HOW TO заботать коллоквиум по матанализу (2 семестр)

Список билетов

1. ~~Понятие определённого интеграла~~
2. ~~Интегрируемость суммы функций~~
3. ~~Ограниченность интегрируемой функции~~
4. ~~Пример ограниченной неинтегрируемой функции~~
5. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости
6. ~~Аддитивность интеграла по множеству~~
7. ~~Интегрируемость непрерывной функции~~
8. ~~Интегрируемость монотонной функции~~
9. ~~Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек~~
10. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций
11. Интегрируемость произведения функций
12. ~~Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость~~
13. ~~Формула Ньютона-Лейбница~~
14. ~~Пример неинтегрируемой функции с первообразной~~
15. ~~Пример интегрируемой функции без первообразной~~
16. ~~Интегрирование по частям~~
17. ~~Замена переменной~~
18. ~~Первая теорема о среднем~~
19. Вычисление площадей
20. Вычисление длины дуги
21. Приближённое вычисление интеграла: методы прямоугольников, трапеций, Симпсона

Понятие определённого интеграла

Разбиение отрезка $[a, b]$ - $\{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, $x_i < x_{i+1}$
Мелкость разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k = \max(x_k - x_{k-1})$$

Интегральная сумма: $S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = S_\tau$

Определение f, определённая на $[a, b]$, интегрируема по Риману на $[a, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R}: \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_t < \delta \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \epsilon)$$

Обозначаем $I = \displaystyle\int_a^b f(x) dx$

Интегрируемость суммы функций

Теорема. Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрирума на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Доказательство.

$$S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k) \Delta x_k =$$

$$= \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi)$$

$$\left| S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) - \left(\alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \right) \right| \le |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right|$$

В определении интегрируемости f и g берём не ϵ, а $\dfrac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|}$
Тогда

$$\left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| \le \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{и} \quad \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| \le \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| < \epsilon$$

Ограниченность интегрируемой функции

Теорема. Если f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Доказательство.
Проведём от противного: пусть f не ограничена, но интегрируема.
Тогда $I - \epsilon < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k < I + \epsilon$ для какого-то разбиения τ при заданном $\epsilon > 0$ и любом выборе $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
Так как f не ограничена, то найдётся такой отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором f не ограничена $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ можно сделать сколь угодно большим по модулю. Противоречие.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции

Например, функция Дирихле $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\forall x \in [a, b] \quad D(x) \quad \text{не интегрируема на} \quad [a, b], \quad \text{так как}$$

1. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 0 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = 0$
2. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 1 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = \sum \Delta x_k = b - a$

Аддитивность интеграла по множеству

Пусть $c \in (a, b)$ и функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен сумме интегралов функции $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Доказательство:
Поскольку $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\tau = \{a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что верхняя сумма Дарбу $\overline{S_\tau}$ и нижняя сумма Дарбу $\underline{S_\tau}$ удовлетворяют условию:

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon$$

Выберем такое разбиение, которое включает точку c. Теперь разбиваем τ на два подмножества τ' и τ'', соответствующие отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$, так что $\tau = \{x_i \in \tau \mid x_i \leq c\}$ и $\tau'' = \{x_i \in \tau \mid x_i \geq c\}$.
Тогда верхние и нижние суммы Дарбу для $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ будут равны $\overline{S_{\tau'}})$ и $\underline{S_{\tau'}}$, а также $\overline{S_{\tau''}})$ и $\underline{S_{\tau'}})$ соответственно.
Поскольку разбиение τ является объединением τ' и τ'', имеем:

$$\overline{S_\tau} = \overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}}$$

$$\underline{S_\tau} = \underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}$$

Из этого следует, что:

$$(\overline{S_{\tau'}} + \overline{S_{\tau''}} - (\underline{S_{\tau'}} + \underline{S_{\tau''}}) < \varepsilon$$

$$(\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}}) < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}} < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}} < \varepsilon$$

Докажем уже наконец-то, что $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$\left|\displaystyle\int_a^b - \left(\int_a^b + \int_a^b\right)\right| < \epsilon$

$\left|\displaystyle\int_a^b - \left(\int_a^b + \int_a^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| < \epsilon$

$\left|\displaystyle\int_a^b - \left(\int_a^b + \int_a^b\right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| \leq \left|\int_a^b -(S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| + \left|\int_a^b -S_{\tau'}\right| + \left|\int_c^b -S_{\tau''}\right| < \epsilon$

