HOW TO заботать экзамен по алгебре (2 семестр)

Вопросы

1. Минорный ранг матрицы.

2. Крамеровы системы линейных уравнений. Формулы Крамера.

Минорный ранг матрицы

Минором порядка m матрицы А называется определитель квардратной подматрицы порядка m матрицы A.

Рангом матрицы А **по минорам** называется число 0, если A - нулевая матрицы и навиысший порядок отличных от нуля миноров матрицы А, если А - ненулевая матрица.

Крамеровы системы линейных уравнений. Формулы Крамера.

Теорема.**Правило Крамера**.
Пусть матричное уравнение

$$Ax = B$$

описывает систему из n линейных уравнений с n неизвестными.
Если $|A| \neq 0$, то система совместная и имеет единственное решение, описываемое формулой

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

где $D = |A|, D_i$ - определитель, полученный из определителя D заменой i-ого столбца столбцом свободных членов матрицы B:

$$D_i = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Доказательство.
Так как $|A| \neq 0$, то существует и притом единственная A^{-1}. Умножим обе части равенства $Ax = B$ на A^{-1} слева.

$$X = A^{-1}B$$

Так как обратная матрица единственна, то X единственный.
Покажем, что из $Ax = B$ следует $x_i = \dfrac{D_i}{D}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A = \frac{1}{|A|} |A^*|^T$$

$$x_i = (A^{-1}B)_i = \frac{1}{D}(A_{1i}, A_{2i}, ..., A_{ni}) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k$$

Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} A_{ki} b_k$ - это и есть определитель той матрицы, у которой мы заменили i-ый столбец столбцом свободных членов матрицы B, то есть $\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k = D_i$

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

Теперь покажем что из того, что $x_i = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k$ (*) следует, что $Ax = B$.

Домножим равенство (*) на Da_{ji}

$$Da_{ji}x_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{ji}b_k$$

И просуммируем по i:

$$D\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{ji}b_k = \sum_{i=1}^{n} A_{ki}a_{ji}\sum_{k=1}^{n} b_k$$

(че за манёвр в последнем равенстве?)

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ki}a_{ji} = \delta_{kj}|A| = \delta_{kj}D$$

$$\delta_{kj} = (int)(k == j)$$

$$D\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = D\sum_{k=1}^{n} b_k\delta_{kj} = Db_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j \Rightarrow Ax = B$$