Упражнение 12 - Теория, задачи, решения

ЕК, МС

12.05.2021

1 Непрекъснати многомерни случайни величини

Нека n е естествено число, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$, и $X_i \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P), \quad i = 1, 2, \dots, n$ са едномерни случайни величини. В $\mathbb{R}^n$ се въвежда частична наредба $\leq_{\mathbb{R}^n}$ посредством $(x_1, \dots, x_n) \leq_{\mathbb{R}^n} (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$. Впоследствие релацията $\leq_{\mathbb{R}^n}$ ще записваме чрез $\leq$. Следващата дефиниция обобщава понятието n-мерна дискретна случайна величина.

Дефиниция 1.1. *Изображението* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ *със свойството:* $\{\omega \in \Omega |\ X(w) \leq_{\mathbb{R}^n} x\} \in \mathfrak{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$*, се нарича n-мерна случайна величина върху* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$*. Множеството на случайните величини върху разглежданото вероятностно пространство означаваме със* $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *или* $\mathfrak{S}$*.*

Всяка n-мерна дискретна случайна величина е случайна величина по отношение на дефиниция 1.1, понеже при дискретна $X \in \mathfrak{S}$ и за произволно $x \in \mathbb{R}^n$ е в сила $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega |\ X(w) \leq x\} = \cup_{y \in X(\Omega):\ y \leq x}\{X = y\} = \cup_{y \in X(\Omega):\ y \leq x}(\cap_{i=1}^n \{X_i = y_i\})$, което е изброимо обединение на елементи от $\mathfrak{A}$ и следователно принадлежи на $\mathfrak{A}$.

Дефиниция 1.2. *Функция на разпределение за n-мерна* $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *наричаме функцията* $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto P(X \leq x)$*, която ще означаваме с* F_X*.*

Функцията на разпределение на всяка случайна величина е монотонно растяща, с гранични стойности $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, и непрекъсната отдясно. Вярно е и обратното, всяка функция $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ с изброените 3 свойства е функция на разпределение за случайна величина, дефинирана в подходящо вероятностно пространство. На многомерна случайна величина еднозначно се съпоставя функция на разпределение. Обратно, на функция на разпределение (това е функция с изброените 3 свойства) съответства множество от случайни величини, чиито функции на разпределение съвпадат с дадената. Свойствата монотонност, гранично поведение и непрекъснатост отдясно следват по аналогичен на едномерния случай начин.

При фиксирано естествено $k :\ 1 \leq k \leq n$, функцията на разпределение F_{X_k} на X_k се изразява чрез F_X по следния начин: да означим с π_k изображението проектор

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

и да положим $y_k = \pi_k(x)$. При $y_k \longrightarrow +\infty$, тоест при $x_1 \longrightarrow +\infty, \dots, x_{k-1} \longrightarrow +\infty,\ x_{k+1} \longrightarrow +\infty, \dots, x_n \longrightarrow +\infty$, поради непрекъснатостта на вероятностната мярка P получаваме:

$$\lim_{y_k \longrightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{y_k \longrightarrow +\infty} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

$$= P(\{X_k \le x_k\} \cap_{1\le i\le n,\ i\ne k} \{X_i \le \lim_{x_i\to+\infty} x_i\}) = P(\{X_k \le x_k\} \cap_{1\le i\le n,\ i\ne k} \Omega)$$
$$= P(X_k \le x_k) = F_{X_k}(x_k) \Rightarrow F_{X_k}(x_k) = \lim_{\pi_k(x)\longrightarrow+\infty} F_X(x).$$

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{\pi_k(x)\longrightarrow+\infty} F_X(x) \tag{1}$$

Дефиниция 1.3. *Случайните величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ наричаме независими, ако за всеки $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ сьбитията $\{X_i \le x_i\}\quad i = 1, 2, \dots, n$ са независими.*

Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими, за функцията на разпределение F_X на $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ намираме

$$F_X(x) := F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X \le x) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

Дефиниция 1.4. *Случайната n-мерна величина $X \in \mathfrak{S}$ се нарича непрекъсната, ако функцията и на разпределение има вида:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, u_2, \dots, u_n)du_1du_2\dots du_n,$$

където $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ е интегруема по Лебег функция, която се нарича плътност на X.

