HOW TO заботать коллоквиум по матанализу (2 семестр)

Список билетов

1. ~~Понятие определённого интеграла~~
2. ~~Интегрируемость суммы функций~~
3. ~~Ограниченность интегрируемой функции~~
4. ~~Пример ограниченной неинтегрируемой функции~~
5. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости
6. ~~Аддитивность интеграла по множеству~~
7. ~~Интегрируемость непрерывной функции~~
8. ~~Интегрируемость монотонной функции~~
9. ~~Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек~~
10. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций - **много недочётов!**
11. ~~Интегрируемость произведения функций~~
12. ~~Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость~~
13. ~~Формула Ньютона-Лейбница~~
14. ~~Пример неинтегрируемой функции с первообразной~~
15. ~~Пример интегрируемой функции без первообразной~~
16. ~~Интегрирование по частям~~
17. ~~Замена переменной~~
18. ~~Первая теорема о среднем~~
19. Вычисление площадей - **что здесь писать, друзья?**
20. ~~Вычисление длины дуги~~
21. ~~Приближённое вычисление интеграла: методы прямоугольников, трапеций, Симпсона~~

Несколько задач для подготовки с решением

Понятие определённого интеграла

Разбиение отрезка $[a, b]$ - $\{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, $x_i < x_{i+1}$
Мелкость разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k = \max(x_k - x_{k-1})$$

Интегральная сумма: $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = S_\tau$

Определение f, определённая на $[a, b]$, интегрируема по Риману на $[a, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}: \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_t < \delta \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon)$$

Обозначаем $I = \int_a^b f(x)dx$

Интегрируемость суммы функций

Теорема. Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Доказательство.

$$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k =$$

$$= \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$$

$$\left| S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) - \left(\alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \right) \right| \le |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right|$$

В определении интегрируемости f и g берём не ε, а $\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$

Тогда

$$\left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| \le \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{и} \quad \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| \le \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| < \varepsilon$$

Ограниченность интегрируемой функции

Теорема. Если f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Доказательство.
Проведём от противного: пусть f не ограничена, но интегрируема.

Тогда $I - \varepsilon < \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k < I + \varepsilon$ для какого-то разбиения τ при заданном $\varepsilon > 0$ и любом выборе $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
Так как f не ограничена, то найдётся такой отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором f не ограничена $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ можно сделать сколь угодно большим по модулю. Противоречие.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции

Например, функция Дирихле $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\forall x \in [a, b] \quad D(x) \quad \text{не интегрируема на} \quad [a, b], \quad \text{так как}$$

1. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 0 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = 0$
2. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 1 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = \sum \Delta x_k = b - a$

Аддитивность интеграла по множеству

Пусть $c \in (a, b)$ и функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен сумме интегралов функции $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Доказательство:
Поскольку $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\tau = \{a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что верхняя сумма Дарбу $\overline{S_\tau}$ и нижняя сумма Дарбу $\underline{S_\tau}$ удовлетворяют условию:

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon$$

Выберем такое разбиение, которое включает точку c. Теперь разбиваем τ на два подмножества τ' и τ'', соответствующие отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$, так что $\tau = \{x_i \in \tau \mid x_i \leq c\}$ и $\tau'' = \{x_i \in \tau \mid x_i \geq c\}$.
Тогда верхние и нижние суммы Дарбу для $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ будут равны $\overline{S_{\tau'}})$ и $\underline{S_{\tau'}}$, а также $\overline{S_{\tau''}})$ и $\underline{S_{\tau'}})$ соответственно.
Поскольку разбиение τ является объединением τ' и τ'', имеем:

$$\overline{S_\tau} = \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}$$

$$\underline{S_\tau} = \underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}$$

Из этого следует, что:

$$(\overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} - (\underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}) < \varepsilon$$

$$(\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}}) < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}} < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}} < \varepsilon$$

Докажем уже наконец-то, что $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$\left|\int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b\right)\right| < \varepsilon$

