HOW TO заботать экзамен по алгебре (2 семестр)

Вопросы

1. Перестановки, подстановки, четность, нечетность. Свойства.
2. Определение определителя квадратной матрицы. Простейшие свойства определителя.
3. Свойства определителя квадратной матрицы. Разложение определителя квадратной матрицы по произвольной строке и произвольному столбцу.
4. Полураспавшиеся и распавшиеся матрицы. Определитель полураспавшейся и квазидиагональной матриц.
5. Определитель произведения квадратных матриц.
6. Обратное отображение и обратимые матрицы. Матрица, обратная к данной. Критерий обратимости в терминах её определителя.
7. Крамеровы системы линейных уравнений. Формулы Крамера.
8. Построение кольца многочленов. Простейшие свойства многочленов.
9. Деление многочленов с остатком.
10. Делимость многочленов. Свойства отношения делимости. Отношение ассоциированности.
11. Наибольший общий делитель многочленов. Теорема существования. Ассоциированность НОД.
12. Выражение НОД через исходные многочлены.
13. Взаимно простые многочлены и их свойства.
14. Неприводимые многочлены и их свойства. Теорема о разложении в произведение неприводимых многочленов. Каноническое разложение.
15. Производная многочлена и ее свойства. Кратные множители многочлена. Алгоритм выделения кратных множителей.
16. Значение многочлена. Корни многочлена. Теорема Безу. Равенство многочленов, совпадающих как функции.
17. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
18. Разложение многочленов над полем действительных чисел.
19. Многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Примитивные многочлены и их свойства.
20. Неприводимые многочлены над полем рациональных чисел и кольцом целых чисел. Критерий Эйзенштейна.
21. Сопряженное отображение. Свойства сопряженного отображения. Единственность сопряженного отображения.
22. Дважды сопряженное отображение. Существование сопряженного отображения.
23. Изометрические отображения и их свойства.

24. Собственные числа и собственные векторы линейного преобразования. Характеристический многочлен линейного преобразования. Условия существование собственных векторов линейного преобразования.

25. Самосопряженные линейные преобразования и их свойства. Строение матрицы самосопряженного линейного преобразования.

26. Сингулярное представление линейного отображения.

27. Псевдообратный оператор.

28. Билинейные и квадратичные функции. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Конгруэнтные формы и матрицы.

29. Квадратичные функции и формы. Связь с симметричными билинейными функциями и формами. Конгруэнтность квадратичных функций и форм.

30. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Приведение формы к каноническому виду. Единственность нормального вида над полем комплексных чисел.

31. Закон инерции вещественных квадратичных форм.

32. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

33. Приведение вещественной квадратичной формы к главным осям.

34. Эллипс.

35. Гипербола.

36. Директориальное свойство эллипса.

37. Директориальное свойство гиперболы.

38. Парабола.

39. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.

40. Цилиндрические поверхности

41. Поверхности вращения.

42. Эллипсоид.

43. Однополостный гиперболоид. Асимптотический конус.

44. Двуполостный гиперболоид. Асимптотический конус.

45. Эллиптический параболоид.

46. Гиперболический параболоид.

47. Приведение поверхностей второго порядка к каноническому виду.

Перестановки, подстановки, четность, нечетность. Свойства.

Перестановка - любая последовательность длины n $(i_1, ..., i_n)$, в которой каждое число от 1 до n ввходит 1 раз.

Число инверсий - количество пар (i, j), $i < j$ и номер j меньше i.

Перестановка *чётная*, если в ней чётное число инверсий и нечётная иначе.

Теорема.
Пусть g - перестановка. При перестановке любой пары элементов чётность перестановки поменяется.

Подстановка на $\{1, ..., n\}$ - биекция на $\{1, ..., n\}$
Запись:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$$

Подстановка состоит из двух перестановок.
Подстановка чётная, если число инверсий в ней чётное.

Теорема.

1. Любая подстановка может быть представлена в каноническом виде
2. Чётность не зависит от упорядочения верхнего ряда

Предложение.
Обратная подстановка $g^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & ... & i_n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$ имеет такую же чётность как исходная.

Определение определителя квадратной матрицы. Простейшие свойства определителя.

S_n - множество подстановок на $\{1, ..., n\}$.

$$|S_n| = n!$$

Определителем матрицы A называется число

$$|A| = \det A = \sum_{g \in S_n} (-1)^g a_{1g(1)} a_{2g(2)} ... a_{ng(n)}$$

Теорема.

$$|A| = |A^T|$$

Теорема.
Все свойства определителя, справедливые для строк, также справедливы и для столбцов.

Свойства определителя

- $|A| = |A^T|$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ ta_{k1} & ... & ta_{kn} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kn} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$