Изпит по СЕМ

12.02.2022

Време за работа 150 минути; край 11:30

*Общият брой точки е **60**; Индикативен брой за положителна оценка е **26***

Указания за работа

*При работата върху задачите може да реферирате към теореми и твърдения, които ви помагат за извеждането на някоя стъпка. Всички части на въпрос, предхождани от •, се решават от всички. За някои въпроси се изчислява индивидуален параметър M и ако $M = x$, решавайте само тези части, предхождани от **(x)**, в допълнение на частите предхождани от •. (Пример: изчислявате за конкретна задача $M = 1$ и решавате за тази задача частите с • и **(1)**) За всяка задача <u>записвайте</u> на видимо място изчислението на M и факултетния си номер. При някои задачи се изчислява параметър N, но зависимостта от него е числова и се отразява в конкретна подзадача, която се решава от всички и изчислението на N се прилага. <u>Записвайте към всяка задача изчислението на M и N, ако има такива. Без такъв запис подточката няма да е валидна.</u>*

Въпроси

Задача 1.

- *Кои са компонентите на едно вероятностно пространство и какви са свойствата на вероятностната функция $\mathbb{P}$? **(2 т.)***

Нека A, B, C са независими в съвкупност събития. ***Нека $M = \Phi \bmod 2$, където Φ е сумата на <u>първата и третата</u> цифри на вашия факултетен номер.***

(0) *Изразете $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ чрез $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$.**(2 т.)***

(1) *Изразете $\mathbb{P}(A \cup B \cap C)$ чрез $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C)$.**(2 т.)***

Задача 2. *Агенция проверява два вида стоки А и Б. Дефектните сред А са 1%, а сред Б са 3%. Качеството на всяка конкретна стока не зависи от никоя друга. Пропорцията на стоката от тип А е $1/2$ от всички стоки. Без да има информация за видовете, агенцията може да избере случайно n стоки. На цена $f(n)$ агенцията може да определи дали сред тези n стоки има дефектни. Ако има дефектни, срещу цена от още n тя определя кои точно са дефектните.*

- *Обосновете и съставете модел, който описва очакваната цена $\mathcal{P}(n)$ на единица тествана стока, ако се проверяват накуп n единици. **(4 т.)***

Нека $M = \Phi \bmod 2$, където Φ е <u>последната</u> цифра на вашия факултетен номер.

(0) *Третирайки n като непрекъсната променлива, намерете уравнение, което ви задава x^*, такова че $\mathcal{P}(x^*) = \min_{x>0} \mathcal{P}(x)$, при $f(n) = \sqrt{n}$.**(2 т.)***

(1) *Третирайки n като непрекъсната променлива, намерете уравнение, което ви задава x^*, такова че $\mathcal{P}(x^*) = \min_{x>0} \mathcal{P}(x)$, при $f(n) = n^{1/3}$.**(2 т.)***

Задача 3.

- *Ако Y е дискретна случайна величина, дефинирайте $\mathbb{E}\left[X \middle| Y\right]$ и разпишете нейния вид.**(2 т.)***

В даден спорт рейтингът на произволно избран спортист се описва от случайната величина Y, приемащи стойности в $\{1, 2, \cdots, n\}, n \geq 2$. При дадена игра спортистът печели случайно количество точки, зададено чрез $T = f(X, Y)$.

Нека** $N = \frac{1}{3} \times (\Phi \bmod 3)$**, където** Φ **е предпоследната цифра на вашия факултетен номер.

- *При известно произволно разпределение на Y, намерете разпределението на случайната величина $\mathbb{E}\left[T \middle| Y\right]$, ако $X \sim U(0, \frac{1}{3} + N)$ е независима от Y и $f(x, y) = xy + x^2$.**(4 т.)***

Задача 4. *Нека X е случайна величина. Тогава:*

- *дефинирайте нейната функция на моментите $\mathcal{M}_X$ и определете как можете да намерите $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ чрез $\mathcal{M}_X$.**(2 т.)***

Нека** $M = \Phi \bmod 2$**, където** Φ **е произведението на последните две цифри на вашия факултетен номер.

