

# Ботаем экзамен по алгебре

## Декартово произведение множеств

**Прямое, или декартово произведение двух множеств** — множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств

$$\{(x; y) | x \in A, y \in B\}$$

## Понятие отношения на множестве

Пусть  $M_1, M_2, \dots, M_n$  — некоторые множества. Отношением на совокупности этих множеств называется любое подмножество декартова произведения этих множеств. Если  $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ , то говорят об отношении на множестве  $M$ .

## Свойства отношений

- *Рефлексивность*:  $\forall a \in X (aRa)$
- *Симметричность*:  $\forall a, b \in X (aRb \Rightarrow bRa)$
- *Антисимметричность*:  $\forall a, b \in X (aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$
- *Транзитивность*:  $\forall a, b, c \in X (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc)$

## Отношение эквивалентности

Отношение на множестве  $M$  называется **отношением эквивалентности**, если оно **рефлексивно, симметрично и транзитивно**.

Вот несколько примеров отношений эквивалентности:

- на любом множестве: отношение равенства;
- на множестве треугольников: отношение подобия;
- на множестве действительных чисел: иметь одинаковую целую часть;
- на множестве вершин графа: быть связанными;
- на множестве людей: быть одного года рождения.

## Теорема о разбиении

**Разбиением множества  $M$**  называется его представление в виде объединения непустых непересекающихся подмножеств.

**Теорема о разбиении множества** Каждое отношение эквивалентности задаёт разбиение множества, на котором оно определено. Любое разбиение множества задается некоторым отношением эквивалентности. **Доказательство**

Пусть  $R$  — отношение эквивалентности на множестве  $M$ . Для каждого элемента  $a$  из  $M$  построим множество  $M_a = \{x | x \in M \text{ и } xRa\}$ . Среди этих множеств могут оказаться одинаковые. Соберём совокупность всех не совпадающих между собой множеств  $M_a$  и покажем, что их объединение образует разбиение множества  $M$ .

Во-первых, заметим, что каждое множество не пусто, поскольку  $a \in M_a$  в силу рефлексивности отношения  $R$ .

Во-вторых, объединение всех выбранных нами множеств совпадает с  $M$ , поскольку каждый элемент из  $M$  попадает в подмножество, отмеченное им самим в роли индекса.

В третьих, покажем, что два различных множества  $M_a$  и  $M_b$  не пересекаются. Допустим противное: пусть  $c \in M_a \cap M_b$ . По построению множеств  $M_a$  и  $M_b$  это означает, что  $cRa$  и  $cRb$ . Ввиду симметричности отношения  $R$  имеем  $aRc$ . Выберем теперь произвольный  $x$  из  $M_a$ . Поскольку  $xRa$  и  $aRc$ , транзитивность отношения показывает, что  $xRc$ . Но при этом  $cRb$ . Применяя ещё раз свойство транзитивности, получаем  $xRb \Rightarrow x \in M_b$ . Так как  $x$  произвольный,  $M_a \subseteq M_b$ . В то же время элементы  $a$  и  $b$  абсолютно равноправны, поэтому  $M_b \subseteq M_a$ . Значит,  $M_a = M_b$ , что противоречит тому, что  $M_a$  и  $M_b$  различны.

## Отношение порядка

Отношение на множестве  $M$  называется **отношением порядка**, если оно **рефлексивно, транзитивно и антисимметрично**. Вот несколько примеров отношений порядка:

- на множестве прямоугольников: содержаться;
- на множестве действительных чисел: меньше или равно;
- на множестве сотрудников одного учреждения: быть начальником.

## Максимальные и минимальные элементы

Элемент  $M$  множества  $A$ , упорядоченного отношением  $\leq$  называется **максимальным**, если  $\forall a \in A (a \geq M \Rightarrow a = M)$

Элемент  $m$  множества  $A$ , упорядоченного отношением  $\leq$  называется **минимальным**, если  $\forall a \in A (a \leq m \Rightarrow a = m)$

## Наибольшие и наименьшие элементы

Элемент  $a \in A$  называется **наименьшим**, если  $\forall x \in A (a \leq x)$

Элемент  $a \in A$  называется **наибольшим**, если  $\forall x \in A (a \geq x)$

## Чем отличается минимальный элемент от наименьшего?

????????????????????????????????

## Отображения множеств

Отображением множества  $M_1$  в множество  $M_2$  называют бинарное отношение, определённое на этих множествах, если первый компонент пары  $(a, b) \in M_1 \times M_2$  рассматривается как *аргумент*, а второй – как *значение* для этого аргумента.

## Свойства отображений

Отображение  $f$  множества  $M_1$  в множество  $M_2$  называется **всюду определённым**, если  $D(f) = M_1$ .

Отображение  $f$  множества  $M_1$  в множество  $M_2$  называется **сюръективным**, если  $E(f) = M_2$ .

Отображение  $f$  множества  $M_1$  в множество  $M_2$  называется **однозначным**, если каждый элемент  $a$  из  $D(f)$  имеет ровно одно значения в множестве  $M_2$ :

$$\forall a \in M_1 \forall b \in M_2 \forall c \in M_2 (b = f(a) \wedge c = f(a) \Rightarrow b = c) \quad (1)$$

Отображение  $f$  множества  $M_1$  в множество  $M_2$  называется **инъективным**, если каждый элемент  $b$  из  $E(f)$  является значением только одного элемента из  $M_1$ :

$$\forall b \in M_2 \forall a \in M_1 \forall c \in M_1 (b = f(a) \wedge b = f(c) \Rightarrow a = c) \quad (2)$$

Отображение  $f$  множества  $M_1$  в множество  $M_2$  называется **биективным**, если оно **инъективно и сюръективно**.

Отображение  $f$  множества  $M_1$  в множество  $M_2$  называется **взаимнооднозначным**, если оно **инъективно, однозначно сюръективно**.

## Обратное отображение

Пусть  $f : X \rightarrow Y$  - биективное отображение. Тогда каждому  $y \in Y$  соответствует единственный  $x$ , который обозначается как  $f^{-1}(y)$  такой, что  $f(x) = y$ . Таким образом определено отображение  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , которое называется **обратным** отображению  $f$ .

## Композиция отображений и ее свойства

**Композицией отображений**  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow Z$  называется отображение  $f \circ g : X \rightarrow Z$ , обозначающее  $f(g(x))$ .

Свойства:

- Композиция двух отображений определена, тогда и только тогда, когда область значений первого отображения совпадает с областью отображения второго.
- Отображение тогда и только тогда имеет обратное, когда оно взаимно однозначно (биективно).
- Из биективности отображения вытекает биективность обратного отображения

### Свойства композиции отображений

- *Ассоциативность*:  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- *Некоммутативность*:  $fg \neq gf$

## Операции на множестве

**Операцией** на множестве  $M$  называется всюду определённая функция из  $M^n$  в  $M$ . Число  $n$  называют *арностью*, или *местностью*, данной операции. Вот несколько примеров операций:

- на множестве натуральных чисел: сложение двух чисел; это бинарная (двуместная) операция;
- на множестве целых чисел: нахождение числа, противоположного данному; это унарная (одноместная) операция;
- на множестве рациональных чисел: нахождение среднего арифметического  $n$  чисел; это  $n$ -арная ( $n$ -местная) операция;
- на множестве подмножеств данного множества: операция пересечения подмножеств; это бинарная операция.

## Свойства операций

- *Коммутативность* операции  $\circ$ :  $\forall x, y \in M \quad (x \circ y = y \circ x)$
- *Ассоциативность* операции  $\circ$ :  $\forall x, y, z \in M \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- Элемент  $e$  из  $M$  называется *нейтральным* относительно операции  $\circ$ :  $\forall x \in M \quad x \circ e = e \circ x = x$
- Элемент  $y$  из  $M$  называется *симметричным* относительно операции  $\circ$ :  $x \circ y = y \circ x = e$

## Понятие полугруппы, группы

**Полугруппа** - множество, на котором определена ассоциативная операция.

Примеры полугрупп:

- множество натуральных чисел как относительно операции сложения, так и операции умножения;
- множество отрицательных целых чисел относительно сложения;
- булеан множества  $M$  относительно операций объединения и пересечения;
- множество всюду определённых функций, отображающих множество  $M$  в себя, относительно операции композиции

**Группа** - множество, на котором определена ассоциативная операция, имеется нейтральный элемент и каждый элемент обладает симметричным (множество, на котором определена ассоциативная операция)

Примеры групп:

- множество целых чисел относительно операции сложения;
- множество положительных рациональных чисел относительно операции умножения;
- множество ненулевых действительных чисел относительно операции умножения;
- множество взаимно-однозначных отображений произвольного множества  $M$  на себя.

## Симметрическая группа

**Симметрической группой** ( $S_n$ ) называется множество *подстановок* на множестве (подстановка на множестве  $M_n$  - взаимнооднозначное отображение множества  $M_n$  на себя)

## Разрешимость уравнений в группе

????????????????????????????????

## Кольца и их свойства

**Кольцо** - множество  $M$ , на котором определены две бинарные операции  $\circ$  и  $*$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- $M$  - группа относительно  $\circ$
- $*$  дистрибутивна относительно  $\circ$

Примеры:

- множество целых чисел относительно операций сложения и умножения;
- множество действительных чисел относительно операций сложения и умножения;
- множество многочленов с действительными коэффициентами относительно операций сложения и умножения;
- множество функций из  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  относительно операций сложения и умножения.

## Области целостности и поля

**Область целостности** - коммутативное ассоциативное кольцо без *делителей нуля* (Ненулевые элементы  $a$  и  $b$  кольца  $K$  называются *делителями нуля*, если  $ab = 0$ ).

