Пару задач по алгему

1. Доказать формулу «бац минус цаб»: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

2. Доказать тождество Якоби $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0$.

3. Пусть e, f, g - базис. Доказать, что вектора $e \times f, g \times e, f \times g$ также образуют базис. (Указание - эту задачу можно решать разными способами, но довольно поучительно перейти к координатам.)

4. Матрица Грама базиса e_1, e_2, e_3 - это 3x3-матрица, у которой на месте (i,j) стоит скалярное произведение $e_i e_j$. Доказать, что определитель матрицы Грама отличен от 0. (Указание - с теми средствами, которыми вы располагаете сейчас, решить эту задачу непросто. Но попробуйте! Когда вы узнаете больше про матрицы и определители, эта задача станет совсем простой.)

5. Алиса и Боб по очереди заполняют числами матрицу 2x2. Алиса (которая ходит первой) хочет добиться, чтобы определитель получившейся матрицы был отличен от 0, а Боб хочет добиться, чтобы этот определитель был равен 0. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? А если Алиса хочет, чтобы получился нулевой определитель, а Боб - чтобы получился определитель, отличный от 0? Те же вопросы для матрицы 3x3. (Предостережение: для 3x3-матриц задача уже нетривиальна.)

6. Уравнения прямой и плоскости в трехмерном пространстве

7. Исследовать взаимное расположение трех прямых на плоскости. (Здесь и далее под словом "исследовать"понимается следующее: указать условия на коэффициенты уравнений, отвечающие различным с геометрической точки зрения вариантам взаимного расположения задаваемых этими уравнениями объектов).

8. На плоскости даны три параллельные прямые с уравнениями $Ax + By + C = 0$, Ax+By+D=0, Ax+By+E=0. Указать необходимое и достаточное условие, при котором вторая прямая проходит между первой и третьей.

9. На плоскости даны две параллельные прямые с уравнениями $Ax + By + C = 0, Ax + By + D = 0$. Придумать формулу, выражающее расстояние между этими прямыми через коэффициенты A, B, C, D. (Система координат - прямоугольная декартова.)

10. На плоскости даны две пересекающиеся и неперпендикулярные прямые с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать уравнение биссектрисы острого угла между этими прямыми. (Система координат - прямоугольная декартова.)

11. Исследовать взаимное расположение трех плоскостей в пространстве.

12. В пространстве даны три параллельные плоскости с уравнениями $Ax + By + Cz + D = 0, Ax + By + Cz + E = 0, Ax + By + Cz + F = 0$. Указать необходимое и достаточное условие, при котором вторая плоскость проходит между первой и третьей.

13. В пространстве даны две параллельные плоскости с уравнениями $Ax + By + Cz + D = 0, Ax + By + Cz + E = 0$ и прямая с уравнением $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$. Указать необходимое и достаточное условие, при котором прямая расположена между плоскостями.

14. Найти сумму $k-$ степеней всей корней n-й степени из 1.

15. Найти произведение корней n-й степени из 1.

16. Доказать, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей.

17. Некоторые натуральные числа (например, 1, 2, 4 или 5) можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, а некоторые (например, 3, 6 или 7) нельзя. Доказать, что если натуральные числа m и n представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел, то и их произведение mn представимо в виде такой суммы.

18. Можно ли ввести на множестве комплексных чисел линейный порядок, продолжающий обычный порядок на множестве действительных чисел и согласованный с операцией сложения? (Согласованность означает, что для любых x, y, z, если $x < y$, то $x + z < y + z$.) А линейный порядок, согласованный с операцией умножения? (Здесь согласованность означает, что для любых x, y, z, если $x < y$ и $z > 0$, то $xz < yz$.)

19. Абстрактные векторные пространства

20. Доказать, что аксиому 1 = нельзя вывести из остальных аксиом линейного пространства.

21. Доказать, что коммутативность сложения можно вывести из остальных аксиом линейного пространства. (Предостережение: задача нетривиальна.)

22. Доказать, что в обычном трехмерном пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.

23. Доказать, что объединение двух подпространств будет подпространством тогда и только тогда, когда одно из этих подпространств содержится в другом.

24. Может ли объединение трех попарно несравнимых подпространств быть подпространством? (Указание: рассмотрите двумерное пространство над двухэлементным полем.)

25. Доказать, что для операций пересечения и суммы подпространств, вообще говоря, не выполняется дистрибутивный закон.

26. Доказать, что для операций пересечения и суммы подпространств выполняется так называемый модулярный закон: если подпространство A содержит подпространство B, то для любого подпространства C пересечение A с суммой B+C равно сумме B и пересечения A с C.