Понеже f_X е интегруема, то съгласно теоремата на Фубини, редът на интегриране в $n-$кратния интеграл задаващ F_X не е от значение. Ако $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, то прилагайки Лайбниц-Нютон, като редът на диференциране не е от значение (понеже съществуват и са непрекъснати $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_{\sigma(1)}\partial x_{\sigma(2)}\dots\partial x_{\sigma(n)}}$, за всяка пермутация $\sigma \in S_n$), получаваме

$$f_X(x) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В общия случай, полагаме $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n} F_X(x), & \text{ако съществува производната в } x \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$

Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими, за функцията на плътност f_X на $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ в точките $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на диференцируемост намираме

$$f_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n} F_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\dots\partial x_n} \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

Всяка функция $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ със свойствата $f \ge 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$ е функция на плътност на непрекъсната случайна величина (а следователно и на *разпределение*), понеже

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n)du_1du_2\dots du_n$$

е монотонна, с гранични стойности $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ и непрекъсната отдясно, тоест $F(x)$ е функция на разпределение. Следователно задаването на непрекъснато *разпределение* е еквивалентно на задаване функция на плътност.

Теорема 1.5. *Ако $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е непрекъсната n-мерна случайна величина с функция на плътност f_X, и $A \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо по Лебег множество, то $P(X = x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ и*

$$P(X \in A) = \int \cdots \int_{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in A} f_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_1 du_2 \ldots du_n.$$

Естествена е съпоставката между плътностната функция на непрекъснатата $X \in \mathfrak{S}$ и тегловата функция на дискретна $Y \in \mathfrak{S}$ в n-мерния случай. Свойствата $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) dx = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ и $\sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) = 1$ подсказват аналогия, но тя е непълна: плътността може да приема стойности по-големи от 1. При малки $\delta x_i > 0$, вероятността X да принадлежи на паралелепипеда $\Pi(x, \delta x) = [x_1, \ x_1 + \delta x_1] \times \cdots \times [x_n, \ x_n + \delta x_n]$ по теорема 1.5 е

$$P(x \leq X \leq x + \delta x) = \int_{\Pi(x, \delta x)} f_X(u) du \approx f_X(x) \delta x = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_n.$$

Следователно точната аналогия е между формата $f_X(x) dx = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ (на плътност за X) и тегловата функция $y \longmapsto P(Y = y)$ на Y.

При фиксирано естествено $k : \ 1 \leq k \leq n$, функцията на плътност f_{X_k} на X_k се изразява чрез f_X по следния начин (f_X удовлетворява условията на теоремата на Фубини и следователно в разглежданият n-мерен интеграл няма значение редът на интегриране. Съгласно (1) намираме

$$\begin{aligned} f_{X_k}(x_k) &= \frac{d}{dx_k} F_{X_k}(x_k) = \frac{d}{dx_k} \left[\lim_{\pi_k(x) \to \infty} F_X(x) \right] \\ &= \frac{d}{dx_k} \left[\lim_{\pi_k(x) \to \infty} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_1 du_2 \ldots du_n \right] \\ &= \frac{d}{dx_k} \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty, \ x_k] \times \mathbb{R}^{n-k}} f_X(u) du \\ &= \frac{d}{dx_k} \int_{-\infty}^{x_k} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u) du_1 \ldots du_{k-1} du_{k+1} \ldots du_n \right] du_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_{k-1} du_{k+1} \ldots du_n. \end{aligned}$$