**Поле** - коммутативное ассоциативное кольцо с 1, каждый ненулевой элемент которого обратим.

## Понятие вектора

**Вектор** — это элемент векторного пространства (некоторого множества с двумя операциями на нём, которые подчиняются восьми аксиомам).

**Вектором** называется отрезок, концы которого упорядочены. Первый из его концов называется началом, второй – концом вектора.

## Операции сложения и умножения векторов и их свойства

Свойства:

- *Коммутативность*:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- *Ассоциативность сложения*  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- *Нейтральный элемент* относительно сложения  $\vec{0}$ :  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- *Противоположный вектор* для любого ненулевого относительно умножения:  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- *Ассоциативность умножения*:  $(\lambda \cdot \eta) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\eta \cdot \vec{a})$
- *Дистрибутивность* умножения относительно сложения:  $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ ,  $(\lambda + \eta) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \eta \cdot \vec{a}$
- *Нейтральный элемент* относительно умножения:  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

## Коллинеарность векторов

Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  **коллинеарны**, если  $\exists t: \vec{a} = t \cdot \vec{b}$ .

Два вектора **коллинеарны**, если отношения их координат равны.

Два вектора **коллинеарны**, если их векторное произведение равно нулевому вектору.

## Базис на плоскости

**Базисом** на плоскости называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.

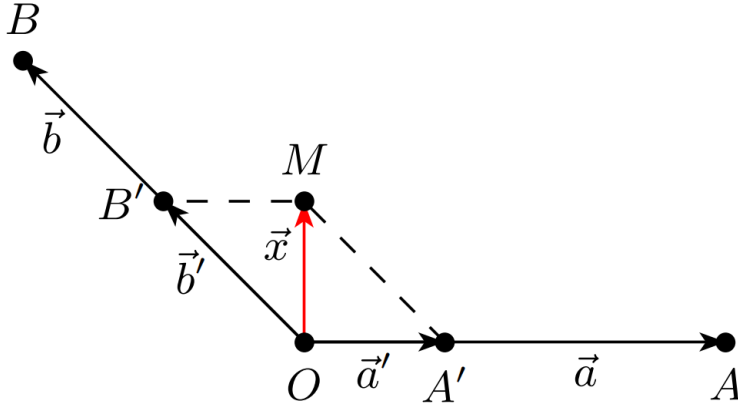
### Теорема о разложении вектора по базису на плоскости

Пусть  $(\vec{a}, \vec{b})$  – базис некоторой плоскости, а  $\vec{x}$  – вектор, лежащий в этой плоскости. Тогда существуют, и притом единственные, числа  $t_1$  и  $t_2$  такие, что

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} \quad (3)$$

#### Доказательство

Отложим векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{x}$  от некоторой точки  $O$  нашей плоскости и обозначим концы полученных направленных отрезков через  $A$ ,  $B$  и  $M$  соответственно.



Спроектируем точку  $M$  на прямую  $OA$  параллельно прямой  $OB$  и на прямую  $OB$  параллельно прямой  $OA$ . Обозначим полученные точки через  $A'$  и  $B'$  соответственно и положим  $\vec{a}' := \overrightarrow{OA'}$  и  $\vec{b}' := \overrightarrow{OB'}$ . Ясно, что  $\vec{a}' \parallel \vec{a}$  и  $\vec{b}' \parallel \vec{b}$ . Поскольку  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ , по критерию коллинеарности векторов  $\vec{a}' = t_1\vec{a}$  и  $\vec{b}' = t_2\vec{b}$  для некоторых чисел  $t_1$  и  $t_2$ . Тогда  $\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ .

Осталось доказать единственность. Пусть  $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b}$  для некоторых чисел  $s_1$  и  $s_2$ . Вычитая это равенство из равенства  $\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$  имеем  $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} = \vec{0}$ . Если  $t_1 - s_1 \neq 0$ , то  $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} \parallel \vec{b}$ , противоречие. Следовательно,  $t_1 - s_1 = 0$ , то есть  $t_1 = s_1$ .

## Действия с векторами в координатной форме

№	Вид операции	на плоскости	в пространстве
1	Координаты вектора	$A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$	$A(x_1; y_1; z_1); B(x_2; y_2; z_2)$ $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$
2	Длина вектора	$\vec{a} = (x; y)$ $ \vec{a}  = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\vec{a} = (x; y; z)$ $ \vec{a}  = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3	Сложение и вычитание векторов	$\vec{a} = (x_1; y_1); \vec{b} = (x_2; y_2);$ $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2)$	$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2);$ $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$
4	Умножение вектора на число	$\vec{a} = (x; y); k \in R$ $k\vec{a} = (kx; ky)$	$\vec{a} = (x; y; z); k \in R$ $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$
5	Скалярное произведение векторов	$\vec{a} = (x_1; y_1); \vec{b} = (x_2; y_2);$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$	$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1); \vec{b} = (x_2; y_2; z_2);$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
6	Угол между векторами	$\cos(a; b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$	$\cos(a; b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$
7	Координаты середины отрезка	$A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	$A(x_1; y_1; z_1); B(x_2; y_2; z_2)$ $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$
8	Расстояние между точками	$A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ $ \overrightarrow{AB}  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$A(x_1; y_1; z_1); B(x_2; y_2; z_2)$ $ \overrightarrow{AB}  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

## Компланарность векторов

**Компланарные векторы** — это векторы, которые параллельны одной плоскости или лежат на одной плоскости.

Условия компланарности векторов:

- Для 3-х векторов выполняется условие: если смешанное произведение 3-х векторов равно нулю, то эти три вектора компланарны
- Для 3-х векторов выполняется условие: если три вектора линейно зависимы, то они компланарны.
- если среди векторов не более 2-х линейно независимых векторов, то они компланарны.

## Базис пространства

**Базисом пространства** называется упорядоченная тройка некопланарных векторов

**Теорема о разложении вектора по базису в пространстве**

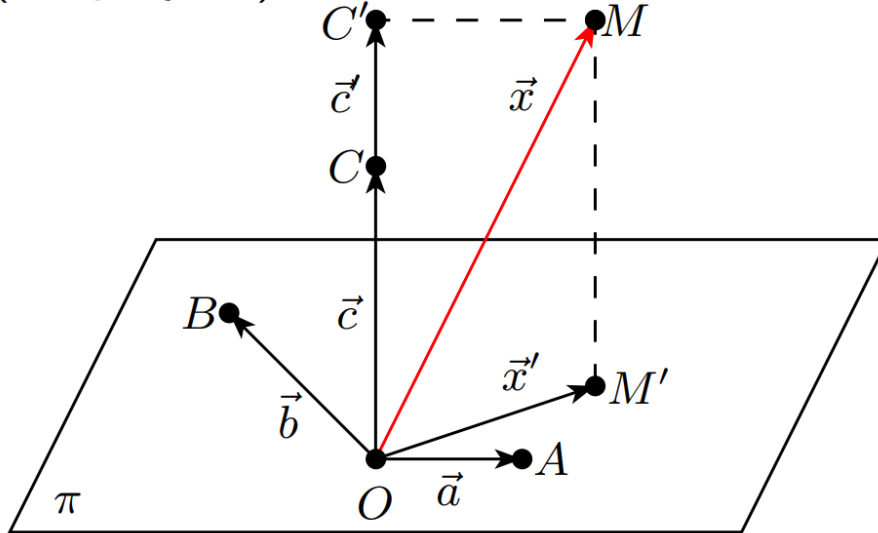
Пусть  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  - базис пространства, а  $\vec{x}$  - произвольный вектор. Тогда существуют единственные  $t_1, t_2, t_3$  такие, что

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c} \quad (4)$$

## Доказательство

Отложим вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  от некоторой точки  $O$  и обозначим концы полученных направленных отрезков через  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $M$  соответственно.

Поскольку  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  неколлинеарны, существует единственная плоскость  $\pi$ , проходящая через точки  $O$ ,  $A$  и  $B$ . Спроектируем точку  $M$  на плоскость  $\pi$  параллельно прямой  $OC$  и на прямую  $OC$  параллельно плоскости  $\pi$ .



Обозначим полученные точки как  $M'$  и  $C'$  и положим  $\vec{x}' := \overrightarrow{OM'}$  и  $\vec{c}' := \overrightarrow{OC'}$ . По теореме о разложении вектора по базису на плоскости  $\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$  для некоторых  $t_1$  и  $t_2$ . Далее  $\vec{c}' \parallel \vec{c} \neq \vec{0}$ , откуда  $\vec{c}' = t_3\vec{c}$  для некоторого  $t_3$ . Тогда  $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{c}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$ . Существование чисел  $t_1, t_2, t_3$  с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Пусть  $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$  для некоторых  $s_1, s_2$  и  $s_3$ . Вычитая это равенство из равенства  $\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$ , получим

$$(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c} = \vec{0} \quad (5)$$

Если  $t_1 - s_1 \neq 0$ , то  $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} - \frac{t_3 - s_3}{t_1 - s_1} \cdot \vec{c}$ . Но тогда вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны, что противоречит условию  $\Rightarrow t_1 - s_1 = 0 \Rightarrow t_1 = s_1$ . Аналогично  $t_2 = s_2$  и  $t_3 = s_3$ .

## Скалярное произведение векторов

**Скалярным произведением** ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается через  $\vec{a}\vec{b}$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \quad (6)$$

Свойства:

- $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$
- $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$
- $\vec{a}\vec{a} \geq 0$ , причём  $\vec{a}\vec{a} = 0$  только тогда, когда  $\vec{a} = \vec{0}$ .

## Компонента вектора на прямую и проекция вектора на ось

Если  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , то  $x\vec{i}$ ,  $y\vec{j}$  и  $z\vec{k}$  - **компоненты** этого вектора.



**Проекция** вектора на ось – это вектор, началом и концом которого являются соответственно проекции начала и конца заданного вектора.