$\left|\int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| < \varepsilon$

$\left|\int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| \leq \left|\int_a^b -(S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| + \left|\int_a^c -S_{\tau'}\right| + \left|\int_c^b -S_{\tau''}\right| < \varepsilon$

$\left|\int_a^b -(S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\left|\int_a^c -S_{\tau'}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\left|\int_c^b -S_{\tau''}\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

Интегрируемость непрерывной функции

Теорема.
Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.
f непрерывна на $[a, b]$, значит она равномерно нерпрерывна на $[a, b]$ (теорема Кантора):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Теперь поймём, что

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta'(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta' \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon')$$

Рассмотрим разбиение τ, у которого $\lambda_\tau < \delta$ (δ берём из определения равномерной непрерывности).

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

$$\forall \xi_j', \xi_j'' \in [x_j, x_{j+1}] \quad |\xi_j' - \xi_j''| < \delta, \quad \text{так как} \quad \lambda_\tau < \delta$$

И по равномерной непрерывности получаем

$$|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon$$

$$|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

Докажем это утверждение ($sup - inf$):

1. $\Leftarrow$:

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(\xi_j') \le M_j \\ f(\xi_j'') \ge m_j \end{cases} \Rightarrow f(\xi_j') - f(\xi_j'') \le M_j - m_j < \varepsilon$$

2. $\Rightarrow$:
   Знаем $|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon$.
   Возьмём sup по ξ_j':

$$\sup_{\xi_j'} (f(\xi_j') - f(\xi_j'')) = M_j - f(\xi_j'') \le \varepsilon$$

   А затем возьмём inf по ξ_j'' и получим:

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

Мы доказали

$$|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$$

Интегрируемость монотонной функции

Теорема.
Пусть f монотонна на $[a, b]$. Тогда f интегрируема $[a, b]$.

Доказательство.
Б.о.о. скажем, что f монотонно возрастает.
Определение интегрируемости:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\tau \quad (\lambda_\tau < \delta \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon)$$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k \leq \delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(b) - f(a))$$

Ну и чтобы $\delta(f(b) - f(a))$ было меньше ε, возьмём $\delta < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек

Теорема.
Пусть f интегрируема $[a, b]$. Тогда если поменяем f в конечном числе точек, то площадь останется неизменной.

Доказательство.
Пусть $\breve{f}$ это f, у которой поменяли $f(x_0)$ на c

$$g(x) = \begin{cases} 0, x \neq x_0 \\ f(x_0) - c, x = x_o \end{cases}$$

$$\int_a^b g(x)dx = 0$$

$$\forall\tau|s_\tau| \leq |c - f(x_0)| \cdot \lambda_\tau \to 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f = \int_a^b(\breve{f} + g) = \int_a^b \breve{f} + 0 = \int_a^b \breve{f}$$

Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций

Теорема.
Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и принимает значения в $[c, d]$. Пусть Φ непрерывна на $[c, d]$. Тогда $\Phi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.
Φ равномерно непрерывна на $[c,d]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [c,d] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Хотим $\overline{S_\tau(\Phi(f))} - \underline{S_\tau(\Phi(f))} < \varepsilon$.
f интегрируема $\Rightarrow$ если $\lambda_\tau < \delta$, то

$$\overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

Это мы так взяли $\varepsilon = \delta^2$.
Хотим оценить $\overline{S_\tau(\Phi(f))} - \underline{S_\tau(\Phi(f))} = \sum_{k=1}^{n}(M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)))$
Имеем здесь 2 семейства индексов:

1. $I = \{k : M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$
2. $J = \{k : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta\}$

1. $k \in I$:

   По лемме ($sup - inf$)

$$f(\xi_k') - f(\xi_k'') < \delta \Rightarrow |\Phi(f(\xi')) - \Phi(f(\xi''))| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по этой же лемме} \quad M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) < \varepsilon$$

$$\sum_{k \in I} \left(M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f))\right) \Delta x_k < \varepsilon(b-a)$$

