Теория на Вероятностите
Упражнения

Емил Каменов, Мирослав Стоенчев

19.07.2018

Съдържание

1 Комбинаторика

1.1 Крайни множества

За всяко крайно множество A с $|A|$ ще означаваме броя на елементите му. Ако $A_1, \dots, A_n$ са крайни множества то с индукция по n получаваме $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1|.|A_2| \dots |A_n|$.

Теорема 1.1. *Принцип за включване и изключване: Нека n е естествено число и $A_1, A_2, \dots, A_n$ са крайни множества. Тогава е в сила равенството:*

$$| \cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} | \cap_{i=1}^{n} A_i|.$$

Доказателство: Нека a е произволен елемент на $| \cup_{i=1}^{n} A_i|$, който се среща точно в $k \geq 1$ от множествата $A_1, \dots, A_n$. Твърдението на теоремата е еквивалентно на това да докажем, че $1 = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} = 0 \Longleftrightarrow (1-1)^k = 0$. $\square$

1.2 Пермутации, комбинации и вариации без повторение

Нека n и $k \geq 0$ са естествени числа, а M е множество с n елемента, без ограничение $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Нека A и B са множества, $|B| \leq |A|$ и $\varphi : A \longrightarrow B$ е сюрективно изображение. Тогава φ поражда релация на еквивалентност върху A : два елемента от A са еквивалентни, ако образите им в B чрез φ съвпадат. Следователно A се разбива на класове от еквивалентни елементи, като всеки клас е пълен праобраз на елемент от B. В частния случай когато A и B са крайни множества, ако знаем броя на елементите на B, и броя на елементите на праобраза на всеки елемент от B (т.е. броя на елементите на всеки клас на еквивалентност в A), то можем да намерим броя на елементите на A, тоест $|A| = \sum_{b \in B} |\varphi^{-1}(b)| = \sum_{b \in B} |\{a \in A \mid \varphi(a) = b\}|$.

Дефиниция 1.2. *Пермутация на елементите на M се нарича всяко нареждане на елементите на M в $n-$членна редица. Комбинация от $k-$ти клас на елементите на M е всяко $k-$елементно подмножество на M. Вариация от $k-$ти клас на елементите на M е всяка $k-$членна редица от различни елементи на M.*

Множеството на всички пермутации на $n-$елемента се означава с P_n, а съответно с C_n^k и V_n^k - множествата на всички комбинации и вариации от $k-$клас.
Изображението $P_n \longrightarrow P_{n-1},\ i_1 i_2 \dots i_n \longmapsto\ i'_1 i'_2 \dots i'_{n-1}$ (премахнали сме елемента n) е сюрективно и всеки елемент в P_{n-1} има точно n праобраза. Следователно $|P_n| = n|P_{n-1}| \Longrightarrow |P_n| = n!$.
Изображението $P_n \longrightarrow C_n^k,\ i_1 i_2 \dots i_n \longmapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ е сюрективно и всеки елемент на образа има точно $k!(n-k)!$ праобраза. Следователно $|P_n| = k!(n-k)!|C_n^k| \Longrightarrow |C_n^k| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Изображението $V_n^k \longrightarrow C_n^k,\ i_1 i_2 \dots i_k \longmapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ е сюрективно и всеки елемент на образа има точно $k!$ праобраза. Следователно $|V_n^k| = k!|C_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$.

1.3 Пермутации, комбинации и вариации с повторение

Нека $n, m > 0, k, k_1, \dots, k_n$ са неотрицателни цели числа, като $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$.

Дефиниция 1.3. *Пермутация с повторения на елементите на* M*, от тип* $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ *се нарича всяко нареждане на елементите на* M *в* $m-$*членна редица, удовлетворяваща условието: елемента 1 се среща* k_1-*пъти,...,елемента* n *се среща* k_n-*пъти. Множеството на тези пермутации се означава с* $P(m; k_1, k_2, \dots, k_n)$
Комбинация с повторение от $k-$*ти клас на елементите на* M *е всяко* $k-$*елементно мултиподмножество на* M*. Множеството на тези комбинации ще означаваме с* $C(n; k)$
Вариация с повторения от $k-$*ти клас на елементите на* M *е всяка* $k-$*членна редица от елементи на* M*. Множеството на тези вариации ще означаваме с* $V(n; k)$

Изображението $C(n; k) \longrightarrow C^k_{n+k-1}$, $[i_1, i_2, \dots, i_k] \longmapsto \{i_1, i_2+1, \dots, i_k+k-1\}$, $i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k$ е биекция. Следователно $|C(n; k)| = |C^k_{n+k-1}| = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.
Изображението $V(n; k) \longrightarrow V(n; 1)\times V(n; 1)\times\ldots\times V(n; 1) = V(n; 1)^{\times k}$, $i_1 i_2 \ldots i_k \longmapsto (i_1, i_2, \dots, i_k)$ е биекция. Следователно $|V(n; k)| = |V(n; 1)^{\times k}| = |V(n; 1)|^k = n^k$.
Изображението $P(m; k_1, k_2, \dots, k_n) \longrightarrow C^{k_1}_m$, съпоставящо k_1 позиции на които се намира елемента 1 в пермутацията е сюрективно и всеки елемент на $C^{k_1}_m$ има точно $P(m - k_1; k_2, \dots, k_n)$ прообраза. Така $|P(m; k_1, k_2, \dots, k_n)| = |C^{k_1}_m|.|P(m - k_1; k_2, \dots, k_n)| = \ldots =$
$= |C^{k_1}_m|.|C^{k_2}_{m-k_1}|\ldots|C^{k_n}_{m-k_1-\ldots-k_{n-1}}| = \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$. Формулата за пермутациите се извежда директно чрез построяване на биекция

$$P(m; k_1, k_2, \dots, k_n) \longrightarrow C^{k_1}_m \times C^{k_2}_{m-k_1} \times \cdots \times C^{k_n}_{m-k_1-\cdots-k_{n-1}}.$$

1.4 Комбинаторни задачи

Задача 1 Да се докажат тъждествата, като се построят биекции между подходящи множества:

а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, в) $|V^k_n| = |V^k_{n-1}| + k|V^{k-1}_{n-1}|$, г) $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$,
д) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^m = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \le m < n \\ n! & \text{за } m = n \end{cases}$.

Задача 2 Нека n и r са естествени числа. Да се намери броя на целите неотрицателни решения на уравнението $x_1 + \cdots + x_r = n$.

Задача 3 По колко начина $k-$частици могат да се разпределят в n различими клетки, ако частиците:
а) са различими и всяка клетка може да съдържа не повече от 1 частица
б) са различими и всяка клетка може да съдържа произволен брой частици
в) са неразличими и всяка клетка може да съдържа не повече от 1 частица
г) са неразличими и всяка клетка може да съдържа произволен брой частици.

Задача 4 Нека n и k са естествени числа, $n \ge 2k$. По колко различни начина от $2n$ шахматиста могат да се образуват k-шахматни двойки, за изиграване на k- партии, ако:
а) цветовете на фигурите с които играят шахматистите се взимат в предвид
б) цветовете на фигурите не се взимат в предвид
в) ако $k-$те дъски са номерирани и се взимат в предид при условие а)? А при условие б)?

Задача 5 Нека n и r са естествени числа, и нека $k_1, \dots, k_r$ са естествени числа със сума равна на n. Да се намери броя на начините по които $n-$елементно множество може да се разбие на $r-$подмножества, имащи съответно $k_1, \dots, k_r$ на брой елемента, ако:
а) $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$,
б) $k_1, \dots, k_r$ са произволни.

1.5 Условия на задачите от упражнение 1

Задача 1 Разпределят се k различни частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:
а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;
в) $k \geq n$ и няма празна клетка.

Задача 2 Разпределят се k неразличими частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:
а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;
в) $k \geq n$ и няма празна клетка.

Задача 3 Десет души се нареждат в редица. Колко са подрежданията, при които три фиксирани лица се намират едно до друго.

Задача 4 Колко четирицифрени числа могат да се напишат от цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако:
а) цифрите участват по веднъж;
б) допуска се повтаряне на цифри;
в) не се допуска повтаряне и числото е нечетно.

Задача 5 Група от 12 студенти трябва да изпрати делегация от четирима свои представители. По колко начина може да се избере състава, ако:
а) няма ограничения за участие в нея;
б) студентите A и B не трябва да участват заедно;
в) студентите C и D могат да участват само заедно.

Задача 6 Пет различни топки се разпределят в три различни кутии A,B,C. Да се намери броя на всички различни разпределения, при които:
а) кутията A е празна;
б) само кутията A е празна;
в) точно една кутия е празна;
г) поне една кутия е празна;
д) няма празна кутия.

