Упражнение 5 - Теория, задачи, решения

ЕК, МС

24.03.2021

1 Геометрична вероятност

1.1 Дефиниция

Нека n е естествено число и $\mathbb{R}^n$ е n-мерното евклидово пространство, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е множество от елементарни изходи на даден експеримент, $\mathfrak{A}$ сигма алгебра от подмножества на Ω и нека $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty)$ е сигма адитивна функция. Под сигма адитивност на μ разбираме свойството: $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \ \forall A_k \in \mathfrak{A} : \ A_i A_j = \emptyset$. Ако $\mu(\Omega) < \infty$, то функцията $\mathfrak{A} \longrightarrow [0, 1] \ \ A \longmapsto \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ удовлетворява аксиомите за вероятностна мярка върху $\mathfrak{A}$ и се нарича геометрична вероятност асоциирана с мярката μ, която ще означаваме чрез $\mathbf{P}: \ \ \mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Ако $\mu(\Omega) = \infty$, то конструираме $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ така, че $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ и за всяко n да е в сила $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \ \ \mu(\Omega_n) < \infty$. Нека $A_n = A \cap \Omega_n$ и додефинираме $\mathbf{P}$ чрез равенството:

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(A_n)}{\mu(\Omega_n)}.$$

Забележка 1.1. *В задачите по-долу ще считаме, че μ е Лебегова мярка в $\mathbb{R}^n$.*

Пример 1.2. *Нека $a < b < c < d$ са реални числа. Каква е вероятността случайно избрано реално число в интервала (a, d) да принадлежи на (b, c)?*

Пример 1.3. *Точка попада по случаен начин във вътрешността на $\triangle ABC$. Каква е вероятността точката да се намира във вътрешността на триъгълникът с върхове в средите на страните на $\triangle ABC$?*

Пример 1.4. *Точка попада по случаен начин във вътрешността на тетраедър $ABCD$. Каква е вероятността точката да се намира във вътрешността на тетраедърът с върхове в медицентровете на стените на $ABCD$?*

1.2 Условия на задачите от упражнение 6

Задача 1 Даден е кръг с радиус R. Върху диаметъра по случаен начин е избрана точка А. През точка А е прекарана хорда перпендикулярна на диаметъра. Да се определи вероятността хордата да бъде по-къса от радиуса.

Задача 2 На плоскост са прекарани два типа успоредни ивици, първите са с ширина 1см, а вторите 2см, разстоянието между ивиците е 1см (плоскостта е на райета). Върху плоскостта се хвърля монета с диаметър 2см. Нека A, B са съответно събитията - монетата застъпва първите, вторите ивици. Да се определи вероятността на събитията: A, B, AB, $A \cup B$, $A|B$.

Задача 3 Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан. Всеки един от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент на даден ден (24часа). Каква е вероятността параходите да не се изчакват, ако за разтоварването на първия са необходими 6ч, а за втория 4ч.

Задача 4 Автобусите от линия A се движат на интервали от шест минути, а от линия B на четири минути, независимо от автобусите от линия A. Да се пресметне вероятността:
а) автобус от A да дойде преди автобус от Б;
б) пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути.

Задача 5 Дадена е отсечка с дължина K. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от K. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник?

Задача 6 Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от K да може да се построи триъгълник?

Задача 7 Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснат съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

Задача 8 Каква е вероятността сумата на две случайно избрани положителни числа, всяко от които е по-малко от 1, да бъде по-малка от 1, а произведението им по-малко от 2/9.

Задача 9 По случаен начин и независимо едно от друго се избират две числа a и b в интервала $(0, 1]$. Каква е вероятността на събитията:

а) $ab \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$?

б) $a + b \leq 1$ и $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$?

в) $ab \geq \frac{2}{5}$ и $a^2 + b^2 \leq 1$?

Задача 10 Върху окръжност по случаен начин са избрани 3 точки. Да се определи вероятността, тригълникът с върхове в избраните точки да бъде остроъгълен.

Задача 11 По случаен начин три точки попадат върху три различни страни на квадрат. Каква е вероятността центърът на квадрата, да се съдържа във вътрешността на триъгълникът с върхове в избраните точки?

