

HOW TO заботать коллоквиум по матанализу (2 семестр)

Список билетов

1. ~~Понятие определённого интеграла~~
2. ~~Интегрируемость суммы функций~~
3. ~~Ограниченность интегрируемой функции~~
4. ~~Пример ограниченной неинтегрируемой функции~~
5. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости
6. ~~Аддитивность интеграла по множеству~~
7. ~~Интегрируемость непрерывной функции~~
8. ~~Интегрируемость монотонной функции~~
9. ~~Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек~~
10. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций - **много недочётов!**
11. ~~Интегрируемость произведения функций~~
12. ~~Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость~~
13. ~~Формула Ньютона-Лейбница~~
14. ~~Пример неинтегрируемой функции с первообразной~~
15. ~~Пример интегрируемой функции без первообразной~~
16. ~~Интегрирование по частям~~
17. ~~Замена переменной~~
18. ~~Первая теорема о среднем~~
19. Вычисление площадей - **что здесь писать, друзья?**
20. ~~Вычисление длины дуги~~
21. ~~Приближённое вычисление интеграла: методы прямоугольников, трапеций, Симпсона~~

Несколько задач для подготовки с решением

Понятие определённого интеграла

Разбиение отрезка $[a, b]$ - $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, $x_i < x_{i+1}$

Мелкость разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \max(x_k - x_{k-1})$$

Интегральная сумма: $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = S_\tau$

Определение f , определённая на $[a, b]$, интегрируема по Риману на $[a, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_t < \delta \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon)$$

Обозначаем $I = \int_a^b f(x) dx$

Интегрируемость суммы функций

Теорема. Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) &= \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi) \end{aligned}$$

$$\left| S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) - \left(\alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \right) \right| \leq |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right|$$

В определении интегрируемости f и g берём не ε , а $\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| &\leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{и} \quad \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \Rightarrow \\ \Rightarrow |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Ограниченность интегрируемой функции

Теорема. Если f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Доказательство.

Проведём от противного: пусть f не ограничена, но интегрируема.

Тогда $I - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < I + \varepsilon$ для какого-то разбиения τ при заданном $\varepsilon > 0$ и любом выборе $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Так как f не ограничена, то найдётся такой отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором f не ограничена $\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ можно сделать сколь угодно большим по модулю. Противоречие.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции

Например, функция Дирихле $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\forall x \in [a, b] \quad D(x)$ не интегрируема на $[a, b]$, так как

1. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 0 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = 0$
2. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 1 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = \sum \Delta x_k = b - a$

Аддитивность интеграла по множеству

Пусть $c \in (a, b)$ и функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен сумме интегралов функции $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство:

Поскольку $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\tau = \{a, x_1, \dots, x_{n-1}, b\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что верхняя сумма Дарбу \overline{S}_τ и нижняя сумма Дарбу \underline{S}_τ удовлетворяют условию:

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon$$

Выберем такое разбиение, которое включает точку c . Теперь разбиваем τ на два подмножества τ' и τ'' , соответствующие отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$, так что $\tau = \{x_i \in \tau \mid x_i \leq c\}$ и $\tau'' = \{x_i \in \tau \mid x_i \geq c\}$.

Тогда верхние и нижние суммы Дарбу для $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ будут равны $\overline{S}_{\tau'}$ и $\underline{S}_{\tau'}$, а также $\overline{S}_{\tau''}$ и $\underline{S}_{\tau''}$ соответственно.

Поскольку разбиение τ является объединением τ' и τ'' , имеем:

$$\overline{S}_\tau = \overline{S}_{\tau'} + \overline{S}_{\tau''}$$

$$\underline{S}_\tau = \underline{S}_{\tau'} + \underline{S}_{\tau''}$$

Из этого следует, что:

$$(\overline{S}_{\tau'} + \overline{S}_{\tau''} - (\underline{S}_{\tau'} + \underline{S}_{\tau''})) < \varepsilon$$

$$(\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}}) < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}} < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}} < \varepsilon$$

Докажем уже наконец-то, что $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$$\left| \int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| \leq \left| \int_a^b - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| + \left| \int_a^c - S_{\tau'} \right| + \left| \int_c^b - S_{\tau''} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_a^c - S_{\tau'} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_c^b - S_{\tau''} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Интегрируемость непрерывной функции

Теорема.

Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

f непрерывна на $[a, b]$, значит она равномерно непрерывна на $[a, b]$ (теорема Кантора):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Теперь поймём, что

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta'(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta' \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon')$$

Рассмотрим разбиение τ , у которого $\lambda_\tau < \delta$ (δ берём из определения равномерной непрерывности).

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

$$\forall \xi'_j, \xi''_j \in [x_j, x_{j+1}] \quad |\xi'_j - \xi''_j| < \delta, \quad \text{так как} \quad \lambda_\tau < \delta$$

И по равномерной непрерывности получаем

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon$$

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

Докажем это утверждение (*sup - inf*):

1. \Leftarrow :

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(\xi'_j) \leq M_j \\ f(\xi''_j) \geq m_j \end{cases} \Rightarrow f(\xi'_j) - f(\xi''_j) \leq M_j - m_j < \varepsilon$$

2. \Rightarrow :

Знаем $|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon$.

Возьмём *sup* по ξ'_j :

$$\sup_{\xi'_j} (f(\xi'_j) - f(\xi''_j)) = M_j - f(\xi''_j) \leq \varepsilon$$

А затем возьмём *inf* по ξ''_j и получим:

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

Мы доказали

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$$

Интегрируемость монотонной функции

Теорема.

Пусть f монотонна на $[a, b]$. Тогда f интегрируема $[a, b]$.

Доказательство.

Б.о.о. скажем, что f монотонно возрастает.

Определение интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta \Rightarrow \overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon)$$

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k \leq \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a)$$

Ну и чтобы $\delta(f(b) - f(a))$ было меньше ε , возьмём $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек

Теорема.

Пусть f интегрируема $[a, b]$. Тогда если поменяем f в конечном числе точек, то площадь останется неизменной.

Доказательство.

Пусть \check{f} это f , у которой поменяли $f(x_0)$ на c

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ f(x_0) - c, & x = x_0 \end{cases}$$

$$\int_a^b g(x) dx = 0$$

$$\forall \tau |s_\tau| \leq |c - f(x_0)| \cdot \lambda_\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f = \int_a^b (\check{f} + g) = \int_a^b \check{f} + 0 = \int_a^b \check{f}$$

Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций

Теорема.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и принимает значения в $[c, d]$. Пусть Φ непрерывна на $[c, d]$. Тогда $\Phi(f(x))$ интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

Φ равномерно непрерывна на $[c, d]$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [c, d] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Хотим $\overline{S_\tau(\Phi(f))} - S_\tau(\Phi(f)) < \varepsilon$.

f интегрируема \Rightarrow если $\lambda_\tau < \delta$, то

$$\overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

Это мы так взяли $\varepsilon = \delta^2$.

$$\text{Хотим оценить } \overline{S_\tau(\Phi(f))} - \underline{S_\tau(\Phi(f))} = \sum_{k=1}^n (M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)))$$

Имеем здесь 2 семейства индексов:

$$1. \ I = \{k : M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$$

$$2. \ J = \{k : M_k(f) - m_k(f) \geq \delta\}$$

$$1. \ k \in I:$$

По лемме (*sup - inf*)

$$f(\xi'_k) - f(\xi''_k) < \delta \Rightarrow |\Phi(f(\xi'_k)) - \Phi(f(\xi''_k))| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по этой же лемме} \quad M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) < \varepsilon$$

$$\sum_{k \in I} (M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f))) \Delta x_k < \varepsilon(b - a)$$

$$2. \ k \in J:$$

$$\overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

$$\sum_{k \in J} (M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f))) \Delta x_k < \varepsilon(b - a)$$

$$k \in J \Rightarrow M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) < \delta$$

$$\delta \sum_{k \in J} \Delta x_k \leq \overline{S_\tau(f)} - \underline{S_\tau(f)} < \delta^2$$

$$\sum_{k \in J} \Delta x_k \leq \delta$$

Φ непрерывна на $[c, d] \Rightarrow$ ограничена числом L .