Ако X и Y са непрекъснати с функции на плътност f_X и f_Y, то за плътността на $Z = X + Y$ намираме:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} F_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} \int \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \leq z} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y) dy \right] dx = \frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) |J_{\Psi^{-1}}(u, v)| du dv \\ &= \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, v - u) du \right] dv = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, z - u) du. \end{aligned}$$

В пресмятанията приложихме теорема 1.7 като направихме гладка смяна на променливите чрез дифеоморфизмът $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ \ (x, y) \longmapsto (u, v)$, като $u = x, \ \ v = x + y$. За обратната трансформация Ψ^{-1} намираме $x = u, \ \ y = v - u$, с якобиан $J_{\Psi^{-1}}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = 1$. В частност, ако X и Y са независими, то $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ и получаваме:

Теорема 1.6. *Ако X и Y са непрекъснати и независими случайни величини, съответно с плътности f_X и f_Y, то за плътността f_{X+Y} на $X+Y$ е в сила:*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y(z-u) du.$$

Теорема 1.7. *Нека (X, Y) е двумерна непрекъсната случайна величина, с плътност $f_{X,Y}$ и нека $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x, y) > 0\}$. Ако изображението $\Psi : D \longrightarrow \Psi(D) \quad (x, y) \longmapsto (u(x, y), v(x, y))$ е дифеоморфизъм, то случайната величина $(U, V) = (u \circ (X, Y),\ v \circ (X, Y))$ е непрекъсната, с плътност*

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v))|J_{\Psi^{-1}}(u, v)|, & (u, v) \in \Psi(D) \\ 0, & (u, v) \notin \Psi(D) \end{cases}$$

Нека $(X, Y) \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е двумерна непрекъсната случайна величина, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$. Ако $Y = y$, то тази информация може да оказва влияние върху числовите характеристики на X. Това мотивира на X да се съпостави случайна величина, отчитаща настъпилото събитие $\{Y = y\}$: тази величина се означава с $(X \mid Y = y)$ и се задава чрез функция на разпределение $F_{X|Y} : X(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto P(X \leq x \mid Y = y)$. Условната вероятност се дефинира чрез:

$$P(X \leq x \mid Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{P(X \leq x,\ y \leq Y \leq y + h)}{P(y \leq Y \leq y + h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) du\right] dv}{\int_y^{y+h} f_Y(v) dv} = \frac{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) du\right] dv}{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f_Y(v) dv}$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du \Rightarrow F_{X|Y}(x, y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du.$$

Функцията на плътност $f_{X|Y}$ на $(X \mid Y = y)$ е $f_{X|Y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Дефиниция 1.8. *Условна функция на плътност за X при условие $Y = y$, наричаме функцията*

$$f_{X|Y} : \mathbb{R} \times S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Теорема 1.9. *Нека $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е непрекъсната случайна величина с плътност f_X, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема по Лебег функция. Тогава $g \circ X$ е едномерна случайна величина със средно $\mathbf{E} g \circ X = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x) dx$.*

Забележка 1.10. *Всяка интегруема функция е абсолютно интегруема. Обратното не е вярно. В частност, от интегруемост на g следва, че е абсолютно интегруема функцията $g f_X$ и следоавателно съществува средното $\mathbf{E} g \circ X$.*

Дефиниция 1.11. *Нека $f_{X|Y}$ е условна функция на плътност за X относно Y, където (X, Y) е непрекъсната случайна величина. При $y \in \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$, за средното на $(X \mid Y = y)$ е в сила*

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x, y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx.$$

1.1 Условия на задачите от упражнение 12

Задача 1 Точка (X, Y) попада по случаен начин в триъгълник с върхове в точките с координати (0,0), (0,2) и (3,0). Да се намери съвместната плътност и функцията на разпределение на X и Y. Да се пресметне коефициента на корелация $\rho_{X,Y}$.

