Упражнение 10 - Теория, задачи, решения

ЕК, МС

28.04.2021

1 Непрекъснати едномерни случайни величини

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$. Следващата дефиниция обобщава понятието дискретна случайна величина.

Дефиниция 1.1. *Функция $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ със свойството: $\{\omega \in \Omega |\ X(w) \leq x\} \in \mathfrak{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, се нарича (едномерна) случайна величина върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Множеството на случайните величини върху разглежданото вероятностно пространство означаваме с $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ или $\mathfrak{S}$.*

Всяка дискретна случайна величина е случайна величина по отношение на дефиниция 1.1, понеже при дискретна $X \in \mathfrak{S}$ е в сила $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega |\ X(w) \leq x\} = \cup_{y \in X(\Omega):\ y \leq x}\{X = y\}$, което е изброимо обединение на елементи от $\mathfrak{A}$ и следователно принадлежи на $\mathfrak{A}$.

Дефиниция 1.2. *Функция на разпределение за $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ наричаме функцията $\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto \mathbf{P}(X \leq x)$, която ще означаваме с F_X.*

Функцията на разпределение на всяка случайна величина е монотонно растяща, с гранични стойности $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, и непрекъсната отдясно. Вярно е и обратното, всяка функция $\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ с изброените 3 свойства е функция на разпределение за случайна величина, дефинирана в подходящо вероятностно пространство.
Свойствата монотонност, гранично поведение и непрекъснатост отдясно следват от:

$$x \leq y \Rightarrow F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) \leq \mathbf{P}(X \leq x) + \mathbf{P}(x < X \leq y) = \mathbf{P}(\{X \leq x\} \cup \{x < X \leq y\}) = F_X(y),$$

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X \leq \lim_{x\to-\infty} x) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq \lim_{x\to+\infty} x) = \mathbf{P}(\Omega) = 1,$$

$$\lim_{x\downarrow x_0} F_X(x) = \lim_{x\downarrow x_0} \mathbf{P}(X \leq x) = \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{P}(X \leq x_0 + h) = \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{P}(\{X \leq x_0\} \cup \{x_0 < X \leq x_0 + h\})$$
$$= \lim_{h\downarrow 0} [\mathbf{P}(X \leq x_0) + \mathbf{P}(x_0 < X \leq x_0 + h)] = \mathbf{P}(X \leq x_0) + \lim_{h\downarrow 0} \mathbf{P}(x_0 < X \leq x_0 + h) = F_X(x_0).$$

От дефиниция 1.1 следва, че вероятността X да принадлежи на интервала $(-\infty, x]$ е равна на $F_X(x)$. Аналогично, вероятността X да принадлежи на крайния интервал $(a, b]$ се изразява чрез F_X: от $\mathbf{P}(X \leq b) = \mathbf{P}(\{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}) = \mathbf{P}(\{X \leq a\}) + \mathbf{P}(\{a < X \leq b\})$, получаваме $\mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(X \leq b) - \mathbf{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$.

Дефиниция 1.3. *Случайната величина $X \in \mathfrak{S}$ се нарича (абсолютно) непрекъсната, ако функцията и на разпределение има вида:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du,$$

където f_X е неотрицателна функция. Ако X е непрекъсната, то f_X се нарича плътностна функция на X.

Ако f_X е непрекъсната в $\mathbb{R}$ функция, то по Лайбниц-Нютон получаваме $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$.
В общия случай, полагаме $f_X(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx}F_X(x), & \text{ако съществува производната в } x \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$
За непрекъсната X получаваме

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(u)du - \int_{-\infty}^{a} f_X(u)du = \int_{a}^{b} f_X(u)du.$$

Теорема 1.4. *Ако $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е непрекъсната случайна величина с плътностна функция f_X, то*

$$\mathbf{P}(X = x) = 0 \quad и \quad \mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(u)du.$$

