

HOW TO заботать коллоквиум по матанализу (2 семестр)

Список билетов

1. Понятие определённого интеграла
2. Интегрируемость суммы функций
3. Ограниченность интегрируемой функции
4. Пример ограниченной неинтегрируемой функции
5. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости
6. Аддитивность интеграла по множеству
7. Интегрируемость непрерывной функции
8. Интегрируемость монотонной функции
9. Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек
10. Интегрируемость композиции непрерывной и интегрируемой функций
11. Интегрируемость произведения функций
12. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость
13. Формула Ньютона-Лейбница
14. Пример неинтегрируемой функции с первообразной
15. Пример интегрируемой функции без первообразной
16. Интегрирование по частям
17. Замена переменной
18. Первая теорема о среднем
19. Вычисление площадей
20. Вычисление длины дуги
21. Приближённое вычисление интеграла: методы прямоугольников, трапеций, Симпсона

Понятие определённого интеграла

Разбиение отрезка $[a, b]$ - $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, $x_i < x_{i+1}$

Мелкость разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k = \max(x_k - x_{k-1})$$

Интегральная сумма: $S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = S_\tau$

Определение f , определённая на $[a, b]$, интегрируема по Риману на $[a, b]$, если

$$\exists I \in \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall \tau \forall \xi \quad (\lambda_t < \delta \Rightarrow |S(f, \tau, \xi) - I| < \varepsilon)$$

Обозначаем $I = \int_a^b f(x) dx$

Интегрируемость суммы функций

Теорема. Пусть f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) &= \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= \alpha S(f, \tau, \xi) + \beta S(g, \tau, \xi) \end{aligned}$$

$$\left| S(\alpha f + \beta g, \tau, \xi) - \left(\alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx \right) \right| \leq |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right|$$

В определении интегрируемости f и g берём не ε , а $\frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|}$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| &\leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{и} \quad \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\alpha| \left| S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \right| + |\beta| \left| S(g, \tau, \xi) - \int_a^b g \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

Ограниченность интегрируемой функции

Теорема. Если f интегрируема на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Доказательство.

Проведём от противного: пусть f не ограничена, но интегрируема.

Тогда $I - \varepsilon < \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k < I + \varepsilon$ для какого-то разбиения τ при заданном $\varepsilon > 0$ и любом выборе $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Так как f не ограничена, то найдётся такой отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором f не ограничена $\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ можно сделать сколь угодно большим по модулю. Противоречие.

Пример ограниченной неинтегрируемой функции

Например, функция Дирихле $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\forall x \in [a, b] \quad D(x)$ не интегрируема на $[a, b]$, так как

1. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 0 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = 0$
2. $\{\xi_k\} \subset \mathbb{Q}, f(\xi_k) = 1 \Rightarrow \forall \tau S_\tau = \sum \Delta x_k = b - a$

Аддитивность интеграла по множеству

Пусть $c \in (a, b)$ и функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен сумме интегралов функции $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доказательство:

Поскольку $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\tau = \{a, x_1, \dots, x_{n-1}, b\}$ отрезка $[a, b]$ такое, что верхняя сумма Дарбу \overline{S}_τ и нижняя сумма Дарбу \underline{S}_τ удовлетворяют условию:

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon$$

Выберем такое разбиение, которое включает точку c . Теперь разбиваем τ на два подмножества τ' и τ'' , соответствующие отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$, так что $\tau = \{x_i \in \tau \mid x_i \leq c\}$ и $\tau'' = \{x_i \in \tau \mid x_i \geq c\}$.

Тогда верхние и нижние суммы Дарбу для $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ будут равны $\overline{S}_{\tau'}$ и $\underline{S}_{\tau'}$, а также $\overline{S}_{\tau''}$ и $\underline{S}_{\tau''}$ соответственно.

Поскольку разбиение τ является объединением τ' и τ'' , имеем:

$$\overline{S}_\tau = \overline{S}_{\tau'} + \overline{S}_{\tau''}$$

$$\underline{S}_\tau = \underline{S}_{\tau'} + \underline{S}_{\tau''}$$

Из этого следует, что:

$$(\overline{S}_{\tau'} + \overline{S}_{\tau''} - (\underline{S}_{\tau'} + \underline{S}_{\tau''})) < \varepsilon$$

$$(\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}}) + (\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}}) < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau'}} - \underline{S_{\tau'}} < \varepsilon$$

$$\overline{S_{\tau''}} - \underline{S_{\tau''}} < \varepsilon$$

Докажем уже наконец-то, что $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$$\left| \int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - \left(\int_a^c + \int_c^b \right) + (S_{\tau'} + S_{\tau''}) - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| \leq \left| \int_a^b - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| + \left| \int_a^c - S_{\tau'} \right| + \left| \int_c^b - S_{\tau''} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \int_a^b - (S_{\tau'} + S_{\tau''}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_a^c - S_{\tau'} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \int_c^b - S_{\tau''} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Интегрируемость непрерывной функции

Теорема.

Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство.

f непрерывна на $[a, b]$, значит она равномерно непрерывна на $[a, b]$ (теорема Кантора):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Теперь поймём, что

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \delta'(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta' \Rightarrow \overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} < \varepsilon')$$

Рассмотрим разбиение τ , у которого $\lambda_\tau < \delta$ (δ берём из определения равномерной непрерывности).

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

$$\forall \xi'_j, \xi''_j \in [x_j, x_{j+1}] \quad |\xi'_j - \xi''_j| < \delta, \quad \text{так как} \quad \lambda_\tau < \delta$$

И по равномерной непрерывности получаем

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon$$

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

Докажем это утверждение:

1. \Leftarrow :

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(\xi'_j) \leq M_j \\ f(\xi''_j) \geq m_j \end{cases} \Rightarrow f(\xi'_j) - f(\xi''_j) \leq M_j - m_j < \varepsilon$$

2. \Rightarrow :

Знаем $|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon$.

Возьмём \sup по ξ'_j :

$$\sup_{\xi'_j} (f(\xi'_j) - f(\xi''_j)) = M_j - f(\xi''_j) \leq \varepsilon$$

А затем возьмём \inf по ξ''_j и получим:

$$M_j - m_j < \varepsilon$$

Мы доказали

$$|f(\xi'_j) - f(\xi''_j)| < \varepsilon \Leftrightarrow M_j - m_j < \varepsilon$$

$$\overline{S_\tau} - \underline{S_\tau} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$$

Интегрируемость монотонной функции

Теорема.

Пусть f монотонна на $[a, b]$. Тогда f интегрируема $[a, b]$.

Доказательство.

Б.о.о. скажем, что f монотонно возрастает.

Определение интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \tau \quad (\lambda_\tau < \delta \Rightarrow \overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon)$$

$$\overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k \leq \delta \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

$$\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a)$$

Ну и чтобы $\delta(f(b) - f(a))$ было меньше ε , возьмём $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Неизменность интеграла при изменении функции в конечном числе точек

Теорема.

Пусть f интегрируема $[a, b]$. Тогда если поменяем f в конечном числе точек, то площадь останется неизменной.

Доказательство.

Пусть \check{f} это f , у которой поменяли $f(x_0)$ на c

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ f(x_0) - c, & x = x_0 \end{cases}$$

$$\int_a^b g(x) dx = 0$$

$$\forall \tau |s_\tau| \leq |x - f(x_0)| \cdot \lambda_\tau \rightarrow 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f = \int_a^b (\check{f} + g) = \int_a^b \check{f} + 0 = \int_a^b \check{f}$$

Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость

Определение. Пусть f интегрируема на $[a, b]$ ($\Rightarrow \forall x \in (a, b) \quad \exists \int_a^x f(t) dt$).

$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ - интеграл с переменным верхним пределом (договоримся, что $\int_a^a = 0$).

Теорема.

Пусть f ограничена на $[a, b]$. Тогда Φ непрерывна и $\exists C : |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in (a, b)$ (липшицевость).

Доказательство. Из липшицевости следует непрерывность по определению непрерывности ($\delta = \frac{\varepsilon}{C}$) (типа множество липшицевостных функций является подмножеством непрерывных функций)

Предположим $x < y$:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \left[\begin{array}{l} \left| \sum f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum |f(\xi_k)| \Delta x_k \\ \left| \sum f(\xi_k) \Delta x_k \right| \rightarrow \left| \int f \right| \\ \sum |f(\xi_k)| \Delta x_k \rightarrow \int |f| \end{array} \right] \leq$$

$$\leq [|f| \leq B] \leq B \cdot \left| \int_x^y dt \right| \leq B(y - x)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Теорема.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и имеет на $[a, b]$ первообразную F . Тогда $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Доказательство.

Рассмотрим равномерное разбиение $[a, b]$ (на n равных частей). Тогда $\frac{b-a}{n}$ - длина отрезка разбиения.