Задача 7 Нека Ω е множеството на всички наредени $n-$торки с повторения на цифрите 1,2 и 3. Да се намери броя на елементите на Ω, които:

а) започват с 1;
б) съдържат точно k пъти цифрата 2;
в) съдържат точно k пъти цифрата 1, при което започват и завършват с 1;
г) са съставени от k_1 единици, k_2 двойки, k_3 тройки.

Задача 8 Всяка стена на всяко едно от сто кубчета е или червена, или синя, или зелена. Нека 80 кубчета имат поне една червена стена, 85 кубчета имат поне една синя, 75 кубчета поне една зелена. Какъв е най-малкият брой кубчета, които имат стени и от трите цвята?

Задача 9 Дадено е множеството $\Omega = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$. Колко са подмножествата на Ω, които съдържат поне един елемент a и поне един елемент b?

1.6 Решения на задачите от упражнение 1

Задача 1 Да номерираме клетките с числата от 1 до n, а частиците с числата от 1 до k. Да означим с $i_1, i_2, \dots, i_k$ номерата на клетките в които попадат съответно 1-та, 2−та,...,k-тата частица. Следователно на всяко разпределение на частиците в клетки, съпоставяме редица $i_1, i_2, \dots, i_k$ от естествени числа между 1 и n. Търсим броя на тези редици.

а) Числата $i_1, i_2, \dots, i_k$ са различни, следователно търсеният брой е $|V_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$, при $k \le n$, и 0 при $n < k$.

б) Числата $i_1, i_2, \dots, i_k$ могат да съвпадат, следователно търсеният брой е $|V(n;k)| = n^k$.

в) Нека $A_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ е множеството от всички разпределения, при които i-тата клетка е празна. Означаваме с A множеството на всички разпределения, при които поне една клетка е празна. Следователно $A = \cup_{i=1}^n A_i$ и съгласно 1.1 за $|A|$ намираме:

$$|A| = |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^n A_i|$$

$$= n(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k + \binom{n}{3}(n-3)^k + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^k$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Следователно търсеният брой е $|V(n;k) - A| = |V(n;k)| - |A| = n^k + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j}(n-j)^k =$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Задача 2 Използваме означенията от задача 1. В случая частиците са неразличими, следователно търсим броя на множествата $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ за а), мултимножествата $[i_1, i_2, \dots, i_k]$ за б).

а) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ са различни, следователно търсеният брой е $|C_n^k|$.

б) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ могат да съвпадат, следователно търсеният брой е $|C(n;k)|$.

в) Нека $U_{n,k}$ и $\widetilde{U}_{n,k}$ са съответно множествата от всички разпределения на k неразличими частици в n различни клетки без ограничения; и аналогично разпределенията без празна клетка:

$$U_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\},$$

$$\widetilde{U}_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\}.$$

В подточка б) построихме биекцията

$$U_{n,k} \longrightarrow C(n;k) \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto [\, \underbrace{1, \ldots, 1}_{x_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{x_2}, \ldots, \underbrace{n \ldots, n}_{x_n} \,],$$

където елементът $i,\ 1 \leq i \leq n$ участва точно $x_i \geq 0$ пъти, и указва, че в клетка i има точно x_i на брой частици. Аналогично, изображението

$$\widetilde{U}_{n,k} \longrightarrow U_{n,k-n} \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1)$$

е биекция, следователно $|\widetilde{U}_{n,k}| = |U_{n,k-n}| = |C(n; k-n)| = \binom{k-1}{n-1}$.

Задача 3 Нека a, b, c са трите лица, които стоят едно до друго. Броят на начините по които те са съседи по наредба е $3! = 6$. Търсеният брой е $3!8!$, понеже $8!$ са наредбите на остналите 7 лица и "блокът" abc, и на всяка от тях съответстват $3!$ наредби удовлетворяващи условието за съседство.

Задача 4 Търсеният брой е съответно равен на:

а) $|V_5^4| = 5!$

b) $|V(5;4)| = 5^4$

c) $3 \times |V_4^3| = 72$.

Задача 5 Търсеният брой е съответно равен на:

а) $|C_{12}^4| = \binom{12}{4}$

b) $|C_{10}^4| + 2|C_{10}^3|$

c) $|C_{10}^4| + |C_{10}^2|$.

Задача 6 Търсеният брой е съответно равен на:

a) $|V(2;5)| = 32$

b) $|V(2;5)| - 2 = 30$

c) $3 \times [|V(2;5)| - 2] = 90$

d) $3 \times [|V(2;5)| - 2] + \binom{3}{2} = 93$

e) $|V(3;5)| - \left(3 \times [|V(2;5)| - 2] + \binom{3}{2}\right) = 150.$

Задача 7 Търсеният брой е съответно равен на:

a) $|V(3;n-1)| = 3^{n-1}$

b) $\binom{n}{k}|V(2;n-k)| = 2^{n-k}\binom{n}{k}$

c) $\binom{n-2}{k-2}|V(2;n-k)| = 2^{n-k}\binom{n-2}{k-2}$

d) $|P(n;k_1,k_2,k_3)| = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$

Задача 8 Да означим с R, B, G множествата на кубчетата, които имат съответно поне една червена, синя, зелена страна. По условие $|R| = 80,\ |B| = 85,\ |G| = 75$, следователно $|R \cap B| \geq 65,\ |B \cap G| \geq 60,\ |G \cap R| \geq 55$. Търсим минимума на $|R \cap B \cap G|$, прилагаме теорема 1.1:

$$|R \cup B \cup G| = |R| + |B| + |G| - |R \cap B| - |B \cap G| - |G \cap R| + |R \cap B \cap G|$$

$$\Rightarrow 100 = 80 + 85 + 75 - |R \cap B| - |B \cap G| - |G \cap R| + |R \cap B \cap G|$$

$$\Rightarrow |R \cap B \cap G| = |R \cap B| + |B \cap G| + |G \cap R| - 140 \geq 40.$$

Равенство се достига при $|R \cap B| = 65,\ |B \cap G| = 60,\ |G \cap R| = 55$.

Задача 9 Нека $A = \{a_1, \ldots, a_n\},\ B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ и да означим с $\mathfrak{R}^*(\Omega),\ \mathfrak{R}(A)$ съответно множеството от подмножества на Ω със свойството от условието, множеството от подмножества на A. Полагаме $\mathfrak{R}'(A) = \mathfrak{R}(A) - \emptyset$ и $\mathfrak{R}'(B) = \mathfrak{R}(B) - \emptyset$. Тогава $\Omega = A \cup B$ и нека π_A и π_B са съответно изображенията проекции $\mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(A)$ и $\mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(B)$. Изображението $\pi : \mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(A) \times \mathfrak{R}'(B) \quad \pi(x) = (\pi_A(x), \pi_B(x))$ е биекция, следователно $|\mathfrak{R}^*(\Omega)| = |\mathfrak{R}'(A) \times \mathfrak{R}'(B)| = |\mathfrak{R}'(A)|.|\mathfrak{R}'(B)| = (2^n - 1)(2^k - 1)$.
Второ решение: Броят на подмножествата на Ω, които нямат желаното свойство са три вида: подмножества съдържащи поне един елемент на A и нито един от B, подмножества съдържащи поне един елемент на B и нито един от A, и множеството $\emptyset$. Броят на тези подмножества е съответно равен на $2^n - 1,\ 2^k - 1,\ 1$. Броят на подмножествата на Ω е съответно равен на $|\mathfrak{R}(\Omega)| = 2^{n+k}$. Следователно $|\mathfrak{R}^*(\Omega)| = 2^{n+k} - (2^n - 1) - (2^k - 1) - 1 = (2^n - 1)(2^k - 1)$.

2 Теория на Вероятностите

2.1 Събитие - аксиоми и свойства

Нека Ω е множеството от елементарни изходи на даден експеримент $\mathcal{E}$. Означаваме с $\mathfrak{R}(\Omega)$ множеството от подмножества на Ω. Елементите на $\mathfrak{R}(\Omega)$ се наричат събития. Събитието $A \in \mathfrak{R}(\Omega)$ е настъпило, ако експеримента има за резултат елементарен изход принадлежащ на A. В $\mathfrak{R}(\Omega)$ се въвеждат операциите обединение и сечение на краен брой събития, и допълнение на събитие. Тези операции са идемпотентни, асоциативни, комутативни, съгласувани с частичната наредба в $\mathfrak{R}(\Omega)$ зададена като теоретико-множествено включване, свързани са помежду си с два дистрибутивни закона, и удовлетворяват закона на Де Морган:
1) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad \overline{\overline{A}} = A$, където $\overline{A} = \Omega - A$,
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
3) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$,
4) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$,
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
за всички $A, B, C \in \mathfrak{R}(\Omega)$.

Следователно множеството $\mathfrak{R}(\Omega)$ е снабдено със структура на *булова алгебра* (тоест е затворено относно операциите допълнение и крайни обединения и сечения) и ще го наричаме *пълно пространство от събития* на експеримента $\mathcal{E}$. Булова алгебра, която е затворена относно *изброимите* обединения и сечения, се нарича *булова сигма алгебра*.