$$\sum_{k \in J} M_k(\Phi(f)) - m_k(\Phi(f)) \Delta x_k \leq 2L \sum_{k \in J} \Delta x_k \leq 2L\varepsilon$$

Интегрируемость произведения функций

Теорема. Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$. Тогда $f \cdot g$ тоже интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

$$(f - g)^2 = f^2 - 2fg + g^2$$

$(f - g)^2$ интегрируема, так как $f - g$ интегрируема и $(\dots)^2$ интегрируемо.

$$fg = \frac{f^2 + g^2 - (f - g)^2}{2}$$

Правая часть равенства интегрируема, значит левая тоже.

Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость

Определение. Пусть f интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall x \in (a, b) \quad \exists \int_a^x f(t)dt$.

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом (договоримся, что $\int_a^a = 0$).

Теорема.

Пусть f ограничена на $[a, b]$. Тогда Φ непрерывна и
 $\exists C : |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in (a, b)$ (липшицевость).

Доказательство. Из липшицевости следует непрерывность по определению непрерывности ($\delta = \frac{\varepsilon}{C}$) (типа множество липшицевостных функций является подмножеством непрерывных функций)

Предположим $x < y$:

$$\begin{aligned} |\Phi(x) - \Phi(y)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \left[\begin{array}{l} \left| \sum f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum |f(\xi_k)| \Delta x_k \\ \left| \sum f(\xi_k) \Delta x_k \right| \rightarrow \left| \int f \right| \\ \sum |f(\xi_k)| \Delta x_k \rightarrow \int |f| \end{array} \right] \leq \\ &\leq [|f| \leq B] \leq B \cdot \left| \int_x^y dt \right| \leq B(y - x) \end{aligned}$$

Теорема.

Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \\ \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) = \\ &= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt}{h} + f(x_0) \\ \left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt}{h} \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt\end{aligned}$$

О, а ведь f непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Тут мы берём любой ε , по нему находим δ и берём $h < \delta$. Тогда $|x_0 - t| < h$.

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ первообразную F . Тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Доказательство.

Рассмотрим равномерное разбиение $[a, b]$ (на n равных частей). Тогда $\frac{b-a}{n}$ - длина отрезка разбиения.

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \left[\begin{array}{l} \text{теорема Лагранжа} \\ \exists \xi_k \in [x_k, x_{k-1}] : \\ F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ = f(\xi_k) \Delta x_k \end{array} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (F(b) - F(a)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

Пример неинтегрируемой функции с первообразной

$$F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), x \in (0, 1]$$

$$f = F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

f неинтегрируема на $(0, 1]$, потому что не ограничена на этом множестве.

Пример интегрируемой функции без первообразной

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & x > 0 \\ -x + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Добьёмся того, чтобы в нуле первообразная была непрерывна. Тогда $C_1 = C_2 = C$. Тогда первообразная представляет собой функцию $|x| + c$, которая, конечно, не дифференцируема в нуле.

Интегрирование по частям

Теорема.

Пусть u и v непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

$$uv|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Доказательство.

По условиям теоремы, оба интеграла существуют как интегралы от кусочно непрерывных функций.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

За исключением конечного числа точек, так как кусочная дифференцируемость.

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$$

Замена переменной

Теорема.

Пусть f непрерывна на $[x_1, x_2]$, а g непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ и $g(t_1) = x_1, g(t_2) = x_2$ и $g(t) \in [x_1, x_2], t \in [t_1, t_2]$. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) d'(t) dt$$

Доказательство.

f непрерывна. А если f непрерывна, то существует первообразная F .

По теореме (?) $\Phi = \int_{x_1}^x f(t)dt$ - дифференцируема и $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда $\Phi(x)$ - перво-

образная $\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$.

Рассмотрим $F(g(t)), t \in [t_1, t_2]$.

$$F'(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$F(g(t))$ - первообразная для $f(g(t))g'(t) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t)dt = F(g(t_2)) - F(g(t_1)) =$

$F(x_2) - F(x_1)$

Итого $F(x_2) - F(x_1) = F(x_2) - F(x_1)$. Доказано.