1.3 Решения на задачите от упражнение 6

Задача 1 Нека B е събитието - при случаен избор на точка A върху фиксиран диаметър PQ на кръга (с център O), хордата перпендикулярна на диаметъра (да я означим с MN) да има дължина по-малка от R. Тогава $\angle MON < \frac{\pi}{3} \iff |AO| > \frac{\sqrt{3}R}{2}$. Следователно $\mathbf{P}(B) = \frac{2(R-\frac{\sqrt{3}R}{2})}{2R} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 2 Нека фиксираме ортогонална координатна система в равнината така, че абсцисата да е успоредна на ивиците и да съвпада с единия край на ивица с дебелина 2см, а другият край на същата ивица да минава през точката с координати (0,2). Нека Ω_N е квадрат с център в началото (0,0) и страни успоредни на координатните оси, с дължини $10N$.Тогава $\Omega = \mathbb{R}^2$ е евклидовата равнина, адитивната мярка е площ и нека A и B са съответно събитията - при хвърляне на монета с диаметър 2см, тя да застъпи ивица с дебелина 1, съответно ивица с дебелина 2. Нека A_N и B_N са съответните събития, но ограничени върху квадрата Ω_N. Нека a_N, b_N са съответно сумата от лицата на тънките ивици, дебелите ивици в квадрата Ω_N. Тогава $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\overline{A_N}) = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{b_N}{\mu(\Omega_N)} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{4N\times 10N}{100N^2} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$. Аналогично $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}(\overline{B_N}) = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{a_N}{\mu(\Omega_N)} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A\cup B) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 1 = \frac{2}{5}$, $\mathbf{P}(A\cup B) = 1$, $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$.

Задача 3 Нека A е събитието - параходите не се изчакват. Нека x и y са съответно часът в който пристига първия, втория параход на фиксиран ден. Тогава

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{x - y \geq 4\} \cup \{y - x \geq 6\} | \{0 \leq x \leq 24\} \cap \{0 \leq y \leq 24\}) = \frac{\frac{20\times 20}{2} + \frac{18\times 18}{2}}{24^2} = \frac{181}{288}.$$

Задача 4 Нека C и D са съответно събитията - автобус от линия А идва преди автобус от линия В, пътник идващ в случаен момент на спирката, чака не повече от 2 минути до идването на автобус от линия А или линия В. Нека x, y са съответно времето в минути от последното идване на автобус от линия А, съответно линия В. Тогава $0 \leq x < 6$, $0 \leq y < 4$ и $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(\{6 - x < 4 - y\} |\ \{0 \leq x < 6\} \cap \{0 \leq y < 4\}\}) = \mathbf{P}(\{x - y > 2\} |\ \{0 \leq x < 6\} \cap \{0 \leq y < 4\}\}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. $\mathbf{P}(D) = 1 - \mathbf{P}(\overline{D}) = 1 - \mathbf{P}(\{x < 4\} \cap \{y < 2\} |\ \{0 \leq x < 6\} \cap \{0 \leq y < 4\}\}) = 1 - \frac{8}{24} = \frac{2}{3}$.

Задача 5 Нека x, y са съответно дължините на другите 2 отсечки. Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{x + y > K\} |\ \{0 < x, y < K\}) = \frac{\mu(\{x+y>K\} \cap \{0<x,y<K\})}{\mu(\{0<x,y<K\})} = \frac{\frac{K^2}{2}}{K^2} = \frac{1}{2}$.

Задача 6 Нека $0 < x, y, z < K$ са дължините на 3-те случайно избрани отсечки. Търсената вероятност е $\mathbf{P}(\{x + y > z\} \cap \{y + z > x\} \cap \{z + x > y\} |\ \{0 < x, y, z < K\}) = \frac{K^3 - 3\times\frac{K^3}{6}}{K^3} = \frac{1}{2}$.

Второ решение: Нека A, H_k, $k = 1, 2, 3$ са съответно събитията: от трите отсечки може да се построи тригълник; максималната по дължина от трите отсечки е x за $k = 1$, y за $k = 2$, z за $k = 3$. Тогава събитията H_k образуват пълна група, $\mathbf{P}(H_k) = \frac{1}{3}$ и съгласно предходната задача $\mathbf{P}(A|H_k) = \frac{1}{2}$. От формулата за пълната вероятност получаваме $\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k) = \frac{1}{2}$.