2. $k \in J$:

$$\overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

$$\sum_{k \in J} \left(M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f))\right) \Delta x_k < \varepsilon(b-a)$$

$$k \in J \Rightarrow M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f) < \delta$$

$$\delta \sum_{k \in J} \Delta x_k \leq \overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

$$\sum_{k \in J} \Delta x_k \leq \delta$$

   Φ непрерывна на $[c,d] \Rightarrow$ ограничена числом L.

$$\sum_{k \in J} M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) \Delta x_k \leq 2L \sum_{k \in J} \Delta x_k \leq 2L\varepsilon$$

Интегрируемость произведения функций

Теорема. Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$. Тогда $f * g$ тоже интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

$$(f-g)^2 = f^2 - 2fg + g^2$$

$(f-g)^2$ интегрируема, так как $f-g$ интегрируема и $(...)^2$ интегрируемо.

$$fg = \frac{f^2 + g^2 - (f-g)^2}{2}$$

Правая часть равенства интегрируема, значит левая тоже.

Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость

Определение. Пусть f интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall x \in (a, b) \quad \exists \int_a^x f(t)dt$.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом (договоримся, что $\int_a^a = 0$).

Теорема.
Пусть f ограничена на $[a, b]$. Тогда Φ непрерывна и
$\exists C : \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in (a, b)$ (*липшицевость*).

Доказательство. Из липшицевости следует непрерывность по определению непрерывности ($\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$) (типа множество липшицевостных функций является подмножеством непрерывных функций)
Предположим $x < y$:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y dt\right| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \begin{bmatrix} \left|\sum f(\xi_k)\Delta x_k\right| \leq \sum |f(\xi_k)| \, \Delta x_k \\ \left|\sum f(\xi_k)\Delta x_k\right| \to |\int f| \\ \sum |f(\xi_k)| \, \Delta x_k \to |\int f| \end{bmatrix} \leq$$

$$\leq [|f| \leq B] \leq B \cdot \left|\int_x^y dt\right| \leq B(y - x)$$

Теорема.
Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство.

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h}$$

$$\frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) =$$

$$= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left| \frac{\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt}{h} \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt$$

О, а ведь f непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Тут мы берём любой ε, по нему находим δ и берём $h < \delta$. Тогда $|x_0 - t| < h$.

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ первообразную F. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Доказательство.

Рассмотрим равномерное разбиение $[a, b]$ (на n равныйх частей). Тогда $\dfrac{b-a}{n}$ - длина отрезка разбиения.

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \left[\begin{array}{c} \text{теорема Лагранжа} \\ \exists \xi_k \in [x_k, x_{k-1}] : \\ F(x_k) - F(x_{k-1} = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ = f(\xi_k)\Delta x_k \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

Пример неинтегрируемой функции с первообразной

$$F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), x \in (0, 1]$$

$$f = F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

f неинтегрируема на $(0, 1]$, потому что не ограничена на этом множестве.

Пример интегрируемой функции без первообразной

$$f(x) = sgnx, x \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^{1} sgnx = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, x > 0 \\ -x + C_2, x < 0 \end{cases}$$

Добьёмся того, чтобы в нуле первообразная была непрерывна. Тогда $C_1 = C_2 = C$. Тогда первообразная представляет собой функцию $|x| + c$, которая, конечно, не дифферинцируема в нуле.

Интегрирование по частям

Теорема.
Пусть u и v непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$uv|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Доказательство.
По условиям теоремы, оба интеграла существуют как интегралы от кусочно непрерывных функций.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

За исключением конечного числа точек, так как кусочная дифференцируемость.

