Теория на Вероятностите
Упражнения 2

ЕК, МРС

05.03.2021

1 Събитие - аксиоми и свойства

Нека Ω е множеството от елементарни изходи на даден експеримент $\mathcal{E}$. Означаваме с $\mathfrak{R}(\Omega)$ множеството от подмножества на Ω. Елементите на $\mathfrak{R}(\Omega)$ се наричат събития. Събитието $A \in \mathfrak{R}(\Omega)$ е настъпило, ако експеримента има за резултат елементарен изход принадлежащ на A. В $\mathfrak{R}(\Omega)$ се въвеждат операциите обединение и сечение на краен брой събития, и допълнение на събитие. Тези операции са идемпотентни, асоциативни, комутативни, съгласувани с частичната наредба в $\mathfrak{R}(\Omega)$ зададена като теоретико-множествено включване, свързани са помежду си с два дистрибутивни закона, и удовлетворяват закона на Де Морган:
1) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad \overline{\overline{A}} = A$, където $\overline{A} = \Omega - A$,
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
3) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$,
4) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$,
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
за всички $A, B, C \in \mathfrak{R}(\Omega)$.

Следователно множеството $\mathfrak{R}(\Omega)$ е снабдено със структура на *булова алгебра* (тоест е затворено относно операциите допълнение и крайни обединения и сечения) и ще го наричаме *пълно пространство от събития* на експеримента $\mathcal{E}$. Булова алгебра, която е затворена относно *изброимите* обединения и сечения, се нарича *булова сигма алгебра*.

Забележка 1.1. *Понякога е целесъобразно да се работи не с пълното пространство от събития на даден експеримент, а с конкретно негово подмножество. Това мотивира следната дефиниция.*

Дефиниция 1.2. *Пространство от събития на даден експеримент $\mathcal{E}$ е булова (сигма) подалгебра на $\mathfrak{R}(\Omega)$. Ако Ω и $\mathfrak{A}$ са съответно пространството от елементарни изходи и пространството от събития на $\mathcal{E}$, то двойката $(\Omega, \mathfrak{A})$ се нарича измеримо пространство на $\mathcal{E}$.*

Интерпретация на въведените операции: събитието $A \cup B$ е настъпило, ако поне едно от двете събития A или B е настъпило. Събитието $A \cap B$ е настъпило, ако и двете събития A и B са настъпили. Събитието $\overline{A} = \Omega - A$ е настъпило точно тогава, когато не настъпва A. Дефинираме $A - B = A \cap \overline{B}$, което настъпва точно тогава, когато настъпва A и не настъпва B.
Събитието Ω се нарича достоверно, понеже то настъпва при всеки експеримент, а с $\emptyset$ се означава невъзможното събитие $\overline{\Omega}$.

2 Вероятност - аксиоми и свойства. Примери на вероятностни мярки

Нека $\mathfrak{A}$ е булова σ алгебра и $(\Omega, \mathfrak{A})$ е измеримо пространство на експеримента $\mathcal{E}$. Ако $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от събития принадлежащи на $\mathfrak{A}$, то събитията $\liminf A_n$ и $\limsup A_n$ дефинирани чрез

$$\liminf A_n = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \limsup A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n, \tag{1}$$

също принадлежат на $\mathfrak{A}$, и се наричат съответно долна и горна граница на редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Събитието $\liminf A_n$ настъпва точно тогава, когато всички събития от разглежданата редица настъпват, евентуално с изключение на краен брой. Събитието $\limsup A_n$ настъпва точно

тогава, когато безбройно много от събитията на редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ настъпват. Следователно $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Дефиниция 2.1. *Редицата от събития $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича сходяща, ако е в сила равенството $\liminf A_n = \limsup A_n$.*

Означение $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, където $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ се нарича гранично събитие или граница на $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример 2.2. *В частност, ако $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ и $\cap_{n=1}^{\infty} A_k = \emptyset$, то $\liminf A_n = \limsup A_n = \emptyset$, следователно $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$. Тоест $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони монотонно към $\emptyset$.*

Дефиниция 2.3. *Функцията $\mathbf{P} : \mathfrak{A} \longrightarrow [0,1]$ удовлетворяваща аксиомите:*
1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, (нормираност),
2) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$, $\forall A, B \in \mathfrak{A}: \ A \cap B = \emptyset$, (адитивност),
3) за всяка редица $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ от събития, клоняща монотонно към $\emptyset$, съответната числова редица $\{\mathbf{P}(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към 0, (непрекъснатост),

се нарича вероятностна мярка върху измеримото пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$. Тройката $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ се нарича вероятностно пространство на $\mathcal{E}$.