Задача 7 Нека x и y са съответно началните позиции (дължината от началото до съответната позиция в метри) от които започва записът на съобщенията върху двете страни на лентата.

Понеже лентата е дълга 100м, а записите са по 20м, то $0 \leq x,\ y \leq 80$. Условието е еквивалентно на $[y,\ y+20] \cup [x,\ x+20]$ е интервал, съдържащ интервала $[25, 50]$. Еквивалентно при $x \geq y$ получаваме $y \leq 25,\ x \leq y+20,\ 50 \leq x+20$, откъдето търсената вероятност е $\mathbf{P} = 2\mathbf{P}(\{y \leq 25\} \cap \{x - y \leq 20\} \cap \{30 \leq x\} |\ \{0 \leq x,\ y \leq 80\}) = 2 \times \frac{\frac{15^2}{2}}{80^2} = \frac{9}{256}$.

Задача 8 Нека $x,\ y$ са случайно избраните числа от $[0,1]$. Тогава

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{x+y<1\} \cap \{xy < \frac{2}{9}\} |\ \{0 < x,\ y < 1\}) = \frac{\mu(\{x+y<1\} \cap \{xy < \frac{2}{9}\} \cap \{0 < x,\ y < 1\})}{\mu(\{0 < x,\ y < 1\})}$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (1 - x - \frac{2}{9x}) dx = \frac{1}{2} - (x - \frac{x^2}{2} - \frac{2\ln x}{9})|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{2\ln 2}{9} \approx 0.487$$

Задача 9 а) Нека Oxy е фиксирана координатна система в $\mathbb{R}^2$ и $H_1 :\ xy = \frac{1}{4},\quad H_2 :\ xy = \frac{1}{2}$, $g :\ y = 1$. Нека $D = \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid \frac{1}{4} \leq xy \leq \frac{1}{2}\},\quad K = \{(x,y) \in [0,1]^2\}$. Тогава $H_1 \cap g$ е точка с координати $(\frac{1}{4}, 1)$, аналогично $H_2 \cap g$ е точка с координати $(\frac{1}{2}, 1)$. За търсената вероятност $\mathbf{P}$ получаваме:

$$\mathbf{P} = \frac{\mu(D)}{\mu(K)} = \mu(D) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4x}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4x}\right) dx$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4}\ln x\right) |_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{4}\ln x\right) |_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{4}.$$

Задача 10 Нека Oxy е фиксирана координатна система в равнината, k е единичната окръжност и $\triangle ABC$ е случайният триъгълник вписан в k, като без ограничение $A(1,0)$. Нека $\angle AOB = \phi,\ \angle AOC = \psi$, като без ограничение $\phi \in [0, \pi]$. За пространството от елементарни изходи Ω и за подпространството $S \subset \Omega$, определящо остроъгълен $\triangle ABC$ намираме

$$\Omega = \{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\} = [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

$$S = \{(\phi, \psi) \in \Omega \mid \pi \leq \psi \leq \pi + \phi\}.$$

Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{\mu(S)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi^2/2}{2\pi^2} = \frac{1}{4}$.

2 Дискретни случайни величини и Биномно разпределение

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$, като $\mathfrak{A}$ е σ-алгебра от събития за $\mathcal{E}$.

Дефиниция 2.1. *Изображението $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяващо условията:*
1) образът на X е изброимо подмножество на $\mathbb{R}$, което ще означим с $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$,
2) за всяко $x \in X(\Omega)$, множеството $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ е елемент на $\mathfrak{A}$,
се нарича дискретна случайна величина във $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Нека $p_i = P(X^{-1}(x_i)) = P(X = x_i)$, то $1 = P(\Omega) = P(\cup_i X^{-1}(x_i)) = \sum_i P(X^{-1}(x_i)) = \sum_i p_i$. Задаването на дискретна случайна величина $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ е еквивалентно на задаване на изброима пълна група от събития в $\mathfrak{A}$: това са събитията

$$H_i = X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots$$

Нека $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ е случайна величина. Функцията $X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]\ \ x \longmapsto P(X^{-1}(x))$ се нарича теглова функция на X. На дискретна случайна величина еднозначно се съпоставя теглова функция: тоест неотрицателна функция с дискретна дефиниционна област(дискретно подмножество на $\mathbb{R}$) и сума на функционалните стойности равна на 1. Обратно, на теглова функция (в общия случай) съответства множество от дискретни случайни величини, чиито теглови функции съвпадат с дадената. Множеството от случайни величини със зададена теглова функция се нарича *разпределение*.
Нека n е стествено число, $p \in [0, 1]$.