Задача 2 Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че в продължение на 1 час, в случаен момент X ще запали лампите, а в момент Y ще ги огаси. Нека съвместната плътност на случайните величини X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = cxy,\ 0 < x < y < 1$. Да се определят:
а) константата c така, че плътността да е добре дефинирана;
б) маргиналните плътности и математическите очаквания;
в) вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10мин;
г) колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15мин;
д) каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20мин.

Задача 3 Нека X е температурата, а Y е времето необходимо за подготовка за запалване на дизелов двигател в минути. Нека $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2000}(x + 5y + 10),\quad -10^\circ \le x \le 30^\circ,\ 0 \le y \le 2$. Да се определи:
а) вероятността да е нужна поне 1 минута за запалване;
б) средното време за запалване при 15°;
в) ако двигателят е запалил за 1,5 минути, каква е вероятността температурата да е отрицателна?

1.2 Решения на задачите от упражнение 12

Задача 1 Случайните величини X и Y удовлетворяват условията $X \ge 0,\ Y \ge 0,\ 2X + 3Y \le 6$. При $x > 0,\ y > 0$ дефинираме $A(x, y) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le u \le x,\ 0 \le v \le y\} = [0, x] \times [0, y]$ и $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 2x + 3y \le 6\}$. Функцията $F_{X,Y}$ на разпределение на двумерната случайна величина (X, Y) е

$$F_{X,Y}(x,y) = \left\{ \begin{array}{rc} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0 \\ \frac{\mu(A(x,y)\cap B)}{\mu(B)}, & (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{rc} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0 \\ \frac{xy}{3}, & 0 < x,\ 0 < y,\ 2x+3y \le 6 \\ \frac{12xy-(2x+3y-6)^2}{36}, & 0 < x \le 3,\ 0 < y \le 2,\ 2x+3y > 6 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{9}, & 0 < x \le 3,\ 2 < y \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{4}, & 3 < x,\ 0 < y \le 2 \\ 1, & 3 \le x,\ 2 \le y \end{array} \right\}.$$

Плътността на (X, Y) е $f_{X,Y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) = \left\{ \begin{array}{lc} \frac{1}{3}, & 0 < x < 3,\ 0 < y < 2,\ 2x + 3y \le 6 \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{array} \right\}$.

Плътностите на X и Y са съответно $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, v)dv = \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \frac{1}{3}dv = \frac{2}{3}(1 - \frac{x}{3}),\ x \in (0, 3)$;

$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u,y)du = \int_0^{3-\frac{3y}{2}} \frac{1}{3}du = 1 - \frac{y}{2},\ y \in (0,2)$. Пресмятаме:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^3 \frac{2x}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx = 1,\ EY = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = \int_0^2 y\left(1-\frac{y}{2}\right)dy = \frac{2}{3}.$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = -1 + \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = -1 + \int_0^3 \frac{2x^2}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)dx = \frac{1}{2},$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = -\frac{4}{9} + \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)dy = -\frac{4}{9} + \int_0^2 y^2\left(1-\frac{y}{2}\right)dy = \frac{2}{9}.$$

$$EXY = \int\int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^2\left[\int_0^{3-\frac{3y}{2}} \frac{xy}{3}dx\right]dy = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DXDY}} = -\frac{1}{2}.$$

Пресмятаме функциите на разпределение на X и Y:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du = \int_0^x \frac{2}{3}(1-\frac{u}{3})du = \frac{x(6-x)}{9},\ x \in (0,3).$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u)du = \int_0^y (1-\frac{u}{2})du = y - \frac{y^2}{4},\ y \in (0,2).$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{x(6-x)}{9}, & x \in (0,3); \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ y - \frac{y^2}{4}, & x \in (0,3); \\ 1, & y \ge 2. \end{cases}$$

Задача 2 Нека $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < x < y < 1\}$.