Свойства 2.4. *Свойства на вероятностната мярка:*
(1) $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(B)$ (монотонност)
(2) $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
(3) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
(4) $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$
(5) Ако A_k, $k = 1, 2, \dots$ са две по две непресичащи се, то $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$.

Впоследствие ще пропускаме знакът $\cap$ за сечение и ще записваме накратко $A \cap B$ като AB.
Доказателство на свойства (1), (2), (3):
Ако $A \subset B$, то $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}((B - A) \cup A) = \mathbf{P}(B - A) + \mathbf{P}(A) \ge \mathbf{P}(A)$, т.е. $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(B)$.
Пресмятаме $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) \Rightarrow \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$. Сумираме равенствата $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B})$ и $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\overline{A}B)$ и получаваме $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 2\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A}B)$. Следователно $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(A \cup \overline{A}B) = \mathbf{P}((A \cup \overline{A})(A \cup B)) = \mathbf{P}(A \cup B)$. Свойства (4) и (5) следват по индукция.

Пример 2.5. *Класическа вероятност: Нека $(\Omega, \mathfrak{R}(\Omega), \mathbf{P})$ е вероятностно пространство за $\mathcal{E}$, като $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ и $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \dots = \mathbf{P}(\{\omega_n\})$. Тогава са в сила равенствата:*

$$\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \mathbf{P}(\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}) = \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{m} \{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{m}{n}.$$

Тоест, ако $A \in \mathfrak{R}(\Omega)$, то $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, където с $|A|$ е означен броя на елементарните изходи принадлежащи на събитието A.

Забележка 2.6. *Обобщение на класическата вероятност за случая на безкрайно пространство от елементарни изходи: $|\Omega| = \infty$. Конструираме $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, че $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ и за всяко n да е в сила $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$, $|\Omega_n| < \infty$. Нека $A_n = A \cap \Omega_n$ и дефинираме $\mathbf{P}$ чрез равенството:*

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{|\Omega_n|}.$$

Пример 2.7. *Статистическа вероятност:*

$$\text{\textit{честота на събитието} } A = \frac{\text{\textit{брой настъпвания на} } A}{\text{\textit{брой опити}}} = \frac{X_n}{n};$$

$$\text{\textit{статистическа вероятност на} } A = \lim_{n \to \infty} \frac{X_n}{n}.$$

Пример 2.8. ***Парадокс на дьо-Мере:*** *Да се пресметне вероятността при хвърляне на 2 зара да се падне поне една шестица, ако всички изходи са равновероятни и:*
a) заровете са различими
b) заровете са неразличими.
Кой модел отразява вярно действителността?

Извод: При неразличими обекти не можем да препполагаме равновероятност на елементарните изходи, тоест не можем да приложим класическа вероятност. Ако приложим класическа вероятност, то няма да получим резултат съгласуван с нашата "опитна реалност", която се описва чрез статистическа вероятност. Класическа вероятност прилагаме, когато обектите в разглеждан експеримент са различими.

3 Условия на задачите от упражнение 2

Задача 1 Куб, на който всички страни са боядисани в различни цветове, е разрязан на 1000 еднакви кубчета. Да се определи вероятността случайно избрано кубче да има точно две боядисани страни.

Задача 2 Да се определи вероятността контролният номер на първата срещната лека кола:
а) да не съдържа еднакви цифри;
б) да има точно две еднакви цифри;
в) да има три еднакви цифри;
г) да има две двойки еднакви цифри;
д) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри.

Задача 3 От десет лотарийни билета два са печеливши. Да се определи вероятността, измежду изтеглените по случаен начин пет билета:
а) точно един да бъде печеливш;
б) да има два печеливши;
в) да има поне един печеливш.

Задача 4 При игра на тото 6 от 49 да се пресметна вероятностите за печалба на шестица, петица, четворка, тройка.

Задача 5 С цел намаляване броя на играните мачове, $2k$ отбора с жребий се разбиват на две равни по брой групи. Да се определи вероятността двата най-силни отбора да са в различни групи.

Задача 6 Във влак с три вагона по случаен начин се качват седем пътника. Каква е вероятността в първия вагон да се качат четирима.

