

Пару задач по алгебре

- Доказать формулу «бач минус цаб»: $ax(b \times c) = b(ac) - c(ab)$.
- Доказать тождество Якоби $(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$.
- Пусть f, g - базис. Доказать, что вектора $e \times f, g \times e, f \times g$ также образуют базис. (Указание - эту задачу можно решать разными способами, но довольно поучительно перейти к координатам.)
- Матрица Грама базиса e_1, e_2, e_3 - это 3×3 -матрица, у которой на месте (i, j) стоит скалярное произведение $e_i e_j$. Доказать, что определитель матрицы Грама отличен от 0. (Указание - с теми средствами, которыми вы располагаете сейчас, решить эту задачу непросто. Но попробуйте! Когда вы узнаете больше про матрицы и определители, эта задача станет совсем простой.)
- Алиса и Боб по очереди заполняют числами матрицу 2×2 . Алиса (которая ходит первой) хочет добиться, чтобы определитель получившейся матрицы был отличен от 0, а Боб хочет добиться, чтобы этот определитель был равен 0. У кого из игроков есть выигрышная стратегия? А если Алиса хочет, чтобы получился нулевой определитель, а Боб - чтобы получился определитель, отличный от 0? Те же вопросы для матрицы 3×3 . (Предостережение: для 3×3 -матриц задача уже нетривиальна.)
- Уравнения прямой и плоскости в трехмерном пространстве
- Исследовать взаимное расположение трех прямых на плоскости. (Здесь и далее под словом "исследовать" понимается следующее: указать условия на коэффициенты уравнений, отвечающие различным с геометрической точки зрения вариантам взаимного расположения задаваемых этими уравнениями объектов).
- На плоскости даны три параллельные прямые с уравнениями $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$, $Ax + By + E = 0$. Указать необходимое и достаточное условие, при котором вторая прямая проходит между первой и третьей.
- На плоскости даны две параллельные прямые с уравнениями $Ax + By + C = 0$, $Ax + By + D = 0$. Придумать формулу, выражающее расстояние между этими прямыми через коэффициенты A, B, C, D . (Система координат - прямоугольная декартова.)
- На плоскости даны две пересекающиеся и неперпендикулярные прямые с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Написать уравнение биссектрисы острого угла между этими прямыми. (Система координат - прямоугольная декартова.)
- Исследовать взаимное расположение трех плоскостей в пространстве.
- В пространстве даны три параллельные плоскости с уравнениями $Ax + By + Cz + D = 0$, $Ax + By + Cz + E = 0$, $Ax + By + Cz + F = 0$. Указать необходимое и достаточное условие, при котором вторая плоскость проходит между первой и третьей.
- В пространстве даны две параллельные плоскости с уравнениями $Ax + By + Cz + D = 0$, $Ax + By + Cz + E = 0$ и прямая с уравнением $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$. Указать необходимое и достаточное условие, при котором прямая расположена между плоскостями.
- Найти сумму k - степеней всех корней n -й степени из 1.
- Найти произведение корней n -й степени из 1.
- Доказать, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей.

