Лабораторная работа № 1

Моделирование случайных величин

Цель работы. Исследовать алгоритмы генерации случайных величин в среде Matlab. Научиться вычислять значения выборочных характеристик случайной величины.

Форма контроля. Письменный отчёт (допускается преставление в электронном виде). Опрос в устной форме в соответствии с перечнем контрольных вопросов.

Количество отведённых аудиторных часов: 2.

Содержание работы:

В соответствии со своим вариантом написать код, реализующий алгоритм генерации случайной величины (СВ) с заданным законом распределения. Для ответа на поставленные в задании вопросы провести численный эксперимент или статистическое имитационное моделирование и представить соответствующие графики. Провести анализ полученных результатов и представить его в виде выводов по проделанной работе.

Варианты заданий:

a) Постройте график зависимости значения выборочного математического ожидания от числа реализаций СВ. Так же отобразите на графике значение математического ожидания, вычисленное на основе соотношений из таблицы 1.

b) Постройте график зависимости значения выборочной дисперсии от числа реализаций СВ. Так же отобразите на графике значение дисперсии, вычисленное на основе соотношений из таблицы 1.

c) Выполните визуализацию интервальной эмпирической функции распределения СВ. Так же отобразите на рисунке теоретические значения функции распределения, вычислив их в результате интегрирования плотности, заданной на основе соотношений из таблицы 1. Постройте график зависимости значения средней абсолютной разности эмпирических и теоретических значений функции распределения от числа реализаций СВ.

d) Выполните визуализацию эмпирической плотности распределения СВ (гистограммы с необходимой нормировкой). Так же отобразите на рисунке график плотности распределения, определённой на основе соотношений из таблицы 1. Постройте график зависимости значения средней абсолютной разности эмпирических и теоретических значений плотности распределения от числа реализаций СВ.

Примеры контрольных вопросов

1. Как изменяется ошибка между величинами выборочного среднего и математического ожидания (полученного из таблицы 1) по мере увеличения в выборке числа реализаций СВ.

2. Какое число реализаций СВ обеспечивает оптимальную оценку показателей выборочного среднего/дисперсии для вашего случая. Ответ подтвердить графиками, представленными в отчёте.

Таблица 1. Алгоритмы моделирования случайных величин на примере среды Matlab

Памятка:

α — значение стандартной равномерной СВ [***функция*** rand()];

C_n^x — число сочетаний из x элементов, выбранных из множества n элементов без повторений [***функция*** nchoosek(n, x)];

n! — факториал [***функция*** factorial(n)];

Г(c) — Гамма-функция [***функция*** gamma(c)];

B(v,w) — Бета-функция [***функция*** beta(v, w)];

№	Наименование	Обозначение, параметры сдвига, масштаба, формы	Плотность распределения $p(x)$, математическое ожидание m и дисперсия D	Алгоритм генерации
1	Равномерное распределение	$R: a, b$	$p(x) = \begin{cases} 1/b, & a \le x \le a+b, \\ 0, & x < a, \quad x > a+b, \end{cases}$ $m = a + b/2, \quad D = b^2/12$	$R: a, b \sim a + b\alpha$
2	Биномиальное распределение	$B: n,\ p$	$p(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$, где $x \in \{0,1,2,...\}, \quad C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$, $m = np, \quad D = np(1-p)$	$B: n,\ p \sim \sum_{i-1}^{n}(B_i: 1,\ p)$, где $B: 1, p \sim \begin{cases} 1, & \alpha \le p, \\ 0, & \alpha > p \end{cases}$
3	Гауссовское (нормальное) распределение	$N: \mu, \sigma$	$p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, $m = \mu, \quad D = \sigma^2$	$N: \mu, \sigma \sim \sigma\left(\sum_{i=1}^{12}\alpha_i - 6\right) + \mu$

№	Наименование	Обозначение, параметры сдвига, масштаба, формы	Плотность распределения $p(x)$, математическое ожидание m и дисперсия D	Алгоритм генерации
4	Показательное распределение	$E:b$	$p(x)=\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{x}{b}\right)$, где $x \geq 0$, $m=b, \quad D=b^2$	$E:b \sim -b \cdot \ln\alpha$
5	Распределение Рэлея	$Rl:\sigma$	$p(x)=\frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, где $x \geq 0$, $m=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad D=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$	$Rl:\sigma \sim \sigma\sqrt{-2\ln\alpha}$
6	Логнормальное распределение	$L:\mu,\sigma$	$p(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\ln(x/\mu)\right)^2}{2\sigma^2}\right]$, где $x \geq 0$, $m=\mu\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)$, $D=\mu^2\exp(\sigma^2)\left[\exp(\sigma^2)-1\right]$	$L:\mu,\sigma \sim \mu\exp(N:0,\sigma)$, где $N:0,\sigma$ – гауссовская СВ с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением σ
7	Гамма-распределение	$\gamma:b,c$	$p(x)=(x/b)^{c-1}[\exp(-x/b)]/b\Gamma(c)$, $\Gamma(c)=\int_0^\infty \exp(-u)u^{c-1}du$, $m=bc, \quad D=b^2c$	$\gamma:b,c \sim b(\gamma:1,c)$, $\gamma:1,c \sim -S_1\log\alpha_3/(S_1+S_2)$, $S_1=\alpha_1^{1/c}, \; S_2=\alpha_2^{1/(1-c)}, \; S_1+S_2 \leq 1$, где $0 \leq c < 1$

№	Наименование	Обозначение, параметры сдвига, масштаба, формы	Плотность распределения $p(x)$, математическое ожидание m и дисперсия D	Алгоритм генерации
8	Распределение Эрланга	$Er: b, c$	$p(x) = (x/b)^{c-1}[\exp(-x/b)]/b(c-1)!$, $m = bc$, $D = b^2c$	$\gamma: b, c \sim -b\log(\prod_{i=1}^{c}\alpha_i)$, c – целое число
9	Бета-распределение	$\beta: v, w$	$p(x) = x^{v-1}(1-x)^{w-1}/B(v,w)$, $B(v,w) = \int_0^1 u^{v-1}(1-u)^{w-1}du$, $m = v/(v+w)$, $D = vw/(v+w)^2(v+w+1)$	$\beta: v, w \sim S_1/(S_1+S_2)$, $S_1 = \alpha_1^{1/v}$, $S_2 = \alpha_2^{1/w}$, $S_1 + S_2 \le 1$