Забележка 2.1. *Понякога е целесъобразно да се работи не с пълното пространство от събития на даден експеримент, а с конкретно негово подмножество. Това мотивира следната дефиниция.*

Дефиниция 2.2. *Пространство от събития на даден експеримент $\mathcal{E}$ е булова (сигма) подалгебра на $\mathfrak{R}(\Omega)$. Ако Ω и $\mathfrak{A}$ са съответно пространството от елементарни изходи и пространството от събития на $\mathcal{E}$, то двойката $(\Omega, \mathfrak{A})$ се нарича измеримо пространство на $\mathcal{E}$.*

Интерпретация на въведените операции: събитието $A \cup B$ е настъпило, ако поне едно от двете събития A или B е настъпило. Събитието $A \cap B$ е настъпило, ако и двете събития A и B са настъпили. Събитието $\overline{A} = \Omega - A$ е настъпило точно тогава, когато не настъпва A. Дефинираме $A - B = A \cap \overline{B}$, което настъпва точно тогава, когато настъпва A и не настъпва B.
Събитието Ω се нарича достоверно, понеже то настъпва при всеки експеримент, а с $\emptyset$ се означава невъзможното събитие $\overline{\Omega}$.

2.2 Вероятност - аксиоми и свойства. Примери на вероятностни мярки

Нека $\mathfrak{A}$ е булова σ алгебра и $(\Omega, \mathfrak{A})$ е измеримо пространство на експеримента $\mathcal{E}$. Ако $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от събития принадлежащи на $\mathfrak{A}$, то събитията $\liminf A_n$ и $\limsup A_n$ дефинирани чрез

$$\liminf A_n = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n, \quad \limsup A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n, \tag{1}$$

също принадлежат на $\mathfrak{A}$, и се наричат съответно долна и горна граница на редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Събитието $\liminf A_n$ настъпва точно тогава, когато всички събития от разглежданата редица настъпват, евентуално с изключение на краен брой. Събитието $\limsup A_n$ настъпва точно тогава, когато безбройно много от събитията на редицата $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ настъпват. Следователно $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Дефиниция 2.3. *Редицата от събития $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича сходяща, ако е в сила равенството $\liminf A_n = \limsup A_n$.*

Означение $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, където $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ се нарича гранично събитие или граница на $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример 2.4. *В частност, ако $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ и $\cap_{n=1}^{\infty} A_k = \emptyset$, то $\liminf A_n = \limsup A_n = \emptyset$, следователно $\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset$. Тоест $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони монотонно към $\emptyset$.*

Дефиниция 2.5. *Функцията $\mathbf{P} : \mathfrak{A} \longrightarrow [0,1]$ удовлетворяваща аксиомите:*
1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, (нормираност),
2) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B),\ \forall A, B \in \mathfrak{A} :\ A \cap B = \emptyset$, (адитивност),
3) за всяка редица $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ от събития, клоняща монотонно към $\emptyset$, съответната числова редица $\{\mathbf{P}(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ клони към 0, (непрекъснатост),

се нарича вероятностна мярка върху измеримото пространство $(\Omega, \mathfrak{A})$. Тройката $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ се нарича вероятностно пространство на $\mathcal{E}$.

Свойства 2.6. *Свойства на вероятностната мярка:*
(1) $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ (монотонност)
(2) $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$
(3) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
(4) $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$
(5) Ако $A_k,\ k = 1, 2, \dots$ са две по две непресичащи се, то $\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$.

Впоследствие ще пропускаме знакът $\cap$ за сечение и ще записваме накратко $A \cap B$ като AB.
Доказателство на свойства (1), (2), (3):
Ако $A \subset B$, то $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}((B-A) \cup A) = \mathbf{P}(B-A) + \mathbf{P}(A) \geq \mathbf{P}(A)$, т.е. $A \subset B \Longrightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$. Пресмятаме $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) \Rightarrow \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$. Сумираме равенствата $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B})$ и $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(\overline{A}B)$ и получаваме $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 2\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A}B)$. Следователно $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}) + \mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(A \cup \overline{A}B) = \mathbf{P}((A \cup \overline{A})(A \cup B)) = \mathbf{P}(A \cup B)$. Свойства (4) и (5) следват по индукция.

Пример 2.7. *Класическа вероятност: Нека $(\Omega, \mathfrak{R}(\Omega), \mathbf{P})$ е вероятностно пространство за $\mathcal{E}$, като $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ и $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \dots = \mathbf{P}(\{\omega_n\})$. Тогава са в сила равенствата:*

$$\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \mathbf{P}(\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_m}\}) = \mathbf{P}(\cup_{k=1}^{m}\{\omega_{i_k}\}) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{m}{n}.$$

Тоест, ако $A \in \mathfrak{R}(\Omega)$, то $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, където с $|A|$ е означен броя на елементарните изходи принадлежащи на събитието A.

Забележка 2.8. *Обобщение на класическата вероятност за случая на безкрайно пространство от елементарни изходи: $|\Omega| = \infty$. Конструираме $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, че $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ и за всяко n да е в сила $\Omega_n \subset \Omega_{n+1},\ \ |\Omega_n| < \infty$. Нека $A_n = A \cap \Omega_n$ и дефинираме $\mathbf{P}$ чрез равенството:*

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{|\Omega_n|}.$$

Пример 2.9. *Статистическа вероятност:*

$$\textit{честота на събитието } A = \frac{\textit{брой настъпвания на } A}{\textit{брой опити}} = \frac{X_n}{n};$$

$$\textit{статистическа вероятност на } A = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}.$$

Пример 2.10. ***Парадокс на дъо-Мере:*** *Да се пресметне вероятността при хвъряне на 2 зара да се падне поне една шестица, ако всички изходи са равновероятни и:*
a) заровете са различими
b) заровете са неразличими.
Кой модел отразява вярно действителността?

Извод: При неразличими обекти не можем да препполагаме равновероятност на елементарните изходи, тоест не можем да приложим класическа вероятност. Ако приложим класическа вероятност, то няма да получим резултат съгласуван с нашата "опитна реалност", която се описва чрез статистическа вероятност. Класическа вероятност прилагаме, когато обектите в разглеждан експеримент са различими.

2.3 Условия на задачите от упражнение 2

Задача 1 Куб, на който всички страни са боядисани в различни цветове, е разрязан на 1000 еднакви кубчета. Да се определи вероятността случайно избрано кубче да има точно две боядисани страни.

Задача 2 Да се определи вероятността контролният номер на първата срещната лека кола:
а) да не съдържа еднакви цифри;
б) да има точно две еднакви цифри;
в) да има три еднакви цифри;
г) да има две двойки еднакви цифри;
д) да има една и съща сума от първите две и последните две цифри.

Задача 3 От десет лотарийни билета два са печеливши. Да се определи вероятността, измежду изтеглените по случаен начин пет билета:
а) точно един да бъде печеливш;
б) да има два печеливши;
в) да има поне един печеливш.

Задача 4 При игра на тото 6 от 49 да се пресметна вероятностите за печалба на шестица, петица, четворка, тройка.

Задача 5 С цел намаляване броя на играните мачове, $2k$ отбора с жребий се разбиват на две равни по брой групи. Да се определи вероятността двата най-силни отбора да са в различни групи.

Задача 6 Във влак с три вагона по случаен начин се качват седем пътника. Каква е вероятността в първия вагон да се качат четирима.

Задача 7 Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Каква е вероятността между две фиксирани лица да има точно r човека.

Задача 8 Група от n човека се нарежда около кръгла маса. Каква е вероятността две фиксирани лица да се окажат едно до друго.

Задача 9 От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$, k пъти последователно се вади по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако:
а) извадката е без връщане;
б) извадката е с връщане.

Задача 10 Нека $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ са булови алгебри и множеството $\mathcal{A}$ се състои от всички крайни обединения на непресичащи се елементи от $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Да се докаже, че $\mathcal{A}$ е булова алгебра относно операциите допълнение и крайните обединения и сечения.

2.4 Решения на задачите от упражнение 2

Задача 1 Кубчетата с точно две оцветени страни имат точно един ръб, съдържащ се в ръб на големия куб. Броят на ръбовете на кубът е 12 и всеки ръб съдържа точно 8 двуцветни кубчета. Следователно търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{12\times 8}{1000} = 0,096$.

