HOW TO заботать экзамен по алгебре (2 семестр)

Должен признаться, что не планирую делать полный конспект к экзамену по линейной алгебре, так как это слишком долгий процесс.

Список билетов

1. Многочлены
   (a) Основные понятия теории делимости. Отношение ассоциированности
   (b) Деление многочленов с остатком
   (c) Теорема о наибольшем общем делителе. Алгоритм Евклида
   (d) Существование и однозначность разложения на неприводимые многочлены в кольце многочленов над полем
   (e) Поле частных области. Рациональные дроби.
   (f) Кольцо многочленов над областью с однозначным разложением. Лемма Гаусса и ее следствия
   (g) Однозначность разложения на неприводимые многочлены в кольце многочленов над областью с однозначным разложением
   (h) Теорема Безу. Корни многочлена.
   (i) Классификация неприводимых многочленов над полями комплексных и действительных чисел
   (j) Неприводимые многочлены с целыми коэффициентами. Критерий Эйзенштейна. Алгоритм Кронекера
   (k) Неприводимые многочлены над полями вычетов
   (l) Отделение кратных множителей
   (m) Кратные корни. Число корней многочлена n-й степени
   (n) Поле разложения многочлена. Конечные поля
   (o) Симметрические многочлены. Формулы Виета. Основная теорема о симметрических многочленах
   (p) Лемма о модуле старшего члена. Основная теорема алгебры комплексных чисел.
2. Линейные операторы
   (a) Изменение матрицы при замене базиса
   (b) Собственные числа и собственные значения линейного оператора. Линейные операторы простой структуры
   (c) Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на унитарном (евклидовом) пространстве.
   (d) Сопряженный оператор. Линейность сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения. Матрица сопряженного оператора
   (e) Теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.
   (f) Нормальный оператор. Теорема о строении нормального оператора.
   (g) Унитарные и ортогональные операторы.
   (h) Самосопряженные операторы.

(i) Неотрицательные самосопряженные операторы. Квадратные корни из неотрицательных самосопряженных операторов.

(j) Полярное разложение оператора на унитарном (евклидовом) пространстве

(k) Сингулярные числа и их применения. Теорема Эккарта-Янга

(l) Псевдообратный оператор. Нормальное псевдорешение несовместной системы линейных уравнений.

3. Жорданова теория

   (a) Разложение Фиттинга. Корневое разложение. Теорема о корневом разложении.

   (b) Теорема о минимальном многочлене. Теорема Гамильтона-Кэли

   (c) Жорданов базис нильпотентного оператора

   (d) Теорема Жордана

4. Квадратичные формы

   (a) Метод Лагранжа

   (b) Закон инерции действительных квадратичных форм

   (c) Критерий Сильвестра

5. Квадрики на плоскости и в пространстве

   (a) Эллипс, гипербола, парабола

   (b) Упрощение уравнения 2-го порядка от двух переменных. Классификация плоских квадрик

   (c) Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды, конусы, цилиндры

   (d) Упрощение уравнения 2-го порядка от трех переменных. Классификация пространственных квадрик

Линейные операторы

Изменение матрицы при замене базиса

Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем F, а $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ и $Q = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$ - два базиса этого пространства. **Матрицей перехода от базиса P к базису Q** называется $n \times n$ матрицы, i-ый столбец которой (для каждого $i = 1, ..., n$) есть координатный столбец вектора q_i в базисе P.

Обозначается как $T_{P \to Q}$.

Предложение.
Пусть P и Q - два базиса пространства V. Тогда для любого $x \in V$

$$[x]_P = T_{P\to Q}[x]_Q$$

$$[x]_P = T_{P\to Q}T_{Q\to P}[x]_P$$

Предложение.
Пусть P и Q - два базиса пространства V. Матрица $T_{P\to Q}$ обратима и обратной к ней является матрицаа обратного перехода $T_{Q\to P}$.

Теорема (о замене матрицы).
Пусть V и W - конечномерные векторные пространства над полем F, P_1, P_2 - базисы пространства V, Q_1, Q_2 - базисы пространства W, а $\mathcal{A} : V \to W$ - линейный оператор. Тогда

$$A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2 \to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1 \to P_2}$$

Важный частный случай $W = V$. Тогда $Q_1 = P_1, Q_2 = P_2$.

Определение. Квадратные матрицы A и B над некоторым полем F называются подобными над F, если существует невырожденная квадратная матрица над F такая, что $B = T^{-1}AT$.

Таким образом, все матрицы одного и тогоже линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$ подобны между собой.