Теорема. Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство.

$$\Phi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h}$$

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t) - f(x_0))dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t) - f(x_0))dt}{h} \right| \leq$$

$$\leq \left[\begin{array}{l} \text{О, а ведь } f \text{ непрерывна : } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \quad 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \text{Берём любой } \varepsilon \text{ и по нему находим } \delta \text{ и берём } h < \delta \end{array} \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Первая теорема о среднем

Теорема.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$, Φ - весовая функция (≥ 0 и интегрируемая) и $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда существует $\mu \in [m, M]$:
$$\mu \int_a^b \Phi = \int_a^b \Phi f$$

Замечание.

В частности, если f непрерывная, то она достигает $\min = m$ и $\max = M$ на $[a, b]$ и по теореме Коши о промежуточных значениях

$$\forall \mu \in [m, M] \quad \exists x_0 \in [a, b] : \quad \mu = f(x_0)$$

Замечание.

Важно, чтобы Φ была знакопостоянной. Контрпример - $f = x$, $\Phi = \operatorname{sgn} x$ на $[-1, 1]$.

$$\int_{-1}^1 x \operatorname{sgn} x dx = 1$$

$$\mu \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0 \quad \forall \mu$$

Доказательство.

Рассмотрим 2 случая:

$$1. \int_a^b \Phi = 0 \Rightarrow m \int_a^b \Phi \leq \int_a^b f \Phi \leq M \int_a^b \Phi$$

$$\begin{cases} m \int_a^b \Phi = 0 \\ M \int_a^b \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f \Phi = 0$$

$$2. \int_a^b \Phi \neq 0$$

Поделим неравенство из предыдущего пункта на $\int_a^b \Phi$:

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f \Phi}{\int_a^b \Phi} \leq M$$

Вторая теорема о среднем

Пусть на $[a, b]$ функция f монотонна (б.о.о. убывает) и Φ интегрируема на $[a, b]$. Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] : \quad \int_a^b \Phi f = f(a) \int_a^\xi \Phi(x) dx + f(b) \int_\xi^b \Phi(x) dx$$

Эта теорема без доказательства (а почему не знаю)

Вычисление площадей

.

Я не знаю, что здесь писать, друзья. Жду Issue, если хотите:0

Вычисление длины дуги

Определение. *Кривой* называется непрерывное отображение отрезка на плоскость.

Определение. Кривая L называется *спрямляемой*, если множество длин вписанных в неё ломаных l ограничено сверху.

Пусть l - это какая-то ломаная.

$$|l| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k$$

$$|L| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Теорема.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$. Тогда кривая $L = (x(t), y(t))$ спрямляемая и её длина равна $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.

Доказательство.

$$|l| = [\text{теорема Лагранжа}] = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k$$

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} \Delta t_k$$

$$||l| - \sigma| = \left| \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \right) \Delta t_k \right| \leq$$

$$\leq [\text{не понял почему так}] \leq \sum_{k=1}^n |x'(\xi_k) - y'(\eta_k)| \Delta t_k$$

y' непрерывна по условию \Rightarrow ограничена. Тогда

$$\sum_{k=1}^n |x'(\xi_k) - y'(\eta_k)| \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta t_k \leq \overline{S(y', \tau)} - \underline{S(y', \tau)}$$

y' интегрируема, так как непрерывна $\Rightarrow \overline{S(y', \tau)} - \underline{S(y', \tau)} < \varepsilon$.

Мы выяснили, что при достаточно маленьких разбиениях $||l| - \sigma| < \varepsilon$.

$|l| \leq B \sum_{k=1}^n \Delta t_k = B(\beta - \alpha) \Rightarrow L$ - спрямляемая.

$$\begin{cases} |l| \approx \sigma \\ |l| \approx |L| (\text{определение супремума}) \end{cases} \Rightarrow \sigma \approx |L|$$

$$\begin{aligned} \left| |L| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| &\leq ||L| - |l|| + \left| |l| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \leq \\ &\leq ||L| - |l|| + ||l| - \sigma| + \left| \sigma - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \end{aligned}$$

Почему это меньше 3ε ?