Естествена е съпоставката между плътностната функция на непрекъсната $X \in \mathfrak{S}$ и тегловата функция на дискретна $Y \in \mathfrak{S}$. Свойствата $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ и $\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y) = 1$ подсказват аналогия, но тя не е пълна: плътността може да приема стойности по-големи от 1. При малки $h > 0$, вероятността X да принадлежи на интервала $[x, x+h]$ по теорема 1.4 е

$$\mathbf{P}(x \leq X \leq x+h) = \int_{x}^{x+h} f_X(u)du = f_X(\xi)h \approx f_X(x)h, \quad \xi \in (x, x+h).$$

Следователно естествената аналогия е между формата $f_X(x)dx$ (на плътност за X) и тегловата функция $y \longmapsto \mathbf{P}(Y = y)$ на Y.
Всяка функция $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ със свойствата $f \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ е функция на плътност за подходяща непрекъсната случайна величина, понеже $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ е монотонна, с гранични стойности $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ и непрекъсната отдясно, тоест $F(x)$ е функция на разпределение. Следователно задаването на непрекъсната случайна величина е еквивалентно на задаване функция на плътност.
В някои частни случаи на функционална зависимост между две непрекъснати случайни величини, можем в явен вид да опишем връзката между плътностните им функции.

Теорема 1.5. *Нека $X \in \mathfrak{S}$ е непрекъсната случайна величина с плътност f_X и $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема и строго монотонна функция, то $Y = g \circ X$ има плътност*

$$f_Y(y) = \pm f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy}(g^{-1}(y)),$$

като знакът е $+$, ако g е растяща. Тук с g^{-1} е означена обратната функция на g.

Доказателство: $\square$

Дефиниция 1.6. *Средната стойност и вариацията на непрекъснатата* $X \in \mathfrak{S}$ *се задават чрез равенствата:*

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx, \quad \mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx\right)^2 \qquad (1)$$

Дефиниция 1.7. *Казваме, че* $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ *е равномерно разпределена случайна величина в интервала* (a, b)*, което ще записваме чрез* $X \in \mathcal{U}(a, b)$*, ако функцията на плътност* f_X *на* X *има вида* $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$

Интерпретация на равномерно разпределена случайна величина $X \in \mathcal{U}(a, b)$ е следната: вероятността X да принадлежи на произволен интервал с фиксирана дължина (например l), съдържащ се в носителя $[a, b]$, е постоянна, равна на $\mathbf{P}(c \leq X \leq c + l) = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a}dx = \frac{l}{b-a}$.

Дефиниция 1.8. *Казваме, че* $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ *е експоненциално разпределена случайна величина с параметър* $\lambda > 0$*, което ще записваме чрез* $X \in Ex(\lambda)$*, ако функцията на плътност* f_X *на* X *има вида* $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Пример 1.9. *Ако* $X \in Ex(\lambda)$*, то за средната стойност на* X *съгласно (1.6) намираме:*

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx = -\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d(-\lambda x)$$

$$= -\int_0^{+\infty} x de^{-\lambda x} = -xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} de^{-\lambda x}$$

$$= -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1}.$$

На всяко събитие $A \in \mathfrak{A}$ се съпоставя характеристичната му функция I_A, чрез изображението $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{S}$ $A \longmapsto I_A$, като $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$. Следователно I_A е дискретна случайна величина със средно $\mathbf{E}I_A = 0P(I_A = 0) + 1P(I_A = 1) = P(A)$. В частност, ако $X \in \mathfrak{S}$ и $A = \{X < a\}$, то $I_A = I_{\{X<a\}}$ е композиция на функцията $g : X(\Omega) \longrightarrow \{0, 1\}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ 0, & x \geq a \end{cases}$ и X, тоест $I_{\{X<a\}} = g \circ X$.

1.1 Условия на задачите от упражнения 12 и 13

Задача 1 Дадена е случайна величина X с плътност $f_X(x) = \begin{cases} c(x^2 + 2x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$

Намерете:
а) константата c;
б) $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$;
в) вероятността X да е по-малка от математическото си очакване;

г) очакването на случайната величина $X^2 + 3X$.

