Упражнение 13 - Теория, задачи, решения

ЕК, МС

19.05.2021

1 Непрекъснати многомерни случайни величини

Нека n е естествено число, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$, и $X_i \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P), \quad i = 1, 2, \ldots, n$ са едномерни случайни величини. В $\mathbb{R}^n$ се въвежда частична наредба $\leq_{\mathbb{R}^n}$ посредством $(x_1, \ldots, x_n) \leq_{\mathbb{R}^n} (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$. Впоследствие релацията $\leq_{\mathbb{R}^n}$ ще записваме чрез $\leq$. Следващата дефиниция обобщава понятието n-мерна дискретна случайна величина.

Дефиниция 1.1. *Изображението $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \omega \longmapsto (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ със свойството: $\{\omega \in \Omega |\ X(w) \leq_{\mathbb{R}^n} x\} \in \mathfrak{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, се нарича n-мерна случайна величина върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Множеството на случайните величини върху разглежданото вероятностно пространство означаваме със $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ или $\mathfrak{S}$.*

Всяка n-мерна дискретна случайна величина е случайна величина по отношение на дефиниция 1.1, понеже при дискретна $X \in \mathfrak{S}$ и за произволно $x \in \mathbb{R}^n$ е в сила $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega |\ X(w) \leq x\} = \cup_{y \in X(\Omega):\ y \leq x} \{X = y\} = \cup_{y \in X(\Omega):\ y \leq x} (\cap_{i=1}^n \{X_i = y_i\})$, което е изброимо обединение на елементи от $\mathfrak{A}$ и следователно принадлежи на $\mathfrak{A}$.

Дефиниция 1.2. *Функция на разпределение за n-мерна $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ наричаме функцията $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto \mathbf{P}(X \leq x)$, която ще означаваме с F_X.*

Функцията на разпределение на всяка случайна величина е монотонно растяща, с гранични стойности $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$, и непрекъсната отдясно. Вярно е и обратното, всяка функция $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ с изброените 3 свойства е функция на разпределение за случайна величина, дефинирана в подходящо вероятностно пространство. На многомерна случайна величина еднозначно се съпоставя функция на разпределение. Обратно, на функция на разпределение (това е функция с изброените 3 свойства) съответства множество от случайни величини, чиито функции на разпределение съвпадат с дадената. Свойствата монотонност, гранично поведение и непрекъснатост отдясно следват по аналогичен на едномерния случай начин.
При фиксирано естествено $k : \ 1 \leq k \leq n$, функцията на разпределение F_{X_k} на X_k се изразява чрез F_X по следния начин: да означим с π_k изображението проектор

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

и да положим $y_k = \pi_k(x)$. При $y_k \longrightarrow +\infty$, тоест при $x_1 \longrightarrow +\infty, \ldots, x_{k-1} \longrightarrow +\infty,\ x_{k+1} \longrightarrow +\infty, \ldots, x_n \longrightarrow +\infty$, поради непрекъснатостта на вероятностната мярка $\mathbf{P}$ получаваме:

$$\lim_{y_k \longrightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{y_k \longrightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

$$= \mathbf{P}(\{X_k \le x_k\} \cap_{1 \le i \le n,\ i \ne k} \{X_i \le \lim_{x_i \to +\infty} x_i\}) = \mathbf{P}(\{X_k \le x_k\} \cap_{1 \le i \le n,\ i \ne k} \Omega)$$
$$= \mathbf{P}(X_k \le x_k) = F_{X_k}(x_k) \Rightarrow F_{X_k}(x_k) = \lim_{\pi_k(x) \longrightarrow +\infty} F_X(x).$$

$$F_{X_k}(x_k) = \lim_{\pi_k(x) \longrightarrow +\infty} F_X(x) \tag{1}$$

Дефиниция 1.3. *Случайните величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ наричаме независими, ако за всеки $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ събитията $\{X_i \le x_i\} \quad i = 1, 2, \dots, n$ са независими.*

Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими, за функцията на разпределение F_X на $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ намираме

$$F_X(x) := F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \le x_i) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

Дефиниция 1.4. *Случайната n-мерна величина $X \in \mathfrak{S}$ се нарича непрекъсната, ако функцията и на разпределение има вида:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n,$$

където $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ е интегруема по Лебег функция, която се нарича плътност на X.