Задача 2 Търсената вероятност е:

a) $\mathbf{P} = \frac{|V_{10}^4|}{|V(10;4)|} = 0.504$

b) $\mathbf{P} = \frac{\binom{10}{1}\binom{4}{2}|V_9^2|}{|V(10;4)|} = 0.432$

c) $\mathbf{P} = \frac{\binom{10}{1}\binom{4}{3}|V_9^1|}{|V(10;4)|} = 0.036$

d) $\mathbf{P} = \frac{\binom{10}{2}|P(4;2,2)|}{|V(10;4)|} = 0.018$

e) $\mathbf{P} = \frac{10^2+2\sum_{k=1}^{9}k^2}{|V(10;4)|} = 0.067$, тъй като броят на начините по които наредена двойка десетични цифри има сума k е равен на $\begin{cases} k+1, & k \in \{0,1,\ldots,8\} \\ 19-k, & k \in \{10,11,\ldots,18\} \end{cases}$

Задача 3 Търсената вероятност е:

a) $\mathbf{P} = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{9} \approx 0.55$

b) $\mathbf{P} = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{9} \approx 0.22$

c) $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{8}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{7}{9} \approx 0.77$

Задача 4 Нека $A_k,\ k = 3, 4, 5, 6$ са съответно събитията - познати са k числа при игра на тото 6 т 49. Тогава $\mathbf{P}(A_6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816},\ \mathbf{P}(A_5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{54200},\ \mathbf{P}(A_4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{1032},\ \mathbf{P}(A_3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{56}$.

Задача 5 Да означим с A събитието - при жребий, двата най-силни отбора попадат в различни групи. Броят на различните начини по които най-силният отбор попада в група, която не съдържаща втория по сила е $\binom{2k-2}{k-1}$. Броят на различните начини по които най-силният отбор попада в група без ограничение е $\binom{2k-1}{k-1}$. Следователно $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{\binom{2k-1}{k-1}} = \frac{k}{2k-1}$.

Второ решение: Броят на различните начини по които от $2k$ отбора се определят 2 групи от по k отбора е $\frac{1}{2}\binom{2k}{k}$. Броят на различните начини при които двата най-силни отбора са в една група е $\binom{2k-2}{k}$. Следователно $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{2k-2}{k}}{\frac{1}{2}\binom{2k}{k}} = \frac{k}{2k-1}$.

Задача 6 Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{\binom{7}{4}|V(2;3)|}{|V(3;7)|} \approx 0.128$

Задача 7 При $r \leq n-2$ търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{2(n-r-1)[(n-2)!]}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$. Следователно

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}, & r \leq n-2 \\ 0, & r > n-2 \end{cases}$$

Задача 8 Без ограничение, номерираме n-те позиции. При $n \geq 3$ пресмятаме $\mathbf{P} = \frac{2n[(n-2)!]}{n!} = \frac{2}{n-1}$. Следователно

$$\mathbf{P} = \begin{cases} \frac{2}{n-1}, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}$$

Задача 9 Нека $T_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$ и $U_k = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$.

a) Изображението $T_k \longrightarrow C_n^k \quad (i_1, i_2, \ldots, i_k) \longmapsto \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ е биекция, тогава $|T_k| = |C_n^k|$. Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{|T_k|}{|V_n^k|} = \frac{1}{k!}$.

b) Изображението $U_k \longrightarrow C(n;k) \quad (i_1, i_2, \ldots, i_k) \longmapsto [i_1, i_2, \ldots, i_k]$ е биекция, тогава $|U_k| = |C(n;k)|$. Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{|U_k|}{|V(n;k)|} = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{n^k}$.

3 Условна вероятност и независимост

3.1 Условна вероятност и независимост

Нека $\mathcal{E}$ е експеримент с вероятностно пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Нека $B \in \mathfrak{A}$, като $\mathbf{P}(B) > 0$. Вероятността да настъпи събитие $A \in \mathfrak{A}$ при условие, че е настъпило събитие B се нарича условна вероятност на A при условие B и се записва чрез $\mathbf{P}(A|B)$, като

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Дефиниционното равенство $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ е напълно естествено поради предположението, че $\mathbf{P}(A|B)$ и $\mathbf{P}(AB)$ трябва да са пропорционални с коефициент зависещ само от B, тоест $\mathbf{P}(A|B) = c(B).\mathbf{P}(AB)$, като при $A = B$ намираме $c(B) = \frac{1}{\mathbf{P}(B)}$. Точното описание е следното: условната вероятност $\mathbf{P}(A|B)$ се реализира като безусловна вероятност $\mathbf{P}(AB)$ на събитието AB във вероятностно пространство $(\Omega^*, \mathfrak{A}^*, \mathbf{P}^*)$, където:

$$\Omega^* = B, \ \ \mathfrak{A}^* = \{CB \mid C \in \mathfrak{A}\}, \ \ \mathbf{P}^*(CB) = \frac{\mathbf{P}(CB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ако $\mathbf{P}(A) > 0$ и $\mathbf{P}(B) > 0$, то съгласно дефиницията на условна вероятност получаваме $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$. В общност, ако $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ са такива, че $\mathbf{P}(\cap_{k=1}^{n-1} A_k) > 0$, то прилагайки дефиницията за условна вероятност намираме

$$\mathbf{P}(\cap_{k=1}^{n} A_k) = \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1})\mathbf{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

$$= \dots = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Теорема 3.1. *(Теорема за умножение на вероятностите) Нека $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ са такива, че $\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$. Тогава е в сила равенството*

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 A_2) \cdots \mathbf{P}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}).$$

Събитията $A_1, A_2, \dots, A_n$ се наричат независими, ако за всяко $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ е в сила равенството: $\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k})$. В частност при $n = 2$ събитията A и B са независими, ако $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. В този случай, при $\mathbf{P}(B) > 0$ получаваме $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$.

Забележка 3.2. *Равенството $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ изразява връзката между понятията условна вероятност и независимост. Ако $\mathbf{P}(B) > 0$, то събитията A и B са независими, тогава и само тогава, когато е в сила $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$. Ако $\mathbf{P}(B) = 0$, то A и B са независими.*

Забележка 3.3. *Ако A и B са несъвместими събития с положителна вероятност, тоест $AB = \emptyset$ и $\mathbf{P}(A) > 0, \ \mathbf{P}(B) > 0$, то те са зависими, поради $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.*

Забележка 3.4. *Ако A и B са независими събития, то:*
a) A и $\overline{B}$
b) $\overline{A}$ и $\overline{B}$
също са независими. Твърдението на задачата се обобщава по индукция за $n \geq 3$ събития.

3.2 Условия на задачите от упражнение 3

Задача 1 Вероятността стрелец да улучи мишена е $\frac{2}{3}$, ако улучи той получава право на втори изстрел. Вероятността за улучване и на двете мишени е $\frac{1}{2}$. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право да стреля втори път?

Задача 2 Застрахователна компания води статистика за своите клиенти:
- всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;
- 60% посещават повече от веднъж годишно лекар;
- 17% посещават хирург;
- 15% от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург. Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годишно лекар, да не е бил при хирург?

Задача 3 Да се определи вероятността, случайно избрано естествено число, да не се дели:
a) нито на две, нито на три;
b)на две или на три.

Задача 4 Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите се числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Задача 5 Около маса сядат 10 мъже и 10 жени. Каква е вероятността лица от еднакъв пол да не седят едно до друго?

Задача 6 Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рожденните дни на поне двама от тях да съвпадат да е по-голяма от 1/2.

Задача 7 Двама играчи последователно хвърлят монета, играта печели този, който първи хвърли герб. Да се намери вероятността за спечелване на играта за всеки от двамата играчи.

Задача 8 А получава информация (0 или 1) и я предава на Б, той я предава на В, той пък на Г. Г съобщава получената информация. Известно е, че всеки от тях казва истина само в един от три случая. Ако излъжат точно двама, отново се получава истина. Каква е вероятността А да не е излъгал, ако е известно, че Г е съобщил "истината"(тоест отговорът на Г съвпада с информацията, която А получава)?

Задача 9 Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се предели вероятността нито едно лице да не получи своето писмо.

Задача 10 Нека $S = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ \mid \ f - \text{биекция}\}$ е множеството на всички биекции $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Да се определи вероятността при случаен избор на елемент от S, той да няма неподвижна точка.

Задача 11 Каква е вероятността да се получи несъкратима дроб, ако числителят и знаменателят са числа, които се избират от редицата на естествените числа по случаен начин и независимо едно от друго.

3.3 Решения на задачите от упражнение 3

Задача 1 Р-е: Нека A_i са събитията - стрелецът улучва $i-$тата мишена. По условие $\mathbf{P}(A_1) = \frac{2}{3}$ и $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}$, откъдето $\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$.

Задача 2 Р-е: Нека A, B и C са съответно събитията - случайно избран клиент да посещава точно веднъж, повече от веднъж годишно лекар и да посещава хирург. По условие $\overline{A} = B$ и $\mathbf{P}(B) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{17}{100}$, $\mathbf{P}(C|B) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$. Търсим $\mathbf{P}(\overline{C}|A)$. Пресмятаме $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(B) = \frac{2}{5}$ и $\mathbf{P}(\overline{C}|A) = \frac{\mathbf{P}(\overline{C} \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(CA)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A) - (\mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(CB))}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(C|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{4}{5}$.

