1)

Изпит по СЕМ – 12.02.2022г.

Павел Светозаров Сарпов, фн: 62393, гр: 5

Задача 1

Вероятностно пространство наричаме тройката $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, където Ω е множество от елементарни събития, $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ е σ-алгебра, $\mathbb{P}$ е вероятностна функция $(\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0;1])$.

Свойства на $\mathbb{P}$:

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) Ако $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

3) Ако $A, B \in \mathcal{A}$ и $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$

4) ако $A_i \in \mathcal{A}, i \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i)$

$M = (6+3) \bmod 2 = 1$

(1) $\mathbb{P}(A \cup B \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \overset{\text{незав.}}{=}$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

2)

Задача 2

А, Б, дефекты А = $\frac{1}{100}$, дефекты Б = $\frac{3}{100}$

n случайно избранных станков, $f(n)$ число [illegible] [illegible] дефекты

3)

Задача 3

Нека Y е дискретна сл. вел. и X е случ. вел.

~~Нека X е случайна вел.~~

Тогава
$$\mathbb{E}[X|Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}X 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}$$

$$\mathbb{E}[X|Y=y_j] = \frac{\mathbb{E}X 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)}$$

където $A_j = \{Y = y_j\}$

$Y \in \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, $T = f(X, Y)$

$N = \frac{1}{3} \cdot (3 \bmod 3) = 0$

$X \sim U(0, \frac{1}{3})$, $X \perp\!\!\!\perp Y$, $f(x, y) = xy + x^2$

$$\mathbb{E}[T|Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}(XY + X^2) 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} =$$

$$= \sum_j \left[\frac{\mathbb{E}X \mathbb{E}Y 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} + \frac{\mathbb{E}X^2 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} \right]$$

4)

Задача 4

Нека X е случайна величина. Тогава функция на моментите за X е $M_X(v) = \mathbb{E}e^{vX}$, ако $\mathbb{E}e^{vX}$ съществува за някое $|v| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

~~Ако X е дискретна сл. вел.:~~

$\cancel{\mathbb{E}X^2 = \sum e^{v}}$

$\mathbb{E}X^2$ се нарича момент от ред 2

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{\partial M_X(v)}{\partial v^2}\Big|_{v=0}$$

$$M = (9.3) \bmod 2 = 1$$

(1) $X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

$$M_{X+Y}(v) = \mathbb{E}e^{v(X+Y)} = M_X(v)\,M_Y(v) = \mathbb{E}e^{vX}\,\mathbb{E}e^{vY} =$$

$$= \int_0^\infty e^{vx} \cdot 1 \cdot e^{-x}\,dx \cdot \int_0^\infty e^{vy} \cdot 2 \cdot e^{-2y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{1-v} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2-v} = \frac{2}{2-3v+v^2}$$

$$\cancel{\mathbb{E}(X+Y)^2 = M''_{X+Y}(0) = M_X(0)\,M_Y(0)}$$

$$\cancel{= \left(\frac{0-2v}{(2-3v+v^2)^2}\right)'\Big|_{v=0} = -2(2-3v+v^2)^{-2}(-3+2v)}$$

[5]

$$E(X+Y)^2 = M_{X+Y}''(0) =$$

$$= \left(\frac{1}{2-3v+v^2}\right)''\Bigg|_{v=0} =$$

$$= \left(\frac{3-2v}{(2-3v+v^2)^2}\right)'\Bigg|_{v=0} =$$

$$= \frac{-2(2-3v+v^2)^2-(3-2v)\cdot 2\cdot(2-3v+v^2)(-3+2v)}{(2-3v+v^2)^4}\Bigg|_{v=0}$$

$$= \frac{-8-6\cdot 2\cdot 2\cdot(-3)}{16} = \frac{64}{16} = 4$$

6)

Задача 5

$X = (X_i)_{i \geq 1}$ НЕО случ. вел., с очаквания съответно $(\mathbb{E}X_i)_{i \geq 1}$

Казваме, че за X е изпълнен (слаб) закон за големите числа, ако $\dfrac{\sum_{i=1}^{\infty}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$

Казваме, че за X е изпълнен усилен ЗГЧ, ако:

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с.} 0$$

$M = (3+5+3) \bmod 2 = 1$

(1) Нека $\Pi_n = \prod_{j=1}^{n} X_j,\ n \geq 1$

$f_{X_1}(x) = 2x \quad , x \in (0,1)$

$$\mathbb{E}\Pi_n \overset{незав.}{=} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}X_j \overset{X_j \overset{d}{=} X_1}{=} (\mathbb{E}X_1)^n$$

$$\mathbb{E}X_1 = \int_0^1 x f_{X_1}(x)dx = \int_0^1 x2x\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\Pi_n = (\mathbb{E}X_1)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\boxed{4}$

$$\Pi_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{п.с} X$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_n^{\frac{1}{n}} = \Pi_\infty^{0} \ ?$$

Задача 6

Нека $(X_i)_{i \geq 1}$ НЕ[illegible]Р случ. величини с крайно средно и дисперсия. Тогава

$(\mu = \mathbb{E}X_1, \quad \sigma^2 = \mathbb{D}X_1)$

$$Z_n := \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} Z, \quad Z \sim N(0,1)$$

където $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$X_1 \sim N(0,4)$, $|X_j|$ грешка от попадението на j-тия

$$\sum_{j=1}^{n} |X_j| \leq V \qquad n = 10000$$

8 задача

Грешка от първи род е да отхвърлим нулевата хипотеза H_0, когато тя е вярна:

$$\alpha = \mathbb{P}(\vec{X} \in W \mid H_0)$$, където W е критичната област за H_0.

Нека фиксираме α. Казваме, че $W^* \in \mathbb{R}^n$ е оптимална критична област, ако

$$\mathbb{P}(\vec{X} \in W^* \mid H_1) = \min_{W \subseteq \mathbb{R}^n} \mathbb{P}(\vec{X} \in W \mid H_1)$$

Задача 9

~~$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $\theta = \beta \in \mathbb{R}$~~

~~Точкова~~

Нека X е сл. вел. с $f_X(x, \theta)$, $\theta = \beta \in \mathbb{R}$

Точкова оценка на θ наричаме $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\vec{X})$, където

$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

Казваме, че $\hat{\theta}$ е състоятелна оценка на $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$

ако

$$\lim_{n \to \infty} \hat{\theta}(\vec{X}) \stackrel{P}{=} \theta_j \quad (\hat{\theta}_j \xrightarrow{P} \theta_j), \quad 1 \le j \le s$$