27. Формула для размерности суммы двух подпространств аналогична формуле включений и исключений для двух множеств. Верна ли формула для размерности суммы трех подпространств, построенная по аналогии с формулой включений и исключений для трех множеств? (Указание: рассмотрите три прямые в обычной двумерной плоскости.)

28. Докажите, что линейные многообразия$x+My+N$ равны тогда и только тогда, когда $M = Nx-y$ лежит в M.

29. Ранг матрицы. Теория систем линейных уравнений

30. Доказать, что произвольная матрица ранга r представима в виде суммы r матриц ранга 1.

31. Доказать, что для любых двух матриц одинаковых размеров ранг их суммы не провосходит суммы их рангов.

32. Доказать, что для любой nxs-матрицы A, любой обратимой $n \times n$-матрицы B и любой обратимой sxs-матрицы ранги матриц A и BAC равны.

33. Доказать, что для системы линейных уравнений следующие условия эквивалентны: система имеет единственное решение; ранг основной матрицы равен числу неизвестных; ранг расширенной матрицы равен числу неизвестных.

34. (Неравенство Сильвестра) Пусть A - линейный оператор, принимающий значения в некотором n-мерном пространстве L, а B - линейный оператор, определенный на L. Доказать, что ранг оператора AB не меньше $r(A)+r(B)-n$. (Указание: примените теорему о сумме ранга и дефекта к ограничению оператора B на пространство $Im(A)$.)

35. (Принцип наложения решений) Доказать, что если вектор y - решение системы линейных уравнений $Ax = b$, а вектор z - решение системы линейных уравнений $Ax = c$, то вектор $y + z$ будет решением системы линейных уравнений $Ax = b + c$.

36. Пусть квадратная матрица A такова, что система линейных уравнений $Ax = b$ имеет решение при любой правой части b. Доказать, что тогда эта система имеет единственное решение при каждой правой части. (Указание: воспользуйтесь теоремой о сумме ранга и дефекта.)

37. Евклидовы и унитарные пространства. Решение несовместных систем линейных уравнений

38. Верно ли утверждение, обратное к теореме Пифагора, в произвольном евклидовом или унитарном пространстве?

39. Что произойдет, если применить процесс Грама-Шмидта к линейно зависимой системе векторов?

40. Точка Лемуана треугольника - это точка, сумма квадратов расстояний которой до сторон треугольника минимальна. Найдите точку Лемуана треугольника, стороны которого лежат на прямых с уравнениями $A_1x+B_1y+C_1 = 0, A_2x+B_2y+_2 = 0, A_3x+B_3y+_3 = 0$. (Указание: примените метод наименьших квадратов.)

41. Две прямые в пространстве заданы уравнениями $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + ptx = x_1 + qt, y = y_1 + rt, z = z_1 + st$. Объединим эти 6 уравнений в одну систему. Какие точки будут псевдорешениями этой системы?

42. Пусть определитель nxn-матрицы A равен d. Чему равен определитель матрицы kA?

43. Пусть определитель $n \times n$-матрицы A равен d. Чему равен определитель матрицы, присоединенной к A?

44. Пусть ранг nxn-матрицы A равен r. Чему равен ранг матрицы, присоединенной к A?

45. Доказать, что при перестановке двух строк матрицы в присоединенной матрице происходит такая же перестановка столбцов и все элементы присоединенной матрицы меняют знак.

46. Доказать, что матрица, обратная к верхнетреугольной матрице, сама является верхнетреугольной.

47. (Теорема Гамильтона-Кэли) Пусть A - 2x2-матрица, s - ее след (сумма диагональных элементов), а d - ее определитель. Проверить, что $A^2 - sA + dE = 0$.

48. Через $tr(A)$ обозначается след матрицы A. Доказать, что удвоенный определитель 2x2-матрицы A равен $tr(A)^2 - tr(A^2)$.

49. Привести пример 4x4-матрицы, определитель которой не равен ad-bc, где a - определитель верхнего левого 2x2-блока, b - определитель верхнего правого 2x2-блока, c - определитель нижнего левого 2x2-блока, d - определитель нижнего правого 2x2-блока.

50. Матрица A называется кососимметрической, если ее транспонированнаяматрица равна -A. Доказать, что определитель действительной кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.

51. Пусть в nxn-матрице A есть такие s строк и t столбцов, что все элементы, стоящие на их пересечении, равны 0 и $s + t > n$. Доказать, что определитель матрицы A равен 0.