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$$

Замена переменной

Теорема.
Пусть f непрерывна на $[x_1, x_2]$, а g непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ и $g(t_1) = x_1, g(t_2) = x_2$ и $g(t) \in [x_1, x_2], t \in [t_1, t_2]$. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))d'(t)dt$$

Доказательство.
f непрерывна. А если f непрерывна, то существует первообразная F.
По теореме (?) $\Phi = \displaystyle\int_{x_1}^{x} f(t)dt$ - дифференцируема и $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда $\Phi(x)$ - первообразная $\Rightarrow \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$.
Рассмотрим $F(g(t)), t \in [t_1, t_2]$.

$$F'(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$F(g(t))$ - первообразная для $f(g(t))g'(t) \Rightarrow \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t)dt = F(g(t_2)) - F(g(t_1)) = F(x_2) - F(x_1)$
Итого $F(x_2) - F(x_1) = F(x_2) - F(x_1)$. Доказано.

Теорема. Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство.

$$\Phi'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h}$$

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t_- f(x_0))dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left|\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t_- f(x_0)dt}{h}\right| \leq$$

$$\leq \begin{bmatrix} \text{О, а ведь} \quad f \quad \text{непрерывна}: \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta: \quad 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \text{Берём любой} \quad \varepsilon \quad \text{и по нему находим} \quad \delta \quad \text{и берём} \quad h < \delta \end{bmatrix} \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Первая теорема о среднем

Теорема.
Пусть f интегрируема на $[a, b]$, Φ - весовая функция (≥ 0 и интегрируемая) и $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда существует $\mu \in [m, M]$: $\quad \mu \int_a^b \Phi = \int_a^b \Phi f$

Замечание.
В частности, если f непрерывная, то она достигает $min = m$ и $max = M$ на $[a, b]$ и по теореме Коши о промежуточных значениях

$$\forall \mu \in [m, M] \quad \exists x_0 \in [a, b] : \quad \mu = f(x_0)$$

Замечание.
Важно, чтобы Φ была знакопостоянной. Контрпример - $f = x, \Phi = sgnx$ на $[-1, 1]$.
$\int_{-1}^{1} xsgnxfx = 1$
$\mu \int_{-1}^{1} sgnxdx = 0 \quad \forall \mu$

Доказательство.
Рассмотрим 2 случая:

1. $\int_a^b \Phi = 0 \Rightarrow m \int_a^b \Phi \leq \int_a^b f\Phi \leq M \int_a^b \Phi$

$$\begin{cases} m \int_a^b \Phi = 0 \\ M \int_a^b \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f\Phi = 0$$

2. $\int_a^b \Phi \neq 0$

   Поделим неравенство из предыдущего пункта на $\int_a^b \Phi$:

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f\Phi}{\int_a^b \Phi} \leq M$$

Вторая теорема о среднем

Пусть на $[a, b]$ функция f монотонна (б.о.о. убывает) и Φ интегрируема на $[a, b]$. Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] : \quad \int_a^b \Phi f = f(a) \int_a^{\xi} \Phi(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b \Phi(x)dx$$

Эта теорема без доказательства (а почему не знаю)

Вычисление площадей

.
Я не знаю, что здесь писать, друзья. Жду Issue, если хотите:0

Вычисление длины дуги

Определение. *Кривой* называется непрерывное отображение отрезка на плоскость.
Определение. Кривая L называется *спрямляемой*, если множество длин вписанных в неё ломаных l ограничено сверху.
Пусть l - это какая-то ломаная.

$$|l| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (x(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k)^2} \Delta t_k$$

$$|L| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Теорема.
Пусть $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая $L = (x(t), y(t))$ спрямляемая и её длина равна $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

Доказательство.

$$|l| = [\text{теорема Лагранжа}] = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k)^2}\Delta t_k$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k)^2}\Delta t_k$$

$$||l| - \sigma| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k)^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k)^2} \right) \Delta t_k \right| \leq$$

$$\leq [\text{не понял почему так}] \leq \sum_{k=1}^{n} |x'(\xi_k) - y'(\eta_k)| \Delta t_k$$

y' непрерывна по условию $\Rightarrow$ ограничена. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |x'(\xi_k) - y'(\eta_k)| \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta t_k \leq \overline{S(y', \tau)} - \underline{S(y', \tau)}$$

y' интегрируема, так как непрерывна $\Rightarrow \overline{S(y', \tau)} - \underline{S(y', \tau)} < \varepsilon$.
Мы выяснили, что при достаточно маленьких разбиениях $||l| - \sigma| < \varepsilon$.