## Свойства компоненты, проекции и скалярного произведения

Свойства проекций (пусть векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  проецируются на прямую  $l$ ):

- $pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l\vec{a} + pr_l\vec{b}$
- $pr_l(t\vec{a}) = tpr_l\vec{a}$

## Векторное и смешанное произведения векторов

**Упорядоченная тройка** некопланарных векторов  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  называется правой, если из конца вектора  $\vec{w}$  поворот от  $\vec{u}$  к  $\vec{v}$  по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и левой – в противном случае. Правую тройку векторов называют также положительно ориентированной, а левую – отрицательно ориентированной.

**Векторным произведением** неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$  такой, что:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})})$
- $\vec{c}$  ортогонален к векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
- тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  - правая.

Если  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  - произвольные вектора, а  $t$  - произвольное число, то

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$  (антикоммутативность)
- $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

**Смешанным произведением** векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{c}$  (обозначается  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ). Таким образом,  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ .

**Критерий компланарности векторов.** Вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

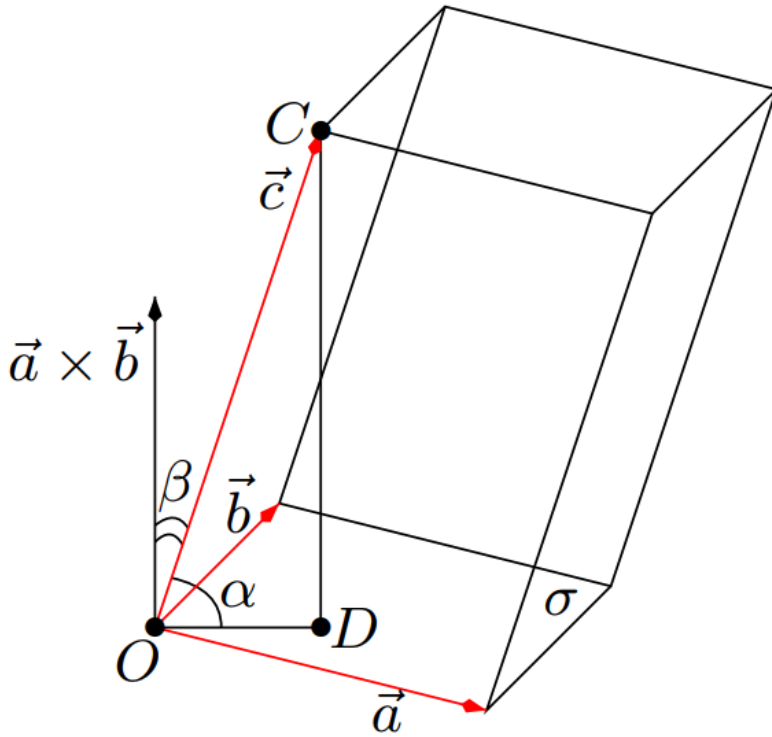
**Доказательство.** Необходимость. Предположим, что вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны. Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , и потому  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$ .

Пусть теперь  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ . Отложим вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  ортогонален этой плоскости а значит и вектору  $\vec{c}$ . Следовательно  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$ .

Достаточность. Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то компланарность очевидна. Пусть теперь  $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ . Будем считать что вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  отложены от одной и той же точки. Пусть  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ . Это означает что  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$ . Следовательно  $\vec{a} \times \vec{b}$  ортогонален вектору  $\vec{c}$ . Но вектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  ортогонален плоскости  $\delta$ , образованной векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Поскольку  $\vec{c}$  ортогонален этому вектору, то он лежит в  $\delta$ . А это означает, что вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

**Теорема (геометрический смысл смешанного произведения)** Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.

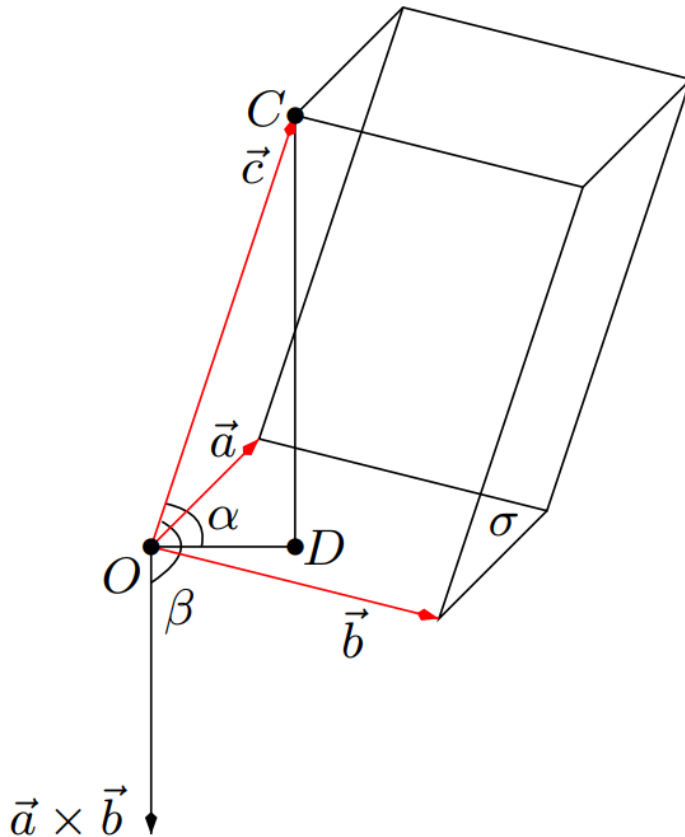
**Доказательство.** Пусть  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  - три некопланарных вектора. Предположим сначала, что тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  - правая.



Отложим вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  от точки  $O$ . Пусть точка  $C$  такая, что  $\vec{OC} = \vec{c}$ , а  $D$  - проекция точки  $C$  на плоскость векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , которую обозначим через  $\sigma$ . Учитывая, что  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$  и потому  $\sin \alpha = \cos \beta$ , и юзя геометрический смысл векторного произведения, имеем

$$V = S \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \quad (7)$$

Пусть теперь тройка  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  левая. Тогда  $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ , откуда  $\sin \alpha = -\cos \beta$ .



$$V = S \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \alpha = -|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta = -(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c} \quad (8)$$

- $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$ , если тройка правая
- $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$ , если тройка левая

Вот еще свойства (пусть  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  - произвольные вектора, а  $t$  - число)

- $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$
- $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$
- $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$  item  $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$

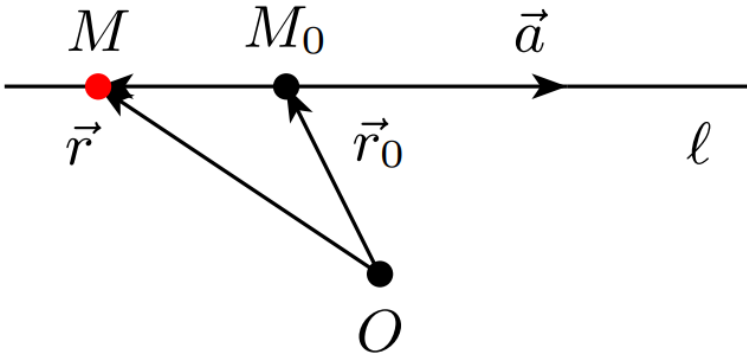
## Системы координат на плоскости и в пространстве

**Координатами** точки  $M$  называются координаты её радиус-вектора.

Точка  $A$  делит отрезок  $M_0M_1$  внутренним образом в отношении  $\lambda$ , если  $\frac{M_0A}{AM_1} = \lambda$ ,  
внешним образом, если  $\frac{M_0A}{AM_1} = -\lambda$

$$A \left( \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}; \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}; \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda} \right) \quad (9)$$

## Виды уравнений прямой на плоскости



Любая точка на прямой может быть задана как  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}, \vec{r}_0 = (x_0, y_0), \vec{r} = (x, y), \vec{a} = (r, s)$

Уравнения прямой:

1. Параметрическое:  $\begin{cases} x = x_0 + tr, \\ y = y_0 + ts \end{cases}$
2. Каноническое:  $\frac{x - x_0}{r} = \frac{y - y_0}{s}$
3. Общее:  $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$

**Определение.** Пусть прямая  $l$  задана уравнением  $Ax + By + C = 0$ . Тогда вектор  $\vec{n} = (A, B)$  называется **главным вектором** прямой  $l$ .

**Замечание.** Главный вектор прямой не коллинеарен этой прямой.

**Доказательство.** Пусть прямая  $l$  задана уравнением  $Ax + By + C = 0, \vec{n} = (A, B), M_0(x_0, y_0) \in l$ , то есть  $Ax_0 + By_0 + C = 0$ . Отложим вектор  $\vec{n}$  от точки  $M_0$ . Концом соответствующего направленного отрезка будет точка  $M_1(x_0 + A, y_0 + B)$ . Подставив координаты этой точки в левую часть уравнения прямой, получим  $A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C = Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 \neq 0$ .

Таким образом,  $M_1 \notin l$ . Поскольку  $M_0 \in l$ , а  $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{n}$ , это означает, что вектор  $\vec{n}$  и прямая  $l$  не коллинеарны.

## Взаимное расположение прямых на плоскости

**Теорема.** Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы уравнениями

- $A_1x + B_1y + C_1 = 0$
- $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

. Тогда

1.  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются  $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$
2.  $l_1 \parallel l_2$  и  $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
3.  $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

**Доказательство** (в ПСК).

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$  (условие параллельности нормальных векторов в ПСК).

Направляющие вектора:  $\vec{a}_1 = (-B_1, A_1)$ ,  $\vec{a}_2 = (-B_2, A_2)$ .

$l_1 \parallel l_2$  или  $l_1 = l_2 \Leftrightarrow a_1 \parallel a_2 \Leftrightarrow \frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2}$ , откуда следует утверждение 1.