Задача 3 Р-е: а) Нека A, B и C са съответно събитията - случайно избрано естествено число да не се дели на 2, да не се дели на 3, да е взаимно-просто с 6. Тогава $C = AB$ и търсим $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(C)$. За да приложим в този случай класическа вероятност е необходимо да я додефинираме чрез $\mathbf{P}(C) = \lim_{n\to\infty} \frac{|D_n|}{n}$, където $|D_n|$ е броят на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$, взаимно прости с 6. Получаваме $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - (1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B})) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{3}$.

b) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Задача 4 Р-е: Нека A и B са съответно събитията при хвърляне на 2 зара, сумата от падналите се числа е по-малка от 8, сумата е нечетна. Търсим $\mathbf{P}(A|B)$. При различими зарове $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{2}{3}$. Събитията A и B са зависими, понеже $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \mathbf{P}(AB)$. При неразличимите зарове, пресмятане на $\mathbf{P}(A|B)$ с класическа вероятност не е правдоподобно.

Задача 5 Р-е: Нека A е събитието - при сядане на 10 мъже и 10 жени на една пейка, да няма съседи от един и същи пол. Еквивалентна интерпретация на условието е да намерим вероятността при случаен избор (класическа вероятност) на 20 членна редица от елементи на $\{m, w\}$, всеки от които участва точно 10 пъти, да няма два съседни еднакви. Тогава $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{|P(20;10,10)|} = \frac{2(10!)^2}{20!}$.
Второ решение - чрез определяне позициите на 10-те жени, те могат да бъдат или всичките 10 четни позиции или всички нечетни позиции (ако сме ги номерирали последователно за определеност), т.е. 2(10!) възможности, на всяка от които съответстват 10! възможности за раположението на мъжете. Така $\mathbf{P}(A) = \frac{2(10!)^2}{20!}$.
Нека сега разгледаме същата задача, но за кръгла маса. Ще докажем и използваме следното твърдение:

Лема 3.5. *Броя на различните нареждания (различни с точност до ротации, без отражения) на n лица на кръгла маса с n позиции е $(n-1)!$.*

Доказателство: Без ограничение, означаваме n-те позиции и n-те лица с $1, 2, \ldots, n$ и съпоставяме на всяко нареждане, пермутация, чрез съответната биекция задаваща нареждането: $\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ позиция $\longmapsto$ човек. В множеството S_n на пермутаициите въвеждаме следната релация на еквивалентност: $\sigma,\ \tau \in S_n$ са еквивалентни, ако съществува $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} :\ \sigma(i) - \tau(i) \equiv k \mod n,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Еквивалентността на две нареждания с точност до ротация е равносилна на еквивалентност на задаващите ги пермутации. Всеки клас на еквивалентност в S_n се състои от точно n пермутации: класът с представител $\tau \in S_n$ се състои от елементите $\tau_k \equiv \tau + k \mod n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоест, за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ дефинираме $\tau_k(i)$ да е равен на остатъкът при деление на $\tau(i) + k$ на n, ако остатъкът е различен от нула, в противен случай полагаме $\tau_k(i) = n$. Получаваме, че на всяко нареждане съответстват точно n пермутации, и търсеният брой различни нареждания е равен на броя на класовете на еквивалентност в S_n. Следователно търсеният брой е $\frac{|S_n|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. $\square$

Лема 3.6. *Броя на различните нареждания (различни с точност до ротации и отражения) на n лица на кръгла маса с $n \geq 3$ позиции е $\frac{(n-1)!}{2}$.*

Доказателство: Разсъжденията са аналогични на доказателството на предходната лема 3.5, затова ще използваме въведените там означения. В множеството S_n на пермутаициите въвеждаме следната релация на еквивалентност: $\sigma,\ \tau \in S_n$ са еквивалентни, ако е изпълнено едно от следните две условия:
(1) съществува $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} :\ \sigma(i) - \tau(i) \equiv k \mod n,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$;
(2) $\sigma(i) + \tau(i) = n + 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Всеки клас на еквивалентност в S_n, при $n \geq 3$, се състои от точно $2n$ пермутации: класът с представител $\tau \in S_n$ се състои от пермутациите $\tau_k \equiv \tau + k \mod n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, както и от пермутациите $\tau'_k(i) = n + 1 - \tau_k(i),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$. Получаваме, че на всяко нареждане съответстват точно $2n$ пермутации, и търсеният брой различни нареждания е равен на броя на класовете на еквивалентност в S_n. Следователно търсеният брой е $\frac{|S_n|}{2n} = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$. $\square$

Решение на задачата: фиксираме 10 позиции, никои две от които не са съседни и разполагаме по $\frac{10!}{10} = 9!$ начина жените на тези позиции. За мъжете имаме $10!$ възможни начина на разпределяне. Общия брой разпределения без съседни еднакви е $9!10!$. Общия брой разпределения без ограничения е $\frac{20!}{20} = 19!$. Тогава $\mathbf{P}(A) = \frac{2(10!)^2}{20!}$.

Задача 6 Р-е: Нека за всяко естествено $n \leq 366$, $A(n)$ е събитието - при случаен избор на n човека, да има поне 2-ма с еднаква рожденна дата. Търсим $\min\{n|\ \mathbf{P}(A(n)) > \frac{1}{2}\}$. От $\mathbf{P}(A(n)) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A(n)})$, то $\min\{n|\ \mathbf{P}(A(n)) > \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ \mathbf{P}(\overline{A(n)}) < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ \frac{V_{365}^n}{V(365;n)} < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ \prod_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{k}{365}) < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ \exp(-\frac{n(n-1)}{730}) < \frac{1}{2}\} = \min\{n|\ n(n-1) - 730\ln(2) > 0\} = 23$.

Задача 7 Р-е: Нека $A,\ B,\ A_i,\ B_i,\ i = 1, 2, \ldots$ са съответно събитията - играта е спечелена от първия, втория играч, при $i-$тото хвърляне на играч 1, 2 се пада лице. Нека за всяко естествено k, $A(k)$ е събитието - първия играч печели на $(2k-1)$-ви ход. Следователно

$$A(k) = A_1 B_1 A_2 B_2 \cdots A_{k-1} B_{k-1} \overline{A_k}.$$

Ще считаме, че вероятността за герб е $\frac{1}{2}$, откъдето получаваме:

$$\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(B_1|A_1) = \mathbf{P}(A_2|A_1B_1) = \mathbf{P}(B_2|A_1B_1A_2) = \cdots = \mathbf{P}(B_{k-1}|A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}) =$$

$$= \mathbf{P}(\overline{A_k}|A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}B_{k-1}) = \frac{1}{2}.$$

Съгласно теорема 3.1 за вероятността на събитието $A(k)$ намираме

$$\mathbf{P}(A(k)) = \mathbf{P}(A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}B_{k-1}\overline{A_k})$$

$$= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B_1|A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1B_1)\cdots\mathbf{P}(\overline{A_k}|A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}B_{k-1}) = \frac{1}{2^{2k-1}},$$

Понеже $A(k)\cap A(l) = \emptyset$ при $k \neq l$ ($A(k)$ и $A(l)$ при $k \neq l$ са различни елементарни изходи), то

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{N}A(k)) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}(A(k)) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^{2k-1}}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{4^k} = \lim_{N\to\infty}\frac{1-\frac{1}{4^N}}{2(1-\frac{1}{4})} = \frac{2}{3}.$$

Понеже $A = \overline{B}$, то $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$.

Задача 8 Р-е: Нека A и B са съответно събитията - първия е казал истината (1), четвъртият е казал (1). Търсим $\mathbf{P}(A|B)$. Събитието $A\cap B$ се представя като обединение на 2 несъвместими събития - всички кават истината (събитие C), точно двама различни от първия лъжат (казват 0) (събитие D). Следователно $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(C\cup D) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(D) = \frac{1}{3^4} + \binom{3}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 = \frac{13}{81}$. Събитието B се представя като обединение на 3 несъвместими събития - всички казват истината (събитие E), всички лъжат (събитие F), точно двама казват истината (събитие G). Така $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(E\cup F\cup G) = \mathbf{P}(E)+\mathbf{P}(F)+\mathbf{P}(G) = \frac{1}{3^4}+\frac{2^4}{3^4}+\binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2 = \frac{41}{81}$, откъдето $\mathbf{P}(A|B) = \frac{13}{41}$.