$|l| \leq B \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = B(\beta - \alpha) \Rightarrow L$ - спрямляемая.

$$\begin{cases} |l| \approx \sigma \\ |l| \approx |L| (\text{определение супремума}) \end{cases} \Rightarrow \sigma \approx |L|$$

$$\left| |L| - \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \leq ||L| - |l|| + \left| |l| - \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \leq$$

$$\leq ||L| - |l|| + ||l| - \sigma| + \left| \sigma - \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right|$$

Почему это меньше 3ε?

1. $$\forall \varepsilon \exists l_\varepsilon : \quad |L| - |l_\varepsilon| < \varepsilon$$

   Если ломаная меньше, чем l_ε, то она точно не короче, чем l_ε. Давайте мы будем рассматривать только такие ломаные.

   Тогда $|L| - |l| < \varepsilon$.

2. $||l| - \sigma| < \varepsilon$ при мелких τ (это мы выяснили в начале)

3. $\left| \sigma - \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| < \varepsilon$ - по определению интеграла.

S Итого, имеем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \left| |L| - \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt| \right| \leq 3\varepsilon \Rightarrow |L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Численное интегрирование

Лекция 10.04.2023

Численное интегрирование

Пусть точки $x_1, \dots, x_n$ принадлежат отрезку $[a, b]$, и известны значения $f(x_1), \dots, f(x_n)$. Существует **единственный** многочлен p степени не выше $n-1$ со свойством

$$p(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Такой многочлен называется **интерполяционным**.

Две формы записи p:

- Форма Лагранжа (проходят в курсе алгебры)

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \prod_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

- Форма Ньютона

$$f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \ldots + f(x_1, \dots, x_n)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

где $f(x_1, x_2)$ — разделённая разность 1 порядка, ..., $f(x_1, \dots, x_n)$ — разделённая разность $n-1$ порядка. Разделённые разности определяются по индукции:

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_2, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_1}.$$

Формы записи Лагранжа и Ньютона разные, но на самом деле это один и тот же многочлен. Форма Ньютона нам пригодится.

Идея:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

Методы прямоугольников

Заменяем f на интерполяционный многочлен нулевой степени (константа).

1. Левые прямоугольники. Заменяем f на $f(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a)$$

2. Средние прямоугольники. Заменяем f на $f((a+b)/2)$ — значение в середине отрезка.

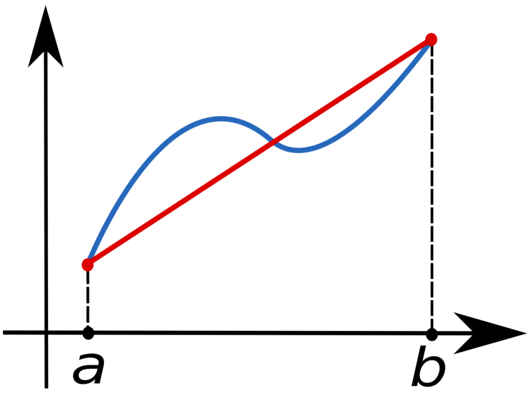
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f((a+b)/2)dx = f((a+b)/2)(b-a)$$

3. Правые прямоугольники. Заменяем f на $f(b)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = f(b)(b-a)$$

Метод трапеций

Заменяем f на интерполяционный многочлен первой степени. В качестве узлов интерполяции возьмём концы отрезка a и b. Получается хорда.