Задача 2 Върху окръжност $k(O, r)$ е фиксирана точка A, точка B попада по случаен начин върху окръжността. Да се намери математическото очакване на лицето на $\triangle AOB$.

Задача 3 Нека $X \in \mathrm{U}(0, 7)$ е времето на безотказна работа в години на даден апарат. Съгласно гаранцията на апарата, той ще бъде заменен с нов на петата година, или преди това в случай на дефект. Нека Y е времето до смяната на апарата. Да се определи $P(Y < 4)$, EY и DY. Ако са продадени 1000 апарата, колко ще трябва да се подменят преди петата година?

Задача 4 Във вътрешността на кръг с радиус R случайно се избират точките A и B. Да се намери вероятността окръжността с център A и радиус AB да лежи във вътрешността на кръга.

Задача 5 В магазин работят две касиерки. Предполагаме, че времето необходимо за обслужване на клиент на всяка от двете опашки е екпоненциално разпределена случайна величина с математческо очакване 8мин за първата опашка и 5мин за втората. Клиент, избрал по случаен начин опашка, е чакал по-малко от 4 минути. Каква е вероятността той да е бил на първата опашка?

Задача 6 Времето за преглед на пациент е експоненциално разпределена случайна величина с очакване 30мин. За преглед има записани двама пациента, първия в 11.00, а втория в 11.30 и двамата пристигат в точно определения час. Ако прегледа на първия не е завършил, вторият ще изчака. Да се пресметне средно колко време ще прекара вторият пациент в поликлиниката.

Задача 7 Нека случайната величина $X \in \mathrm{Ex}(\lambda)$. Да се намерят плътностите на следните случайни величини:
а) $Y = -X$;
б) $Y = 2X - 1$;
в) $Y = \sqrt{X}$;
г) $Y = X^a,\ a > 0$.

Задача 8 Дадена е окръжност $k(A, a)$, като $A(0, a)$. Точка B е равномерно разпределена върху частта от окръжността, разположена в първи квадрант. Нека $C(X, 0)$ е пресечната точка на правата AB с абцисната ос. Да се намери плътността на X.

1.2 Решения на задачите от упражнения 12 и 13

Задача 1 Нека $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ е функцията на разпределение на X.

а) Тогава $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$ и $1 = \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = \int_0^1 c(u^2 + 2u)du = c(\frac{u^3}{3} + u^2)|_0^1 = \frac{4c}{3}$. Следователно $c = \frac{3}{4}$.

b) $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u)du = \frac{3}{4}\int_0^1 u(u^2 + 2u)du = \frac{3}{4}(\frac{u^4}{4} + \frac{2u^3}{3})|_0^1 = \frac{11}{16}$. Дисперсията е $\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f_X(u)du - (\int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u)du)^2 = \frac{3}{4}\int_0^1 u^2(u^2 + 2u)du - (\frac{11}{16})^2 = \frac{21}{40} - (\frac{11}{16})^2 \approx 0.052$

c) $\mathbf{P}(X < EX) = \mathbf{P}(X < \frac{11}{16}) = F_X(\frac{11}{16}) = \int_{-\infty}^{\frac{11}{16}} f_X(u)du = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{11}{16}}(u^2+2u)du = \frac{3}{4}(\frac{u^3}{3}+u^2)|_0^{\frac{11}{16}} \approx 0.435$

d) $E(X^2+3X) = EX^2 + 3EX = \frac{21}{40} + \frac{33}{16} = \frac{207}{80} \approx 2.5875$

