Лекция 10.04.2023

Численное интегрирование

Пусть точки $x_1, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a, b]$, и известны значения $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Существует **единственный** многочлен p степени не выше $n-1$ со свойством

$$p(x_k) = f(x_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Такой многочлен называется **интерполяционным**.

Две формы записи p:

- Форма Лагранжа (проходят в курсе алгебры)

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \prod_{k=1, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

- Форма Ньютона

$$f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \ldots + f(x_1, \ldots, x_n)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

где $f(x_1, x_2)$ — разделённая разность 1 порядка, ..., $f(x_1, \ldots, x_n)$ — разделённая разность $n-1$ порядка. Разделённые разности определяются по индукции:

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$f(x_1, \ldots, x_k) = \frac{f(x_2, \ldots, x_k) - f(x_1, \ldots, x_{k-1})}{x_k - x_1}.$$

Формы записи Лагранжа и Ньютона разные, но на самом деле это один и тот же многочлен. Форма Ньютона нам пригодится.

Идея:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$

Методы прямоугольников

Заменяем f на интерполяционный многочлен нулевой степени (константа).

1. Левые прямоугольники. Заменяем f на $f(a)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = f(a)(b-a)$$

2. Средние прямоугольники. Заменяем f на $f((a+b)/2)$ — значение в середине отрезка.

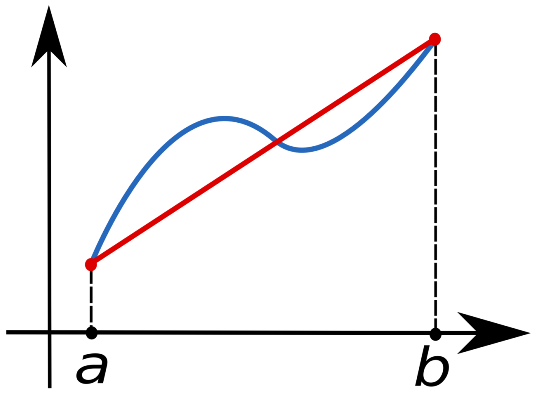
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f((a+b)/2)dx = f((a+b)/2)(b-a)$$

3. Правые прямоугольники. Заменяем f на $f(b)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(b)dx = f(b)(b-a)$$

Метод трапеций

Заменяем f на интерполяционный многочлен первой степени. В качестве узлов интерполяции возьмём концы отрезка a и b. Получается хорда.

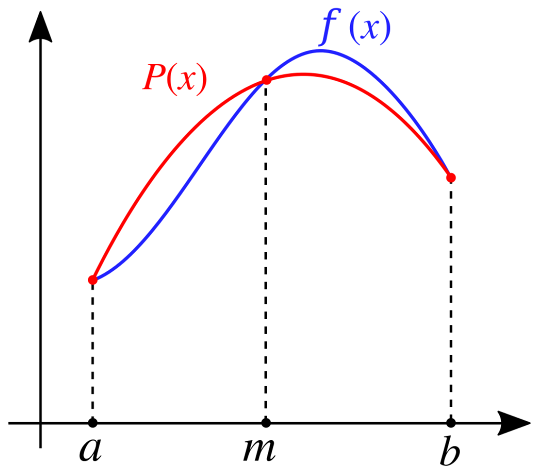


По формуле площади трапеции,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Метод Симпсона

Заменяем f на интерполяционный многочлен второй степени. В качестве узлов возьмём a, $\dfrac{a+b}{2}$, b — три равноотстоящие точки.



Интерполяционный многочлен в форме Ньютона:

$$f(a) + f(a, (a+b)/2)(x-a) + f(a, (a+b)/2, b)(x-a)(x-(a+b)/2) =: ❤$$

Здесь

$$f(a, (a+b)/2) = \frac{f((a+b)/2) - f(a)}{(b-a)/2},$$
$$f(a, (a+b)/2, b) = \frac{\dfrac{f(b) - f((a+b)/2)}{(b-a)/2} - \dfrac{f((a+b)/2) - f(a)}{(b-a)/2}}{b-a}.$$

Эти разделённые разности — это суммы $f(a),\ f((a+b)/2),\ f(b)$ с какими-то коэффициентами (линейные комбинации). Значит, если подставить их в ❤️, получится сумма, в которой складываются $f(a),\ f((a+b)/2,\ f(b)$, умноженные на скобочки от x. Назовём эти скобочки $A(x), B(x), C(x)$. То есть

$$❤ = A(x)f(a) + B(x)f((a+b)/2) + C(x)f(b),$$

причём $A(x),\ B(x),\ C(x)$ не зависят от функции f.

Поэтому для любой f

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)\int_a^b A(x)dx + f((a+b)/2)\int_a^b B(x)dx + f(b)\int_a^b C(x)dx$$

Интегралы от $A(x),\ B(x),\ C(x)$ — это просто числа. Назовём их $M,\ N,\ K$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx M \cdot f(a) + N \cdot f((a+b)/2) + K \cdot f(b) \quad ✲$$

Это и есть метод Симпсона, осталось найти коэффициенты $M,\ N,\ K$.