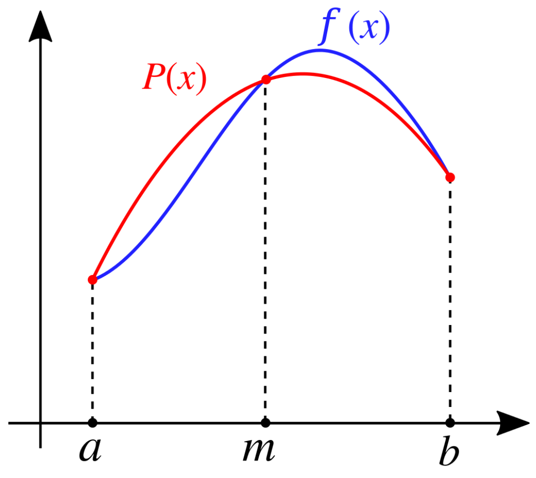


По формуле площади трапеции,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Метод Симпсона

Заменяем f на интерполяционный многочлен второй степени. В качестве узлов возьмём a, $\dfrac{a+b}{2}$, b — три равноотстоящие точки.



Интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$f(a)+f(a,(a+b)/2)(x-a)+f(a,(a+b)/2,b)(x-a)(x-(a+b)/2)=:❤$$

Здесь

$$f(a,(a+b)/2)=\frac{f((a+b)/2)-f(a)}{(b-a)/2},$$
$$f(a,(a+b)/2,b)=\frac{\dfrac{f(b)-f((a+b)/2)}{(b-a)/2}-\dfrac{f((a+b)/2)-f(a)}{(b-a)/2}}{b-a}.$$

Эти разделённые разности — это суммы $f(a),\ f((a+b)/2),\ f(b)$ с какими-то коэффициентами (линейные комбинации). Значит, если подставить их в ❤️, получится сумма, в которой складываются $f(a),\ f((a+b)/2,\ f(b)$, умноженные на скобочки от x. Назовём эти скобочки $A(x), B(x), C(x)$. То есть

$$❤=A(x)f(a)+B(x)f((a+b)/2)+C(x)f(b),$$

причём $A(x),\ B(x),\ C(x)$ не зависят от функции f.

Поэтому для любой f

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)\int_a^b A(x)dx+f((a+b)/2)\int_a^b B(x)dx+f(b)\int_a^b C(x)dx$$

Интегралы от $A(x),\ B(x),\ C(x)$ — это просто числа. Назовём их $M,\ N,\ K$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx M\cdot f(a) + N\cdot f((a+b)/2) + K\cdot f(b) \quad ✲$$

Это и есть метод Симпсона, осталось найти коэффициенты $M,\ N,\ K$.

Возьмём $f\equiv 1$, $f(x)=x-a$, $f(x)=(x-a)^2$. Теперь заметим, что

- Интерполяционный многочлен в трёх узлах — это многочлен не выше второй степени
- Интерполяционный многочлен **единственен**

Значит, для таких f, как выше (это многочлены не выше второй степени), интерполяционный многочлен — это и есть f. Итак, если f — многочлен не выше второй степени, то

$$p(x)\equiv f(x).$$

Значит, для таких f имеем равенство в ✲

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx = M\cdot f(a) + N\cdot f((a+b)/2) + K\cdot f(b).$$

Подставляя сюда $f\equiv 1,\ f(x)=x-a,\ f(x)=(x-a)^2$, получим систему для $M,\ N,\ K$.

$$\begin{cases} \int\limits_a^b dx = M+N+K,\\ \int\limits_a^b (x-a)dx = M\cdot 0 + N\cdot (b-a)/2 + K\cdot (b-a),\\ \int\limits_a^b (x-a)^2dx = M\cdot 0 + N\cdot (b-a)^2/4 + K\cdot (b-a)^2. \end{cases}$$

Считаем интегралы и сокращаем степени $b-a$, получаем

$$\begin{cases} b-a = M+N+K,\\ (b-a)/2 = N/2+K,\\ (b-a)/3 = N/4+K. \end{cases}$$

Решение системы

$$M=\frac{b-a}{6},\ N=\frac{4}{6}(b-a),\ K=\frac{1}{6}(b-a).$$

Получили **формулу Симпсона**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4 \cdot f((a+b)/2) + f(b)).$$

Сделайте сами эти выкладки, проверьте.