Понеже f_X е интегруема, то съгласно теоремата на Фубини, редът на интегриране в $n-$кратния интеграл задаващ F_X не е от значение. Ако $f_X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, то прилагайки Лайбниц-Нютон, като редът на диференциране не е от значение (понеже съществуват и са непрекъснати $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_{\sigma(1)} \partial x_{\sigma(2)} \dots \partial x_{\sigma(n)}}$, за всяка пермутация $\sigma \in S_n$), получаваме

$$f_X(x) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В общия случай, полагаме $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x), & \text{ако съществува производната в } x \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$

Ако $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими, за функцията на плътност f_X на $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ в точките $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на диференцируемост намираме

$$f_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

Всяка функция $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ със свойствата $f \ge 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ е функция на плътност на непрекъсната случайна величина (а следователно и на *разпределение*), понеже

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n$$

е монотонна, с гранични стойности $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ и непрекъсната отдясно, тоест $F(x)$ е функция на разпределение. Следователно задаването на непрекъснато *разпределение* е еквивалентно на задаване функция на плътност.

Теорема 1.5. *Ако $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е непрекъсната n-мерна случайна величина с функция на плътност f_X, и $A \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо по Лебег множество, то $\mathbf{P}(X = x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ и*

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int \cdots \int_{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in A} f_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_1 du_2 \ldots du_n.$$

Естествена е съпоставката между плътностната функция на непрекъсната $X \in \mathfrak{S}$ и тегловата функция на дискретна $Y \in \mathfrak{S}$ в n-мерния случай. Свойствата $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) dx = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ и $\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y) = 1$ подсказват аналогия, но тя е непълна: плътността може да приема стойности по-големи от 1. При малки $\delta x_i > 0$, вероятността X да принадлежи на паралелепипеда $\Pi(x, \delta x) = [x_1, \ x_1 + \delta x_1] \times \cdots \times [x_n, \ x_n + \delta x_n]$ по теорема 1.5 е

$$\mathbf{P}(x \le X \le x + \delta x) = \int_{\Pi(x, \delta x)} f_X(u) du \approx f_X(x) \delta x = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) \delta x_1 \delta x_2 \ldots \delta x_n.$$

Следователно точната аналогия е между формата $f_X(x)dx = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ (на плътност за X) и тегловата функция $y \longmapsto \mathbf{P}(Y = y)$ на Y.

При фиксирано естествено $k : \ 1 \le k \le n$, функцията на плътност f_{X_k} на X_k се изразява чрез f_X по следния начин (f_X удовлетворява условията на теоремата на Фубини и следователно в разглежданият n-мерен интеграл няма значение редът на интегриране. Съгласно (1) намираме

$$\begin{aligned}
f_{X_k}(x_k) &= \frac{d}{dx_k} F_{X_k}(x_k) = \frac{d}{dx_k} \left[\lim_{\pi_k(x) \to \infty} F_X(x) \right] \\
&= \frac{d}{dx_k} \left[\lim_{\pi_k(x) \to \infty} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, u_2, \ldots, u_n) du_1 du_2 \ldots du_n \right] \\
&= \frac{d}{dx_k} \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty, \ x_k] \times \mathbb{R}^{n-k}} f_X(u) du \\
&= \frac{d}{dx_k} \int_{-\infty}^{x_k} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u) du_1 \ldots du_{k-1} du_{k+1} \ldots du_n \right] du_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u_1, \ldots, u_{k-1}, x_k, u_{k+1}, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_{k-1} du_{k+1} \ldots du_n.
\end{aligned}$$

Ако X и Y са непрекъснати с функции на плътност f_X и f_Y, то за плътността на $Z = X + Y$ намираме:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= f_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} F_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} \int \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \le z} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\
&= \frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y) dy \right] dx = \frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) |J_{\Psi^{-1}}(u, v)| du dv \\
&= \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{z} \left[\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, v - u) du \right] dv = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, z - u) du.
\end{aligned}$$

В пресмятанията приложихме теорема 1.7 като направихме гладка смяна на променливите чрез дифеоморфизмът $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ \ (x, y) \longmapsto (u, v)$, като $u = x, \ v = x + y$. За обратната трансформация Ψ^{-1} намираме $x = u, \ y = v - u$, с якобиан $J_{\Psi^{-1}}(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = 1$. В частност, ако X и Y са независими, то $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ и получаваме:

Теорема 1.6. *Ако X и Y са непрекъснати и независими случайни величини, съответно с плътности f_X и f_Y, то за плътността f_{X+Y} на $X+Y$ е в сила:*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y(z-u)du.$$