Возьмём $f \equiv 1$, $f(x) = x - a$, $f(x) = (x-a)^2$. Теперь заметим, что

- Интерполяционный многочлен в трёх узлах — это многочлен не выше второй степени
- Интерполяционный многочлен **единственен**

Значит, для таких f, как выше (это многочлены не выше второй степени), интерполяционный многочлен — это и есть f. Итак, если f — многочлен не выше второй степени, то

$$p(x) \equiv f(x).$$

Значит, для таких f имеем равенство в ✲

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p(x)dx = M \cdot f(a) + N \cdot f((a+b)/2) + K \cdot f(b).$$

Подставляя сюда $f \equiv 1,\ f(x) = x - a,\ f(x) = (x-a)^2$, получим систему для $M,\ N,\ K$.

$$\begin{cases} \int_a^b dx = M + N + K, \\ \int_a^b (x-a)dx = M \cdot 0 + N \cdot (b-a)/2 + K \cdot (b-a), \\ \int_a^b (x-a)^2 dx = M \cdot 0 + N \cdot (b-a)^2/4 + K \cdot (b-a)^2. \end{cases}$$

Считаем интегралы и сокращаем степени $b - a$, получаем

$$\begin{cases} b - a = M + N + K, \\ (b-a)/2 = N/2 + K, \\ (b-a)/3 = N/4 + K. \end{cases}$$

Решение системы

$$M = \frac{b-a}{6},\ N = \frac{4}{6}(b-a),\ K = \frac{1}{6}(b-a).$$

Получили **формулу Симпсона**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4 \cdot f((a+b)/2) + f(b)).$$

Сделайте сами эти выкладки, проверьте.

Формула “3/8”

Аналогично строится метод, когда в качестве узлов интерполяции берутся четыре равноотстоящие точки: $a,\ \frac{2a+b}{3},\ \frac{a+2b}{3},\ b$. Не буду приводить выкладки, они аналогичны методу Симпсона.

Получается такая формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right).$$

Название $3/8$ — потому что этот коэффициент дважды встречается в формуле (если раскрыть скобки).

Составные формулы численного интегрирования

Для более точных вычислений эти методы применяют не на всём $[a,b]$ сразу, а на его равномерном разбиении. Пусть всего m точек разбиения $\{x_j\}_{j=1}^m$ и $h := \frac{b-a}{m-1}$ — это длина каждого отрезка разбиения (шаг):

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b,$$
$$x_{j+1} - x_j = h, \quad j = 1, \ldots, m-1.$$

Применяя к каждому из отрезков разбиения полученные методы и складывая результаты, получаем так называемые составные формулы.

1. **Левые прямоугольники**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j).$$

2. **Средние прямоугольники**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_j + h/2).$$

3. **Правые прямоугольники**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(x_{j+1}).$$

4. **Трапеции**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx h \sum_{j=1}^{m-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} =$$
$$h \cdot \frac{[f(a) + f(x_2)] + [f(x_2) + f(x_3)] + [f(x_3) + f(x_4)] + \ldots + [f(x_{m-1}) + f(b)]}{2} =$$
$$h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=2}^{m-1} f(x_j) \right).$$

Промежуточные слагаемые повторяются дважды. Так преобразовали, чтобы меньше раз вычислять значения f.

5. **Симпсон**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{m-1} (f(x_j) + 4f(x_j + h/2) + f(x_{j+1})).$$

6. **“3/8”**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{m-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx$$
$$\frac{h}{8} \sum_{j=1}^{m-1} (f(x_j) + 3f(x_j + h/3) + 3f(x_j + 2h/3) + f(x_{j+1})).$$

Метод Рунге оценки погрешности

Обозначим $I = \int_a^b f(x)dx$.

Пусть S_h — результат численного интегрирования по составной формуле с шагом h,

$R_h = I - S_h$ — погрешность вычислений.

Предположим, что $R_h \sim C \cdot h^p$ при $h \to 0$, где $p > 0$ — некоторое число.

Известно, что

- левые и правые прямоугольники $\Rightarrow p = 1$,
- средние прямоугольники и трапеции $\Rightarrow p = 2$,
- 3/8 и Симпсон $\Rightarrow p = 4$.

Имеем

$$\begin{cases} I = S_h + R_h, \\ I = S_{h/2} + R_{h/2}. \end{cases}$$

Значит,

$$S_{h/2} - S_h + R_{h/2} - R_h = 0. \quad ❋$$

При маленьких h имеем $R_h \approx C \cdot h^p,\ R_{h/2} \approx C \cdot (h/2)^p$. Следовательно,

$$R_h \approx 2^p R_{h/2},\ R_{h/2} \approx \frac{1}{2^p} R_h.$$

Подставляя это в ❋, получаем

$$R_{h/2} \approx \frac{S_{h/2} - S_h}{2^p - 1}, \quad R_h = \frac{2^p}{2^p - 1}(S_{h/2} - S_h).$$

Это формулы Рунге оценки погрешности.