Упражнение 14 - Теория, задачи, решения

МС

28.05.2021

1 Пораждащи функции и трансформация на Лаплас-Стилтес

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е множеството на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Дефиниция 1.1. *Нека $X \in \mathfrak{S}$ е случайна величина, приемаща цели неотрицателни стойности и нека $p_k = P(X = k),\ k = 0, 1, \dots$ Функцията*

$$h_X(s) = \mathbf{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \le 1,$$

се нарича пораждаща функция на X.

Редът дефиниращ $h_X(s)$ е абсолютно и равномерно сходящ в единичния кръг $|s| < 1,\ s \in \mathbb{C}$, понеже

$$|\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k| \le \sum_{k=0}^{\infty} p_k |s^k| \le \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

При предположенията и означенията на горната дефиниция, пресмятаме

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = h'_X(1), \quad \mathbf{D}X = h''_X(1) + h'_X(1) - (h'_X(1))^2.$$

Теорема 1.2. *Ако $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{S}$ са независими случайни величини с пораждащи функции $h_1, h_2, \dots, h_n$, то за пораждащата функция h на $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ е в сила $h = \prod_{k=1}^{n} h_k$.*

Доказателство: Понеже $X_1, X_2, \dots, X_n$, то независими са и $s^{X_1}, s^{X_2}, \dots, s^{X_n}$, откъдето

$$h(s) = \mathbf{E}s^X = \mathbf{E}s^{X_1} s^{X_2} \cdots s^{X_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}s^{X_k} = \prod_{k=1}^{n} h_k(s).$$

$\square$

Теорема 1.3. *Съществува биективно съответствие между неотрицателните целочислени разпределения и пораждащите им функции.*

Доказателство: Две неотрицателните целочислени разпределения $p_k,\ q_k,\ k = 0, 1, \dots$ имащи една и съща пораждаща функция съвпадат, понеже $p_k = \frac{h_X^{(k)}(0)}{k!}$. Обратно, ако разпределенията съвпадат, то пораждащите им функции съвпадат. $\square$

Теорема 1.4. *Съществува непрекъснато съответствие между неотрицателните целочислени разпределения и пораждащите им функции. Тоест, ако $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от неотрицателните целочислени величини със съответни разпределения $\{p_k(n)\}_{n=1,k=0}^{\infty}$ и пораждащи функции $\{h_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$, то условието*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} p_k(n) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

е еквивалентно на

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} h_n(s) = h(s), \quad \forall s \in [0, 1),$$

$$\text{където } h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

За произволни неотрицателни случайни величини, вместо пораждащи функции в общия случай се разглежда трансформацията на Лаплас-Стилтес: $\xi \longmapsto \varphi_\xi(\lambda)$, където

$$\varphi_\xi(\lambda) = \mathbf{E}e^{-\lambda\xi} = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda x} dF_\xi(x), \ \Re(\lambda) \geq 0.$$

Теорема 1.5. *Съществува непрекъснато биективно съответствие между неотрицателните разпределения и трансформацията на Лаплас-Стилтес за тези разпределения.*

Доказателство: Биективност на съответствието се доказва, като се използва *формулата за обръщане*:

$$F_\xi(x) = \lim_{\lambda\longrightarrow\infty} \sum_{k<\lambda x} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \varphi_\xi^{(k)}(\lambda).$$

Непрекъснатост на съотвествието означава, че редица от неотрицателни случайни величини е сходяща, тогава и само тогава, когато редицата от съответни Лаплас-Стилтес трансформации на тези случайни величини е сходяща към трансформацията на граничната случайна величина. □

2 Характеристични функции

За произволни случайни величини, вместо пораждащи функции и трансформация на Лаплас-Стилтес в общия случай се разглеждат характеристични функции: $\xi \longmapsto \psi_\xi(t)$, където

$$\psi_\xi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_\xi(x), \ t \in \mathbb{R}.$$

$$e^{it\xi} = \cos t\xi + i \sin t\xi$$

$$\Rightarrow \psi_\xi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx dF_\xi(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin tx dF_\xi(x).$$

Забележка 2.1. *Ако ξ неотрицателна целочислена случайна величина, то $\psi_\xi(t) = h_\xi(e^{it})$. Ако $\xi \geq 0$, то $\psi_\xi(t) = \varphi_\xi(-it)$. Ако ξ е дискретна, то*

$$\psi_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Нека $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ има фунцкия на разпределени $F_\eta(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Многомерната характеристична функция на η се дефинира като:

$$\psi_\eta(t) = \psi_{\eta_1,\dots,\eta_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}e^{i(t,\eta)}$$

$$= \mathbf{E}e^{i\sum_{k=1}^n t_k\eta_k} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(t,x)} dF_\eta(x).$$

Многомерните характеристични функции имат аналогични свойства, както и едномерните:

1) $|\psi_\eta(t)| \le 1,\ \forall t \in \mathbb{R}^n$ и $\psi_\eta(0) = 1$;

2) $\psi_\eta(t)$ е равномерно непрекъсната по $t \in \mathbb{R}^n$;

3) Характеристичната функция на $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ при $m < n$ се получава по следния начин: $\psi_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m}(t_1, \dots, t_m) = \psi_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(t_1, \dots, t_m, 0, \dots, 0)$.

