Домашна работа №1
по „Статистика и емпирични методи“

Факултет по математика и информатика
специалност „Софтуерно инженерство“

Име и фамилия	Факултетен номер	Група
Павел Сарлов	62393	5

СЪДЪРЖАНИЕ

Задача 1. От 10 стандартни тестета от 52 карти се тегли по една карта. Намерете вероятността в получената ръка от 10 карти

a) да няма повтарящи се;
b) има поне три аса;
c) да има четири спатии, три кари, две купи и една пика;
d) броят на черните карти да е с точно 4 повече от броя на червените, ако е известно, че черните карти са повече от червените

Решение:

a) Интуитивно си фиксираме първата и за останалите 9 имаме $\frac{51}{52} * \frac{50}{52} * \dots * \frac{43}{52}$ или трябва да си изберем 10 от 52, да ги пермутираме и да разделим на всички възможни, т.е.:

$$\mathbb{P}(\text{да няма повтарящи се}) = \frac{\binom{52}{10} 10!}{52^{10}} \sim 0.4$$

b) $\mathbb{P}(\text{има поне три аса}) = \mathbb{P}(\text{има } \mathbf{3} \text{ аса}) + \mathbb{P}(\text{има } \mathbf{4} \text{ аса}) + \cdots + \mathbb{P}(\text{има } \mathbf{10} \text{ аса}) =$

$$= \sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{4}{52}\right)^k \left(\frac{48}{52}\right)^{10-k}$$

т.е. имаме биномно разпределение $X \sim Bi(n, p)$, където $X = \{\text{брой аса}\}, p = \frac{4}{52}$.

c) $\mathbb{P}(\text{четири спатии, три кари, две купи, една пика}) =$

$$= \frac{\binom{10}{4}\left(\frac{13}{52}\right)^4 \cdot \binom{6}{3}\left(\frac{13}{52}\right)^3 \cdot \binom{3}{2}\left(\frac{13}{52}\right)^2 \cdot \binom{1}{1}\left(\frac{13}{52}\right)^1}{52^{10}}$$

т.е за 4-те спатии имаме 10 позиции, за 3-те кари ни остават 6, за 2-те купи – 3, за пиката – 1, като за всяка имаме вероятност $\frac{13}{52}$, цялото това го делим на всички възможни.

d) Единственият случай, в който имаме точно 4 повече черни, е когато черните са 7, а червените са 3. Знаем, че черните са повече, т.е. $A = \{\text{черните са повече}\}$. Нека $X = \{\text{брой изтеглени черни}\}$. Имаме $X \sim Bi(n, p)$, където $p = \frac{1}{2}$, тъй като броят на черните и червените е равен. Тогава:

$$\mathbb{P}(X = 7|A) = \frac{\mathbb{P}(A|X = 7)\mathbb{P}(X = 7)}{\sum_{k=6}^{10} \mathbb{P}(A|X = k)\mathbb{P}(X = k)}$$

$$= \frac{1. \binom{10}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\sum_{k=6}^{10} 1. \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}}$$

$$= \frac{\binom{10}{7}}{\sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k}}$$

Задача 2. Всички изделия в дадена партида са изправни, а в друга, 1/4 от изделията са за брак. Изделие, взето от случайно избрана партида, се оказва изправно. Да се пресметне вероятността второ случайно избрано изделие от същата партида да се окаже за брак, ако след проверката на първото изделие, то е било върнато обратно в своята партида.

Решение:

Имаме

$A_1 = \{\text{първото е изправно и от първата партида}\} \rightarrow \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$

$A_2 = \{\text{първото е изправно и от втората партида}\} \rightarrow \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

$A_3 = \{\text{първото е за брак и от втората партида}\} \rightarrow \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$B = \{\text{второто е за брак}\}$

Тъй като знаем, че първото е изправно, пропускаме A_3. Тогава:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) = 0.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}.\frac{3}{8} = \frac{3}{32}$$

Задача 3. Дете има в левия си джоб четири монети от 1 лв. и три монети от 2 лв., а в десния си джоб две монети от 1 лв. и една монета от 2 лв. Детето прехвърля две монети от левия си в десния си джоб, след това връща обратно две монети от десния в левия. Накрая, детето вади монета от десния си джоб. Каква е вероятността тя да е от 1 лв.?

Решение:

Нека:

$A = \{\text{изтеглило е 1 лв. от десния си джоб}\}$

$B_i = \{\text{прехвърлило е } i \text{ монети от по 1 лв. (и } 2 - i \text{ от по 2 лв.) в десния джоб}\}, i = \overline{0,2}$

$C_i = \{\text{прехвърлило е } i \text{ монети от по 1 лв. (и } 2 - i \text{ от по 2 лв.) в левия джоб}\}, i = \overline{0,2}$

Тогава имаме, че:

$$\mathbb{P}(B_0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7}$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4}{7}$$