(0) *Нека $X \sim \Gamma(2, 1), Y \sim \Gamma(2, 1)$ са две независими случайни величини. Тогава намерете $\mathcal{M}_{X+Y}$ и чрез нея пресметнете $\mathbb{E}\,(X + Y)^2$. **(4 т.)***

(1) *Нека X, Y са две независими експоненциални случайни величини с параметри 1 и 2. Тогава намерете $\mathcal{M}_{X+Y}$ и чрез нея пресметнете $\mathbb{E}\,(X + Y)^2$. **(4 т.)***

Задача 5. *Нека $(X_i)_{i \geq 1}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини. Тогава:*

- *формулирайте Закона за големите числа и Усиления закон за големите числа.**(2 т.)***

*Нека $\Pi_n = \prod_{j=1}^{n} X_j, n \geq 1$. **Нека** $M = \Phi \bmod 2$**, където** Φ **е сумата на последните три цифри на вашия факултетен номер.***

(0) *Ако $X_1 \sim U(0, 1)$, пресметнете $\mathbb{E}\,[\Pi_n]$. Вярно ли е, че при n, клонящо към безкрайност, $\Pi_n^{\frac{2}{n}}$ се схожда п.с.? Ако да, намерете съответната граница. **(5 т.)***

(1) *Ако плътността на X_1 е $f_{X_1}(x) = 2x, x \in (0, 1)$, пресметнете $\mathbb{E}\,[\Pi_n]$. Вярно ли е, че при n, клонящо към безкрайност, $\Pi_n^{\frac{3}{n}}$ се схожда п.с.? Ако да, намерете съответната граница. **(5 т.)***

Задача 6. *Нека $(X_i)_{i \geq 1}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини с крайно средно и дисперсия. Тогава:*

- *формулирайте Централната гранична теорема.**(2 т.)***

Нека $X_1 \sim N(0, 4)$. Стрелци стрелят по мишена, като $|X_j|$ е отстоянието (грешката) на попадението на $j-$тия стрелец от центъра на мишената. Меценат обявява, че ще даде награда на отбор от 10000 стрелци, ако сумата от квадратите на грешките на всички стрелци не надвишава конкретна стойност V.

***Нека** $N = (\Phi \bmod 3)$**, където** Φ **е предпоследната цифра на вашия факултетен номер.** Каква е приблизително вероятността отборът да спечели наградата, ако:*

- *$V = 40000$; **(2 т.)***
- *$V = 40000 - 16\sqrt{2} \times 10^{2+N}$?**(2 т.)***
- *$V = 40000 - 7.84\sqrt{2} \times 10^{2+N}$?**(2 т.)***

Задача 7. *Имаме K различни видове птици в даден регион. Орнитолог иска да наблюдава всеки един вид. Всяка следваща наблюдавана птица има равномерна вероятност да е измежду $K-$те вида, независимо какви птици е наблюдавал дотук орнитологът. Нека T_K е броят птици, които са отчетени от него, докато е попаднал на всеки един от $K-$те вида. Тогава:*

- *докажете, че*
$$\mathbb{E}\left[T_K\right] = K + \frac{K}{2} + \frac{K}{3} + \cdots + 1; \textbf{\textit{(2 т.)}}$$
- *намерете $VarT_K$;**(1 т.)***
- *докажете, че $Var(T_K)/K^2$ е ограничено за всяко $K \geq 2$; **(1 т.)***
- *използвайки, че $\lim_{K\to\infty} \mathbb{E}\left[T_K\right]/K\log(K) = 1$, покажете, че $\frac{T_K}{K\log(K)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.**(4 т.)***

Задача 8. *Нека имаме извадка $\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от наблюдения над случайната величина X, която принадлежи на клас, параметризиран от $\beta \in \mathbb{R}$. При тестване на хипотеза $H_0 : \beta = \beta_0$ срещу $H_1 : \beta = \beta_1$*

- *дайте дефиниция за грешка от първи род и при фиксирана такава грешка дайте дефиниция за оптимална критична област.**(2 т.)***

Нека** $M = \Phi \bmod 2$**, където** Φ **е произведението на <u>последните три</u> цифри на вашия факултетен номер.

(0) *Ако $X \sim N(\beta, 1)$, обяснете как бихте конструирали доверителен интервал за β с ниво на доверие* 0.95. ***(3 т.)***

(1) *Ако $X \sim N(1, \beta)$, обяснете как бихте конструирали доверителен интервал за β с ниво на доверие* 0.95. ***(3 т.)***

Задача 9. *Агенцията за пътна безопасност разполага само с обобщено количество информация, а именно времето за настъпването на n катастрофи на територията на България, означено с T_n. Тя трябва да оцени интензитета на катастрофите $\alpha > 0$, като използва правилото, че $T_n \sim \Gamma(n, \alpha)$. При тези условия и при допускането, че n е достатъчно голямо:*

- *дефинирайте понятията точкова оценка и състоятелност на точкова оценка; **(2 т.)***
- *предложете точкова оценка за α, като аргументирате избора си;**(2 т.)***
- *неизместена и състоятелна ли е точковата ви оценка;**(3 т.)***
- *вярно ли е, че вашата оценка е максимално правдоподобна? **(3 т.)***