Задача 2 Без ограничение, нека в равнината е фиксирана правоъгълна координатна система, като центърът на разглежданата окръжност k е в началото $O(0,0)$ и точка A е с координати $(r,0)$. Нека полярните координати (ρ,ϕ) са $A(r,0)$ и $B(r,\phi)$. Понеже точка B е избрана по-произволен начин, можем да считаме, че ъгълът ϕ е равномерно разпределена случайна величина: $\phi \in \mathcal{U}(0,2\pi)$. Следователно функциите на разпределение и плътност на ϕ имат съответно вида:

$$F_\phi(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi < 0 \\ \frac{\phi}{2\pi}, & \phi \in [0,2\pi] \\ 1, & \phi > 2\pi \end{cases} \qquad f_\phi(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \in (-\infty,0)\cup(2\pi,\infty) \\ \frac{1}{2\pi}, & \phi \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Ако $g : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \phi \longmapsto \frac{1}{2}r^2|\sin\phi|$, то лицето на $\triangle AOB$ е случайната величина $g\circ\phi$, явяваща се композиция на функцията g със случайната величина ϕ. Търсеното средно е

$$\mathbf{E}g\circ\phi = \int_0^{2\pi} g(u)f_\phi(u)du = \frac{r^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin(u)du - \frac{r^2}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(u)du = \frac{r^2}{2\pi} + \frac{r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{\pi}.$$

Задача 3 Ще сичтаме, че при дефект на апарат, той веднага бива сменен. Следователно

$$Y(w) = \begin{cases} X(w), & X(w) < 5 \\ 5, & X(w) \geq 5 \end{cases}, \text{ тоест } Y = X\mathbf{I}_{\{X<5\}} + 5\mathbf{I}_{\{X\geq 5\}}.$$

Пресмятаме: $\mathbf{P}(Y<4) = \mathbf{P}(X<4) = F_X(4) = \frac{4}{7}$, $EY = E(X\mathbf{I}_{\{X<5\}} + 5\mathbf{I}_{\{X\geq5\}}) = E(X\mathbf{I}_{\{X<5\}}) +$

$$E(5\mathbf{I}_{\{X\geq5\}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathbf{I}_{\{X<5\}}(x)dF_X(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} 5\mathbf{I}_{\{X\geq5\}}(x)dF_X(x)$$

$$= \frac{1}{7}\int_0^5 x\mathbf{I}_{\{X<5\}}(x)dx + \frac{5}{7}\int_5^7 dx = \frac{45}{14},$$

Аналогично, $DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{7}\int_0^5 x^2dx + \frac{25}{7}\int_5^7 dx - (\frac{45}{14})^2 = \frac{275}{21} - (\frac{45}{14})^2 \approx 2.763$

Нека $X_i \in \mathcal{U}(0,7)$, $i = 1,2,\dots,1000$ са съотвено случайните величини: времето на безотказна работа на i-тия апарат в години; $Z = \sum_{i=1}^{1000}\mathbf{I}_{\{X_i<5\}}$. Очакваният брой сменени апарати за 5 години е: $EZ = \sum_{i=1}^{1000} E\mathbf{I}_{\{X_i<5\}} = 1000E\mathbf{I}_{\{X_1<5\}} = 1000\mathbf{P}(X_1<5) = 1000F_X(5) = 1000\times\frac{5}{7} = 714.28$

Задача 4 Без ограничение на общността $R = 1$ и нека D е кръг с център O и диаметър 2. Свойството от условието на задачата е еквивалентно на това, точка B да лежи във вътрешността на окръжността с център A, допираща се вътрешно до границата на D. Ако d е функция разстояние в равнината, а μ е Лебегова мярка, то търсената вероятност е

$$\mathbf{P} = \frac{\mu(\{(A,B)\in D\times D |\ d(A,B) < 1 - d(A,O)\})}{\mu(D\times D)}$$

$$= \frac{\mu(\{(A,B) \in D \times D |\ d(A,B) < 1 - d(A,O)\})}{[\mu(D)]^2}$$

$$= \frac{\int_0^1 2\pi x[\pi(1-x)^2]dx}{\pi^2} = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Задача 5 Нека X, X_1, X_2 са съответно случайните величини: брой минути за обслужване на фиксиран клиент, брой минути за обслужване на каса 1 и 2. Нека $H_i,\ i = 1,2$ са събитията: клиентът е обслужен на $i-$тата каса. По условие $\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2},\ X_1 \in Ex(\frac{1}{8}),\ X_2 \in Ex(\frac{1}{5})$ и търсим $\mathbf{P}(H_1 |\ \{X < 4\})$. Прилагаме формулата на Бейс **??**:

$$\mathbf{P}(H_1 |\ \{X < 4\}) = \frac{\mathbf{P}(\{X < 4\} |\ H_1)\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(\{X < 4\} |\ H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(\{X < 4\} |\ H_2)\mathbf{P}(H_2)}$$

$$= \frac{\mathbf{P}(X_1 < 4)\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(X_1 < 4)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(X_2 < 4)\mathbf{P}(H_2)} = \frac{F_{X_1}(4)}{F_{X_1}(4) + F_{X_2}(4)} = \frac{1 - e^{-\frac{4}{8}}}{2 - e^{-\frac{4}{5}} - e^{-\frac{4}{8}}} \approx 0.61$$

Задача 6 Нека X и Y са съответно случайните величини: времето за преглед на първия пациент в часове, времето прекарано в поликлиниката от втория пациент. По условие $X \in Ex(2)$ и

$$Y(w) = \begin{cases} X(w), & X(w) \le \frac{1}{2} \\ 2X(w) - \frac{1}{2}, & X(w) > \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ тоест } \ Y = X\mathbf{I}_{\{X \le \frac{1}{2}\}} + (2X - 0.5)\mathbf{I}_{\{X > \frac{1}{2}\}}.$$

$$EY = E(X\mathbf{I}_{\{X \le \frac{1}{2}\}} + (2X - 0.5)\mathbf{I}_{\{X > \frac{1}{2}\}}) = EX\mathbf{I}_{\{X \le \frac{1}{2}\}} + E(2X - 0.5)\mathbf{I}_{\{X > \frac{1}{2}\}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathbf{I}_{\{X \le \frac{1}{2}\}}(x)dF_X(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (2x - 0.5)\mathbf{I}_{\{X > \frac{1}{2}\}}(x)dF_X(x)$$

$$= \int_0^{0.5} xdF_X(x) + \int_{0.5}^{+\infty} (2x - 0.5)dF_X(x)$$

$$= \int_0^{0.5} xd(1 - e^{-2x}) + \int_{0.5}^{+\infty} (2x - 0.5)d(1 - e^{-2x}) = (\frac{1}{2} - e^{-1}) + \frac{3}{2}e^{-1} = \frac{1}{2}(1 + e^{-1}).$$

Забележка 1.10. *Пояснение към решението на задача 6: Нека X_1, X_2 и Y са съответно случайните величини: времето за преглед на $i-$тия пациент в часове ($i = 1,2$), времето прекарано в поликлиниката от втория пациент. По условие X_i са експонециално разпределени със средно $EX_1 = EX_2 = 0.5$, то съгласно 1.9 получаваме $X_i \in Ex(2)$. По условие*

$$Y(w) = \begin{cases} X_2(w), & X_1(w) \le 0.5 \\ X_1(w) - 0.5 + X_2(w), & X_1(w) > 0.5 \end{cases}, \text{т.е. } Y = X_2\mathbf{I}_{\{X_1 \le 0.5\}} + (X_1 + X_2 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1 > 0.5\}},$$

следователно $Y = X_2\left(\mathbf{I}_{\{X_1 \le 0.5\}} + \mathbf{I}_{\{X_1 > 0.5\}}\right) + (X_1 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1 > 0.5\}} = X_2 + (X_1 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1 > 0.5\}}$.

$$EY = EX_2 + E(X_1 - 0.5)\mathbf{I}_{\{X_1 > 0.5\}} = 0.5 + \int_{0.5}^{+\infty} (x - 0.5)2e^{-2x}dx$$

$$= 0.5 - \int_{0.5}^{+\infty} (x - 0.5)de^{-2x} = 0.5 - (x - 0.5)e^{-2x}\Big|_{x=0.5}^{\infty} + \int_{0.5}^{+\infty} e^{-2x}dx$$

$$= 0.5 - 0.5e^{-2x}\Big|_{x=0.5}^{\infty} = 0.5(1 + e^{-1}).$$

Задача 7 По условие $X \in Ex(\lambda)$, следователно $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$

a) Функцията $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto -x$ е намаляваща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = -y$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = -X$ по теорема 1.5 намираме

