\varepsilon+1}{\sin \varepsilon} = \arctan \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon+1}{\sin \varepsilon} \right) = \frac{\pi}{2} \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)} \frac{1}{x} \arctan \frac{x+1}{\sin x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\pi}{2} (\ln x) \Big|_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\pi}{2} \left(\ln(\ln(1+\varepsilon)) - \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\pi}{2} \left(\ln\left(\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{2}}\right) \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2
\end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} \ln 2$