Задача 7 Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека.

Задача 8 Група от n човека се нарежда около кръгла маса. Каква е вероятността две фиксирани лица да се окажат едно до друго.

Задача 9 От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$, k пъти последователно се вади по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако:
а) извадката е без връщане;
б) извадката е с връщане.

Задача 10 Нека $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ са булови алгебри и множеството $\mathcal{A}$ се състои от всички крайни обединения на непресичащи се елементи от $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Да се докаже, че $\mathcal{A}$ е булова алгебра относно операциите допълнение и крайните обединения и сечения.

3.1 Решения на задачите от упражнение 2

Задача 1 Кубчетата с точно две оцветени страни имат точно един ръб, съдържащ се в ръб на големия куб. Броят на ръбовете на кубът е 12 и всеки ръб съдържа точно 8 двуцветни кубчета. Следователно търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{12\times 8}{1000} = 0,096$.

Задача 2 Търсената вероятност е:

a) $\mathbf{P} = \frac{|V_{10}^4|}{|V(10;4)|} = 0.504$

b) $\mathbf{P} = \frac{\binom{10}{1}\binom{4}{2}|V_9^2|}{|V(10;4)|} = 0.432$

c) $\mathbf{P} = \frac{\binom{10}{1}\binom{4}{3}|V_9^1|}{|V(10;4)|} = 0.036$

d) $\mathbf{P} = \frac{\binom{10}{2}|P(4;2,2)|}{|V(10;4)|} = 0.018$

e) $\mathbf{P} = \frac{10^2+2\sum_{k=1}^{9}k^2}{|V(10;4)|} = 0.067$, тъй като броят на начините по които наредена двойка десетични цифри има сума k е равен на $\begin{cases} k+1, & k \in \{0,1,\ldots,8\} \\ 19-k, & k \in \{10,11,\ldots,18\} \end{cases}$

Задача 3 Търсената вероятност е:

a) $\mathbf{P} = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9} \approx 0.55$

b) $\mathbf{P} = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9} \approx 0.22$

c) $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{7}{9} \approx 0.77$

Задача 4 Нека $A_k,\ k = 3,4,5,6$ са съответно събитията - познати са k числа при игра на тото 6 т 49. Тогава $\mathbf{P}(A_6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816},\ \mathbf{P}(A_5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{54200},\ \mathbf{P}(A_4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{1032},\ \mathbf{P}(A_3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{56}$.

Задача 5 Да означим с A събитието - при жребий, двата най-силни отбора попадат в различни групи. Броят на различните начини по които най-силният отбор попада в група, която не съдържаща втория по сила е $\binom{2k-2}{k-1}$. Броят на различните начини по които най-силният отбор попада в група без ограничение е $\binom{2k-1}{k-1}$. Следователно $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{\binom{2k-1}{k-1}} = \frac{k}{2k-1}$.

Второ решение: Броят на различните начини по които от $2k$ отбора се определят 2 групи от по k отбора е $\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$. Броят на различните начини при които двата най-силни отбора са в една група е $\binom{2k-2}{k}$. Следователно $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{2k-2}{k}}{\frac{1}{2}\binom{2k}{k}} = \frac{k}{2k-1}$.

Задача 6 Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{\binom{7}{4}|V(2;3)|}{|V(3;7)|} \approx 0.128$

Задача 7 При $r \leq n-2$ търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{2(n-r-1)[(n-2)!]}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$. Следователно

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}, & r \leq n-2 \\ 0, & r > n-2 \end{cases}$$

Задача 8 Без ограничение, номерираме n-те позиции. При $n \geq 3$ пресмятаме $\mathbf{P} = \frac{2n[(n-2)!]}{n!} = \frac{2}{n-1}$. Следователно

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{2}{n-1}, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}$$

Задача 9 Нека $T_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$ и $U_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$.

a) Изображението $T_k \longrightarrow C_n^k \quad (i_1, i_2, \ldots, i_k) \longmapsto \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ е биекция, тогава $|T_k| = |C_n^k|$. Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{|T_k|}{|V_n^k|} = \frac{1}{k!}$.

b) Изображението $U_k \longrightarrow C(n;k) \quad (i_1, i_2, \ldots, i_k) \longmapsto [i_1, i_2, \ldots, i_k]$ е биекция, тогава $|U_k| = |C(n;k)|$. Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{|U_k|}{|V(n;k)|} = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{n^k}$.