1.

$$\forall \varepsilon \exists l_{\varepsilon} : |L| - |l_{\varepsilon}| < \varepsilon$$

Если ломаная меньше, чем l_{ε} , то она точно не короче, чем l_{ε} . Давайте мы будем рассматривать только такие ломаные.

Тогда $|L| - |l| < \varepsilon$.

2. $||l| - \sigma| < \varepsilon$ при мелких τ (это мы выяснили в начале)

3. $\left| \sigma - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| < \varepsilon$ - по определению интеграла.

Итого, имеем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \left| |L| - \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \right| \leq 3\varepsilon \Rightarrow |L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Численное интегрирование

Лекция 10.04.2023

Численное интегрирование

Пусть точки x_1, \dots, x_n принадлежат отрезку $[a, b]$, и известны значения $f(x_1), \dots, f(x_n)$. Существует **единственный** многочлен p степени не выше $n - 1$ со свойством

$$p(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Такой многочлен называется **интерполяционным**.

Две формы записи p :

- Форма Лагранжа (проходят в курсе алгебры)

$$\sum_{j=1}^n f(x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

- Форма Ньютона

$$f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \dots + f(x_1, \dots, x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

где $f(x_1, x_2)$ — разделённая разность 1 порядка, ..., $f(x_1, \dots, x_n)$ — разделённая разность $n - 1$ порядка. Разделённые разности определяются по индукции:

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_2, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_1}.$$

Формы записи Лагранжа и Ньютона разные, но на самом деле это один и тот же многочлен. Форма Ньютона нам пригодится.

Идея:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx$$

Методы прямоугольников

Заменяем f на интерполяционный многочлен нулевой степени (константа).

1. Левые прямоугольники. Заменяем f на $f(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a)$$

2. Средние прямоугольники. Заменяем f на $f((a+b)/2)$ — значение в середине отрезка.

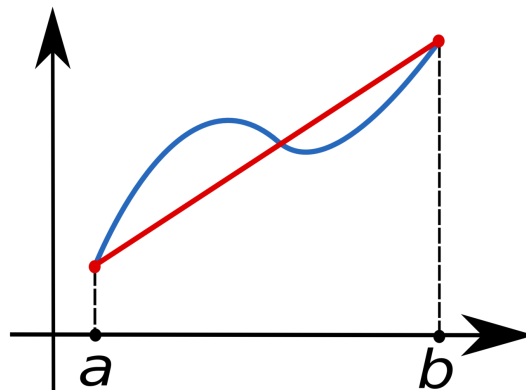
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f((a+b)/2)dx = f((a+b)/2)(b-a)$$

3. Правые прямоугольники. Заменяем f на $f(b)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = f(b)(b-a)$$

Метод трапеций

Заменяем f на интерполяционный многочлен первой степени. В качестве узлов интерполяции возьмём концы отрезка a и b . Получается хорда.

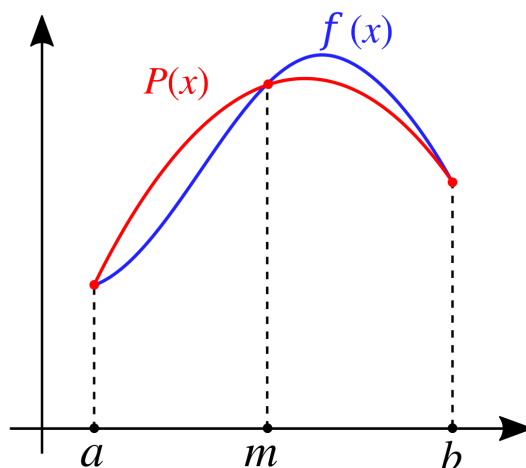


По формуле площади трапеции,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a)$$

Метод Симпсона

Заменяем f на интерполяционный многочлен второй степени. В качестве узлов возьмём a , $\frac{a+b}{2}$, b — три равноотстоящие точки.



Интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$f(a) + f(a, (a+b)/2)(x-a) + f(a, (a+b)/2, b)(x-a)(x-(a+b)/2) =: \heartsuit$$

Здесь

$$f(a, (a+b)/2) = \frac{f((a+b)/2) - f(a)}{(b-a)/2},$$

$$f(a, (a+b)/2, b) = \frac{\frac{f(b) - f((a+b)/2)}{(b-a)/2} - \frac{f((a+b)/2) - f(a)}{(b-a)/2}}{b-a}.$$

Эти разделённые разности — это суммы $f(a)$, $f((a+b)/2)$, $f(b)$ с какими-то коэффициентами (линейные комбинации). Значит, если подставить их в \heartsuit , получится сумма, в которой складываются $f(a)$, $f((a+b)/2)$, $f(b)$, умноженные на скобочки от x . Назовём эти скобочки $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$. То есть

$$\heartsuit = A(x)f(a) + B(x)f((a+b)/2) + C(x)f(b),$$

причём $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ не зависят от функции f .

Поэтому для любой f

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a) \int_a^b A(x)dx + f((a+b)/2) \int_a^b B(x)dx + f(b) \int_a^b C(x)dx$$

Интегралы от $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — это просто числа. Назовём их M , N , K .

$$\int_a^b f(x)dx \approx M \cdot f(a) + N \cdot f((a+b)/2) + K \cdot f(b) \quad *$$

Это и есть метод Симпсона, осталось найти коэффициенты M , N , K .

Возьмём $f \equiv 1$, $f(x) = x - a$, $f(x) = (x - a)^2$. Теперь заметим, что

- Интерполяционный многочлен в трёх узлах — это многочлен не выше второй степени
- Интерполяционный многочлен **единственен**

Значит, для таких f , как выше (это многочлены не выше второй степени), интерполяционный многочлен — это и есть f . Итак, если f — многочлен не выше второй степени, то

$$p(x) \equiv f(x).$$

Значит, для таких f имеем равенство в $*$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx = M \cdot f(a) + N \cdot f((a+b)/2) + K \cdot f(b).$$

Подставляя сюда $f \equiv 1$, $f(x) = x - a$, $f(x) = (x - a)^2$, получим систему для M , N , K .

$$\begin{cases} \int_a^b dx = M + N + K, \\ \int_a^b (x - a)dx = M \cdot 0 + N \cdot (b - a)/2 + K \cdot (b - a), \\ \int_a^b (x - a)^2 dx = M \cdot 0 + N \cdot (b - a)^2/4 + K \cdot (b - a)^2. \end{cases}$$

Считаем интегралы и сокращаем степени $b - a$, получаем

$$\begin{cases} b - a = M + N + K, \\ (b - a)/2 = N/2 + K, \\ (b - a)/3 = N/4 + K. \end{cases}$$

Решение системы

$$M = \frac{b - a}{6}, \quad N = \frac{4}{6}(b - a), \quad K = \frac{1}{6}(b - a).$$

Получили **формулу Симпсона**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4 \cdot f((a+b)/2) + f(b)).$$

Сделайте сами эти выкладки, проверьте.

Формула “3/8”

Аналогично строится метод, когда в качестве узлов интерполяции берутся четыре равноотстоящие точки: a , $\frac{2a+b}{3}$, $\frac{a+2b}{3}$, b . Не буду приводить выкладки, они аналогичны методу Симпсона.

Получается такая формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right).$$

Название 3/8 — потому что этот коэффициент дважды встречается в формуле (если раскрыть скобки).

Составные формулы численного интегрирования

Для более точных вычислений эти методы применяют не на всём $[a, b]$ сразу, а на его равномерном разбиении. Пусть всего m точек разбиения $\{x_j\}_{j=1}^m$ и $h := \frac{b-a}{m-1}$ — это длина каждого отрезка разбиения (шаг):

$$\begin{aligned} a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b, \\ x_{j+1} - x_j = h, \quad j = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Применяя к каждому из отрезков разбиения полученные методы и складывая результаты, получаем так называемые составные формулы.

1. Левые прямоугольники

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j).$$

2. Средние прямоугольники

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j + h/2).$$

3. Правые прямоугольники

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{j+1}).$$

4. Трапеции

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} = \\ h \cdot &\frac{[f(a) + f(x_2)] + [f(x_2) + f(x_3)] + [f(x_3) + f(x_4)] + \dots + [f(x_{m-1}) + f(b)]}{2} = \\ &h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=2}^{m-1} f(x_j) \right). \end{aligned}$$

Промежуточные слагаемые повторяются дважды. Так преобразовали, чтобы меньше раз вычислять значения f .

