Теория на Вероятностите
Упражнения 1

ЕК, МРС

24.02.2021

1 Комбинаторика

1.1 Крайни множества

За всяко крайно множество A с $|A|$ ще означаваме броя на елементите му. Ако $A_1, \dots, A_n$ са крайни множества то с индукция по n получаваме $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1|.|A_2| \dots |A_n|$.

Теорема 1.1. *Принцип за включване и изключване: Нека n е естествено число и $A_1, A_2, \dots, A_n$ са крайни множества. Тогава е в сила равенството:*

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^n A_i|.$$

Доказателство: Нека a е произволен елемент на $|\cup_{i=1}^n A_i|$, който се среща точно в $k \geq 1$ от множествата $A_1, \dots, A_n$. Твърдението на теоремата е еквивалентно на това да докажем, че $1 = \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \dots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k} \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^k (-1)^{i-1}\binom{k}{i} = 0 \Longleftrightarrow (1-1)^k = 0.$ $\square$

1.2 Пермутации, комбинации и вариации без повторение

Нека n и $k \geq 0$ са естествени числа, а M е множество с n елемента, без ограничение $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Нека A и B са множества, $|B| \leq |A|$ и $\varphi : A \longrightarrow B$ е сюрективно изображение. Тогава φ поражда релация на еквивалентност върху A : два елемента от A са еквивалентни, ако образите им в B чрез φ съвпадат. Следователно A се разбива на класове от еквивалентни елементи, като всеки клас е пълен прообраз на елемент от B. В частния случай когато A и B са крайни множества, ако знаем броя на елементите на B, и броя на елементите на прообраза на всеки елемент от B (т.е. броя на елементите на всеки клас на еквивалентност в A), то можем да намерим броя на елементите на A, тоест $|A| = \sum_{b \in B} |\varphi^{-1}(b)| = \sum_{b \in B} |\{a \in A \mid \varphi(a) = b\}|$.

Дефиниция 1.2. *Пермутация на елементите на M се нарича всяко нареждане на елементите на M в $n-$членна редица. Комбинация от $k-$ти клас на елементите на M е всяко $k-$елементно подмножество на M. Вариация от $k-$ти клас на елементите на M е всяка $k-$членна редица от различни елементи на M.*

Множеството на всички пермутации на $n-$елемента се означава с P_n, а съответно с C_n^k и V_n^k - множествата на всички комбинации и вариации от $k-$клас.
Изображението $P_n \longrightarrow P_{n-1},\ i_1 i_2 \dots i_n \longmapsto\ i'_1 i'_2 \dots i'_{n-1}$ (премахнали сме елемента n) е сюрективно и всеки елемент в P_{n-1} има точно n прообраза. Следователно $|P_n| = n|P_{n-1}| \Longrightarrow |P_n| = n!$.
Изображението $P_n \longrightarrow C_n^k,\ i_1 i_2 \dots i_n \longmapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ е сюрективно и всеки елемент на образа има точно $k!(n-k)!$ прообраза. Следователно $|P_n| = k!(n-k)!|C_n^k| \Longrightarrow |C_n^k| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Изображението $V_n^k \longrightarrow C_n^k,\ i_1 i_2 \dots i_k \longmapsto \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ е сюрективно и всеки елемент на образа има точно $k!$ прообраза. Следователно $|V_n^k| = k!|C_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$.

1.3 Пермутации, комбинации и вариации с повторение

Нека $n, m > 0, k, k_1, \dots, k_n$ са неотрицателни цели числа, като $\sum_{i=1}^n k_i = m$.

Дефиниция 1.3. *Пермутация с повторения на елементите на M, от тип $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ се нарича всяко нареждане на елементите на M в $m-$членна редица, удовлетворяваща условието: елемента 1 се среща k_1-пъти,...,елемента n се среща k_n-пъти. Множеството на тези пермутации се означава с $P(m; k_1, k_2, \ldots, k_n)$*
Комбинация с повторение от $k-$ти клас на елементите на M е всяко $k-$елементно мултиподмножество на M. Множеството на тези комбинации ще означаваме с $C(n; k)$
Вариация с повторения от $k-$ти клас на елементите на M е всяка $k-$членна редица от елементи на M. Множеството на тези вариации ще означаваме с $V(n; k)$