Теорема 1.7. *Нека (X,Y) е двумерна непрекъсната случайна величина, с плътност $f_{X,Y}$ и нека $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x,y) > 0\}$. Ако изображението $\Psi : D \longrightarrow \Psi(D) \quad (x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$ е дифеоморфизъм, то случайната величина $(U,V) = (u \circ (X,Y),\ v \circ (X,Y))$ е непрекъсната, с плътност*

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v))|J_{\Psi^{-1}}(u,v)|, & (u,v) \in \Psi(D) \\ 0, & (u,v) \notin \Psi(D) \end{cases}$$

Нека $(X,Y) \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е двумерна непрекъсната случайна величина, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$. Ако $Y = y$, то тази информация може да оказва влияние върху числовите характеристики на X. Това мотивира на X да се съпостави случайна величина, отчитаща настъпилото събитие $\{Y = y\}$: тази величина се означава с $(X \mid Y = y)$ и се задава чрез функция на разпределение $F_{X|Y} : X(\Omega) \longrightarrow [0,1] \quad x \longmapsto \mathbf{P}(X \leq x \mid Y = y)$. Условната вероятност се дефинира чрез:

$$\mathbf{P}(X \leq x \mid Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{P}(X \leq x,\ y \leq Y \leq y+h)}{\mathbf{P}(y \leq Y \leq y+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,v)du\right] dv}{\int_y^{y+h} f_Y(v)dv} = \frac{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,v)du\right] dv}{\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f_Y(v)dv}$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,y)du \Rightarrow F_{X|Y}(x,y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u,y)du.$$

Функцията на плътност $f_{X|Y}$ на $(X \mid Y = y)$ е $f_{X|Y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

Дефиниция 1.8. *Условна функция на плътност за X при условие $Y = y$, наричаме функцията*

$$f_{X|Y} : \mathbb{R} \times S \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \longmapsto \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Теорема 1.9. *Нека $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ е непрекъсната случайна величина с плътност f_X, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ е интегруема по Лебег функция. Тогава $g \circ X$ е едномерна случайна величина със средно $\mathbf{E} g \circ X = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x) dx$.*

Забележка 1.10. *Всяка интегруема функция е абсолютно интегруема. Обратното не е вярно. В частност, от интегруемост на g следва, че е абсолютно интегруема функцията $g f_X$ и следоавателно съществува средното $\mathbf{E} g \circ X$.*

Дефиниция 1.11. *Нека $f_{X|Y}$ е условна функция на плътност за X относно Y, където (X,Y) е непрекъсната случайна величина. При $y \in \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$, за средното на $(X \mid Y = y)$ е в сила*

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x,y)dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x,y)dx.$$

2 Условия на задачите от упражнение 13

Задача 1 Върху страните на квадрат независимо една от друга по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е с дължина a.

Задача 2 Нека случайните величини $X_1,\ X_2 \in \mathrm{Ex}(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = \frac{X_1}{X_1+X_2}$.

Задача 3 Нека случайните величини $X_1,\ X_2 \in \mathrm{U}(0,1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1 + X_2$.

Задача 4 Нека случайните величини $X_1,\ X_2 \in \mathrm{Ex}(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина:
а) $Y = \max(X_1,\ X_2)$;
б) $Y = \min(X_1,\ X_2)$.

Задача 5 Случайна величина $Z = (X,Y)$ има плътност $f(x,y) = \begin{cases} c(1+xy), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
Намерете:
а) константата c;
б) $\mathbf{E}XY,\ \mathbf{D}(X-Y)$.

Задача 6 Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин попада точка P. Правата през P, успоредна на страна на тригълника, пресичат другите му две страни в точките Q и R. Точките S и T лежат върху страна на триъгълника така, че $QRST$ е правоъгълник. Да се намери средната стойност на лицето на $QRST$.

3 Решения на задачите от упражнение 13

Задача 1 Нека $(X,Y) \in [0,a]\times[0,a]$, като $X,Y \in \mathcal{U}(0,a)$ са независими. Тук интерпретираме X като разстоянието от произволно избраната точка върху контура на квадрата до съседният и отляво връх на квадрата, при положителна ориентация на контура (обратна на часовниковата стрелка). Аналогично за Y. Нека Z е случайната величина - квадратът на разстоянието между двете произволно избрани точки върху контура на квадрата. Нека $g_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ са съответно функциите (при $k = 1,2,3,4$): $g_1(x,y) = (x-y)^2,\ g_2(x,y) = (a-x)^2 + y^2,\ g_3(x,y) = a^2 + (a-x-y)^2,\ g_4(x,y) = x^2 + (a-y)^2$. Дефинираните функции изчисляват търсеното квадратично разстояние при възможните разположения на избраните две точки: когато са на една и съща страна ($k = 1$), когато са на съседни страни ($k = 2,4$), на срещуположни страни ($k = 3$). Всяко от тези взаимни разположения се реализира с вероятност $\frac{1}{4}$, а плътността на (X,Y) е $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{a^2}$ при $(x,y) \in [0,a]^2$, и 0 в противен случай. За търсеното средно EZ намираме:

$$EZ = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} Eg_k \circ (X,Y) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} \int\int_{[0,a]^2} g_k(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{6} + \frac{2a^2}{3} + \frac{7a^2}{6} + \frac{2a^2}{3}\right) = \frac{2a^2}{3}.$$

Задача 2 За функцията на разпределение F_{X_1,X_2} на (X_1, X_2) намираме:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \mathbf{P}(X_1 \le x_1,\ X_2 \le x_2) = \mathbf{P}(X_1 \le x_1)\mathbf{P}(X_2 \le x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$
$$= (1 - e^{-\lambda x_1})(1 - e^{-\lambda x_2}),\ \text{ при } (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Следователно $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, & (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$
Изображението $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times (0,1)\ \ (x_1,x_2) \longmapsto (x_1, \frac{x_1}{x_1+x_2})$ е дифеоморфизъм, следователно задава гладка смяна на променливите $(x_1,x_2) \longrightarrow (x,y)$, като $x = x_1,\ y = \frac{x_1}{x_1+x_2}$. За обратната трансформация Ψ^{-1} намираме $x_1 = x,\ x_2 = \frac{x}{y} - x$, с якобиан $J_{\Psi^{-1}}(x,y) = \frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial x_2}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial x_2}{\partial x} = -\frac{x}{y^2}$. От теорема 1.7 при $X = X_1,\ x > 0,\ y \in (0,1)$ получаваме

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X_1,X_2}(x_1(x,y), x_2(x,y))|J_{\Psi^{-1}}(x,y)| = \frac{x}{y^2} f_{X_1,X_2}\left(x,\ \frac{x}{y} - x\right) = \frac{\lambda^2 x}{y^2} e^{-\frac{\lambda x}{y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^2 x}{y^2} e^{-\frac{\lambda x}{y}}\, dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda x}{y} e^{-\frac{\lambda x}{y}}\, d\left(\frac{\lambda x}{y}\right)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^+} t e^{-t} dt = 1.$$

Следователно $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$, тоест $Y \in \mathcal{U}(0,1)$.

Задача 3 Считаме, че X_1 и X_2 са независими. Плътността f_Y на $Y = X_1 + X_2$ по теорема 1.6 получаваме:

$$f_Y(y) = f_{X_1+X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) f_{X_2}(y-u)du = \int_0^y 1du = y,\ \text{при } y \in (0,1)$$

$$f_{X_1+X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) f_{X_2}(y-u)du = \int_{y-1}^1 1du = 2 - y,\ \text{при } y \in [1,2)$$

$$f_{X_1+X_2}(y) = 0,\ \text{при } y \notin (0,2).$$

Следователно $F_{X_1+X_2}(y) = 0$, при $y \le 0$; $F_{X_1+X_2}(y) = \int_0^y u du = \frac{y^2}{2}$, при $y \in (0,1)$;
$F_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^y f_{X_1+X_2}(u)du = \int_0^1 u du + \int_1^y (2-u)du = \frac{-y^2+4y-2}{2}$, при $y \in [1,2)$, тоест

$$F_Y(y) = F_{X_1+X_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{y^2}{2}, & 0 < y < 1 \\ \frac{-y^2+4y-2}{2}, & y \in [1,2) \\ 1, & 2 \le y \end{cases}$$