Формула “3/8”

Аналогично строится метод, когда в качестве узлов интерполяции берутся четыре равноотстоящие точки: $a, \ \dfrac{2a+b}{3}, \ \dfrac{a+2b}{3}, \ b$. Не буду приводить выкладки, они аналогичны методу Симпсона.

Получается такая формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right).$$

Название $3/8$ — потому что этот коэффициент дважды встречается в формуле (если раскрыть скобки).

Составные формулы численного интегрирования

Для более точных вычислений эти методы применяют не на всём $[a,b]$ сразу, а на его равномерном разбиении. Пусть всего m точек разбиения $\{x_j\}_{j=1}^m$ и $h := \dfrac{b-a}{m-1}$ — это длина каждого отрезка разбиения (шаг):

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b,$$
$$x_{j+1} - x_j = h, \quad j = 1, \ldots, m-1.$$

Применяя к каждому из отрезков разбиения полученные методы и складывая результаты, получаем так называемые составные формулы.

1. **Левые прямоугольники**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j).$$

2. **Средние прямоугольники**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j + h/2).$$

3. **Правые прямоугольники**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h\sum_{j=1}^{m-1} f(x_{j+1}).$$

4. **Трапеции**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h\sum_{j=1}^{m-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} =$$

$$h \cdot \frac{[f(a) + f(x_2)] + [f(x_2) + f(x_3)] + [f(x_3) + f(x_4)] + \ldots + [f(x_{m-1}) + f(b)]}{2} =$$

$$h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=2}^{m-1} f(x_j)\right).$$

Промежуточные слагаемые повторяются дважды. Так преобразовали, чтобы меньше раз вычислять значения f.

5. **Симпсон**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\sum_{j=1}^{m-1}(f(x_j) + 4f(x_j + h/2) + f(x_{j+1})).$$

6. **“3/8”**

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx$$

$$\frac{h}{8}\sum_{j=1}^{m-1}(f(x_j) + 3f(x_j + h/3) + 3f(x_j + 2h/3) + f(x_{j+1})).$$

Метод Рунге оценки погрешности

Обозначим $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Пусть S_h — результат численного интегрирования по составной формуле с шагом h,

$R_h = I - S_h$ — погрешность вычислений.

Предположим, что $R_h \sim C \cdot h^p$ при $h \to 0$, где $p > 0$ — некоторое число.

Известно, что

- левые и правые прямоугольники $\Rightarrow p = 1$,
- средние прямоугольники и трапеции $\Rightarrow p = 2$,
- 3/8 и Симпсон $\Rightarrow p = 4$.

Имеем

$$\begin{cases} I = S_h + R_h, \\ I = S_{h/2} + R_{h/2}. \end{cases}$$

Значит,

$$S_{h/2} - S_h + R_{h/2} - R_h = 0. \quad ❋$$

При маленьких h имеем $R_h \approx C \cdot h^p,\ R_{h/2} \approx C \cdot (h/2)^p$. Следовательно,

$$R_h \approx 2^p R_{h/2},\ R_{h/2} \approx \frac{1}{2^p} R_h.$$

Подставляя это в ❋, получаем

$$R_{h/2} \approx \frac{S_{h/2} - S_h}{2^p - 1}, \quad R_h = \frac{2^p}{2^p - 1}(S_{h/2} - S_h).$$

Это формулы Рунге оценки погрешности.

Несколько задач

0.1 f непрерывна на $[a,b]$ и $\int_a^b f = 0$, f знакопостоянна на $[a,b]$. Доказать, что $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Доказательство. От противного. Пусть $\exists c \in [a,b] : \quad f(c) > 0$ (б.о.о $f(c) > 0$, для $f(c) < 0$ аналогично).