Изображението $C(n; k) \longrightarrow C^k_{n+k-1},\ [i_1, i_2, \ldots, i_k] \longmapsto \{i_1, i_2+1, \ldots, i_k+k-1\},\ i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k$ е биекция. Следователно $|C(n; k)| = |C^k_{n+k-1}| = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.
Изображението $V(n; k) \longrightarrow V(n; 1) \times V(n; 1) \times \ldots \times V(n; 1) = V(n; 1)^{\times k},\ i_1 i_2 \ldots i_k \longmapsto (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ е биекция. Следователно $|V(n; k)| = |V(n; 1)^{\times k}| = |V(n; 1)|^k = n^k$.
Изображението $P(m; k_1, k_2, \ldots, k_n) \longrightarrow C^{k_1}_m$, съпоставящо k_1 позиции на които се намира елемента 1 в пермутацията е сюрективно и всеки елемент на $C^{k_1}_m$ има точно $P(m - k_1; k_2, \ldots, k_n)$ прообраза. Така $|P(m; k_1, k_2, \ldots, k_n)| = |C^{k_1}_m|.|P(m - k_1; k_2, \ldots, k_n)| = \ldots =$
$= |C^{k_1}_m|.|C^{k_2}_{m-k_1}| \ldots |C^{k_n}_{m-k_1-\ldots-k_{n-1}}| = \frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} = \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$. Формулата за пермутациите се извежда директно чрез построяване на биекция

$$P(m; k_1, k_2, \ldots, k_n) \longrightarrow C^{k_1}_m \times C^{k_2}_{m-k_1} \times \cdots \times C^{k_n}_{m-k_1-\cdots-k_{n-1}}.$$

1.4 Комбинаторни задачи

Задача 1 Да се докажат тъждествата, като се построят биекции между подходящи множества:

а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, в) $|V^k_n| = |V^k_{n-1}| + k|V^{k-1}_{n-1}|$, г) $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$,
д) $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leq m < n \\ n! & \text{за } m = n \end{cases}$.

Задача 2 Нека n и r са естествени числа. Да се намери броя на целите неотрицателни решения на уравнението $x_1 + \cdots + x_r = n$.

Задача 3 По колко начина $k-$частици могат да се разпределят в n различими клетки, ако частиците:
а) са различими и всяка клетка може да съдържа не повече от 1 частица
б) са различими и всяка клетка може да съдържа произволен брой частици
в) са неразличими и всяка клетка може да съдържа не повече от 1 частица
г) са неразличими и всяка клетка може да съдържа произволен брой частици.

Задача 4 Нека n и k са естествени числа, $n \geq 2k$. По колко различни начина от $2n$ шахматиста могат да се образуват k-шахматни двойки, за изиграване на k- партии, ако:
а) цветовете на фигурите с които играят шахматистите се взимат в предвид
б) цветовете на фигурите не се взимат в предвид
в) ако $k-$те дъски са номерирани и се взимат в предид при условие а)? А при условие б)?

Задача 5 Нека n и r са естествени числа, и нека $k_1, \ldots, k_r$ са естествени числа със сума равна на n. Да се намери броя на начините по които $n-$елементно множество може да се разбие на $r-$подмножества, имащи съответно $k_1, \ldots, k_r$ на брой елемента, ако:
а) $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$,
б) $k_1, \ldots, k_r$ са произволни.

1.5 Условия на задачите от упражнение 1

Задача 1 Разпределят се k различни частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:
а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;
в) $k \geq n$ и няма празна клетка.

Задача 2 Разпределят се k неразличими частици в n различни клетки. Намерете броя на възможните начини на разпределяне, ако:
а) всяка клетка може да съдържа най-много една частица;
б) клетките могат да съдържат произволен брой частици;
в) $k \geq n$ и няма празна клетка.

Задача 3 Десет души се нареждат в редица. Колко са подрежданията, при които три фиксирани лица се намират едно до друго.

Задача 4 Колко четирицифрени числа могат да се напишат от цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако:
а) цифрите участват по веднъж;
б) допуска се повтаряне на цифри;
в) не се допуска повтаряне и числото е нечетно.

