Изпит по ВиС - част 1

23.06.2021

Време за работа: 120 минути

Указания за работа

При работата върху задачите може да реферирате към теореми и твърдения, които ви помагат за извеждането на някоя стъпка. Точките имат индикативен характер.

Въпроси

Задача 1. *Нека X, Y са независими дискретни случайни величини с очакване $\mathbb{E}[X] = \mu_X, \mathbb{E}[Y] = \mu_Y$ и дисперсия $\sigma_X^2 = DX, \sigma_Y^2 = DY$.*

- *Докажете, че $\mathbb{E}[XY] = \mu_X \mu_Y$.* ***(1.50 т.)***
- *Докажете, че $D(XY) = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 + \mu_Y^2 \sigma_X^2 + \mu_X^2 \sigma_Y^2$.* ***(1.50 т.)***

Задача 2. *В началото на Ковид-19 пандемията българи се завръщат от западни държави. Считаме, че те влизат един по един и всеки, независимо от всички останали, е заразен с Ковид с вероятност $p = 1/100$. Нека N_n е поредният влязъл, който е $n-$тият заразен измежду влезлите дотук ($N_{10} = 100$ означава, че 100-ният влязъл е точно 10-ят заразен).*

- *Какво е разпределението на N_n?* ***(1 т.)***
- *Какви са очакването и дисперсията на N_n?* ***(1 т.)***
- *Каква е приблизително вероятността хилядният заразен да не е влязъл до стохилядния завърнал се?****(1 т.)***

Задача 3.

- *Дефинирайте понятието независимост в съвкупност за n непрекъснати случайни величини.* ***(0.5 т.)***
- *Напишете твърденията на закона за големите числа и на усиления закон за големите числа за редица от независими еднакво разпределени случайни величини $(X_j)_{j \geq 1}$.****(1 т.)***
- *Докажете закона за големите числа, ако $\mathbb{E}[X_1] = 0, \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$.*
- *Комарджия има N лева и залага последователно 1 лв. на червено на рулетка с 18 червени и 19 други числа. Понеже N е много голямо, той счита, че с положителна вероятност няма да фалира дори да продължи да играе до безкрайност. Вярно ли е това?****(1.5 т.)***

Задача 4. *Преподавател получава обикновено по 5 имейла от приятели в рамките на ден, като те пристигат независимо един от друг и равномерно разпределени на $(0, 1)$ (денят се кодира с $(0, 1)$). По време на сесия е известно, че той отваря на другия ден само $4-$тия неотворен имейл от предходния ден (подредени хронологично). Хакер иска да се възползва от това, като изпрати своето съобщение, така че с максимална вероятност неговият имейл да е хронологично на четвърто място. За да постигне това, в кой момент трябва да изпрати имейл?****(3 т.)***

Задача 5.

- *Дефинирайте сходимост по разпределение.****(0.5 т.)***
- *Нека $(X_j)_{j \geq 1}$ е редица от независими в съвкупност случайни величини, всяка, от които експоненциално разпределена с параметър 1 и $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.*
  - *Изразете функцията на разпределение на M_2 и на M_n.****(1 т.)***
  - *Покажете, че $Y_n = M_n - \log(n)$ се схожда по разпределение към случайна величина Y и намерете функцията на разпределение на Y.****(1.5 т.)***