Задача 4 а) При $y > 0$: $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \le y) = \mathbf{P}(\max\{X_1, X_2\} \le y) = \mathbf{P}(X_1 \le y,\ X_2 \le y) =$

$$\mathbf{P}(X_1 \le y)\mathbf{P}(X_2 \le y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y) = (1 - e^{-\lambda y})^2 \Longrightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda y}(1-e^{-\lambda y}), & 0 < y \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

b) При $y > 0$: $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \le y) = \mathbf{P}(\min\{X_1, X_2\} \le y) = \mathbf{P}(\{X_1 \le y\} \cup \{X_2 \le y\}) =$

$$= 1 - \mathbf{P}(\overline{\{X_1 \le y\} \cup \{X_2 \le y\}}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\{X_1 \le y\}} \cap \overline{\{X_2 \le y\}})$$

$$= 1 - \mathbf{P}(\{X_1 > y\} \cap \{X_2 > y\}) = 1 - \mathbf{P}(X_1 > y)\mathbf{P}(X_2 > y)$$

$$= 1 - (1 - \mathbf{P}(X_1 \le y))(1 - \mathbf{P}(X_2 \le y)) = 1 - (1 - F_{X_1}(y))(1 - F_{X_2}(y))$$

$$= 1 - e^{-2\lambda y} \Rightarrow Y \in Ex(2\lambda) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda y}, & 0 < y \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

Задача 5 а) Нека $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 1\}$. От свойството $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$ намираме:

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \iint_D c(1+xy)dxdy$$

$$= c\int_0^1 \left(\int_x^1 (1+xy)dy\right) dx = c\int_0^1 \left(y + \frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^1 dx$$

$$= c\int_0^1 \left(1 - \frac{x+x^3}{2}\right) dx = \frac{5c}{8} \Rightarrow c = \frac{8}{5}.$$

б) Прилагаме теорема 1.9 към функцията $g(x,y) = xy$ и случайната величина $Z = (X,Y)$:

$$\mathbf{E}XY = \mathbf{E}g \circ (X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

$$= \frac{8}{5}\iint_D xy(1+xy)dxdy = \frac{13}{72}.$$

Аналогично прилагаме теорема 1.9 към функцията $g(x,y) = x - y$ и случайната величина $Z = (X,Y)$:

$$\mathbf{D}(X-Y) = \mathbf{E}(X-Y)^2 - (\mathbf{E}(X-Y))^2$$

$$= \mathbf{E}g^2 \circ (X,Y) - (\mathbf{E}g \circ (X,Y))^2$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g^2(x,y)f(x,y)dxdy - \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy\right)^2$$

$$= \frac{8}{5}\iint_D (x-y)^2(1+xy)dxdy - \frac{64}{25}\left(\iint_D (x-y)(1+xy)dxdy\right)^2 = \ldots$$

Задача 6 Нека Oxy е декартова координатна система в равнината, и б.о.о. върховете на разглежданият $\triangle ABC$ имат координати: $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(c,d)$; $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Координатите на точка P са случайни величини X, Y, като по условие двумерната случайна величина (X,Y) има *равномерно разпределение*. Следователно за плътността $f_{X,Y}$ на (X,Y) е в сила:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in \text{ вътрешността на } \triangle ABC \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

където c е константа, а вътрешността D на $\triangle ABC$ се задава чрез

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{(c-a)y}{d} + a < x < \frac{(c-b)y}{d} + b,\ 0 < y < d \right\}.$$

Нужно е да определим константата c и да изразим лицето на $QRST$ като функция на X и Y. За константата c намираме

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_D cdxdy = c\iint_D 1dxdy$$

$$= c.S_D = c.S_{\triangle ABC} = c\frac{(b-a)d}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{(b-a)d}.$$

За лицето на $QRST$ пресмятаме:

$$S_{QRST} = \frac{S_{QRST}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|QR|.|RS|}{|AB|.|CO|/2} = 2.\frac{|QR|}{|AB|}.\frac{|RS|}{|CO|} = 2.\frac{d-Y}{d}.\frac{Y}{d}$$

$$\Rightarrow S_{QRST} = g(X,Y) = \frac{2(d-Y)Y}{d^2}.$$

За средната стойност на лицето S_{QRST} прилагаме теорема 1.9 към функцията $g(x,y) = \frac{2(d-y)y}{d^2}$ и случайната величина $Z = (X,Y)$:

$$\mathbf{E}S_{QRST} = \mathbf{E}g \circ (X,Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$= \iint_D \frac{2(d-y)y}{d^2}\frac{2}{(b-a)d}dxdy = \frac{4}{(b-a)d}\iint_D \frac{(d-y)y}{d^2}dxdy$$

$$= \frac{4}{(b-a)d}\int_0^d \frac{(d-y)y}{d^2}\left(\int_{\frac{(c-a)y}{d}+a}^{\frac{(c-b)y}{d}+b} 1dx\right)dy$$

$$= \frac{4}{d^4}\int_0^d (d-y)^2 y dy = \frac{1}{3}.$$