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \left[\begin{array}{l} \text{теорема Лагранжа} \\ \exists \xi_k \in [x_k, x_{k-1}] : \\ F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \\ = f(\xi_k) \Delta x_k \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F(b) - F(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

Пример неинтегрируемой функции с первообразной

$$F(x) = x^2 \sin \left(\frac{1}{x^2} \right), x \in (0, 1]$$

$$f = F'(x) = 2x \sin \left(\frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x} \cos \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

f неинтегрируема на $(0, 1]$, потому что не ограничена на этом множестве.

Пример интегрируемой функции без первообразной

$$f(x) = \operatorname{sgn} x, x \in [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x = 0$$

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & x > 0 \\ -x + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Добьёмся того, чтобы в нуле первообразная была непрерывна. Тогда $C_1 = C_2 = C$. Тогда первообразная представляет собой функцию $|x| + c$, которая, конечно, не дифференцируема в нуле.

Интегрирование по частям

Теорема.

Пусть u и v непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

$$uv|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Доказательство.

По условиям теоремы, оба интеграла существуют как интегралы от кусочно непрерывных функций.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

За исключением конечного числа точек, так как кусочная дифференцируемость.

$$\int_a^b (uv)' = \int_a^b (u'v) + \int_a^b (uv')$$

Замена переменной

Теорема.

Пусть f непрерывна на $[x_1, x_2]$, а g непрерывно дифференцируема на $[t_1, t_2]$ и $g(t_1) = x_1, g(t_2) = x_2$ и $g(t) \in [x_1, x_2], t \in [t_1, t_2]$. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t)) d'(t) dt$$

Доказательство.

f непрерывна. А если f непрерывна, то существует первообразная F .

По теореме (?) $\Phi = \int_{x_1}^x f(t)dt$ - дифференцируема и $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда $\Phi(x)$ - перво-

образная $\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$.

Рассмотрим $F(g(t)), t \in [t_1, t_2]$.

$$F'(g(t)) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$F(g(t))$ - первообразная для $f(g(t))g'(t) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t)dt = F(g(t_2)) - F(g(t_1)) =$

$F(x_2) - F(x_1)$

Итого $F(x_2) - F(x_1) = F(x_2) - F(x_1)$. Доказано.

Теорема. Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда $\forall x_0 \in (a, b) \quad \Phi'(x_0) = f(x_0)$

Доказательство.

$$\Phi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h}$$

$$\frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0)h}{h} + f(x_0) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t) - f(x_0))dt}{h} + f(x_0)$$

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(f(t) - f(x_0))dt}{h} \right| \leq$$

$$\leq \left[\begin{array}{l} \text{О, а ведь } f \text{ непрерывна : } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \quad 0 < |t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \text{Берём любой } \varepsilon \text{ и по нему находим } \delta \text{ и берём } h < \delta \end{array} \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon$$

Первая теорема о среднем

Теорема.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$, Φ - весовая функция (≥ 0 и интегрируемая) и $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$. Тогда существует $\mu \in [m, M]$:
$$\mu \int_a^b \Phi = \int_a^b \Phi f$$

Замечание.

В частности, если f непрерывная, то она достигает $\min = m$ и $\max = M$ на $[a, b]$ и по теореме Коши о промежуточных значениях

$$\forall \mu \in [m, M] \quad \exists x_0 \in [a, b] : \quad \mu = f(x_0)$$

Замечание.

Важно, чтобы Φ была знакопостоянной. Контрпример - $f = x$, $\Phi = \operatorname{sgn} x$ на $[-1, 1]$.

$$\int_{-1}^1 x \operatorname{sgn} x dx = 1$$

$$\mu \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0 \quad \forall \mu$$

Доказательство.

Рассмотрим 2 случая:

$$1. \int_a^b \Phi = 0 \Rightarrow m \int_a^b \Phi \leq \int_a^b f \Phi \leq M \int_a^b \Phi$$

$$\begin{cases} m \int_a^b \Phi = 0 \\ M \int_a^b \Phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f \Phi = 0$$

$$2. \int_a^b \Phi \neq 0$$

Поделим неравенство из предыдущего пункта на $\int_a^b \Phi$:

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f \Phi}{\int_a^b \Phi} \leq M$$

Вторая теорема о среднем

Пусть на $[a, b]$ функция f монотонна (б.о.о. убывает) и Φ интегрируема на $[a, b]$. Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] : \quad \int_a^b \Phi f = f(a) \int_a^\xi \Phi(x) dx + f(b) \int_\xi^b \Phi(x) dx$$

Эта теорема без доказательства (а почему не знаю).

Вычисление длины дуги

Определение. Кривой называется непрерывное отображение отрезка на плоскость.

Определение. Кривая L называется *прямолинейной*, если множество длин вписанных в неё ломаных l ограничено сверху.