Так как f непрерывна, то найдётся окрестность $O_\varepsilon(c)$ такая, что $\forall x \in O_\varepsilon(c) \quad f(x) > 0$. Получается, на отрезке $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ f положительна.

Учитывая, что f знакопостоянна, то есть в нашем случае положительна на $[a,b]$, то мы не можем «компенсировать» ту положительную часть под графиком на отрезке $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, так как на $[a,b]$ функция неотрицательна. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$. Противоречие с условием задачи доказывает требуемое.

0.2 Пусть $|f(x)| \leq M \quad \forall x > 0, \quad \forall x > 0 \quad \exists \int_0^x f(t)dt$. Доказать, что $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Запишем определение равномерной непрерывности для Φ, которое мы хотим доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x' > x'' \geq 0 \quad x' - x'' < \delta \Rightarrow |\Phi(x') - \Phi(x'')| < \varepsilon$$

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| = \left| \int_0^{x'} f(t)dt - \int_0^{x''} f(t)dt \right| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t)dt \right| \leq M(x' - x'') < M\delta$$

Сейчас мы хотим сделать $M\delta < \varepsilon$. Поэтому сделаем $\delta < \dfrac{\varepsilon}{M}$

0.3 Пусть f интегрируема на $[0,1]$ и $\int_0^1 f(x)dx < 0$. Доказать, что $\exists [\alpha, \beta] \quad f \leq 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. От противного.

$$\forall [\alpha, \beta] \subset [0,1] \quad \exists c \in [\alpha, \beta] \quad f(c) > 0$$

По условию

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k < 0$$

Зафиксируем n. Разобъём наш отрезок $[0,1]$ на n отрезочков, для каждого из которых найдём ξ_i такое, что $f(\xi_i) > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > 0$. Противоречие. Значит существует такой отрезок, на котором f неположительна.

0.4 Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[-1,1]$ и для каждой непрерывной на $[-1,1]$ чётной функции $g(x)$ выполняется $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0$, то функция $f(x)$ нечётна.

Доказательство. Наша f представляется как

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Причём $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ чётная, $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ — нечётная.
Возьмём $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.
Тогда

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)+f(-x)}{2} g(x)dx + \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(-x)}{2} g(x)dx =$$

$$= \int_{1}^{1} g(x) \cdot g(x)dx + \int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(-x)}{2} g(x)dx = 0$$

$\frac{f(x)-f(-x)}{2} g(x)$ — нечётная, $g(x) \cdot g(x)$ — чётная.

Очевидно $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)-f(-x)}{2} g(x)dx = 0$, тогда $\int_{1}^{1} g(x) \cdot g(x)dx = 0$, тогда $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = 0$, то есть чётная часть функции равна нулю. Другими словами, f нечётная.

0.5 Докажите, что если на отрезке функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, то интегрируемы также функции $\max(f(x), g(x))$ и $\min(f(x), g(x))$.

Доказательство (ваще сырое).

Рассмотрим функции $f(x) + g(x), |f(x) - g(x)|$.

$f(x) + g(x)$ интегрируема очевидно, $h(x) = |f(x) - g(x)|$ неочевидно, но тоже интегрируема как кусочная функция. В каждой точке у нас значение $h(x)$ равно либо $f(x) - g(x)$ либо $g(x) - f(x)$. Важно отметить, что $h(x)$ имеет конечное или счётное количество «стыков» между этими частями. Это свойство сохраняет интегрируемость функции. В итоге $h(x) = |f(x) - g(x)|$ интегрируема.

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

$$\min(f(x), g(x)) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

$\max(f(x), g(x)), \min(f(x), g(x))$ - это линейные комбинации функций $f(x) + g(x)$ и $|f(x) - g(x)|$. Следовательно они интегрируемы.