Задача 9 Р-е: Нека S_n е множеството на всички биекции на $n-$елементно множество. Търсим броя на биекциите без неподвижна точка. Нека $A_k \subset S_n,\ k = 1,\ldots,n$ се състои от всички биекции, държащи елемента k неподвижно. Тогава броя на биекциите без неподвижна точка е: $|S_n - \cup_{k=1}^{n}A_k| = |S_n| - |\cup_{k=1}^{n}A_k| = n! - (\sum_i |A_i| - \sum_{i<j}|A_i\cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1}|\cap_{i=1}^{n}A_i|) = n! - (\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!) = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{n!}{n!} = n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Търсената вероятност е

$$\mathbf{P} = \frac{|S_n - \cup_{k=1}^{n}A_k|}{|S_n|} = \frac{n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}{n!} = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Доказателство на 3.4 От $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\Omega) = \mathbf{P}(A(B\cup\overline{B})) = \mathbf{P}(AB\cup A\overline{B}) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B})$, следва $\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1-\mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B})$. Тогава A и $\overline{B}$ са независими. От този резултат и смяната $A \longrightarrow \overline{A}$ получаваме, че $\overline{A}$ и $\overline{B}$ също са независими. Обобщение на твърдението се получава чрез индукция по броя n на разглежданите независими събития.

Задача 11 Нека $a, b \in \mathbb{N}$ са случайно избраните естествени числа. Дробта $\frac{a}{b}$ е несъкратима, ако $\gcd(a, b) = 1$. Нека $\mathbb{P}$ е множеството на простите числа и за всекии $l, n \in \mathbb{N}$, дефинираме събитието $A(n, l)$ да бъде: "l не дели n". За произволно $p \in \mathbb{P}$ дефинираме $A_p = A(a,p) \cup A(b,p)$ и

$$A := \bigcap_{p \in \mathbb{P}} A_p; \quad A_{(n)} := \bigcap_{p \in \mathbb{P};\ p \leq n} A_p.$$

Търсим $\mathbf{P}(A)$, като ще докажем и приложим следните резултати:

- Ако $a, b \in \mathbb{N}$ са различни, то $A(a,p)$ и $A(b,p)$ са независими, като съгласно задача 3:

$$\mathbf{P}(A(a,p)) = \mathbf{P}(A(b,p)) = \frac{p-1}{p};$$

- $\mathbf{P}(A_p) = 1 - \frac{1}{p^2}$;

- Ако $p_1, p_2, \ldots, p_r \in \mathbb{P}$ са различни, то $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$ са независими (в съвкупност) събития.

Ще докажем последните две твърдения:

$$\mathbf{P}(A_p) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_p}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A(a,p)} \cap \overline{A(b,p)}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A(a,p)})\mathbf{P}(\overline{A(b,p)}) = 1 - \frac{1}{p^2}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{p_1} \cap A_{p_2}) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1} \cap A_{p_2}}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}} \cup \overline{A_{p_2}}) \\
&= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}}) - \mathbf{P}(\overline{A_{p_2}}) + \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}} \cap \overline{A_{p_2}}) \\
&= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}}) - \mathbf{P}(\overline{A_{p_2}}) + \mathbf{P}(\overline{A_{p_1 p_2}}) \\
&= 1 - \frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) \\
&= \mathbf{P}(A_{p_1})\mathbf{P}(A_{p_2}).
\end{aligned}$$

Следователно A_{p_1}, A_{p_2} са независими при $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{P}$. По индукция следва твърдението за независимост на $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_{(n)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{p \in \mathbb{P};\ p \leq n} A_p\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p \in \mathbb{P},\ p \leq n} \mathbf{P}(A_p) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{p \in \mathbb{P},\ p \leq n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Забележка 3.7.

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

4 Формула за пълната вероятност и Формула на Бейс

4.1 Формула на Бейс

Нека $\mathcal{E}$ е експеримент с вероятностно пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, $n \geq 2$ е естествено число или ∞.

Дефиниция 4.1. *Събитията* $H_1, H_2, \ldots, H_n \in \mathfrak{A}$ *образуват пълна група от събития в* $\mathfrak{A}$, *ако:*

- $H_i \cap H_j = \emptyset, \forall i \neq j$,
- $\cup_{i=1}^n H_i = \Omega$.

Ако $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуват пълна група от събития, тогава

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^n H_i) = \cup_{i=1}^n (A \cap H_i).$$

При условието $\mathbf{P}(H_i) > 0$ за всяко $i \geq 1$, получаваме **формулата за пълната вероятност**:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^n (A \cap H_i)) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i).$$

Теорема 4.2. *Нека* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *образуват пълна група от събития в* $\mathfrak{A}$, *като* $\mathbf{P}(H_i) > 0$ *за всяко* $i = 1, 2 \ldots, n$. *Тогава за всяко събитие* $A \in \mathfrak{A}$ *е в сила:*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A|H_i)P(H_i).$$

Ако събитието $A \in \mathfrak{A} \ : \ \mathbf{P}(A) > 0$, то вероятностите $\mathbf{P}(H_k|A),\ k = 1, 2, \ldots, n$ се пресмятат чрез

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(H_k A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}. \tag{2}$$

Теорема 4.3. ***(Формула на Бейс)*** *Нека* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *образуват пълна група от събития в* $\mathfrak{A}$, *като* $\mathbf{P}(H_i) > 0$ *за всяко* $i = 1, 2 \ldots, n$. *Тогава за всяко събитие* $A \in \mathfrak{A} \ : \ \mathbf{P}(A) > 0$ *е в сила:*

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}.$$

4.2 Условия на задачите от упражнение 4

Задача 0 Нека $n \in \mathbb{N}$ и $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ са събития от $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Да се докаже, че

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_i \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i).$$

Задача 1 Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се определи вероятността:
а) всеки да получи своето писмо;
б) точно $n-1$ лица да получат своите писма;
в) нито едно лице да не получи своето писмо.

Задача 2 В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Да се определи вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако:
а) след всяко изваждане топката се връща обратно в урната;
б) извадените топки не се връщат обратно.

Задача 3 Вероятността, че в резултат на четири независими опита събитието A ще настъпи поне веднъж е равна на 1/2. Да се определи вероятността за настъпване на A при един опит, ако вероятността за всеки опит е една и съща.

Задача 4 Известни са вероятностите на събитията A, B, AB. Да се определят $\mathbf{P}(A\overline{B})$ и $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A})$.

Задача 5 Дадени са две партиди изделия от 12 и 10 броя. Във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Да се определи вероятността то да е дефектно.

Задача 6 Имаме три нормални зара и един, на който върху всичките страни има шестици. По случаен начин избираме един от тези четири зара и го отделяме, а след това хвърляме останалите три. Да се определи вероятността да се паднат:
а) три шестици;
б) различни цифри;
в) последователни цифри.

Задача 7 Дадени са n урни и във всяка от тях има по m бели и k черни топки. От първата урна се тегли една топка и се прехвърля във втората, след това от втората една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Задача 8 В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират 3 топки, които след игра се връщат обратно в кутията. За втората игра също се избират 3 топки, каква е вероятността те да са нови?

Задача 9 Петнадесет изпитни билета съдържат по два въпроса. Студент може да отговори на 25 въпроса. Каква е вероятността той да вземе изпита, ако за това е нужно той да отговори на двата въпроса в един билет или на един от двата въпроса, а след това и на посочен въпрос от друг билет?

4.3 Решения на задачите от упражнение 4

Задача 0 С индукция по n ще докажем формулата. При $n = 2$ получаваме равенството $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$, което е в сила предвид свойство 3 от 2.6. Да предположим, че формулата е вярна за n събития и да извършим индуктивната стъпка $n \longrightarrow n+1$:

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbf{P}((\cup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}) = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}((\cup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{P}(A_i A_j) + \cdots (-1)^{n-1} \mathbf{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) - \mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n+1} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n \mathbf{P}(\cap_{i=1}^{n+1} A_i).$$

Задача 1 Р-е: a) $\mathbf{P} = \frac{1}{n!}$;
b) $\mathbf{P} = 0$, понеже, не съществува пермутация с точно $n-1$ неподвижни точки.
c) това е задача 9 от упражнение 3: $\mathbf{P} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Задача 2 Р-е: Нека A е събитието - бяла топка е извадена преди зелена. Нека броят на белите, зелените и червените топки е съответно m, n и k.

a) Нека N е естествено число и A_N е събитиетието - бяла топка е извадена преди зелена, на позиция не надминаваща N. Нека $A(r)$ е събитието - бяла топка е извадена за първи път при $r-$ти опит, и няма извадени зелени топки. Тогава

$$A_N = \cup_{r=1}^{N} A(r), \ \mathbf{P}(A(r)) = \left(\frac{k}{m+n+k}\right)^{r-1} \frac{m}{m+n+k} = q^{r-1} \frac{m}{m+n+k},$$

