
*Оценката Ви ще е равна на $2 + \text{броя точки, които получите}$. Време за работа: 3 часа. Успех.
Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Задача 1. (2 т.) По актуални данни, около 2% от населението е заразено с COVID-19. От друга страна, производители на тестове информират, че така наречените ”бързи тестове“ са положителни при болни с вероятност 65% и с вероятност 1% при здрави.

1. (0.5 т.) Избираме случаен човек и го тестваме. Резултатът е положителен. Каква е вероятността той да бъде болен?
2. (0.5 т.) Актуална тема е получаването на отрицателен резултат, за да се сдобие съответният човек със зелен сертификат. Да предположим, че даден човек знае, че е болен. Средно колко теста ще са му нужни, докато получи отрицателен тест¹? Каква е вероятността 2 теста да бъдат достатъчни, за да получи желанния зелен сертификат?
3. (1 т.) Да разгледаме трима случайно избрани човека. Каква е корелацията на броя болни и броя положителни тестове? Какъв е очакваният брой положителни тестове, ако знаем, че точно един от тях е болен?

Задача 2. (1.5 т.) В казино се предлага следната игра - хвърляте зар 100 пъти, като за всяка 6-ца получавате по 1 лев. Цената за участие е 20 лева.

- (0.5 т.) Нека $X_i = \text{”печалбата от хвърляния } 25i - 24 \text{ до } 25i\text{”}$ за $i = 1, 2, 3, 4$, а X е общата печалба. Какви са разпределенията на дефинираните случайни величини? Бихте ли участвали в играта?
- (0.25 т.) Нека $Y = 4X_1$, т.е. вместо да хвърляме 100 пъти, хвърляме 25 и умножаваме печалбата по 4. Сравнете очакванията и дисперсиите на X и Y и обяснете накратко получения резултат.
- (0.75 т.) Казиното предлага и алтернативна игра - ако хвърлите общо сума над 555 от 100-те хвърляния, печелите 1000 лева, като цената за участие е 10 лева. Реклама твърди, че тази игра е специална коледна промоция и вероятността за печалба е над $1/100$, което значи, че средната печалба е положителна. Можете ли да потвърдите/отречете това твърдение?

Задача 3. (0.5 т.) Избираме 2 случайни точки върху отсечка с дължина 1. Да наречем единия ѝ край ляв, а другия - десен. Каква е вероятността дължините на получените отсечки да са в нарастващ ред отляво надясно?

¹За целите на задачата, игнорирайте, че при положителен резултат би трябвало автоматично да бъде поставен под карантина.