Пусть  $t = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ .

$$A_1 = tA_2$$

$$B_1 = tB_2$$

$t \neq 0$ , иначе  $A_1 = B_1 = 0$

$$\text{Получаем } \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tA_2x + tB_2y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tA_2x + tB_2y + C_1 = 0 \\ tA_2x + tB_2y + tC_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} tA_2x + tB_2y + C_1 = 0 \\ tA_2x + tB_2y + tC_2 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 - tC_2 = 0$$

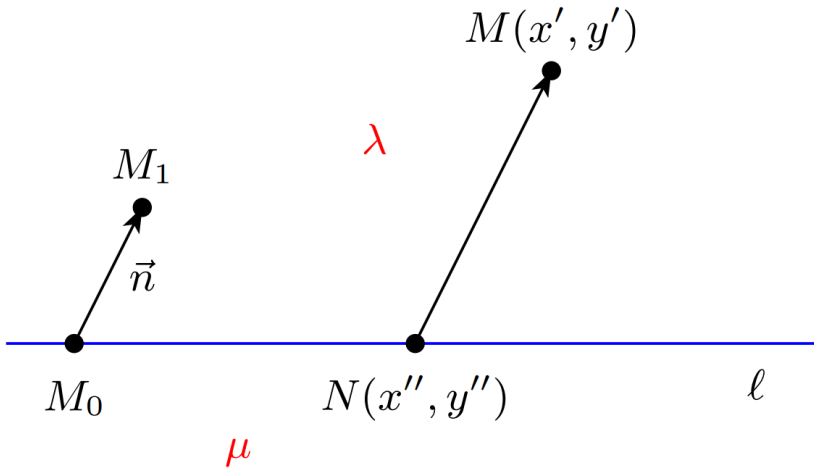
$C_1 = tC_2$ , то есть только при  $t = \frac{C_1}{C_2}$  система имеет решение, откуда следуют утверждения 2 и 3.

## Нормальное уравнение прямой на плоскости

??

## Отклонение точки от прямой

**Теорема (о полуплоскостях).** Пусть  $M(x', y')$  - точка плоскости. Если  $M \in \lambda$ , то  $Ax' + By' + C > 0$ , а если  $M \in \mu$ , то  $Ax' + By' + C < 0$



**Доказательство.** Пусть  $M \in \lambda$ . Через точку  $M$  проведём прямую, коллинеарную  $\vec{n}$ . Мы знаем, что *главный вектор прямой не коллинеарен этой прямой*. Значит наша прямая пересечёт  $l$ . Пусть точка пересечения это  $N(x'', y'')$ . Очевидно  $Ax'' + By'' + C = 0$ .  $\overrightarrow{NM}$  и  $\vec{n}$  сонаправлены, то есть  $\overrightarrow{NM} = t\vec{n}, t > 0$ . Получаем, что  $x' - x'' = tA, y' - y'' = tB \Rightarrow x' = x'' + tA, y' = y'' + tB \Rightarrow$

$$Ax' + By' + C = A(x'' + tA) + B(y'' + tB) + C = Ax'' + By'' + C + t(A^2 + B^2) = t(A^2 + B^2) > 0 \quad (10)$$

Мы доказали, что если  $M \in \lambda$ , то  $Ax' + By' + C > 0$ .

Ребят, ну давайте второе утверждение докажете сами плз.

Точки  $P(x_1, y_1)$  и  $Q(x_2, y_2)$  лежат по одну сторону от прямой  $Ax + By + C = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{sgn}(Ax_1 + By_1 + C) = \text{sgn}(Ax_2 + By_2 + C)$  и по разные стороны, когда  $\text{sgn}(Ax_1 + By_1 + C) \neq \text{sgn}(Ax_2 + By_2 + C)$

## Плоскость

$\sigma$  - плоскость,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  - точка в  $\sigma$ ,  $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$  и  $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$  - направляющие вектора, не коллинеарные между собой.  $\overrightarrow{M_0M_1} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ , где  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Уравнения плоскости:

$$1. \text{ Параметрическое; } \begin{cases} x = x_0 + q_1u + q_2v \\ y = y_0 + r_1u + r_2v \\ z = z_0 + s_1u + s_2v \end{cases}$$

$$2. \text{ Каноническое: } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$3. \text{ Общее: из канонического можем получить } A = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}. \text{ Имеем } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ и } (A, B, C) - \text{главный вектор плоскости.}$$

**Теорема.** Любая плоскость представима в виде уравнения  $Ax + By + Cz + D = 0$ . И наоборот, любое уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0$  задаёт плоскость.

**Доказательство.**

$$1. \text{ Любая плоскость представима каноническим уравнением } \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0, \text{ где } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{ и } (A, B, C).$$

2. Возьмём уравнение  $Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ .

(а) Возьмём точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , удовлетворяющую данному уравнению.

Если  $A \neq 0$ , то берём  $y_0 = z_0 = 0$  и получаем  $x_0 = -\frac{D}{A}$  (аналогично для  $A = 0$ , тогда либо  $B \neq 0$ , либо  $C \neq 0$ ).

(б) Возьмём 2 вектора:

- $\vec{a}_1 = (-B, A, 0)$
- $\vec{a}_2 = (-C, 0, A)$

Составим каноническое уравнение плоскости, проходящей через  $M_0$  с направляющими векторами  $a_1$  и  $a_2$ .

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0$$

$$A^2(x - x_0) + AB(y - y_0) + AC(z - z_0) = 0 \mid : A \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (11)$$

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0 \quad (12)$$

Здесь  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ .

## Взаимное расположение плоскостей

Пусть плоскости заданы уравнениями

$$1. \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$2. \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда

$$1. \pi_1 \text{ и } \pi_2 \text{ пересекаются} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$$2. \pi_1 \parallel \pi_2 \text{ и } \pi_1 \neq \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

**Доказательство (в общем случае).** Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Пусть для определения  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ .

Давайте сделаем  $z_0 = 0$ , тогда получим систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{cases} \quad (*) \quad (14)$$

Эта система по правилу Крамера имеет единственное решение  $(x_0, y_0)$ . Значит невозможно  $\pi_1 = \pi_2$ .

Если  $\pi_1 = \pi_2$ , то имеется другое решение системы, что противоречит с тем, что система  $(*)$  имеет только одно решение.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = t, \text{ откуда } \begin{cases} tA_2x + tB_2y + tC_2z + D_1 = 0 \\ tA_2x + tB_2y + tC_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow D_1 = tD_2 = 0 \Rightarrow t = \frac{D_1}{D_2}.$$

Если это не так, то решений  $\infty$ .

## Нормальное уравнение плоскости

????????????????????????????????

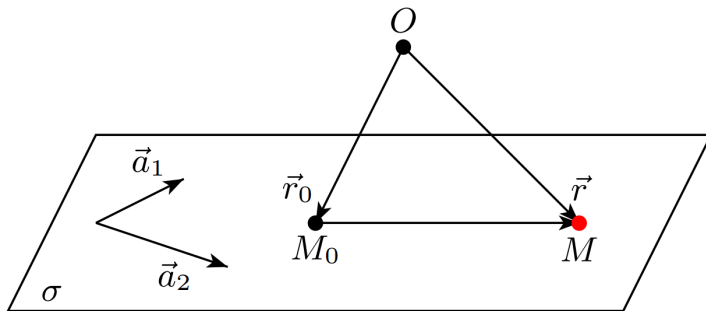
## Отклонение точки от плоскости

**Теорема (о полупространствах).** Пусть  $M(x', y', z')$  - произвольная точка пространства. Если  $M \in \lambda$ , то  $Ax' + By' + Cz' + D > 0$ , а если  $M \in \mu$ , то  $Ax' + By' + Cz' + D < 0$ .

Точки  $P(x_1, y_1, z_1)$  и  $Q(x_2, y_2, z_2)$  расположены по одну сторону от плоскости  $Ax' + By' + Cz' + D = 0$  тогда и только тогда, когда  $\text{sgn}(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = \text{sgn}(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D)$ , и по разные стороны, когда  $\text{sgn}(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) \neq \text{sgn}(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D)$ .

## Виды уравнений прямой в пространстве

Пусть на прямой  $l$  лежит точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\vec{a} = (q, r, s) \neq \vec{0}$  - направляющий вектор прямой  $l$ .  $\vec{r}_0$  - радиус-вектор точки  $M_0$ .



Точка  $M$  лежит на  $l$  тогда и только тогда, когда  $\vec{a}$  коллинеарен  $\overrightarrow{M_0M}$ , то есть  $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ .  
 $M \in l \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ .

Виды уравнений прямой в пространстве:

1. Векторное:  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$

2. Параметрическое: 
$$\begin{cases} x = x_0 + qt \\ y = y_0 + rt \\ z = z_0 + st \end{cases}$$

3. Каноническое: 
$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}$$

4. По двум точкам: 
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

5. Общие уравнения (как пересечение двух плоскостей): 
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

**Теорема.** Любая прямая в пространстве представима общим уравнением.

**Доказательство.**

У нас плоскости пересекаются, поэтому нормальные векторы плоскостей непараллельны.

Общий случай. Предположим  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ .

Перепишем систему в виде  $\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z - D_2 \end{cases}$  Зафиксируем  $z$  и скажем, что  $z = t$ :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1t - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2t - D_2 \end{cases}$$

Поскольку  $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , то при любом  $t$  система имеет единственное решение по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1t - D_1 & A_2 \\ -C_2t - D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{t(-B_2C_1 + A_2C_2) - B_2D_1 + A_2D_2}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{-B_2D_1 + A_2D_2}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} + t \frac{-B_2C_1 + A_2C_2}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} -A_1 - 1 & C_1t - D_1 \\ -B_1 & C_2t - D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{t(-A_1C_2 + B_1C_1) - A_1D_2 + B_1D_1}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{-A_1D_2 + B_1D_1}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} + t \frac{-A_1C_2 + B_1C_1}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ z = t \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} x = \frac{-B_2D_1 + A_2D_2}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} + t \frac{-B_2C_1 + A_2C_2}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ y = \frac{-A_1D_2 + B_1D_1}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}} + t \frac{-A_1C_2 + B_1C_1}{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}, \\ z = t \end{cases} \quad (16)$$

В ПСК можно доказать обратное: любое уравнение задаёт некоторую прямую

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Поскольку плоскости непараллельны, то пусть  $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ . Тогда берём  $z = 0$  и получаем систему  $\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{cases}$ , которая по правилу Крамера имеет единственное решение  $(x_0, y_0)$ .

Таким образом, точка с координатами  $M(x_0, y_0, z_0)$  лежит на данной прямой.

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\vec{a}_1 \perp \vec{n}_1, \vec{a}_2 \perp \vec{n}_2$$

Таким образом, из уравнения плоскостей мы получаем направляющий вектор данной прямой. По точке  $M_0$  и направляющему вектору мы сможем восстановить прямую:

$$\frac{x - x_0}{B_1C_2 - B_2C_1} = \frac{y - y_0}{A_1C_2 - A_2C_1} = \frac{z}{A_2B_2 - A_2B_1} \quad (17)$$

## Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть даны  $l_1$  и  $l_2$ , а  $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$  и  $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$  - направляющие векторы для этих прямых соответственно. Возьмём по одной точке  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  с каждой прямой.

Если прямые *лежат в одной плоскости (либо совпадают, либо пересекаются)*, то смешанное произведение  $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$  компланарны, то есть смешанное произведение равно нулю:



$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Прямые скрещиваются} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\text{Прямые параллельны или совпадают: } \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \Leftrightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}.$$

## Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

**Теорема.** Предположим, что дана плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0$ , и

$$\text{прямая } l : \begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases}. \text{ Тогда прямая и плоскость пересекаются} \Leftrightarrow Aq + Br + Cs \neq 0$$

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{a}$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Aq + Br + Cs)t = 0$$

Если  $Aq + Br + Cs \neq 0$ , то решение единственное:  $t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Aq + Br + Cs}$  и прямая с плоскостью имеют одну общую точку.

Итак:

- $l$  лежит в плоскости  $\Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Aq + Br + Cs = 0, \end{cases}$
- $l$  параллельна плоскости  $\Leftrightarrow \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \\ Aq + Br + Cs = 0, \end{cases}$
- $l$  пересекается с плоскостью  $\Leftrightarrow Aq + Br + Cs \neq 0$

## Построение поля комплексных чисел

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим множество пар вида  $(a, b)$ .

Введем операции сложения и умножения  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ,  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

**Теорема.** Относительно введенных операций множество  $\mathbb{C}$  является полем:

- сложение:
  - коммутативность
  - ассоциативность
  - $(0, 0)$  - нейтральный
  - $(-x, -y)$  - противоположный элемент
- умножение:
  - коммутативность
  - ассоциативность
  - $(1, 0)$  - нейтральный
  - обратный элемент существует, если  $(x, y) \neq (0, 0)$  или  $x^2 + y^2 \neq 0$ :  $z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$

## Алгебраическая форма комплексного числа

$(x, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + iy$  - общепринятая запись комплексного числа.

$x + iy$  ( $x$  - вещественная часть,  $y$  - мнимая часть)

Для каждого  $z = x + iy$  существует  $\bar{z} = x - iy$  - сопряжённое.

## Тригонометрическая форма комплексного числа

Любая точка плоскости однозначно задается парой  $(r, \phi)$ , где  $r$  - расстояние от точки до начала координат.

$$\begin{cases} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$\phi$  называется аргументом числа  $z$  ( $\phi = \arg Z$ )

## Действия с числами в тригонометрической форме

При умножении комплексных чисел модули умножаются, а углы складываются.

При делении модули делятся, а углы вычитаются.

## Формула Муавра

$$z^n = (r(\cos \phi + i \sin \phi))^n = r^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$

## Извлечение корней из комплексных чисел

**Определение.** Корнем  $n$ -ой степени комплексного числа  $z$  называется число  $w$  такое, что  $w^n = z$ .

Пусть  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

$w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$

У нас должно быть  $w^n = z$ :  $w^n = \rho^n(\cos(n\psi) + i \sin(n\psi))$

$\rho^n(\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)) = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

Числа равны, а значит равны их модули  $\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$

$$\cos(n\psi) + i \sin(n\psi) = \cos \phi + i \sin \phi \Rightarrow \begin{cases} \cos(n\psi) = \cos \phi, \\ \sin(n\psi) = \sin \phi \end{cases}.$$

Если у углов одинаковы  $\cos$  и  $\sin$ , то углы различаются на  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ :

$$n\psi = \phi + 2\pi k \Rightarrow \psi = \frac{\phi + 2\pi k}{n} = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \quad (18)$$

$$\psi_0 = \frac{\phi}{n}$$

$$\psi_1 = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$\psi_2 = \frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}$$

...

$$\psi_{n-1} = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}n = \frac{\phi}{n} + 2\pi$$

Таким образом, получаем, что аргументов для  $w$ , дающих разные корни  $n - 1$  степени в точности  $n$  штук при  $k = 0, 1, \dots, n - 1$

$$\psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Пусть  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\phi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (19)$$

**В поле комплексных чисел любое комплексное число  $z \neq 0$  имеет в точности  $n$  корней  $n$ -ой степени (предыдущая формула)**

*Пример.*  $1 = \cos 0 + i \sin 0$

$$\sqrt[3]{1} = \cos \frac{0 + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{3} = \cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3}, k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = \cos \frac{2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{2\pi \cdot 0}{3} = 1$$

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

*Пример.* Корни  $n$ -ой степени из 1

В случае  $\mathbb{R}$ :  $\sqrt[n]{1} = 1$

В случае  $\mathbb{C}$  мы имеем  $n$  корней:

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1} \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (20)$$

При  $k = 0$ :  $w_0 = 1$

При  $k = 1$ :  $w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$

$$w_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} = \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k = w^k$$

## Линейное пространство

**Определение.** Множество  $V$  называется **линейным пространством** над полем  $\mathbb{F}$ , если для каждой пары элементов  $V$  определена операция сложения и для каждого элемента  $x \in V$  определена операция умножения на число  $t \in \mathbb{F}$ . При этом элементы  $V$  называются векторами, а элементы  $\mathbb{F}$  называются скалярами.

Аксиомы:

1.  $x + (y + z) = (x + y) + z$
2.  $x + y = y + x$
3.  $\exists 0 : \forall x \in V 0 + x = x + 0 = x$
4.  $\forall x \exists -x : x + (-x) = -x + x = 0$
5.  $t(x + y) = tx + ty$
6.  $(t + s)x = tx + sx$
7.  $t(sx) = (ts)x$
8.  $1x = x$

Свойства:

1. Нулевой вектор единственный.

## 2. Противоположный элемент единственный

Примеры линейных пространств:

1. Множество векторов плоскости
2. Множество векторов пространства
3. Множество последовательностей длинный  $n$  из элементов  $\mathbb{R}$
4. Многочлены от одной переменной, степени которых не превосходят  $n$
5. Матрицы  $n \cdot m$

## Линейная зависимость векторов

**Лемма.** Если система векторов  $x_1, x_2, \dots, x_m$  содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

**Доказательство.**

Пусть  $\vec{x}_k = \vec{0}$ . Тогда можно взять линейную комбинацию  $0x_1 + 0x_2 + \dots + 1x_k + \dots + 0x_m = \vec{0} \Rightarrow$  система векторов линейно зависима чтд.

**Лемма.** Если к линейно зависимой системе добавить новые векторы, то система останется линейно зависимой.

**Доказательство.**

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_m$  - линейно зависима система. Тогда некоторый  $\vec{x}_k$  выражается через остальные  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m$ . Если мы добавим еще какие-то векторы в системы, то  $\vec{x}_k$  всё равно будет выражаться через остальные вектора. Пусть мы добавили векторы  $y_1, y_2, y_l$ . Тогда  $\vec{x}_k = t_1x_1 + \dots + t_mx_m + 0y_1 + 0y_2 + \dots + 0y_l$  чтд.

**Лемма.** Если система ненулевых векторов  $a_1, \dots, a_m$  линейно зависима, то найдется  $a_k$  который выражается через предыдущие векторы.

**Доказательство.** По условию существуют скаляры  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , по крайней мере один из которых не равен 0, такие, что  $t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_ka_k = 0$ .

Пусть  $j$  - наибольший индекс, для которого  $t_j \neq 0$ . Если  $j = 1$ , то равенство  $t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_ka_k = 0$  сводится к  $t_1a_1 = 0$ , откуда  $a_1 = 0$ , противоречие. Тогда  $j > 1$ .

Переносим последнее слагаемое в другую часть и делим на  $t_j \neq 0$  получаем

$$a_j = -\frac{t_1}{t_j} \cdot a_1 - \dots - \frac{t_{j-1}}{t_j} \cdot a_{j-1} \quad (21)$$

что и требовалось.

## Системы образующих

**Определение.** Система векторов  $\Sigma$  векторного пространства  $V$  называется **системой образующих** этого пространства, если любой вектор из  $V$  линейно выражается через какие-то вектора из системы  $\Sigma$ .

## Базис линейного пространства

**Определение.** Базисом векторного пространства называется линейно независимая система образующих.

**Замечание 1.** Система векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  линейно независима.

**Доказательство.** Предположим, что  $x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = 0$ , для некоторых  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ .  $x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то есть  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

**Замечание 2.** Если  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  - произвольный вектор из  $F^n$ , то  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ .

**Замечание 3.** Векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  образуют базис пространства  $F^n$ .

**Доказательство.** В силу 1 и 2 замечания эти векторы линейно независимы и являются системой образующих пространства  $F^n$ .

**Определение.** Система векторов  $e_1, e_2, \dots, e_n$  называется **стандартным базисом** пространства  $F^n$ .

## Равномощность базисов

**Теорема.** Если в векторном пространстве есть базис из  $n$  векторов, то и любой базис этого пространства содержит ровно  $n$  векторов.

**Доказательство.** Пусть  $A := (a_1, a_2, \dots, a_n)$  - базис пространства, а  $B := (b_1, b_2, \dots, b_k)$  - другой базис. Чтобы доказать, что  $n = k$ , в силу симметрии достаточно проверить, что  $k \leq n$ . Пусть  $k > n$ .

Рассмотрим систему  $b_1, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Это линейно зависимая система ненулевых векторов, так как вектор  $b_1$  выражается через систему образующих  $A$ . По лемме о правом крайнем в  $b_1, a_1, a_2, \dots, a_n$  есть вектор, который линейно выражается через предыдущие. Это не может быть вектор  $b_1$  - у него нет предыдущих. Значит, это какой-то  $a_i$ . Выкинув его, получим систему  $b_1, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  (\*), которая останется системой образующих согласно лемме о прополке.

Теперь рассмотрим  $b_2, b_1, a_1, a_2, \dots, a_n$  (\*\*).

Это линейно независимая система ненулевых векторов, так как вектор  $b_2$  выражается через систему образующих (\*). По лемме о правом крайнем в (\*\*) есть вектор, выражающийся через предыдущие. Это не может быть ни  $b_1$ , ни  $b_2$  (у  $b_2$  нет предыдущих, а  $b_1$  не выражается через  $b_2$ , так как система  $B$  линейно независима). Значит, это какой-то  $a_j, j \neq i$ .

Выкинув его из (\*\*), получим систему  $b_2, b_1, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$ , которая останется системой образующих согласно лемме о прополке. Продолжая добавлять вектора из  $B$  и удалять вектора из  $A$ , будем получать системы из  $n$  образующих, в которых всё больше векторов из  $B$  и всё меньше из  $A$ . Поскольку  $k > n$ , то через  $n$  шагов мы придём к системе образующих  $b_n, \dots, b_2, b_1$ . Но тогда вектор  $b_{n+1}$  выражается через эту систему образующих, что противоречит линейной независимости  $B$ . Чтд браток.

**Следствия.**

- Если у векторного пространства  $V$  есть система из  $n$  образующих, то любая линейно независимая система в  $V$  содержит не больше  $n$  векторов.
- Если в  $V$  есть линейно независимая система из  $n$  векторов, то любая система образующих пространства  $V$  содержит не менее  $n$  векторов.

## Размерность пространства

Если у векторного пространства есть конечный базис, то число векторов в базисе называется **размерностью** этого пространства. Размерность пространства  $V$  обозначается через  $\dim V$ .

**Теорема о разложении вектора по базису.** Пусть  $V$  - ненулевое векторное пространство,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  - базис. Тогда  $\forall x \in V$  существуют единственные  $t_1, t_2, \dots, t_n$  такие, что  $x = t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_na_n$  (\*).

**Доказательство.** Существование  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ясно, поскольку базис - система образующих. Предположим, что наравне с (\*) выполняется  $x = s_1a_1 + s_2a_2 + \dots + s_na_n$  для некоторых скаляров  $s_i$ . Вычтем одно равенство из другого и получим:

$$(t_1 - s_1)a_1 + (t_2 - s_2)a_2 + \dots + (t_n - s_n)a_n = 0 \quad (22)$$

Поскольку векторы  $a_i$  линейно независимы, получаем,  $t_i - s_i = 0 \Rightarrow t_i = s_i$  чтд браток.

## Координаты вектора

**Определение.** Равенство  $x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n$  называется **разложением вектора  $x$  по базису  $a_1, a_2, \dots, a_n$** . Скаляры  $t_1, t_2, \dots, t_n$  называются координатами вектора  $x$  в базисе  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Записывается  $x = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

## Действия с векторами в координатной форме

### Подпространства линейного пространства

**Определение.** Непустое подмножество  $M$  векторного пространства  $V$  над полем  $F$  называется **подпространством** пространства  $V$ , если выполняются следующие условия:

1. если  $x, y \in M$ , то  $x + y \in M$  (замкнутость подпространства относительно сложения векторов).
2. если  $x \in M, t \in F$  то  $tx \in M$  (замкнутость подпространства относительно умножения вектора на скаляр).

**Определение.** Векторные пространства  $V_1$  и  $V_2$  над одним и тем же полем  $F$  изоморфны, если существует биекция  $f$  из  $V_1$  на  $V_2$  (называемая изоморфизмом) такая, что  $f$  сохраняет операции, т.е.

$$\forall x_1, x_2 \in V_1 \forall t \in F \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \& \quad f(tx) = t \cdot f(x) \quad (23)$$

**Теорема об изоморфизме векторных пространств.** Любое  $n$ -мерное векторное пространство  $V$  над полем  $F$  изоморфно пространству  $F^n$ .

**Доказательство.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  - базис пространства  $V, b \in V, (t_1, \dots, t_n)$  - координаты вектора  $b$  в этом базисе. Определим отображение  $f : V \rightarrow F^n$  правилом:  $f(b) := (t_1, \dots, t_n)$ . Поскольку координаты определяют вектор однозначно, то отображение  $f$  инъективно. Сюръективность  $f$  очевидна: если  $y = (s_1, \dots, s_n) \in F^n$ , то  $y = f(x)$ , где  $x = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \dots + s_n a_n$ .

Наконец, сохранение операций вытекает из замечания о координатах суммы векторов и произведения вектора на скаляр.

Таким образом,  $f$  - изоморфизм из  $V$  на  $F^n$ . чтд браток.

## Операции над подпространствами и их свойства

Нулевой вектор содержится в любом подпространстве  $M$  пространства  $V$ . **Доказательство.** Если  $x$  - произвольный вектор из  $M$ , то по второму условию из определения подпространства  $0 = 0 \cdot x \in M$ .

**Замечание о подпространстве, порождённом набором векторов.** Пусть  $V$  - векторное пространство и  $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ . Тогда  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$  - наименьшее подпространство пространства  $V$ , содержащее векторы  $a_1, \dots, a_k$ .

**Доказательство.** Пусть  $M$  - подпространство пространства  $V$ , содержащее векторы  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . По определению подпространства любая линейная комбинация векторов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  лежит в  $M$ . Следовательно,  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \subseteq M$ . чтд браток.

**Предложение о размерности подпространства.** Пусть  $M$  - подпространство векторного пространства  $V$ . Тогда  $\dim M \leq \dim V$ , причем  $\dim M = \dim V$  тогда и только тогда, когда  $M = V$ .

**Доказательство.** Если  $M$  или  $V$  - нулевое пространство, то оба утверждения предложения выполняются тривиальным образом. Будем поэтому считать, что  $M$  и  $V$  - ненулевые пространства. Пусть  $\dim M = k, \dim V = n$ . Неравенство  $k \leq n$  следует из того, что базис  $M$  - это

линейно независимая система в  $V$ , а любую линейно независимую систему векторов из  $V$  можно дополнить до базиса  $V$  по теореме о продолжении. При этом для дополнения нужно  $n - k$  векторов. Поэтому если  $n = k$ , то базис  $M$  уже является базисом  $V$ , т.е.  $M = V$ . Обратное утверждение очевидно.

**Определение.** Пусть  $V$  – векторное пространство, а  $M_1$  и  $M_2$  – его подпространства. Сумма подпространств  $M_1$  и  $M_2$  – это множество  $M_1 + M_2$  всех сумм векторов из  $M_1$  с векторами из  $M_2$ :

$$M_1 + M_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\} \quad (24)$$

**Замечание о сумме и пересечении подпространств.** Если  $M_1$  и  $M_2$  – подпространства  $V$ , то  $M_1 + M_2$  и  $M_1 \cap M_2$  также являются подпространствами  $V$ .

**Доказательство.** В силу замечания о нулевом векторе и подпространствах, каждое из подпространств  $M_1$  и  $M_2$  содержит нулевой вектор. Следовательно,  $0 = 0 + 0 \in M_1 + M_2$  и  $0 \in M_1 \cap M_2$ . В частности, множества  $M_1 + M_2$  и  $M_1 \cap M_2$  непустые.

Пусть  $x, y \in M_1 + M_2$  и  $t$  – скаляр. Тогда  $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$  для некоторых  $x_1, y_1 \in M_1$  и  $x_2, y_2 \in M_2$ . Получаем

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in M_1 + M_2, tx = t(x_1 + x_2) = tx_1 + tx_2 \in M_1 + M_2 \quad (25)$$

Итак,  $M_1 + M_2$  – подпространство в  $V$ . Далее пусть  $x, y \in M_1 \cap M_2$  и  $t$  – скаляр. Тогда  $x, y \in M_1$  и  $x, y \in M_2$ . При этом имеем  $x + y \in M_1, x + y \in M_2, tx \in M_1, tx \in M_2 \Rightarrow x + y \in M_1, x + y \in M_2, tx \in M_1 \cap M_2$ , то есть  $M_1 \cap M_2$  – подпространство  $V$ . чтд браток.

**Замечание о сумме подпространств.** Если  $M_1$  и  $M_2$  – подпространства пространства  $V$ , то  $M_1 + M_2$  – наименьшее подпространство в  $V$ , содержащее  $M_1$  и  $M_2$ .