$\left|\displaystyle\int_a^b -(S_{\tau'} + S_{\tau''})\right| < \frac{\epsilon}{3}$

$\left|\displaystyle\int_a^b -S_{\tau'}\right| < \frac{\epsilon}{3}$

$\left|\displaystyle\int_c^b -S_{\tau''}\right| < \frac{\epsilon}{3}$

Интегрируемость непрерывной функции

Теорема.
Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.
f непрерывна на $[a, b]$, значит она равномерно нерпрерывна на $[a, b]$ (теорема Кантора):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Теперь поймём, что

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta'(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta' \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon')$$

Рассмотрим разбиение τ, у которого $\lambda_\tau < \delta$ (δ берём из определения равномерной непрерывности).

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k$$

$$\forall \xi_j', \xi_j'' \in [x_j, x_{j+1}] \quad |\xi_j' - \xi_j''| < \delta, \quad \text{так как} \quad \lambda_\tau < \delta$$

И по равномерной непрерывности получаем

$$|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon$$

$$|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

Докажем это утверждение:

1. $\Leftarrow$:

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(\xi_j') \le M_j \\ f(\xi_j'') \ge m_j \end{cases} \Rightarrow f(\xi_j') - f(\xi_j'') \le M_j - m_j < \varepsilon$$

2. $\Rightarrow$:
   Знаем $|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon$.
   Возьмём $\sup$ по ξ_j':

$$\sup_{\xi_j'} (f(\xi_j') - f(\xi_j'')) = M_j - f(\xi_j'') \le \varepsilon$$

   А затем возьмём $\inf$ по ξ_j'' и получим:

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

Мы доказали

$$|f(\xi_j)' - f(\xi_j'')| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$$

Интегрируемость монотонной функции

Теорема.
Пусть f монотонна на $[a,b]$. Тогда f интегрируема $[a,b]$.

Доказательство.
Б.о.о. скажем, что f монотонно возрастает.
Определение интегрируемости:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta(\varepsilon)>0\quad\forall\tau\quad(\lambda_\tau<\delta\Rightarrow\overline{S_\tau}-\underline{S_\tau}<\varepsilon)$$

$$\overline{S_\tau}-\underline{S_\tau}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k\le\delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\delta(f(b)-f(a))$$

Ну и чтобы $\delta(f(b)-f(a))$ было меньше ε, возьмём $\delta<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек

Теорема.
Пусть f интегрируема $[a,b]$. Тогда если поменяем f в конечном числе точек, то площадь останется неизменной.

Доказательство.
Пусть $\breve{f}$ это f, у которой поменяли $f(x_0)$ на c

$$g(x)=\begin{cases}0, x\neq x_0\\ f(x_0)-c, x=x_o\end{cases}$$

$$\int_a^b g(x)dx=0$$

$$\forall\tau|s_\tau|\le|x-f(x_0)|\cdot\lambda_\tau\to0\Rightarrow\int_a^b g(x)dx=0$$

$$\int_a^b f=\int_a^b(\breve{f}+g)=\int_a^b\breve{f}+0=\int_a^b\breve{f}$$

Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость

Определение. Пусть f интегрируема на $[a,b]$ ($\Rightarrow\forall x\in(a,b)\quad\exists\int_a^x f(t)dt$.
$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом (договоримся, что $\int_a^a=0$).

Теорема.
Пусть f ограничена на $[a,b]$. Тогда Φ непрерывна и $\exists C: \quad |\Phi(x)-\Phi(y)| \le |x-y| \quad \forall x,y \in (a,b)$ (*липшицевость*).

Доказательство. Из липшицевости следует непрерывность по определению непрерывности ($\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$) (типа множество липшицевостных функций является подмножеством непрерывных функций)
Предположим $x < y$:

$$|\Phi(x)-\Phi(y)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y dt\right| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le \begin{bmatrix} \left|\sum f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum |f(\xi_k)|\,\Delta x_k \\ \left|\sum f(\xi_k)\Delta x_k\right| \to |\int f| \\ \sum |f(\xi_k)|\,\Delta x_k \to |\int f| \end{bmatrix} \le$$

$$\le [|f| \le B] \le B \cdot \left|\int_x^y dt\right| \le B(y-x)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема.
Пусть f интегрируема на $[a,b]$ и имеет на $[a,b]$ первообразную F. Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

Доказательство.
Рассмотрим равномерное разбиение $[a,b]$ (на n равныйх частей). Тогда $\dfrac{b-a}{n}$ - длина отрезка разбиения.

$$F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1})) = \begin{bmatrix} \text{теорема Лагранжа} \\ \exists \xi_k \in [x_k, x_{k-1}]: \\ F(x_k)-F(x_{k-1} = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ = f(\xi_k)\Delta x_k \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(F(b)-F(a)) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

Пример неинтегрируемой функции с первообразной

$$F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), x \in (0,1]$$

$$f = F'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

f неинтегрируема на $(0,1]$, потому что не ограничена на этом множестве.