4) $\psi_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}(\tau) = \psi_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(\tau, \tau, \dots, \tau)$;

5) По характеристична функция еднозначно се възстановява функцията на разпределение;

6) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ са независими тогава и само тогава, когато

$$\psi_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n \psi_{\xi_k}(t_k).$$

Теорема 2.2. *(Формула за обръщане) Нека ξ има функция на разпределени $F(x)$ и характеристична функция $\psi(t)$. Тогава във всички точки на непрекъснатост x и y на $F(x)$ е в сила:*

$$F(x) - F(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ity} - e^{-itx}}{it} \psi(t) e^{-\sigma^2 t^2} dt.$$

Теорема 2.3. *(Непрекъснатост) Нека са дадени $F_n(x) = \mathbf{P}(\xi_n < x),\ F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ и $\psi_n(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_n},\ \psi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi},\ \ n = 1, 2, \dots$. За сходимост (по разпределение) $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ е необходимо и достатъчно $\psi_n(t) \longrightarrow \psi(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$, където $\psi(t) = \mathbf{E}e^{it\xi}$.*

3 Условия на задачите от упражнение 14

Задача 1 Нека ξ и η са независими случайни величини с плътности и характеристични функции съответно равни на $f_\xi, \varphi_\xi, f_\eta, \varphi_\eta$. Да се намерят характеристичните функции на $\xi\eta, \frac{\xi}{\eta}, \xi g(\eta)$, където $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е интегруема по Лебег функция.

Задача 2 Да се намери характеристичната функция на $\eta = \xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4$, където случайните величини $\xi_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2),\ k = 1, 2, 3, 4$ са независими.

Задача 3 Нека случайната величина $\zeta = (\xi, \eta)$ има плътност

$$f_\zeta(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Да се намерят характеристичните функции на ζ и ξ.

Задача 4 Каква е вероятността уравнението $x^2 + 2bx + c = 0$ да има два различни реални корена, ако b и c са независими случайни величини с разпределение $\mathrm{Ex}(\lambda)$?

Задача 5 Нека $\xi \in \mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta = \xi^2 - 1$. Да се докаже, че за коефициентът на корелация е в сила $\rho(\xi, \eta) = 0$.

Задача 6 Нека случайните величини $\xi_1, \ldots, \xi_n$ са независими и еднакво разпределени, като $P(\xi_1 = j) = \frac{1}{m},\ \ j = 0, 1, \ldots, m-1$. Означаваме $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ и $q_m = P(S_n \leq m)$. Да се намерят пораждащата функция на S_n и функцията $\sum_{m \geq 0} q_m x^m$.

Задача 7 Нека $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ са независими случайни величини. Чрез характеристични функции, да се докаже, че случайните величини $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 - \xi_2$ са независими.

4 Решения на задачите от упражнение 14

Задача 1 Означаваме с $\varphi_{\xi\eta}$ характеристичната функция на $\xi\eta$, и нека съвместната плътност на (ξ, η) е $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Понеже ξ и η са независими, то $f_{\xi,\eta}(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$.

$$\varphi_{\xi\eta}(t) = \mathbf{E} e^{it\xi\eta} = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{itxy} f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{itxy} f_\xi(x) f_\eta(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itxy} f_\xi(x) dx \right) f_\eta(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi(ty) f_\eta(y) dy.$$

Аналогично пресмятаме

$$\varphi_{\xi\eta}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\eta(tx) f_\xi(x) dx,$$

$$\varphi_{\frac{\xi}{\eta}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi \left(\frac{t}{y} \right) f_\eta(y) dy,$$

$$\varphi_{\xi g(\eta)}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\xi(t g(y)) f_\eta(y) dy.$$

Задача 2 Понеже $\xi_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2),\ \ k = 1, 2, 3, 4$ са независими, то независими са $\xi_1\xi_2$ и $\xi_3\xi_4$. Следователно

$$\varphi_\eta(t) = \mathbf{E} e^{it\eta} = \mathbf{E} e^{it\xi_1\xi_2} e^{-it\xi_3\xi_4} = \mathbf{E} e^{it\xi_1\xi_2} \mathbf{E} e^{-it\xi_3\xi_4} = \varphi_{\xi_1\xi_2}(t) \varphi_{\xi_3\xi_4}(-t).$$