**Доказательство.** Если  $x \in M_1$ , то  $x \in M_1 + M_2$ , поскольку  $x = x + 0, 0 \in M_2$ . Следовательно,  $M_1 \subseteq M_1 + M_2$ . Аналогично,  $M_2 \subseteq M_1 + M_2$ . Тогда  $x = x_1 + x_2$  для некоторых  $x_1 \in M_1$  и  $x_2 \in M_2$ . Следовательно,  $x_1, x_2 \in M$ , откуда  $x = x_1 + x_2 \in M$ . Итак  $M_1 + M_2 \subseteq M$ . чтд браток.

**Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств.** Пусть  $V$  – векторное пространство, а  $M_1$  и  $M_2$  – его подпространства. Тогда размерность суммы подпространств  $M_1$  и  $M_2$  равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.

**Доказательство.** Из предложения о размерности подпространства  $\dim(M_1 \cap M_2) \leq \dim M_1$  и  $\dim(M_1 \cap M_2) \leq \dim M_2$ .

Положим  $\dim(M_1 \cap M_2) = k, \dim M_1 = k + l, \dim M_2 = k + m$ . Если  $M_1 = \{0\}$ , то очевидно  $\dim(M_1 \cap M_2) = \{0\}, M_1 + M_2 = M_2$  и потому

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_2 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2) \quad (26)$$

Аналогично разбирается случай  $M_2 = \{0\}$ .

Далее можно считать, что  $M_1$  и  $M_2$  ненулевые и  $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$ . Пусть  $a_1, \dots, a_k$  – базис  $\dim(M_1 \cap M_2)$ .

По теореме о продолжении  $a_1, \dots, a_k$  можно дополнить как до базиса  $M_1$ , так и до  $M_2$ . Пусть  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$  – базис  $M_1$ , а  $a_1, \dots, a_k, c_1, c_2, \dots, c_m$  – базис  $M_2$ .

Докажем, что базис  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$  является базисом пространства  $M_1 + M_2$ . Этого достаточно для доказательства теоремы, так как число векторов в этом наборе равно

$$k + l + m = (k + l) + (k + m) - k = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2) \quad (27)$$

Пусть  $x \in M_1 + M_2$ . Тогда  $x = x_1 + x_2$ .  $x_1$  – лин. комбинация векторов  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$ , а  $x_2$  – лин. комбинация векторов  $a_1, \dots, a_k, c_1, c_2, \dots, c_m$ .

Отсюда  $x$  – лин. комбинация  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$ .

Таким образом,  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$  – система образующих пространства  $M_1 + M_2$ . Осталось доказать, что эта система линейно независима.

Предположим, что

$$t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_k a_k + s_1 b_1 + \dots + s_l b_l + \dots + r_1 c_1 + r_2 c_2 + \dots + r_m c_m = 0 \quad (28)$$

Нужно доказать, что все эти скаляры равны нулю.

Положим  $y = s_1b_1 + s_2b_2 + \dots + s_lb_l$ . Очев  $y \in M_1$ . С другой стороны из (28) вытекает, что

$$y = -t_1a_1 - t_2a_2 - \dots - t_ka_k - r_1c_1 - r_2c_2 - \dots - r_mc_m \in M_2 \quad (29)$$

Следовательно  $y \in M_1 \cap M_2$ . Тогда  $y$  - это линейная комбинация  $a_1, \dots, a_k$ . То есть существуют такие скаляры  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , что

$$y = s_1b_1 + s_2b_2 + \dots + s_lb_l = q_1a_1 + q_2a_2 + \dots + q_ka_k \quad (30)$$

Следовательно

$$q_1a_1 + q_2a_2 + \dots + q_ka_k - s_1b_1 - s_2b_2 - \dots - s_lb_l = 0 \quad (31)$$

Поскольку  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$  образуют базис пространства  $M_1$ , то они линейно независимы. Поэтому линейная комбинация (31) тривиальна. Следовательно, равенство (28) принимает вид  $t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_ka_k + r_1c_1 + r_2c_2 + \dots + r_mc_m = 0$ .

Учитывая, что вектора  $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_m$  образуют базис пространства  $M_2$ , получаем, что  $t_1 = t_2 = \dots = t_k = r_1 = \dots = r_m = 0$ . чтд браток.

**Определение.** Пусть  $V$  – векторное пространство, а  $M_1$  и  $M_2$  – его подпространства. Говорят, что сумма подпространств  $M_1$  и  $M_2$  является их **прямой суммой**, если  $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ . Прямая сумма подпространств  $M_1$  и  $M_2$  обозначается через  $M_1 \oplus M_2$ .

**Замечание о базисе прямой суммы подпространств.** Если  $V = M_1 \oplus M_2$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_l$  – базис  $M_1$ , а  $c_1, c_2, \dots, c_m$  – базис  $M_2$ , то  $b_1, \dots, b_l, c_1, \dots, c_m$  – базис пространства  $V$ .

**Теорема о прямой сумме подпространств.** Пусть  $V$  – векторное пространство, а  $M_1$  и  $M_2$  – его подпространства. Следующие условия эквивалентны

1.  $M_1 + M_2$  является прямой суммой подпространств  $M_1$  и  $M_2$ .
2.  $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$
3. любой вектор из  $M_1 + M_2$  единственным образом представим в виде суммы вектора из  $M_1$  и вектора из  $M_2$ .
4. нулевой вектор пространства  $V$  единственным образом представим в виде суммы вектора из  $M_1$  и вектора из  $M_2$ .

**Доказательство.** Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно вытекает из теоремы о размерности суммы и пересечения и того факта, что размерность нулевого пространства равна 0. Импликация 3)  $\Rightarrow$  4) очевидна. Поэтому достаточно доказать импликации 1)  $\Rightarrow$  3) и 4)  $\Rightarrow$  1).

- 1)  $\Rightarrow$  3). Пусть  $x \in M_1 + M_2$ . По определению суммы подпространств  $x = x_1 + x_2, x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$ . Остаётся доказать, что такое представление вектора  $x$  единственно. Предположим, что  $x = y_1 + y_2, y_1 \in M_1, y_2 \in M_2$ . Тогда мы имеем  $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$ . Ясно, что  $x_1 - y_1 \in M_1, y_2 - x_2 \in M_2$ . Следовательно  $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in M_1 \cap M_2$ . Но  $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ . Поэтому  $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$ , откуда  $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ . чтд браток.
- 4)  $\Rightarrow$  1). Предположим, что  $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$ , то есть существует ненулевой вектор  $x \in M_1 \cap M_2$ . Тогда вектор 0 может быть двумя различными способами представлен в виде суммы вектора из  $M_1$  и вектора из  $M_2$ :  $0 = x + (-x)$  и  $0 = 0 + 0$ . Мы получили противоречие с условием 4). чтд браток.

**Замечание о прямой сумме подпространств**

$$V = M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow \dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim V \quad (32)$$

Необходимость сразу следует из теоремы о прямой сумме подпространств. Достаточность следует из теоремы о размерности сумм и пересечения. чтд браток.



**Определение.** Пусть  $V = M_1 \oplus M_2$ ,  $x \in V$ . В силу теоремы о прямой сумме подпространств существуют однозначно определенные векторы  $x_1 \in M_1$  и  $x_2 \in M_2$  такие, что  $x = x_1 + x_2$ . Вектор  $x_1$  называется проекцией  $x$  на  $M_1$  параллельно  $M_2$ , а вектор  $x_2$  – проекцией  $x$  на  $M_2$  параллельно  $M_1$ .

**Алгоритм нахождения проекции вектора на подпространство.** Пусть  $V = M_1 \oplus M_2$ ,  $x \in V$ . Предположим, что нам известен базис  $a_1, \dots, a_k$  подпространства  $M_1$  и базис  $b_1, \dots, b_l$  подпространства  $M_2$ . В силу замечания о базисе прямой суммы подпространств  $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_l$  – базис пространства  $V$ . Найдем координаты вектора  $x$  в этом базисе. Пусть они имеют вид  $(t_1, \dots, t_k, s_1, \dots, s_l)$ . Тогда  $t_1 a_1 + \dots + t_k a_k + s_1 b_1 + \dots + s_l b_l$  – проекция  $x$  на  $M_1$  параллельно  $M_2$ , а  $s_1 b_1 + \dots + s_l b_l$  – проекция  $x$  на  $M_2$  параллельно  $M_1$ .

**Определение.** Пусть  $V$  – векторное пространство,  $x_0 \in V$ , а  $M$  – подпространство в  $V$ . Множество всех векторов вида  $x_0 + y$ , где  $y \in M$ , называется **линейным многообразием** в  $V$  и обозначается через  $x_0 + M$ . Вектор  $x_0$  называется **начальным вектором** многообразия  $x_0 + M$ , а подпространство  $M$  – **направляющим подпространством** этого многообразия. Размерность подпространства  $M$  называется размерностью многообразия  $x_0 + M$ .

Примеры

- Если  $x_0 = 0$ , то  $x_0 + M = M$ . Таким образом, всякое подпространство пространства  $V$  является линейным многообразием в  $V$
- Если  $M = \{0\}$ , то  $x_0 + M = \{x_0\}$ . Таким образом, всякий вектор из  $V$  является линейным многообразием в  $V$  (размерности 0).
- Обычные прямые и плоскости трехмерного пространства – линейные многообразия.

## Понятие линейного отображения

Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над одним и тем же полем  $F$ . Отображение  $A : V \rightarrow W$  называется **линейным оператором**, если для любых векторов  $x_1, x_2 \in V$  и любого скаляра  $t \in F$  выполняются равенства  $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ ,  $A(tx_1) = tA(x_1)$

Относительно первого равенства говорят, что  $A$  сохраняет сумму векторов, относительно второго – что  $A$  сохраняет произведение вектора на скаляр. Линейные операторы иначе называют линейными отображениями.

