

HOW TO заботать зачёт по матанализу 2

Интегралы

Пусть $f(x)$ собственнo интегрируема на любом $[a, b] (b > a)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Если $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b и собственнo интегрируема на $[a, b - \varepsilon] (\varepsilon > 0)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, если $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится.

Признаки сравнения

1 признак сравнения

Если:

1. $|f(x)| \leq F(x)$
2. $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ сходится

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.

2 признак сравнения

Пусть $\psi(x) > 0, \phi(x) = O^*(\psi(x))$ при $x \rightarrow +\infty$.

$$\phi(x) = O^*(\psi(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = c \neq 0$$

Тогда $\int_a^{+\infty} \psi(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} \phi(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.

3 признак сравнения

- Если $f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$ то

1. $p > 1 \Rightarrow$ сходится;
2. $p \leq 1 \Rightarrow$ расходится.

- Если $f(x) = O^*\left(\frac{1}{(x-b)^p}\right)$ при $x \rightarrow b+0$, то $\int_b^a f(x)dx$:

1. при $p \geq 1$ расходится;
2. при $p < 1$ сходится.

Ряды

Признаки сходимости

Д'Аламбера

Если с некоторого момента $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, то сходится. Если $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$, то расходится. При $q = 1$ непонятно.

Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

- $q < 1 \Rightarrow$ сходится.
- $q > 1 \Rightarrow$ расходится.

Признак сравнения для знакопостоянных рядов

$\forall n > N : b_n \geq a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}:$$

1. сходится при $k > 1$
2. расходится при $k \leq 1$

Признак Лейбница для знакочередующихся рядов

Если ряд знакочередующийся и $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$ и $|a_n|$ убывают монотонно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Признаки равномерной сходимости

Признак Вейерштрасса

Если существует a_n — числовая последовательность такая, что $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X .

Признак Дирихле

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ ограничена в совокупности на X и $b_n(x)$ монотонна $\forall x \in X$ и равномерно сходится к 0, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ равномерно сходится на X .

Признак Абеля

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно сходится на X и $|b_n(x)|$ ограничена в совокупности и $b_n(x)$ монотонна по n .

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно на X .

Функциональные последовательности

Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве E к $f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$$x'(t) = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t$$

$$y'(t) = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t$$

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(4t)^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} 4t dt = 2t^2 \Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2$$

Ответ $8\pi^2$