$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = -f_X(g(y))\frac{d}{dy}(g(y)) = f_X(-y) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda y}, & y < 0 \\ 0, & y \ge 0 \end{cases}$

b) Функцията $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto 2x - 1$ е растяща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = 2X - 1$ по теорема 1.5 намираме

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = f_X(\frac{y+1}{2})\frac{d}{dy}(\frac{y+1}{2}) = \frac{1}{2}f_X(\frac{y+1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}, & y > -1 \\ 0, & y \le -1 \end{cases}$

c) Функцията $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \longmapsto \sqrt{x}$ е растяща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = y^2$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = \sqrt{X}$ по теорема 1.5 намираме

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = f_X(y^2)\frac{d}{dy}(y^2) = 2yf_X(y^2) = \begin{cases} 2y\lambda e^{-\lambda y^2}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

d) Функцията $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \longmapsto x^a,\ a > 0$ е растяща и диференцируема, като $g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{a}}$, следователно за плътността на $Y = g \circ X = X^a$ по теорема 1.5 намираме

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{d}{dy}(g^{-1}(y)) = f_X(y^{\frac{1}{a}})\frac{d}{dy}(y^{\frac{1}{a}}) = \frac{1}{a}y^{\frac{1-a}{a}}f_X(y^{\frac{1}{a}}) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a}y^{\frac{1-a}{a}}e^{-\lambda y^{\frac{1}{a}}}, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$

Задача 8 Нека в равнината е фиксирана ортогонална координатна система с начало O. Окръжността $k(A, a)$ се допира до абсцисата в точка O. Положението на точка B се определя еднозначно от $\angle BAO = \phi$, следователно големината на ъгълът ϕ е равномерно разпределена случайна величина Φ, със $\Phi \in \mathcal{U}(0, \pi)$. Ако $g : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \phi \longmapsto a \tan\phi$, то $X = g \circ \Phi$. Във всеки от интервалите $[0, \frac{\pi}{2})$ и $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ функцията g е растяща и диференцируема, но не можем да приложим теорема 1.5 (теоремата се прилага за интервал, в случая имаме обединение на непресичащи се интервали с особеност в гранична точка): при $x > 0$ получаваме

$$F_X(x) = \mathbf{P}(g\circ\Phi \le x) = \mathbf{P}(a\tan\phi \le x) = \mathbf{P}\left(\tan\phi \le \frac{x}{a}\right) = \mathbf{P}\left(\phi \le \arctan\frac{x}{a}\right) = F_\Phi\left(\arctan\frac{x}{a}\right) \Rightarrow$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_\Phi\left(\arctan\frac{x}{a}\right) = f_\Phi\left(\arctan\frac{x}{a}\right)\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2 + a^2},\ x \in \mathbb{R}^+.$$

При $x \le 0$ получаваме $F_X(x) = \mathbf{P}(\tan\phi \le \frac{x}{a}) = \mathbf{P}(\frac{\pi}{2} < \phi \le \pi + \arctan\frac{x}{a}) =$

$$= \mathbf{P}\left(\phi \le \pi + \arctan\frac{x}{a}\right) - \mathbf{P}\left(\phi \le \frac{\pi}{2}\right) = F_\Phi\left(\pi + \arctan\frac{x}{a}\right) - F_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}F_\Phi\left(\pi + \arctan\frac{x}{a}\right)$$

$$= f_\Phi\left(\pi + \arctan\frac{x}{a}\right)\frac{d}{dx}\left(\pi + \arctan\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2 + a^2},\ x \le 0.$$

Следователно $f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)},\ x \in \mathbb{R}.$