След което трябва да прилагаме формулата за пълната вероятност:

$$\mathbb{P}(C_0) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(C_0|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{7}.\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{2}{7}.\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{4}{7}.\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{7}.\frac{3}{10} + \frac{2}{7}.\frac{3}{5} + \frac{4}{7}.\frac{1}{10} = \frac{19}{70}$$

$$\mathbb{P}(C_1) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(C_1|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{7}.\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{2}{7}.\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} + \frac{4}{7}.\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{7}.\frac{1}{10} + \frac{2}{7}.\frac{3}{5} + \frac{4}{7}.\frac{3}{10} = \frac{25}{70}$$

$$\mathbb{P}(C_2) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(C_2|B_i)\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{7}.\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{2}{7}.\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{4}{7}.\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{7}.\frac{3}{5} + \frac{2}{7}.\frac{2}{5} + \frac{4}{7}.\frac{3}{5} = \frac{26}{70}$$

Накрая от верижното правило получаваме:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}\left(AB_jC_i\right) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}\left(A\middle|B_jC_i\right)\mathbb{P}\left(C_i\middle|B_j\right)\mathbb{P}\left(B_j\right)$$

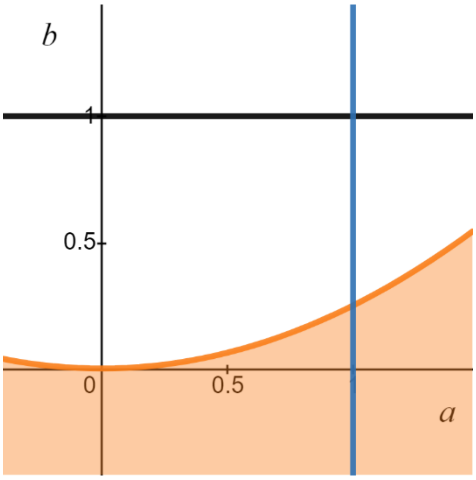
$$= \frac{2}{3}.\frac{3}{70} + \frac{2}{3}.\frac{12}{70} + 1.\frac{4}{70} + 0.\frac{1}{70} + 0.\frac{12}{70} + \frac{1}{3}.\frac{12}{70} + \frac{1}{3}.\frac{6}{70} + 1.\frac{8}{70} + \frac{2}{3}.\frac{24}{70}$$

$$= \frac{2}{70} + \frac{8}{70} + \frac{4}{70} + \frac{4}{70} + \frac{2}{70} + \frac{8}{70} + \frac{16}{70}$$

$$= \frac{22}{35}$$

Задача 4. Каква е вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0, a, b \in [0, 1]$ да бъдат реални числа?

Решение:



За да имаме реални корени, трябва:

$$D \geq 0 \Rightarrow a^2 - 4b \geq 0, a, b \in [0,1]$$

т.е. намираме лицето на оцветената част в квадрата:

$$\mathbb{P}\left(x_{1,2} \text{ да са реални}\right) = \int_0^1 \frac{a^2}{4} da = \frac{1}{12}$$

Задача 5. Два различими зара се хвърлят един след друг последователно десет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които на първия зар се падат повече точки, отколкото на втория да бъде:

a) точно 4;

b) не повече от 5?

Решение:

Нека $A = \{\text{на първия се пада повече отколкото на втория}\}$, тогава:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{6} * \frac{i}{6} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Имаме биномно разпр. $X \sim Bi(n, p), X = \{\text{брой пъти } A\}, p = \mathbb{P}(A)$

a) Искаме точно 4 пъти това да се е случило, т.е.:

$$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{10}{4}\left(\frac{5}{12}\right)^4\left(\frac{7}{12}\right)^6$$

b) За да се е случило не повече от 5 пъти трябва да се е случило 1 или 2 или ... или 5 пъти, т.е.:

$$\mathbb{P}(X \leq 5) = \sum_{k=1}^{5} \binom{10}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^k \left(\frac{7}{12}\right)^{10-k}$$

Задача 6. Изразете чрез сума вероятността от 100 хвърляния на два зара да има поне поне 80 опита, при които сумата им е била над 10. Направете приближения на тази вероятност чрез Поасоново и чрез нормално разпределение. Използвайте компютър, за да сравните получените стойности.

Решение:

Нека $\mathbb{P}(\text{сумата е над } 10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $X = \{\text{брой суми над } 10\}, X \sim Bi(100, \frac{1}{12})$. Тогава

$$\mathbb{P}(X \geq 80) = \sum_{k=80}^{100} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=80}^{100} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{12}\right)^k \left(\frac{11}{12}\right)^{100-k} \sim 4.453751e - 67$$

За приближение с Поасоново фиксираме $\lambda = np = \frac{100}{12}$. Тогава

$$\mathbb{P}(X \geq 80) = \sum_{k=80}^{100} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=80}^{100} \frac{\left(\frac{100}{12}\right)^k e^{-\frac{100}{12}}}{k!} \sim 1.732736e - 49$$

За приближение с нормално разпределение имаме:

$$\frac{Bin(n,p) - np}{\sqrt{n}.\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1) \Rightarrow \text{за } n > 30: Bin(n,p) \sim \sqrt{np(1-p)}\big(N(0,1)\big) + np$$

което е всъщност $N\big(np, np(1-p)\big) = N(\frac{100}{12}, \frac{1100}{12^2})$

$$\mathbb{P}(X \geq 80) = \sum_{k=80}^{100} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{1100}{12}}} e^{-\frac{\left(k - \frac{100}{12}\right)^2}{\frac{2.1100}{12^2}}} \sim 1.59005e - 147$$

Задача 7. По две от страните на правилен зар са оцветени в съответно бяло, зелено и червено. Хвърляме този зар два пъти. Нека X е броят на падналите се бели, а Y - на падналите се червени страни. Да се намерят съвместното разпределение на X и Y, независими ли са, ковариацията им, $\mathbb{P}(X = 1|Y = 1)$ и $\mathbb{P}(X > Y)$.