Важный специальный случай возникает, когда пространства  $V$  и  $W$  совпадают, т.е.  $W = V$ . Тогда говорят, что  $A$  – линейный оператор на пространстве  $V$  или что  $A$  – линейный оператор пространства  $V$ . Линейные операторы на  $V$  иначе называют линейными преобразованиями.

**Свойства линейного оператора** Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над полем  $F$ , а  $A : V \rightarrow W$  – линейный оператор. Тогда:

1.  $A(0) = 0$
2.  $A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 A(v_1) + \dots + \lambda_m A(v_m)$  для любых векторов  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  и любых скаляров  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ .

**Доказательство.** Первое свойство вытекает из того, что  $A(0) = A(0 \cdot 0) = 0 \cdot A(0) = 0$ .

Второе свойство выводится из определения линейного оператора очевидной индукцией по  $m$ . чтд браток доказательство огонь.

### Теорема существования и единственности линейного оператора

Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над полем  $F$ , причем  $\dim V = n > 0$ . Пусть  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  – базис пространства  $V$ , а  $w_1, \dots, w_n$  – произвольные вектора из  $W$ . Тогда существует единственный линейный оператор  $A : V \rightarrow W$  такой, что  $A(p_i) = w_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Доказательство. Существование.** Пусть  $x \in V$ , а  $(x_1, \dots, x_n)$  – координаты вектора  $x$  в базисе  $P$ . Определим оператор  $A : V \rightarrow W$  правилом  $A(x) := x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$ . В силу единственности координат вектора в базисе это определение корректно (т. е. образ вектора  $x$

под действием  $A$  определен однозначно). Из свойств координат суммы векторов и произведения вектора на скаляр вытекает, что этот оператор линеен. Осталось заметить, что для всякого  $i = 1, \dots, n$  вектор  $p_i$  имеет в базисе  $P$  координаты  $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , где единица стоит на  $i$ -ом месте, и потому  $A(p_i) = w_i$ .

**Единственность.** Пусть  $B : V \rightarrow W$  - линейный оператор такой, что  $B(p_i) = w_i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Пусть  $x \in V$ , а  $(x_1, \dots, x_n)$  - координаты вектора  $x$  в базисе  $P$ . Тогда  $x = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$ . В силу замечания о свойствах линейного оператора имеем

$$B(x) = B(x_1 p_1 + \dots + x_n p_n) = x_1 B(p_1) + \dots + x_n B(p_n) = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n = A(x) \quad (33)$$

Следовательно  $B = A$ . что и требовалось.

## Произведение отображений

**Определение** Пусть  $V$  и  $W$  - векторные пространства над полем  $F$ ,  $A : V \rightarrow W$  - линейный оператор, а  $t \in F$ . Произведением оператора  $A$  на скаляр  $t$  называется оператор  $B : V \rightarrow W$  задаваемый правилом  $B(x) := tA(x)$  для всех  $x \in V$ . Произведение оператора  $A$  на скаляр  $t$  обозначается через  $tA$ .

## Линейное пространство линейных отображений

**Предложение о пространстве линейных операторов.**

Произведение линейного оператора на скаляр является линейным оператором. Множество  $\text{Hom}(V, W)$  с операциями сложения операторов и умножения оператора на скаляр является векторным пространством.

**Доказательство.** Пусть  $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $x, y \in V$ ,  $t, s \in F$ . Тогда

$$(tA)(x + y) = t(A(x + y)) = t(A(x) + A(y)) = tA(x) + tA(y) = (tA)(x) + (tA)(y) \quad (34)$$

$$(tA)(sx) = t(A(sx)) = t(sA(x)) = (ts)(A(x)) = s(tA(x)) = s((tA)(x)) \quad (35)$$

Следовательно,  $tA$  - линейный оператор.

Похожим образом получаем, что  $1 \cdot A = A$ . С учетом свойств суммы операторов, мы получаем, что в  $\text{Hom}(V, W)$  выполнены все аксиомы векторного пространства. уничтожено.

**Теорема о пространствах линейных операторов и матриц.**

Если  $V$  и  $W$  - векторные пространства над полем  $F$ ,  $\dim V = n$  и  $\dim W = k$ , то векторные пространства  $\text{Hom}(V, W)$  и  $F^{k \times n}$  изоморфны.

**Доказательство.** Зафиксируем в  $V$  базис  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , а в  $W$  - базис  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ . Определим отображение  $\phi : \text{Hom}(V, W) \rightarrow F^{k \times n}$  правилом: если  $A : V \rightarrow W$  - линейный оператор, то  $\phi(A)$  - матрица оператора  $A$  в базисах  $P$  и  $Q$ . Пусть  $A, B \in \text{Hom}(V)$  и  $t \in F$ . Надо проверить, что отображение  $\phi$  биективно и выполнены равенства

$$\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B) \quad (36)$$

$$\phi(tA) = t\phi(A) \quad (37)$$

В матрице  $\phi(A + B)$  по столбцам записаны координаты векторов  $(A + B)(p_i)$  в базисе  $Q$ , а в матрицах  $\phi(A)$  и  $\phi(B)$  - координаты векторов  $A(p_i)$  и  $B(p_i)$  соответственно в том же базисе. Поскольку  $(A + B)(p_i) = A(p_i) + B(p_i)$ , координаты вектора  $(A + B)(p_i)$  равны сумме координат векторов  $A(p_i)$  и  $B(p_i)$ . Первое из равенств

$$\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B) \quad (38)$$

$$\phi(tA) = t\phi(A) \quad (39)$$

доказано. Второе из них проверяется вполне аналогично.

Проверим, что отображение  $\phi$  биективно. Если  $A, B \in \text{Hom}(V, W)$  и  $\phi(A) = \phi(B)$ , то из определения матрицы линейного оператора вытекает, что операторы  $A$  и  $B$  одинаково действуют на базисных векторах пространства  $V$ . Но тогда  $A = B$ , так как линейный оператор однозначно определяется своим действием на базисных векторах. Следовательно, отображение  $\phi$  инъективно.

Осталось доказать, что  $\phi$  сюръективно. Пусть  $A = (a_{ij})$  – произвольная матрица размера  $k \times n$ . Для всякого  $j = 1, 2, \dots, n$  положим  $w_j = a_{1j}q_1 + a_{2j}q_2 + \dots + a_{kj}q_k$ . В силу теоремы существования и единственности линейного оператора существует линейный оператор  $A$  такой, что  $A(p_i) = w_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Из определения матрицы оператора вытекает, что  $A_{P,Q} = A$ , т.е.  $\phi(A) = A$ . Следовательно, отображение  $\phi$  сюръективно. убито фух.

### Следствие о размерности пространства линейных операторов

Если  $V$  и  $W$  – векторные пространства над полем  $F$ ,  $\dim V = n$  и  $\dim W = k$ , то  $\dim \text{Hom}(V, W) = kn$ .

## Свойства произведения

### Матрица линейного отображения

**Определение.** Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над полем  $F$ , причем  $\dim V = n > 0$ ,  $\dim W = k > 0$ . Пусть  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  – базис пространства  $V$ , а  $Q = \{q_1, \dots, q_k\}$  – базис пространства  $W$ . **Матрицей линейного оператора  $A : V \rightarrow W$  в базисах  $P$  и  $Q$**  называется  $k \times n$  – матрица,  $i$ -тый столбец которой состоит из координат вектора  $A(p_i)$  в базисе  $Q$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Эта матрица обозначается  $A_{P,Q}$  или просто  $A$ , если базисы зафиксированы.

Итак если

$$\begin{aligned} A(p_1) &= a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \dots + a_{k1}q_k, \\ A(p_2) &= a_{12}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{k2}q_k, \\ &\dots \\ A(p_n) &= a_{1n}q_1 + a_{2n}q_2 + \dots + a_{kn}q_k, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{то } A_{P,Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

Если  $W = V$ ,  $Q = P$ , то говорят о **матрице оператора в базисе  $P$** .

**Определение.** Пусть  $V$  и  $W$  – векторные пространства над полем  $F$ , а  $A$  и  $B$  – линейные операторы из  $V$  в  $W$ . Суммой операторов  $A$  и  $B$  называется оператор  $S : V \rightarrow W$ , задаваемый правилом  $S(x) := A(x) + B(x)$  для всех  $x \in V$ . Сумма операторов  $A$  и  $B$  обозначается через  $A + B$ .

Множество всех линейных операторов из  $V$  в  $W$  обозначается  $\text{Hom}(V, W)$ .

### Предложение о свойствах суммы операторов.

Сумма линейных операторов является линейным оператором. Множество  $\text{Hom}(V, W)$  с операцией сложения операторов является абелевой группой.

**Доказательство.** Пусть  $A, B \in \text{Hom}(V)$ ,  $S = A + B$ .  $\forall x, y \in V, t \in \mathbb{F}$  имеем

$$S(x+y) = A(x+y) + B(x+y) = A(x) + A(y) + B(x) + B(y) = (A(x) + B(x)) + (A(y) + B(y)) = S(x) + S(y) \quad (41)$$

$$S(tx) = A(tx) + B(tx) = tA(x) + tB(x) = t(A(x) + B(x)) = tS(x) \quad (42)$$

Следовательно, оператор  $S$  линеен.

Далее, если  $A, B, C \in \text{Hom}(V, W)$ , то

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) = B(x) + A(x) = (B + A)(x) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} ((A + B) + C)(x) &= (A + B)(x) + C(x) = (A(x) + B(x)) + C(x) = \\ &= A(x) + (B(x) + C(x)) = A(x) + (B + C)(x) = (A + (B + C))(x) \end{aligned} \quad (44)$$

Получается  $A + B = B + A$ ,  $(A + B) + C = A + (B + C)$ . Нейтральным элементом по сложению является нулевой оператор  $O$ , поскольку  $(A + O)(x) = A(x) + O(x) = A(x) + 0 = A(x)$

Обратным по сложению является оператор  $-A$ .

Предложение доказано. туда его.