5. Симпсон

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{m-1} (f(x_j) + 4f(x_j + h/2) + f(x_{j+1})).$$

6. "3/8"

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \\ &\frac{h}{8} \sum_{j=1}^{m-1} (f(x_j) + 3f(x_j + h/3) + 3f(x_j + 2h/3) + f(x_{j+1})). \end{aligned}$$

Метод Рунге оценки погрешности

Обозначим $I = \int_a^b f(x)dx$.

Пусть S_h — результат численного интегрирования по составной формуле с шагом h ,

$R_h = I - S_h$ — погрешность вычислений.

Предположим, что $R_h \sim C \cdot h^p$ при $h \rightarrow 0$, где $p > 0$ — некоторое число.

Известно, что

- левые и правые прямоугольники $\Rightarrow p = 1$,
- средние прямоугольники и трапеции $\Rightarrow p = 2$,
- 3/8 и Симпсон $\Rightarrow p = 4$.

Имеем

$$\begin{cases} I = S_h + R_h, \\ I = S_{h/2} + R_{h/2}. \end{cases}$$

Значит,

$$S_{h/2} - S_h + R_{h/2} - R_h = 0. \quad *$$

При маленьких h имеем $R_h \approx C \cdot h^p$, $R_{h/2} \approx C \cdot (h/2)^p$. Следовательно,

$$R_h \approx 2^p R_{h/2}, \quad R_{h/2} \approx \frac{1}{2^p} R_h.$$

Подставляя это в $*$, получаем

$$R_{h/2} \approx \frac{S_{h/2} - S_h}{2^p - 1}, \quad R_h = \frac{2^p}{2^p - 1} (S_{h/2} - S_h).$$

Это формулы Рунге оценки погрешности.

Несколько задач

0.1 f непрерывна на $[a, b]$ и $\int_a^b f = 0$, f знакопостоянна на $[a, b]$. Доказать, что $f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Доказательство. От противного. Пусть $\exists c \in [a, b] : f(c) > 0$ (б.о.о $f(c) > 0$, для $f(c) < 0$ аналогично).

Так как f непрерывна, то найдётся окрестность $O_\varepsilon(c)$ такая, что $\forall x \in O_\varepsilon(c) \quad f(x) > 0$. Получается, на отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ f положительна.

Учитывая, что f знакопостоянна, то есть в нашем случае положительна на $[a, b]$, то мы не можем «компенсировать» ту положительную часть под графиком на отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, так как на $[a, b]$ функция неотрицательна. Тогда $\int_a^b f(x)dx > 0$. Противоречие с условием задачи доказывает требуемое.

0.2 Пусть $|f(x)| \leq M \quad \forall x > 0, \quad \forall x > 0 \quad \exists \int_0^x f(t)dt$. Доказать, что $\Phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Запишем определение равномерной непрерывности для Φ , которое мы хотим доказать:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x' > x'' \geq 0 \quad x' - x'' < \delta \Rightarrow |\Phi(x') - \Phi(x'')| < \varepsilon$$

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| = \left| \int_0^{x'} f(t)dt - \int_0^{x''} f(t)dt \right| = \left| \int_{x''}^{x'} f(t)dt \right| \leq M(x' - x'') < M\delta$$

Сейчас мы хотим сделать $M\delta < \varepsilon$. Поэтому сделаем $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$

0.3 Пусть f интегрируема на $[0, 1]$ и $\int_0^1 f(x)dx < 0$. Доказать, что $\exists[\alpha, \beta] \quad f \leq 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. От противного.

$$\forall[\alpha, \beta] \subset [0, 1] \quad \exists c \in [\alpha, \beta] \quad f(c) > 0$$

По условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < 0$$

Зафиксируем n . Разобьём наш отрезок $[0, 1]$ на n отрезочков, для каждого из которых найдём ξ_i такое, что $f(\xi_i) > 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx > 0$. Противоречие. Значит существует такой отрезок, на котором f неположительна.