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(A_N) = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\cup_{r=1}^{N} A(r)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{N} \mathbf{P}(A(r))$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{N} \frac{m}{m+n+k} q^{r-1} = \frac{m}{m+n+k} \lim_{N\to\infty} \sum_{r=1}^{N} q^{r-1}$$

$$= \frac{m}{m+n+k} \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{m}{m+n+k} \times \frac{1}{1-q} = \frac{m}{m+n}.$$

b) Ще използваме означенията от a), като положим $N = k$ и нека $B(r)$ е събитието - зелена топка е извадена за първи път при $r-$ти опит, и няма извадени бели топки. Тогава $A = \cup_{r=1}^{k} A(r)$, $\overline{A} = \cup_{r=1}^{k} B(r)$ и по теорема 3.1 пресмятаме $\mathbf{P}(A(r))$ и $\mathbf{P}(B(r))$

$$\mathbf{P}(A(r)) = \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{(m+n+k)(m+n+k-1)\cdots(m+n+k-r+1)} \times \frac{m}{m+n+k-r} =$$

$$= \frac{\binom{k}{r}}{\binom{m+n+k}{r}} \times \frac{m}{m+n+k-r}.$$

$$\mathbf{P}(B(r)) = \frac{\binom{k}{r}}{\binom{m+n+k}{r}} \times \frac{n}{m+n+k-r}.$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{r=1}^{k} \mathbf{P}(A(r)) = m \sum_{r=1}^{k} \frac{\binom{k}{r}}{(m+n+k-r)\binom{m+n+k}{r}},$$

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \sum_{r=1}^{k} \mathbf{P}(B(r)) = n \sum_{r=1}^{k} \frac{\binom{k}{r}}{(m+n+k-r)\binom{m+n+k}{r}}.$$

От $1 = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \frac{n}{m}\mathbf{P}(A)$, то $\mathbf{P}(A) = \frac{m}{m+n}$.

Задача 3 Нека A_i е събитието - А се случва при $i-$тия опит, $i = 1, 2, 3, 4$. По условие A_i са независими и съгласно 3.4 независими са и събитията $\overline{A_i}$. По условие $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4)$ и $\frac{1}{2} = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^4 A_i) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\cup_{i=1}^4 A_i}) = 1 - \mathbf{P}(\cap_{i=1}^4 \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^4 \mathbf{P}(\overline{A_i}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1})^4$, откъдето $\mathbf{P}(A_1) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1}) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Задача 4 $\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)$, и $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{\mathbf{P}(\overline{B}) - \mathbf{P}(\overline{B}A)}{\mathbf{P}(\overline{A})} = \frac{1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(AB)}{1 - \mathbf{P}(A)}$.

Задача 5 Нека A, B и C са съответно събитията - прехвърления във втората партида детайл е годен, е дефектен; извадения от втората партида детайл е дефектен. Тогава $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(C \cap (A \cup B)) = \mathbf{P}(CA \cup CB) = \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(CB) = \mathbf{P}(C|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C|B)\mathbf{P}(B) = \frac{1}{11} \times \frac{11}{12} + \frac{2}{11} \times \frac{1}{12} = \frac{13}{132}$.

Забележка 4.4. *За свбитията A и B в задача 5 е в сила $B = \overline{A}$, следователно A и B образуват пълна група от свбития. По формулата за пълната вероятност 4.2 получаваме* $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(C|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(C|B)\mathbf{P}(B)$.

Задача 6 Нека A е събитието премахнатият зар е обикновен (върху стените му са числата 1,2,...,6). Тогава събитията $A, \overline{A}$ образуват пълна група.

a) Ако B е събитието - падат се три шестици при хвърляне на 3-те зара, то прилагаме 4.2:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{36} \times \frac{\binom{3}{1}}{4} + \frac{1}{6^3} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{864} \approx 0,02199.$$

b) Ако B е събитието - падат се три различни цифри при хвърляне на 3-те зара, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{|V_5^2|}{|V(6;2)|} \times \frac{3}{4} + \frac{|V_6^3|}{|V(6;3)|} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{9} \approx 0,555.$$

c) Ако B е събитието - падат се три последователни цифри при хвърляне на 3-те зара, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{2}{|V(6;2)|} \times \frac{3}{4} + \frac{4.(3!)}{|V(6;3)|} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{72} \approx 0,069444.$$

Задача 7 Р-е: Нека $A_i,\ i=1,\dots,n$ е събитието - от $i-$тата урна е извадена бяла топка. Тогава $\mathbf{P}(A_1)=\frac{m}{m+k}$ и с индукция по n получаваме $\mathbf{P}(A_n)=\mathbf{P}(A_n(A_{n-1}\cup\overline{A_{n-1}}))=\mathbf{P}(A_nA_{n-1}\cup A_n\overline{A_{n-1}}))=\mathbf{P}(A_nA_{n-1})+\mathbf{P}(A_n\overline{A_{n-1}})=\mathbf{P}(A_n|A_{n-1})\mathbf{P}(A_{n-1})+\mathbf{P}(A_n|\overline{A_{n-1}})\mathbf{P}(\overline{A_{n-1}})=\frac{m+1}{m+k+1}\times\frac{m}{m+k}+\frac{m}{m+k+1}\times\frac{k}{m+k}=\frac{m}{m+k}$.

Задача 8 Р-е: Нека $H_i,\ i=0,1,2,3$ са съответно събитията - избрани са i на брой нови топки за първата игра. Нека A е събитието - избрани са 3 нови топки за втората игра. Тогава събитията H_i са пълна група и съгласно теорема (4.2) получаваме $\mathbf{P}(A)=\sum_{i=0}^{3}\mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)=\mathbf{P}(A|H_0)\mathbf{P}(H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}\times\frac{1}{\binom{7}{3}}+\frac{1}{\binom{7}{3}}\times\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{16}{1225}\approx 0.01306122$

Задача 9 Р-е: Нека $H_k,\ k=0,1,2$ и A са съответно събитията - има точно k билета, за които студентът не знае нито един от двата въпроса върху тях; и студентът взима изпита. Тогава $\mathbf{P}(A)=1-\mathbf{P}(\overline{A})=1-\mathbf{P}(\overline{A}(\cup_{k=0}^{2}H_k))=1-\mathbf{P}(\cup_{k=0}^{2}\overline{A}H_k)=1-\sum_{k=0}^{2}\mathbf{P}(\overline{A}H_k)=1-\sum_{k=0}^{2}\mathbf{P}(\overline{A}|H_k)\mathbf{P}(H_k)$. Ще приемем, че избор на въпрос от вече избран билет, става с вероятност $\frac{1}{2}$. Пресмятаме:

$$\mathbf{P}(H_0)=\frac{V_{25}^{5}\times\frac{P(10;2,\dots,2)}{10!}}{\frac{P(15;2,\dots,2)}{15!}}=\frac{\frac{25!}{20!}\times\frac{20!}{10!2^{10}}}{\frac{30!}{15!2^{15}}}=\frac{176}{261};\quad \mathbf{P}(\overline{A}|H_0)=\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{21};$$

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{\binom{5}{2}\times V_{25}^{3}\times\frac{P(11;2,\dots,2)}{11!}}{\frac{P(15;2,\dots,2)}{15!}}=\frac{160}{261};\quad \mathbf{P}(\overline{A}|H_1)=\frac{1}{15}+\frac{3}{15}\left(\frac{1}{14}+\frac{2}{14}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{105};$$

$$\mathbf{P}(H_2)=\frac{\frac{1}{2}\binom{5}{2}\times\binom{3}{2}\times 25\times\frac{P(12;2,\dots,2)}{12!}}{\frac{P(15;2,\dots,2)}{15!}}=\frac{5}{261};\quad \mathbf{P}(\overline{A}|H_2)=\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\times\frac{2}{14}=\frac{1}{7};$$

Следователно $\mathbf{P}(A)=1-\frac{511}{21\times 261}=0.9067688$.

4.4 Условия на задачите от упражнение 5

Задача 3 В компютърен център има три принтера А, Б и В, които работят с различна скорост. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите заявка да бъде изпратена към А, Б или В са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да се задави и да провали печатането е 0.01, 0.05 и 0.04 съответно. Ако печатането на даден документ се прекрати, каква е вероятността това да е по вина на първия принтер?

Задача 4 Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху масата. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна също да е бяла?

Задача 5 Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Предполагаме, че студентът знае 90% от въпросите, ако не знае верния отговор той налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верния отговор?

Задача 6 Трима умника стрелят по сладолед. Сладоледа е уцелен от един умник. Каква е вероятността точен да е бил първият умник, ако те уцелват с вероятност, съответно 0.2, 0.4 и 0.6.

Задача 7 Прехвърляме последователно тесте от 52 карти. Ако за първи път видим червено асо на позиция 6, каква е вероятността след това да видим червено асо преди черно асо?

Задача 8 На изпит се явяват 100 студента, 60 момчета и 40 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.5, а момчетата с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Задача 9 Дадени са 3 събития, които са равновероятни, несъвместими, две по две независими. Каква е максималната вероятност на тези събития?

Задача 10 Дадени са $n \geq 3$ събития, които са равновероятни, две по две независими, като всеки три от тях са несъвместими. Каква е максималната вероятност на тези събития?

