Домашняя контрольная работа по матанализу 2

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}+k\sqrt{k}}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}+k\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\sqrt{k}}{n\sqrt{n}+k\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}+\frac{k\sqrt{k}}{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{x^{-\frac{1}{2}}+x}=\frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}t=\sqrt{x}\\ dt=\frac{dx}{2t}\end{bmatrix}=\int\frac{2t^2}{1+t^3}dt=2\left(\int\frac{1}{3(t+1)}dt+\int\frac{2t-1}{3(1-t+t^2)}dt\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{3}\ln|t+1|+\int\frac{2t-1}{3(1-t+t^2)}dt\right)=\begin{bmatrix}u=1-t+t^2\\ du=(2t-1)dt\end{bmatrix}=2\left(\frac{1}{3}\ln|t+1|+\frac{1}{3}\ln|u|\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\ln|t+1|+\ln|1-t+t^2|\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\ln|\sqrt{x}+1|+\ln|1-\sqrt{x}+x|\right)$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}\left(\ln|\sqrt{x}+1|+\ln|1-\sqrt{x}+x|\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(\ln 2+\ln 1-\ln 1-\ln 1\right)=\frac{2\ln 2}{3}$$

Ответ: $\frac{2\ln 2}{3}$

2. $y=\sqrt{4-x^2}, y=0, 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$\int\sqrt{4-x^2}dx=\begin{bmatrix}x=2\sin t\\ dx=2\cos t dt\\ t=\arcsin(\frac{x}{2})\end{bmatrix}=2\int\cos^2 t dt=4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\sin 2t+2t+C=$$

$$=\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx=\left(\sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=\left(2\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=\left(2\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^1=\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$$

Ответ:$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$

3. $\begin{cases} x(t) = 4(\cos t + t\sin t) \\ y(t) = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$L = (x(t), y(t))$$

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$x'(t) = 4(-\sin t + \sin t + t\cos t) = 4t\cos t$$

$$y'(t) = 4(\cos t - \cos t + t\sin t) = 4t\sin t$$

$$|L| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(4t)^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^{2\pi} 4t dt = 2t^2\Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2$$

Ответ: $8\pi^2$

4. $\displaystyle\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{8 + \tan x}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

$$I = \int_0^{\arctan\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{8 + \tan x}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \begin{bmatrix} t = \tan x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{8 + t}{18t^2 + 2} dt$$

$$\int \frac{8 + t}{18t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{8 + t}{9t^2 + 1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \frac{8}{9t^2 + 1} dt + \int \frac{t}{9t^2 + 1} dt \right) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

$$I_1 = \int \frac{8}{9t^2 + 1} dt = \begin{bmatrix} u = 3t \\ du = 3dt \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \int \frac{8}{u^2 + 1} du = \frac{8}{3} \arctan(3t)$$

$$I_2 = \int \frac{t}{9t^2 + 1} dt = \begin{bmatrix} u = 9t^2 + 1 \\ du = 18t dt \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \int \frac{du}{u} = \frac{\ln|u|}{18} = \frac{\ln(9t^2 + 1)}{18}$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} \arctan(3t) + \frac{1}{18} \ln(9t^2 + 1) \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{18} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\ln 2}{36}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \frac{\ln 2}{36}$

5. $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)} \frac{1}{x} \arctan \frac{x + 1}{\sin x} dx$

$\Phi(x) = \frac{1}{x}$ - положительная функция на отрезке $[\frac{\varepsilon}{2}; \ln(1 + \varepsilon)]$, $f(x) = \arctan \frac{x+1}{\sin x}$ - непрерывная на этом же отрезке при достаточно малом ε.

Тогда при достаточно малых ε справедлива теорема о среднем и тогда исходный интеграл под знаком предела равен

$$\mu \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)} \frac{1}{x} dx$$

где $\mu \in [\min f, \max f]$.

Найдём $\min f$ и $\max f$:

$$\left(\arctan\frac{x+1}{\sin x}\right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{\sin x}\right)'}{1+\left(\frac{x+1}{\sin x}\right)^2} = \frac{\sin x-(x+1)\cos x}{1+\left(\frac{x+1}{\sin x}\right)^2}$$

Посмотрим на $\sin x-(x+1)\cos x$. При достаточно малых ε, например, меньше, чем $\frac{\pi}{3}$ имеем $\sin x<\frac{1}{2}$, $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x+1>1$. Поэтому

$$\sin x-(x+1)\cos x<\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$$

Значит $\min f = f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \max f = f\left(\ln(1+\varepsilon)\right)$.

Устремляя ε к нулю и учитывая, что $\mu\in\left[f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), f\left(\ln(1+\varepsilon)\right)\right]$ и то, что концы отрезка стремятся к нулю, получаем, что

$$\mu=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{x+1}{\sin x}=\arctan\left(\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sin x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)}\frac{1}{x}\arctan\frac{x+1}{\sin x}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)}\frac{1}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\pi}{2}\left(\ln x\right)\Big|_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\ln(1+\varepsilon)}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\pi}{2}\left(\ln\left(\ln(1+\varepsilon)\right)-\ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\pi}{2}\left(\ln\left(\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)\right)=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}\ln 2$