

Оценката Ви ще е равна на 2 + броя точки, които получите. Време за работа: 3 часа. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и X, Y са случайни величини.

Ако имате нужда, може да ползвате, че $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$, $\int x e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1)$, $\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$ и $\int x^3 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$.

Задача 1. Като резултат от процес в природата, височината на хората може да бъде моделирана добре чрез нормално разпределение. По данни от интернет, средната височина на жените в България е 163 cm, а стандартно отклонение е 5.6 cm.

Избираме група от 20 случайни жени.

1. (0.5 т.) Каква е вероятността средната височина в тази група да бъде над 165 cm?
2. (0.5 т.) Каква е вероятността в групата да има човек над 180 cm?

Задача 2. Нека съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = ce^{-y}$ за $0 < x < y < \infty$ и 0 извън тази област, като c е някаква константа.

- (0.75 т.) Намерете c и $Cor(X, Y)$.
- (0.25 т.) Намерете $\mathbb{E}(X|Y = 1)$.

Задача 3. (1 т.)

Ентусиаст се интересува от стойността на π , като разполага с компютър, но няма достъп интернет. По тази причина, решава да симулира голям брой равномерно разпределени случайни точки в $[0, 1] \times [0, 1]$ и да разгледа каква част от тях попадат във вписаната за този квадрат окръжност.

Можете ли да обясните как това може да доведе до оценка за π и защо? Колко точки трябва да се симулират, така вероятността грешката да бъде по-малка от 0.001 е 95%?

Задача 4. Нека X и Y са независими и $X \sim U(0, 1)$, $Y \sim Exp(1)$.

1. (0.25 т.) Съществува ли число a , такова че $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(Y \geq a)$? Вярно ли е това за всякакви непрекъснати X и Y ?
2. (0.75 т.) Какви са плътностите на X/Y и Y/X ? (Бонус: Сравнете очакванията на последните две случайни величини.)