Задача 5 Група от 12 студенти трябва да изпрати делегация от четирима свои представители. По колко начина може да се избере състава, ако:
а) няма ограничения за участие в нея;
б) студентите A и B не трябва да участват заедно;
в) студентите C и D могат да участват само заедно.

Задача 6 Пет различни топки се разпределят в три различни кутии A,B,C. Да се намери броя на всички различни разпределения, при които:
а) кутията A е празна;
б) само кутията A е празна;
в) точно една кутия е празна;
г) поне една кутия е празна;
д) няма празна кутия.

Задача 7 Нека Ω е множеството на всички наредени $n-$торки с повторения на цифрите 1,2 и 3. Да се намери броя на елементите на Ω, които:

а) започват с 1;
б) съдържат точно k пъти цифрата 2;
в) съдържат точно k пъти цифрата 1, при което започват и завършват с 1;
г) са съставени от k_1 единици, k_2 двойки, k_3 тройки.

Задача 8 Всяка стена на всяко едно от сто кубчета е или червена, или синя, или зелена. Нека 80 кубчета имат поне една червена стена, 85 кубчета имат поне една синя, 75 кубчета поне една зелена. Какъв е най-малкият брой кубчета, които имат стени и от трите цвята?

Задача 9 Дадено е множеството $\Omega = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$. Колко са подмножествата на Ω, които съдържат поне един елемент a и поне един елемент b?

1.6 Решения на задачите от упражнение 1

Задача 1 Да номерираме клетките с числата от 1 до n, а частиците с числата от 1 до k. Да означим с $i_1, i_2, \dots, i_k$ номерата на клетките в които попадат съответно 1-та, 2−та,...,k-тата частица. Следователно на всяко разпределение на частиците в клетки, съпоставяме редица $i_1, i_2, \dots, i_k$ от естествени числа между 1 и n. Търсим броя на тези редици.

а) Числата $i_1, i_2, \dots, i_k$ са различни, следователно търсеният брой е $|V_n^k| = \frac{n!}{(n-k)!}$, при $k \le n$, и 0 при $n < k$.

б) Числата $i_1, i_2, \dots, i_k$ могат да съвпадат, следователно търсеният брой е $|V(n;k)| = n^k$.

в) Нека $A_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ е множеството от всички разпределения, при които i-тата клетка е празна. Означаваме с A множеството на всички разпределения, при които поне една клетка е празна. Следователно $A = \cup_{i=1}^n A_i$ и съгласно теорема 1.1 за $|A|$ намираме:

$$|A| = |\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^n A_i|$$

$$= n(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k + \binom{n}{3}(n-3)^k + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^k$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Следователно търсеният брой е $|V(n;k) - A| = |V(n;k)| - |A| = n^k + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k =$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^k.$$

Задача 2 Използваме означенията от задача 1. В случая частиците са неразличими, следователно търсим броя на множествата $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ за а), мултимножествата $[i_1, i_2, \dots, i_k]$ за б).

а) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ са различни, следователно търсеният брой е $|C_n^k|$.

б) Числата $i_1, i_2, \ldots, i_k$ могат да съвпадат, следователно търсеният брой е $|C(n;k)|$.

в) Нека $U_{n,k}$ и $\widetilde{U}_{n,k}$ са съответно множествата от всички разпределения на k неразличими частици в n различни клетки без ограничения; и аналогично разпределенията без празна клетка:

$$U_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\},$$

$$\widetilde{U}_{n,k} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = k \right\}.$$

В подточка б) построихме биекцията

$$U_{n,k} \longrightarrow C(n;k) \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto [\, \underbrace{1, \ldots, 1}_{x_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{x_2}, \ldots, \underbrace{n \ldots, n}_{x_n} \,],$$

където елементът $i,\ 1 \leq i \leq n$ участва точно $x_i \geq 0$ пъти, и указва, че в клетка i има точно x_i на брой частици. Аналогично, изображението

$$\widetilde{U}_{n,k} \longrightarrow U_{n,k-n} \quad (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1)$$

е биекция, следователно $|\widetilde{U}_{n,k}| = |U_{n,k-n}| = |C(n;k-n)| = \binom{k-1}{n-1}$.