a) Пресмятаме $1 = \int\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\int_A cxydxdy = c\int_0^1[\int_0^y xydx]dy = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8$. Съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = 8xy$ при $(x,y) \in A$, и $f_{X,Y}(x,y) = 0$ при $(x,y) \notin A$.

b) Пресмятаме $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,v)dv = \int_x^1 8xvdv = 4x(1-x^2),\ x \in (0,1)$;

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u,y)du = \int_0^y 8uydu = 4y^3,\ EX = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_0^1 4x^2(1-x^2)dx = \frac{8}{15}.$$

$$EY = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)dy = \int_0^1 4y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

c) Търсената вероятност е $P = P(X < \frac{3}{4}, Y < X + \frac{1}{6}) = \int_0^{\frac{3}{4}}\int_0^{x+\frac{1}{6}} f_{X,Y}(x,y)dydx =$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}}\left[\int_x^{x+\frac{1}{6}} 8xydy\right]dx = \frac{7}{32}.$$

d) Търсим средната стойност на случайната величина $(Y - X \mid X = \frac{1}{4})$. Ако дефинираме $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto x - \frac{1}{4}$, то $E(Y - X \mid X = \frac{1}{4}) = E(Y - \frac{1}{4} \mid X = \frac{1}{4}) = E(g \circ Y | X = \frac{1}{4}) = Eg \circ (Y \mid X = \frac{1}{4}) =$

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) f_{Y|X}\left(y \mid x = \frac{1}{4}\right) dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{f_{X,Y}(\frac{1}{4}, y)}{f_X(\frac{1}{4})} dy = \frac{32}{15} \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(y - \frac{1}{4}\right) y dy = \frac{27}{60} \text{ h} = 27 \text{ min}.$$

e) Нека $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 < x < y < 1, \ y - x < \frac{1}{3}\}$, $\quad B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 < x \leq \frac{2}{3}, \ x < y < x + \frac{1}{3}\}$, $\quad B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \frac{2}{3} < x < 1, \ x < y < 1\}$. Следователно $B = B_1 \cup B_2$ и търсената вероятност е

$$P((X,Y) \in B) = \int\int_B f_{X,Y}(x,y) dx dy = \sum_{k=1}^{2} \int\int_{B_k} f_{X,Y}(x,y) dx dy =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[\int_x^{x+\frac{1}{3}} 8xy dy\right] dx + \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left[\int_x^{1} 8xy dy\right] dx = 1 - \frac{80}{243} \approx 0.67$$

Задача 3 Нека $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ -10 \leq x \leq 30, \ 0 \leq y \leq 2\}$, като $f_{X,Y}(x,y) = 0$, при $(x,y) \notin A$.

a) Ако $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \geq 1\} \cap A$, то $P(Y \geq 1) = P((X,Y) \in B) = \int\int_B f_{X,Y}(x,y) dx dy =$

$$= 2000^{-1} \int_{-10}^{30} \left[\int_1^2 (x + 5y + 10) dy\right] dx = \frac{11}{20} = 0.55$$

b) Търсим средната стойност на случайната величина $(Y \mid X = 15)$. Пресмятаме

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy = 2000^{-1} \int_0^2 (x + 5y + 10) dy = \frac{x + 15}{1000}$$

$$E(Y \mid X = 15) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y \mid x = 15) dy = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f_{X,Y}(15, y)}{f_X(15)} dy$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^2 y(y + 5) dy = \frac{19}{18} \approx 1.05$$

c) Пресмятаме $f_Y(y) = 2000^{-1} \int_{-10}^{30} (x + 5y + 10) dx = \frac{y+4}{10}$, следователно

$$P(X < 0 \mid Y = 1.5) = \int_{-\infty}^{0} f_{X|Y}(x \mid y = 1.5) dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{f_{X,Y}(x, \ 1.5)}{f_Y(1.5)} dx =$$

$$= 2000^{-1} \int_{-10}^{0} \frac{x + 17.5}{0.55} = \frac{5}{44} \approx 0.113$$