Решение:

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{1}{9}$	$2.\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{2}{9}$	$\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{1}{9}$
1	$2.\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{2}{9}$	$2.\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{2}{9}$	0
2	$\frac{2}{6}.\frac{2}{6} = \frac{1}{9}$	0	0

Не са независими, тъй като $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) \neq \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{9}.\frac{1}{9}$.

$$
\begin{aligned}
cov(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}X)(Y-\mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \\
&= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} x_i y_j p(x_i, y_j) - \left(\frac{4}{9}\right)^2 \\
&= \frac{2}{9} - \frac{16}{81} = \frac{2}{81}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{P}(X=1|Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\frac{2}{9}}{2.\frac{2}{6}.\frac{4}{6}} = \frac{1}{2}
$$

$$
\mathbb{P}(X>Y) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=0) + \mathbb{P}(X=2, Y=1) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + 0 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
$$

Задача 8. Нека сл. вел. X приема стойности в $\mathbb{N}_0$ и

$$
g_X(s) := \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k)
$$

е пораждащата ѝ функция.

a) Нека $Y := 3X$ и $Z = X_1 + X_2$, където $X_1, X_2 \sim X$ са независими. Изразете чрез g_X пораждащите фунцкии g_Y и g_Z.

b) Нека $X \sim Ge(p)$, т.е. $\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^k$ за $k \in \mathbb{N}_0$. Пресметнете g_X и чрез нейна помощ намерете $\mathbb{E}X$ и DX.

Решение:

a)

$$
g_Y(s) = g_{3X}(s) = \mathbb{E}s^{3X} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{3k}\mathbb{P}(X=3k)\ ?
$$

$$
\begin{aligned}
g_Z(s) &= g_{X_1+X_2}(s) = \mathbb{E}s^{X_1+X_2} = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} s^{i+j}\mathbb{P}(X_1 = i \cap X_2 = j) = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(X_1 = i) \sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(X_2 = j) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k)\right)^2
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
g_X(s) &= \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^k p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}\big(s(1-p)\big)^k \\
&= \frac{p}{1-s(1-p)}
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}X = g_X'(1) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{p}{1-s(1-p)}\Big|_1 = \frac{p(1-p)}{\big(1-s(1-p)\big)^2}\Big|_1 = \frac{1-p}{p}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}X &= g_X''(1) + g_X'(1) - \big(g_X'(1)\big)^2 = \\ &= \frac{p(1-p).2\big(1-s(1-p)\big)(1-p)}{\big(1-s(1-p)\big)^4}\Big|_1 + \frac{1-p}{p} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = \\ &= \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{(1-p)^2 + p(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

Задача 9. Нека X и Y са независими сл. вел. и

$$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Y=1) = 2\mathbb{P}(Y=3) = 2\mathbb{P}(Y=5) = \frac{1}{2}$$

Нека $Z_1 \coloneqq 2X + Y + 1, Z_2 \coloneqq XY$ и $Z_3 = X^Y$. Намерете очакванията и дисперсиите им.

Решение:

X	-1	1
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	1	3	5
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbb{E}X = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0;$ $\qquad \mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1 - 0 = 1$

$\mathbb{E}Y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2};$ $\qquad \mathbb{D}Y = \frac{36}{4} - \frac{25}{4} = \frac{11}{4}$

$$\mathbb{E}Z_1 = 2\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y + 1 = 2.0 + \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{D}Z_1 = 4\mathbb{D}X + \mathbb{D}Y + 1 = 4 + \frac{11}{4} + 1 = \frac{33}{4}$$

$$\mathbb{E}Z_2 = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}Z_2 &= \mathbb{D}(XY) = \mathbb{E}(XY)^2 - (\mathbb{E}(XY)\,)^2 \\ &= \mathbb{E}X^2\mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}X)^2(\mathbb{E}Y)^2 \\ &= 1.\frac{36}{4} - 0.\frac{25}{4} = \frac{36}{4} = 9\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}Z_3 = \mathbb{E}X^Y = \mathbb{E}X^1 + \mathbb{E}X^3 + \mathbb{E}X^5 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{D}Z_3 &= \mathbb{D}X^Y = \mathbb{E}X^{2Y} - (\mathbb{E}X^Y)^2 \\ &= \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}X^6 + \mathbb{E}X^{10} \\ &= 1 + 1 + 1 = 3\end{aligned}$$