Задача 3 Нека a, b, c са трите лица, които стоят едно до друго. Броят на начините по които те са съседи по наредба е $3! = 6$. Търсеният брой е $3!8!$, понеже $8!$ са наредбите на остналите 7 лица и "блокът" abc, и на всяка от тях съответстват $3!$ наредби удовлетворяващи условието за съседство.

Задача 4 Търсеният брой е съответно равен на:

а) $|V_5^4| = 5!$

b) $|V(5;4)| = 5^4$

c) $3 \times |V_4^3| = 72$.

Задача 5 Търсеният брой е съответно равен на:

а) $|C_{12}^4| = \binom{12}{4}$

b) $|C_{10}^4| + 2|C_{10}^3|$

c) $|C_{10}^4| + |C_{10}^2|$.

Задача 6 Търсеният брой е съответно равен на:

a) $|V(2;5)| = 32$

b) $|V(2;5)| - 2 = 30$

c) $3 \times [|V(2;5)| - 2] = 90$

d) $3 \times [|V(2;5)| - 2] + \binom{3}{2} = 93$

e) $|V(3;5)| - \left(3 \times [|V(2;5)| - 2] + \binom{3}{2}\right) = 150.$

Задача 7 Търсеният брой е съответно равен на:

a) $|V(3;n-1)| = 3^{n-1}$

b) $\binom{n}{k}|V(2;n-k)| = 2^{n-k}\binom{n}{k}$

c) $\binom{n-2}{k-2}|V(2;n-k)| = 2^{n-k}\binom{n-2}{k-2}$

d) $|P(n;k_1,k_2,k_3)| = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$

Задача 8 Да означим с R, B, G множествата на кубчетата, които имат съответно поне една червена, синя, зелена страна. По условие $|R| = 80,\ |B| = 85,\ |G| = 75$, следователно $|R \cap B| \geq 65,\ |B \cap G| \geq 60,\ |G \cap R| \geq 55$. Търсим минимума на $|R \cap B \cap G|$, прилагаме теорема 1.1:

$$|R \cup B \cup G| = |R| + |B| + |G| - |R \cap B| - |B \cap G| - |G \cap R| + |R \cap B \cap G|$$

$$\Rightarrow 100 = 80 + 85 + 75 - |R \cap B| - |B \cap G| - |G \cap R| + |R \cap B \cap G|$$

$$\Rightarrow |R \cap B \cap G| = |R \cap B| + |B \cap G| + |G \cap R| - 140 \geq 40.$$

Равенство се достига при $|R \cap B| = 65,\ |B \cap G| = 60,\ |G \cap R| = 55$.

Задача 9 Нека $A = \{a_1, \ldots, a_n\},\ B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ и да означим с $\mathfrak{R}^*(\Omega),\ \mathfrak{R}(A)$ съответно множеството от подмножества на Ω със свойството от условието, множеството от подмножества на A. Полагаме $\mathfrak{R}'(A) = \mathfrak{R}(A) - \emptyset$ и $\mathfrak{R}'(B) = \mathfrak{R}(B) - \emptyset$. Тогава $\Omega = A \cup B$ и нека π_A и π_B са съответно изображенията проекции $\mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(A)$ и $\mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(B)$. Изображението $\pi = \pi_A \times \pi_B : \mathfrak{R}^*(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{R}'(A) \times \mathfrak{R}'(B)$ е биекция, следователно $|\mathfrak{R}^*(\Omega)| = |\mathfrak{R}'(A) \times \mathfrak{R}'(B)| = |\mathfrak{R}'(A)|.|\mathfrak{R}'(B)| = (2^n - 1)(2^k - 1)$.
Второ решение: Броят на подмножествата на Ω, които нямат желаното свойство са три вида: подмножества съдържащи поне един елемент на A и нито един от B, подмножества съдържащи поне един елемент на B и нито един от A, и множеството $\emptyset$. Броят на тези подмножества е съответно равен на $2^n - 1,\ 2^k - 1,\ 1$. Броят на подмножествата на Ω е съответно равен на $|\mathfrak{R}(\Omega)| = 2^{n+k}$. Следователно $|\mathfrak{R}^*(\Omega)| = 2^{n+k} - (2^n - 1) - (2^k - 1) - 1 = (2^n - 1)(2^k - 1)$.