- Некоторые натуральные числа (например, 1, 2, 4 или 5) можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, а некоторые (например, 3, 6 или 7) нельзя. Доказать, что если натуральные числа m и n представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел, то и их произведение mn представимо в виде такой суммы.
- Можно ли ввести на множестве комплексных чисел линейный порядок, продолжающий обычный порядок на множестве действительных чисел и согласованный с операцией сложения? (Согласованность означает, что для любых x, y, z , если $x < y$, то $x + z < y + z$.) А линейный порядок, согласованный с операцией умножения? (Здесь согласованность означает, что для любых x, y, z , если $x < y$ и $z > 0$, то $xz < yz$.)
- Абстрактные векторные пространства
- Доказать, что аксиому $1 =$ нельзя вывести из остальных аксиом линейного пространства.
- Доказать, что коммутативность сложения можно вывести из остальных аксиом линейного пространства. (Предостережение: задача нетривиальна.)
- Доказать, что в обычном трехмерном пространстве любые четыре вектора линейно зависимы.
- Доказать, что объединение двух подпространств будет подпространством тогда и только тогда, когда одно из этих подпространств содержится в другом.
- Может ли объединение трех попарно несравнимых подпространств быть подпространством? (Указание: рассмотрите двумерное пространство над двухэлементным полем.)
- Доказать, что для операций пересечения и суммы подпространств, вообще говоря, не выполняется дистрибутивный закон.
- Доказать, что для операций пересечения и суммы подпространств выполняется так называемый модулярный закон: если подпространство A содержит подпространство B , то для любого подпространства C пересечение A с суммой $B+C$ равно сумме B и пересечения A с C .
- Формула для размерности суммы двух подпространств аналогична формуле включений и исключений для двух множеств. Верна ли формула для размерности суммы трех подпространств, построенная по аналогии с формулой включений и исключений для трех множеств? (Указание: рассмотрите три прямые в обычной двумерной плоскости.)
- Докажите, что линейные многообразия $x + My + N$ равны тогда и только тогда, когда $M = Nx - y$ лежит в M .
- Ранг матрицы. Теория систем линейных уравнений
- Доказать, что произвольная матрица ранга r представима в виде суммы r матриц ранга 1.
- Доказать, что для любых двух матриц одинаковых размеров ранг их суммы не превосходит суммы их рангов.
- Доказать, что для любой $n \times s$ -матрицы A , любой обратимой $n \times n$ -матрицы B и любой обратимой $s \times s$ -матрицы ранги матриц A и BA равны.
- Доказать, что для системы линейных уравнений следующие условия эквивалентны: система имеет единственное решение; ранг основной матрицы равен числу неизвестных; ранг расширенной матрицы равен числу неизвестных.
- (Неравенство Сильвестра) Пусть A - линейный оператор, принимающий значения в некотором n -мерном пространстве L , а B - линейный оператор, определенный на L . Доказать, что ранг оператора AB не меньше $r(A) + r(B) - n$. (Указание: примените теорему о сумме ранга и дефекта к ограничению оператора B на пространство $Im(A)$.)

- (Принцип наложения решений) Доказать, что если вектор y - решение системы линейных уравнений $Ax = b$, а вектор z - решение системы линейных уравнений $Ax = c$, то вектор $y + z$ будет решением системы линейных уравнений $Ax = b + c$.
- Пусть квадратная матрица A такова, что система линейных уравнений $Ax = b$ имеет решение при любой правой части b . Доказать, что тогда эта система имеет единственное решение при каждой правой части. (Указание: воспользуйтесь теоремой о сумме ранга и дефекта.)
- Евклидовы и унитарные пространства. Решение несовместных систем линейных уравнений
- Верно ли утверждение, обратное к теореме Пифагора, в произвольном евклидовом или унитарном пространстве?
- Что произойдет, если применить процесс Грама-Шмидта к линейно зависимой системе векторов?
- Точка Лемуана треугольника - это точка, сумма квадратов расстояний которой до сторон треугольника минимальна. Найдите точку Лемуана треугольника, стороны которого лежат на прямых с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. (Указание: примените метод наименьших квадратов.)
- Две прямые в пространстве заданы уравнениями $x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt$ и $x = x_1 + qt, y = y_1 + rt, z = z_1 + st$. Объединим эти 6 уравнений в одну систему. Какие точки будут псевдорешениями этой системы?
- Пусть определитель $n \times n$ -матрицы A равен d . Чему равен определитель матрицы kA ?
- Пусть определитель $n \times n$ -матрицы A равен d . Чему равен определитель матрицы, присоединенной к A ?
- Пусть ранг $n \times n$ -матрицы A равен r . Чему равен ранг матрицы, присоединенной к A ?
- Доказать, что при перестановке двух строк матрицы в присоединенной матрице происходит такая же перестановка столбцов и все элементы присоединенной матрицы меняют знак.
- Доказать, что матрица, обратная к верхнетреугольной матрице, сама является верхнетреугольной.
- (Теорема Гамильтона-Кэли) Пусть A - 2×2 -матрица, s - ее след (сумма диагональных элементов), а d - ее определитель. Проверить, что $A^2 - sA + dE = 0$.
- Через $\text{tr}(A)$ обозначается след матрицы A . Доказать, что удвоенный определитель 2×2 -матрицы A равен $\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)$.
- Привести пример 4×4 -матрицы, определитель которой не равен $ad - bc$, где a - определитель верхнего левого 2×2 -блока, b - определитель верхнего правого 2×2 -блока, c - определитель нижнего левого 2×2 -блока, d - определитель нижнего правого 2×2 -блока.
- Матрица A называется кососимметрической, если ее транспонированная матрица равна $-A$. Доказать, что определитель действительной кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.
- Пусть в $n \times n$ -матрице A есть такие s строк и t столбцов, что все элементы, стоящие на их пересечении, равны 0 и $s + t > n$. Доказать, что определитель матрицы A равен 0.