Дефиниция 2.2. *Ще казваме, че случайната величина X е биномно разпределена с параметри n и p, което ще записваме чрез $X \in Bi(n, p)$, ако $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ и тегловата функция на X има вида $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ за $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Интерпретация на биномно разпределена случайна величина с параметри (n, p), дава биномна схема със същите параметри, като вероятността на събитието - "да настъпят точно k успеха от n опита" е равна на $\mathbf{P}(X = k)$.

2.1 Числови характеристики на случайни величини

- средна стойност
- дисперсия
- моменти от по-висок ред

Дефиниция 2.3. *Нека X е дискретна случайната величина с множество от стойности $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и нека $p_i = P(X = x_i)$. Ако редът $\sum_i p_i x_i$ е абсолютно сходящ, то сумата му се нарича средна стойност на X (или математическо очакване на X) и се означава с*

$$\mathbf{E}X = \sum_i p_i x_i.$$

Забележка 2.4. *Условието за абсолютна сходимост на редът* $\sum_i p_i x_i$ *дефиниращ математическото очакване на случайна величина* X *е напълно естествено. Наистина, ако един ред е условно сходящ (тоест сходящ, но не абсолютно), то по теоремата на Риман следва, че съществува пренареждане на членовете на разглеждания ред така, че всяко отнапред фиксирано реално число да бъде граница на новополучения ред. Ако редът е абсолютно сходящ, то разместването на членовете не променя сумата. Следователно условието за абсолютна сходимост е необходимо и достатъчно, за да осигури независимост на числовата характеристика* $\mathbf{E}X = \sum_i p_i x_i$ *от начина, по който сме подредили събираемите.*

Пример 2.5. *Нека* $X \in Bi(n,p)$. *Да се докаже, че* $\mathbf{E}X = np$ *и* $\mathbf{D}X = npq$, *където* $q = 1 - p$ *и* $\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$.

2.2 Условия на задачите от упражнение 7

Задача 1 Студент чака своя приятелка, която закъснява. За да разнообрази чакането той решава да се поразходи, като хвърля монета и ако се падне герб прави 10 крачки в една посока, а при лице прави 10 крачки в противоположна посока. На новото място повтаря тази операция и т.н. Каква е вероятността след 100 извършени крачки студентът да се намира:
а) на мястото от където е тръгнал; б) на разстояние 20 крачки; в) на разстояние 50 крачки.

Задача 2 Игра се провежда при следните правила. Играчът залага 5лв и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100лв, ако хвърли една шестица печели 5лв. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Задача 3 Два зара се хвърлят последователно пет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които сумата от точките е шест, да бъде точно 2? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 4 Първият играч хвърля 3 монети, а вторият 2. Играта печели този, който хвърли повече гербове и взима всичките 5 монети. В случай на равен брой печели вторият. Каква е вероятността първият играч да спечели? Ако е спечелил първия каква е вероятността втория да е хвърлил точно един герб? Каква е средната печалба на играчите?

Задача 5 Извършва се серия от бернулиеви опити с вероятност за успех при всеки опит равна на p. Да се пресметне вероятността r-тия успех да настъпи точно на $(k+r)$-тия опит.

Задача 6 Пушач носи в джоба си две кутии кибрит. Всеки път когато иска да запали, той избира произволна кутия и вади една клечка. След известно време той забелязва, че едната кутия е празна. Каква е вероятността в този момент в другата да са останали точно k клечки, ако първоначално във всяка кутия е имало n клечки.

Задача 7 Нека преди опита съществуват две равно вероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0: \ p_0 = 1/2$ и $H_1: \ p_1 = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждането на 200 опита са настъпили 120 успеха.