Решения на задачите от контролно 1 по СЕМ
Софтуерно инженерство

05.12.2021

Четни факултетни номера, аналогично за нечетните

Задача 1 Три карти са оцветени в три различни цвята, а четвърта карта има и трите цвята. Нека $A_k, k = 1, 2, 3$ са събитията: случайно избрана карта съдържа цвят k.
a) Независими ли са събитията A_k две по две? Независими ли са в съвкупност?
b) Теглим с връщане 3 карти. Каква е вероятността да изтеглим веднъж трицветната карта, ако е известно че изтеглените карти са различни?

Решение: а) От $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{2}$ и $\mathbf{P}(A_i A_j) = \frac{1}{4}$, следва $\mathbf{P}(A_i A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$. Така A_k са независими две по две. Но $\mathbf{P}(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3)$, следователно A_1, A_2, A_3 са зависими в съвкупност. За б) нека A и B са съответно събитията: при теглене на 3 карти с връщане - точно веднъж е изтеглена трицветната; изтеглените 3 карти са различни. Намираме

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{3!\binom{3}{2}/|V(4;3)|}{|V_4^3|/|V(4;3)|} = \frac{3}{4}.$$

Задача 2 По случаен начин и независимо едно от друго се избират n числа в интервала $[0, 1]$. Да се определи вероятността сумата им да е по-малка от 1, ако
a) $n = 2$ и е известно, че сумата е по-голяма от $\frac{1}{2}$;
b) $n = 3$ и е известно, че сумата е по-малка от 2.

Решение: а) Чертеж 1: $\mathbf{P}(\Sigma < 1 \mid \Sigma > 1/2) = \frac{\mathbf{P}(1/2<\Sigma<1)}{\mathbf{P}(\Sigma>1/2)} = \frac{1/2-1/8}{1-1/8} = \frac{3}{7}$.
b) Чертеж 2: $\mathbf{P}(\Sigma < 1 \mid \Sigma < 2) = \frac{\mathbf{P}(\Sigma<1)}{\mathbf{P}(\Sigma<2)} = \frac{1/6}{1-1/6} = \frac{1}{5}$.

Задача 3 На състезание участват 20 отбора: 8 отбора в категория джипове, 5 при камиони и 7 при мотоциклети. Джиповете завършват състезанието с вероятност 0.9, камионите с 0.7, а моторите с 0.6 След състезанието на случаен принцип се избират три отбора, за провеждане на технически контрол. Известно е, че един от избраните отбори е завършил състезанието, а другите два не. Каква е вероятността избраните три отбора да са от различни категории?

Решение: а) Нека $A_{i,j}$ и $H_{i,j,k}$ са съответно събитията: при избор на 3 отбора - i са завършили и j незавършили $(i + j = 3)$; i са джипки, j са камиони, k са мотори $(i + j + k = 3)$. Намираме

$$\mathbf{P}(H_{1,1,1} \mid A_{1,2}) = \frac{\mathbf{P}(A_{1,2} \mid H_{1,1,1})\mathbf{P}(H_{1,1,1})}{\sum_{i+j+k=3} \mathbf{P}(A_{1,2} \mid H_{i,j,k})\mathbf{P}(H_{i,j,k})}, \text{ където } \mathbf{P}(H_{i,j,k}) = \frac{\binom{8}{i}\binom{5}{j}\binom{7}{k}}{\binom{20}{3}}$$

$\mathbf{P}(A_{1,2} \mid H_{i,j,k}) = i(0.9\times 0.1^{i-1}\times 0.3^j\times 0.4^k)+j(0.1^i\times 0.7\times 0.3^{j-1}\times 0.4^k)+k(0.1^i\times 0.3^j\times 0.6\times 0.4^{k-1})$.

Задача 4 Хвърляме 3 зара n пъти. Считаме за "успех" всяко хвърляне, при което сумата от точките върху трите зара е нечетна и по-голяма от 12. Да се определи вероятността на:
a) събитие $A = \{$броят на успехите е по-голям от броя на неуспехите$\}$, за $n = 10$;
b) събитие $B = \{$седмия успех настъпва преди третия неуспех$\}$, за $n = 12$.

Решение: Ако p е вероятността за успех, то $p = \frac{34}{6^3}$ и нека $X \in \mathrm{Bi}(n,p)$. Имаме $A = \{X \geq 6\}$, т.е. $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X \geq 6) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k}$. За б) нека $B_k = \{$седмия успех настъпва на $k-$тия опит$\}$. Следователно $B = \cup_{k=7}^{9} B_k$ и

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{k=7}^{9} \mathbf{P}(B_k) = \sum_{l=0}^{2} \binom{6+l}{6} p^6 (1-p)^l p.$$

Оценяване: 1a) $3+3=6p$; 1b) $4p$; 2a) $4p$; 2b) $6p$; 3) $10p$; 4a) $5p$; 4b) $5p$. $\Sigma = 40p$.