Пример интегрируемой функции без первообразной

$$f(x) = sgnx, x \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^{1} sgnx = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, x > 0 \\ -x + C_2, x < 0 \end{cases}$$

Добьёмся того, чтобы в нуле первообразная была непрерывна. Тогда $C_1 = C_2 = C$. Тогда первообразная представляет собой функцию $|x| + c$, которая, конечно, не дифферинцируема в нуле.

Интегрирование по частям

Теорема.
Пусть u и v непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

$$uv|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Доказательство.
По условиям теоремы, оба интеграла существуют как интегралы от кусочно непрерывных функций.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

За исключением конечного числа точек, так как кусочная дифференцируемость.

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$$

Замена переменной

Теорема.
Пусть f непрерывна на $[x_1, x_2]$, а g непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ и $g(t_1) = x_1, g(t_2) = x_2$ и $g(t) \in [x_1, x_2], t \in [t_1, t_2]$. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))d'(t)dt$$

Доказательство.
f непрерывна. А если f непрерывна, то существует первообразная F.
По теореме (?) $\Phi = \displaystyle\int_{x_1}^{x} f(t)dt$ - дифференцируема и $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда $\Phi(x)$ - первообразная $\Rightarrow \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$.
Рассмотрим $F(g(t)), t \in [t_1, t_2]$.

$$F'(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$F(g(t))$ - первообразная для $f(g(t))g'(t) \Rightarrow \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t)dt = F(g(t_2)) - F(g(t_1)) = F(x_2) - F(x_1)$
Итого $F(x_2) - F(x_1) = F(x_2) - F(x_1)$. Доказано.

Теорема. Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall x_9 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство.

$$\Phi'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h}$$

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t_- f(x_0))dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left|\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t_- f(x_0)dt}{h}\right| \leq$$

$$\leq \begin{bmatrix} \text{О, а ведь} \quad f \quad \text{непрерывна}: \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta: \quad 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \text{Берём любой} \quad \varepsilon \quad \text{и по нему находим} \quad \delta \quad \text{и берём} \quad h < \delta \end{bmatrix} \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Первая теорема о среднем

Теорема.
Пусть f интегрируема на $[a, b]$, Φ - весовая функция (≥ 0 и интегрируемая) и $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда существует $\mu \in [m, M]$: $\quad \mu \int_a^b \Phi = \int_a^b \Phi f$

Замечание.
В частности, если f непрерывная, то она достигает $min = m$ и $max = M$ на $[a, b]$ и по теореме Коши о промежуточных значениях

$$\forall \mu \in [m, M] \quad \exists x_0 \in [a, b] : \quad \mu = f(x_0)$$

Замечание.
Важно, чтобы Φ была знакопостоянной. Контрпример - $f = x, \Phi = sgnx$ на $[-1, 1]$.

$\int_{-1}^{1} xsgnxfx = 1$

$\mu \int_{-1}^{1} sgnxdx = 0 \quad \forall \mu$

Доказательство.
Рассмотрим 2 случая:

1. $\int_a^b \Phi = 0 \Rightarrow m \int_a^b \Phi \leq \int_a^b f\Phi \leq M \int_a^b \Phi$

$$\begin{cases} m \int_a^b \Phi = 0 \\ M \int_a^b \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f\Phi = 0$$

2. $\int_a^b \Phi \neq 0$

   Поделим неравенство из предыдущего пункта на $\int_a^b \Phi$:

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f\Phi}{\int_a^b \Phi} \leq M$$

Вторая теорема о среднем

Пусть на $[a, b]$ функция f монотонна (б.о.о. убывает) и Φ интегрируема на $[a, b]$. Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] : \quad \int_a^b \Phi f = f(a) \int_a^\xi \Phi(x)dx + f(b) \int_\xi^b \Phi(x)dx$$

Эта теорема без доказательства (а почему не знаю).

Вычисление длины дуги

Определение. *Кривой* называется непрерывное отображение отрезка на плоскость.
Определение. Кривая L называется *спрямляемой*, если множество длин вписанных в неё ломаных l ограничено сверху.