Намираме $\varphi_{\xi_1\xi_2}$ използвайки задача 1 и полагайки за краткост $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^4 t^2+1}}$:

$$\varphi_{\xi_1\xi_2}(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\xi_1}(ty) f_{\xi_2}(y)dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\sigma^2 t^2 y^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} dy$$
$$= \frac{\alpha}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} dy = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sigma^4 t^2+1}}.$$

От равенствата $\varphi_{\xi_1\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_3\xi_4}(t) = \varphi_{\xi_3\xi_4}(-t)$ следва, че $\varphi_\eta(t) = \frac{1}{\sigma^4 t^2+1}$.

Задача 3 Нека $\varphi_\zeta(t,s)$ е характеристичната функция на ζ. Пресмятаме

$$\varphi_\zeta(t,s) = \mathbf{E}e^{i(t\xi+s\eta)} = \iint_{\mathbb{R}} e^{i(tx+sy)} f_\zeta(x,y)dxdy$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}dx \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{isy}}{1+y^2}dy.$$

За пресмятането на интеграли от вида $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}dx$ ще приложим следната теоремата:

Теорема 4.1. *(Пресмятане на интеграли от вида $\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx,\ t \in \mathbb{R}$)*
Нека $f(z)$ е холоморфна, с изключение на краен брой полюси, нележащи върху реалната ос. Нека рестрикцията на f върху реалната права е абсолютно интегруема, тоест $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$. Ако $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, то е в сила равенството

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{sign}(t) \sum Res\left(f(z)e^{itz}\right),$$

където сумирането се извършва по всички полюси на f в горната полуравнина $\Im(z) > 0$ при $t > 0$, или по полюсите в $\Im(z) < 0$ при $t < 0$.

Прилагаме теорема 4.1 и получаваме: $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}dx = \pi e^{-t},\ t > 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}dx = \pi e^{t},\ t \leq 0$. Следователно

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}dx = \pi e^{-|t|} \Rightarrow \varphi_\zeta(t,s) = e^{-|t|-|s|},\ \ \varphi_\xi(t) = \varphi_\zeta(t,0) = e^{-|t|}.$$

Задача 4 Ще използваме означенията $X = b,\ Y = c$. Понеже X и Y са независими, то съвместната им плътност има вида:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$$

Уравнението има два различни реални корена, точно тогава, когато $X^2 > Y$. Нека

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x^2 > y\}.$$

Търсената вероятност е

$$P(X^2 > Y) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy = \iint_D \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty \left(\int_0^{x^2} e^{-\lambda(x+y)}dy \right) dx = -\lambda \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(x+y)}\Big|_{y=0}^{x^2} \right) dx$$

$$= -\lambda \int_0^\infty \left(e^{-\lambda(x^2+x)} - e^{-\lambda x} \right) dx = \lambda \left(\lambda^{-1} - e^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^\infty e^{-\lambda(x+1/2)^2}dx \right)$$

$$= \lambda \left(\lambda^{-1} - \frac{e^{\frac{\lambda}{4}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,(2x+1)\right]^2}{2} \right) d\left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,(2x+1)\right] \right)$$

$$= \lambda \left(\lambda^{-1} - \frac{e^{\frac{\lambda}{4}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{\sqrt{\lambda/2}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}du \right) = \lambda \left(\lambda^{-1} - \frac{e^{\frac{\lambda}{4}}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda/2}} e^{-\frac{u^2}{2}}du \right)$$

$$= 1 - e^{\frac{\lambda}{4}}\sqrt{\pi\lambda}.\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \right).$$

Задача 5 От $\xi \in \mathcal{N}(0,1)$ следва $\mathbf{E}\xi = 0,\ \mathbf{D}\xi = 1,\ \mathbf{D}\eta = \mathbf{D}(\xi^2 - 1) = \mathbf{D}\xi^2 > 0$. Следователно

$$\mathbf{cov}(\xi,\eta) = \mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta = \mathbf{E}\xi\eta = \mathbf{E}\xi(\xi^2-1) = \mathbf{E}\xi^3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^3 \exp\left(-\frac{u^2}{2} \right) du = 0,$$

понеже подинтегралната функция $f(u) = u^3 \exp\left(-\frac{u^2}{2} \right)$ е нечетна. Следователно

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathbf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}} = 0.$$

Задача 6 Нека $G(x)$ е пораждащата функция на S_n, а $g_i(x)$ $i = 1,\dots,n$, са пораждащите функции на ξ_i. Получаваме

$$g_i(x) = \sum_{k=0}^{m-1} P(\xi_i = k)x^k = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{1-x^m}{m(1-x)}.$$