4.5 Решения на задачите от упражнение 5

Задача 3 Р-е: Нека $H_i,\ i = 1,2,3$ и A са съответно събитията - документа се печата на i-тия принтер, печатането на документа е провалено. По условие $\mathbf{P}(H_1) = 0.6;\ \mathbf{P}(H_2) = 0.3;\ \mathbf{P}(H_3) = 0.1;\ \mathbf{P}(A|H_1) = 0.01;\ \mathbf{P}(A|H_2) = 0.05;\ \mathbf{P}(A|H_3) = 0.04$. Понеже H_i са две по две непресичащи се и $\sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(H_i) = 1$, то $H_i,\ i = 1,2,3$ образуват пълна група. Търсим $\mathbf{P}(H_1|A)$. Прилагаме формулата на Бейс (2) $\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{\sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)} = \frac{6}{25}$.

Задача 4 Р-е: Нека $H_i,\ i = 0,1,2$ и A са съответно събитията - i на брой бели клетки върху случайно избран жетон измежду дадените, при хвърляне на жетон - горната му страна е бяла. Ще считаме, че при хвърляне на жетон всяка от двете му страни е равновероятна, с вероятност $\frac{1}{2}$. Търсим $\mathbf{P}(H_2|A)$. Прилагаме Бейс: $\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_2)\mathbf{P}(H_2)}{\sum_{i=0}^{2} \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)} = \frac{1\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$.

Задача 5 Р-е: Нека H и A са съответно събитията - студентът знае случайно избран въпрос, студентът отговаря правилно на случайно избран въпрос. Търсим $\mathbf{P}(\overline{H}|A)$. Прилагаме Бейс: $\mathbf{P}(\overline{H}|A) = \frac{\mathbf{P}(A|\overline{H})\mathbf{P}(\overline{H})}{\mathbf{P}(A|\overline{H})\mathbf{P}(\overline{H})+\mathbf{P}(A|H)\mathbf{P}(H)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+1\times\frac{9}{10}} = \frac{1}{37}$.

Задача 6 Р-е: Нека $H_i,\ i = 1,2,3$ и A са съответно събитията - сладоледа е уцелен от $i-$тия умник, и сладоледа е уцелен от точно един умник. Следователно $A = (H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3}) \cup (\overline{H_1} \cap H_2 \cap \overline{H_3}) \cup (\overline{H_1} \cap \overline{H_2} \cap H_3)$ и търсим $\mathbf{P}((H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3})|A)$. По условие $\mathbf{P}(H_1) = 0.2,\ \mathbf{P}(H_2) = 0.4,\ \mathbf{P}(H_3) = 0.6$ и събитията $H_i,\ i = 1,2,3$ са независими (понеже умниците стрелят едновременно веднъж, и следователно резултатите им са независими). Съгласно 3.4, независими са и събитията $H_1,\ \overline{H_2},\ \overline{H_3};\ \overline{H_1},\ H_2,\ \overline{H_3};\ \overline{H_1},\ \overline{H_2},\ H_3$. Тогава

$$\mathbf{P}((H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3})|A) = \frac{\mathbf{P}((H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3}) \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(H_1 \cap \overline{H_2} \cap \overline{H_3})}{\mathbf{P}(A)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(\overline{H_2})\mathbf{P}(\overline{H_3})}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(\overline{H_2})\mathbf{P}(\overline{H_3}) + \mathbf{P}(\overline{H_1})\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(\overline{H_3}) + \mathbf{P}(\overline{H_1})\mathbf{P}(\overline{H_2})\mathbf{P}(H_3)}$$

$$= \frac{0.2 \times 0.6 \times 0.4}{0.2 \times 0.6 \times 0.4 + 0.8 \times 0.4 \times 0.4 + 0.8 \times 0.6 \times 0.6} = \frac{3}{29}.$$

Задача 7 Р-е: Нека A и B са съответно събитията - първото червено асо е на 6-та позиция; има червено асо на позиция с номер по-голям от 6 и по-малък от позицията на последното черно асо. Търсим $\mathbf{P}(B|A)$. Пресмятаме $\mathbf{P}(BA) = \frac{2\binom{46}{3}+5\binom{46}{2}}{\binom{52}{4}\times P(2,2)}$ и $\mathbf{P}(A) = \frac{46}{\binom{52}{2}}$, следователно $\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(BA)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{309}{490} \approx 0,63$.

Задача 8 Р-е: Нека $H_i,\ i = 0,1,2,3$ и A са съответно събитията - при случаен избор на 3 изпитни работи, точно i от тях са на момичета; при случаен избор на 3 изпитни работи, точно две са успешни. Търсим $\mathbf{P}(H_3|A)$. Понеже събитията $H_i,\ i = 0,1,2,3$ образуват пълна група, то прилагаме Бейс: $\mathbf{P}(H_3|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_3)\mathbf{P}(H_3)}{\sum_{i=0}^{3}\mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}$. Пресмятаме:

$$\mathbf{P}(H_0) = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.21162647, \quad \mathbf{P}(A|H_0) = 3 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.288;$$

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{\binom{40}{1} \times \binom{60}{2}}{\binom{100}{3}} = 0.43784787, \quad \mathbf{P}(A|H_1) = 2 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4 = 0.32;$$

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{\binom{40}{2} \times \binom{60}{1}}{\binom{100}{3}} = 0.28942486, \quad \mathbf{P}(A|H_2) = 2 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.35;$$

$$\mathbf{P}(H_3) = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.0611008, \quad \mathbf{P}(A|H_3) = 3 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.375;$$

Следователно $\mathbf{P}(H_3|A) \approx 0.07$.

Задача 9 Нека $A_i,\ i = 1,2,3$ са събития, удовлетворяващи условията: $\mathbf{P}(A_iA_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$ при $i \neq j$, $\mathbf{P}(A_i) = x$, и $A_1A_2A_3 = \emptyset$. Разглеждаме събитията $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, \overline{A}_1\overline{A}_2$: те са две по две непресичащи се, следователно

$$3x^2 + (1-x)^2 = \mathbf{P}(A_1A_2) + \mathbf{P}(A_2A_3) + \mathbf{P}(A_3A_1) + \mathbf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2)$$

$$= \mathbf{P}(A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2) \leq \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Следователно $x \leq 1/2$. Следният пример показва, че $x = 0.5$ се достига. Нека $A_i,\ i = 1,2$ са събития: при случаен избор на естествено число, то дава остатък i или $i+1$ при деление на 4; A_3 е събитието - случайно избрано естествено число дава остатък 3 или $1 \mod 4$. Тогава събитията $A_i,\ i = 1,2,3$ са две по две независими, не могат да настъпят едновременно и

$\mathbf{P}(A_i) = 1/2$.

Задача 10 Нека $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ са събития, удовлетворяващи условията на задачата, тоест две по две независими и всеки три са несъвместими. Нека $\mathbf{P}(A_k) = x \in (0, 1)$. Събитията

$$\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n = \prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k,\ A_iA_j,\ 1 \le i < j \le n,$$

са две по две несъвместими, следователно за събитието $A = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n \cup_{1\le i<j\le n} A_iA_j$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n \cup_{1\le i<j\le n} A_iA_j) = \mathbf{P}\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k\right) + \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{P}(A_iA_j)$$

$$= \mathbf{P}\left(\overline{\cup_{k=1}^{n} A_k}\right) + \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j) + 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k) + \sum_{1\le i<j\le n} \mathbf{P}(A_iA_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbf{P}(A_iA_jA_k) + \cdots$$

$$= \binom{n}{2}x^2 + 1 - nx + \binom{n}{2}x^2 = 1 + nx\left((n-1)x - 1\right).$$

Понеже $\mathbf{P}(A) \le 1$, то $x \le \frac{1}{n-1}$. Следният пример показва, че $\max x = \frac{1}{n-1}$.
Да разгледаме следният експеримент $\mathcal{E}_n$: по случаен начин от множеството на първите $(n-1)^2$ естествени числа S се избира число m . Дефинираме редица $\{A_k\}_{k=1}^n$ от събития индуктивно: A_1 е събитието $m = a_{1l}$, където $a_{1l},\ l = 1, \ldots, n-1$ са различни елементи на S. Нека $a_{2l},\ l = 1, \ldots, n-2$ са различни елементи на S, принадлежащи на

$$S - \{a_{1l} \mid l = 1, \ldots, n-1\}.$$

Дефинираме A_2 да бъде събитието $m = a_{11}$ или $m = a_{2l},\ l = 1, 2, \ldots, n-2$. Аналогично дефинираме $A_3, \ldots, A_n$. Получваме $\mathbf{P}(A_k) = \frac{n-1}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1}$, всеки две събития от редицата $\{A_k\}_{k=1}^n$ са независими и всеки три са несъвместими.