Максимумът на точките, които можете да получите общо от всички домашни е 100, като това кореспондира с бонус от 1 към оценката за упражнения. В това домашно всяка задача носи по 15 точки. Успех.

Ще считаме, че навсякъде работим върху вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *За удобство, дефинираме* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

1. Човек се намира на числовата ос в точката $n \in \mathbb{N}$ и последователно прави стъпка към $(n+1)$ с вероятност $p > 1/2$ и към $(n-1)$ с вер. $(1-p)$. Нека $p_n = \mathbb{P}($"човекът достига 0, тръгвайки от n"$)$. Изразете p_1, p_2 и p_3 чрез p.

   (Можете ли да съобразите, че $p_2 = p_1^k$ *за някакво* k*? * Колко е* $\lim_{n\to\infty} p_n$*? А ако* $p < 1/2$*?)*

2. (Gambler's Ruin) Играч разполага с $m \in \mathbb{N}$ лева и залага в казино докато спечели $M > m$ лева или докато загуби всичко. На ход печели 1 лев с вероятност p или губи 1 лев с вероятност $1-p$. Каква е вероятността да си тръгне от казиното с печалба? Колко е очакваната му печалба?

3. Студенти влизат последователно на изпит, показвайки личната си карта. Преди изпита е обявено, че първият студент, чийто рожден ден съвпада с рождения ден на вече влязъл студент, ще получи единица бонус към оценката си. На кое място трябва да застанете в редицата от студенти, за да имате най-голям шанс да сте печелившия студент?

4. Заек тръгва от точката 0 на числовата права и прави независими равномерно разпределени в интервала $[0,1]$ скокове в положителна посока. Участъкът $[1-x, 1]$ на числовата права е капан с дължина $x \in [0,1]$. Каква е вероятността заекът да прескочи капана?

5. Нека $N \sim Poi(\lambda)$ и $X_1, X_2, \dots \sim Ber(p)$ са независими. Нека $X = X_1 + \dots + X_N$ и $Y = N - X$. Да се докаже, че X и Y са независими. Обратно, ако разпределението на N е неизвестно и X и Y са независими, то да се докаже, че N е Поасоново разпределена случайна величина.

6. Нека $X_1, X_2, \dots, X_n \sim U([0,1])$ са независими и еднакво разпределени сл.вел. Намерете $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq 1)$.