Понеже $\xi_1,\dots,\xi_n$ са независими, от 1.2 следва

$$G(x) = \prod_{i=1}^n g_i(x) = \left(\frac{1-x^m}{m(1-x)} \right)^n.$$

За всяко цяло $k \geq 0$ дефинираме $\eta_k = S_n + k$ и нека $h_k(x)$ е пораждащата функция на η_k:

$$h_k(x) = \sum_{l=0}^\infty P(S_n + k = l)x^l = \sum_{l=0}^\infty P(S_n = l-k)x^l = \sum_{m=0}^\infty P(S_n = m)x^{m+k}$$

$$= x^k \sum_{m=0}^{\infty} P(S_n = m)x^m = x^k G(x).$$

Пресмятаме

$$\sum_{m\geq 0} q_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} P(S_n \leq m)x^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P(S_n + k = m)x^m$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} P(S_n + k = m)x^m = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) = G(x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{(1-x^m)^n}{m^n(1-x)^{n+1}}.$$

Забележка 4.2. *Смяна реда на сумиране в двойни редове: Ако* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$ *е абсолютно сходящ, то можем да извършим смяна на редът на сумиране:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}.$$

Прилагайки тази забележка в задача 6, смяната реда на сумиране се обосновава чрез :

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |P(S_n + k = m)x^m| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |x|^m = \frac{1}{1-|x|}, \quad |x| < 1.$$

Задача 7 Нека $\varphi_{\xi_k}(t)$ е характеристичната функция на $\xi_k \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ k = 1, 2$. Следователно

$$\varphi_{\xi_k}(t) = \mathbf{E}e^{it\xi_k} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_{\xi_k}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$= e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Полагаме $X = \xi_1 - \xi_2,\ Y = \xi_1 + \xi_2$. Съгласно теорема 4.5 следва, че X и Y са независими, тогава и само тогава, когато $\varphi_{X,Y}(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$. Пресмятаме

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}e^{it(\xi_1-\xi_2)} = \mathbf{E}e^{it\xi_1}e^{-it\xi_2} = \mathbf{E}e^{it\xi_1}\mathbf{E}e^{-it\xi_2} = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(-t) = e^{-\sigma^2 t^2}.$$

$$\varphi_Y(s) = \varphi_{\xi_1+\xi_2}(s) = \varphi_{\xi_1}(s)\varphi_{\xi_2}(s) = e^{2i\mu s - \sigma^2 s^2}.$$

$$\varphi_{X,Y}(t,s) = \mathbf{E}e^{i[(\xi_1-\xi_2)t + (\xi_1+\xi_2)s]} = \mathbf{E}e^{i(t+s)\xi_1}e^{i(s-t)\xi_2}$$

$$= \mathbf{E}e^{i(t+s)\xi_1}\mathbf{E}e^{i(s-t)\xi_2} = \varphi_{\xi_1}(t+s)\varphi_{\xi_2}(s-t) = e^{2i\mu s - \sigma^2(t^2+s^2)}.$$

Следователно е в сила равенството $\varphi_{X,Y}(t,s) = \varphi_X(t)\varphi_Y(s)$, откъдето X и Y са независими. По-горе използвахме, че ξ_1 и ξ_2 са независими, откъдето независими са $e^{i(t+s)\xi_1}$ и $e^{i(s-t)\xi_2}$ и съгласно теорема 4.4 получаваме $\mathbf{E}e^{it\xi_1}e^{-it\xi_2} = \mathbf{E}e^{it\xi_1}\mathbf{E}e^{-it\xi_2}$. За пресмятането на $\varphi_{X,Y}(t,s)$ използвахме следната дефиниция:

Дефиниция 4.3. *Нека $X = (X_1, \dots, X_n)$ е $n-$мерна случайна величина. Характеристичната функция на X се дефинира чрез*

$$\varphi_X(t_1, t_2, \dots, t_n) = \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right).$$

Теорема 4.4. *Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими случайни величини от $\mathfrak{S}$. Тогава е в сила равенството*

$$\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E} X_k.$$

Теорема 4.5. *Нека $X_1, \dots, X_n$ са случайни величини от $\mathfrak{S}$ съответно с характеристични функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Необходимо и достатъчно условие $X_1, \dots, X_n$ да бъдат независими е равенството:*

$$\varphi_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t_k).$$

Теорема 4.6. *Нека $X_1, \dots, X_n$ са независими случайни величини от $\mathfrak{S}$ съответно с характеристични функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Тогава за характеристичната функция на $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ е в сила равенството:*

$$\varphi_{X_1 + X_2 + \dots + X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(t).$$