Теория на Вероятностите
Упражнения 3

ЕК, МРС

10.03.2021

1 Условна вероятност и независимост

1.1 Условна вероятност и независимост

Нека $\mathcal{E}$ е експеримент с вероятностно пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Нека $B \in \mathfrak{A}$, като $\mathbf{P}(B) > 0$. Вероятността да настъпи събитие $A \in \mathfrak{A}$ при условие, че е настъпило събитие B се нарича условна вероятност на A при условие B и се записва чрез $\mathbf{P}(A|B)$, като

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Дефиниционното равенство $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ е напълно естествено поради предположението, че $\mathbf{P}(A|B)$ и $\mathbf{P}(AB)$ трябва да са пропорционални с коефициент зависещ само от B, тоест $\mathbf{P}(A|B) = c(B).\mathbf{P}(AB)$, като при $A = B$ намираме $c(B) = \frac{1}{\mathbf{P}(B)}$. Точното описание е следното: условната вероятност $\mathbf{P}(A|B)$ се реализира като безусловна вероятност $\mathbf{P}(AB)$ на събитието AB във вероятностно пространство $(\Omega^*, \mathfrak{A}^*, \mathbf{P}^*)$, където:

$$\Omega^* = B, \quad \mathfrak{A}^* = \{CB \mid C \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathbf{P}^*(CB) = \frac{\mathbf{P}(CB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Ако $\mathbf{P}(A) > 0$ и $\mathbf{P}(B) > 0$, то съгласно дефиницията на условна вероятност получаваме $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$. В общност, ако $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ са такива, че $\mathbf{P}(\cap_{k=1}^{n-1} A_k) > 0$, то прилагайки дефиницията за условна вероятност намираме

$$\mathbf{P}(\cap_{k=1}^{n} A_k) = \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1})\mathbf{P}(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

$$= \dots = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Теорема 1.1. *(Теорема за умножение на вероятностите) Нека $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ са такива, че $\mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$. Тогава е в сила равенството*

$$\mathbf{P}(A_1A_2\dots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1A_2)\cdots\mathbf{P}(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Събитията $A_1, A_2, \dots, A_n$ се наричат независими, ако за всяко $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ е в сила равенството: $\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2})\dots\mathbf{P}(A_{i_k})$. В частност при $n = 2$ събитията A и B са независими, ако $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. В този случай, при $\mathbf{P}(B) > 0$ получаваме $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(A)$.

Забележка 1.2. *Равенството* $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ *изразява връзката между понятията условна вероятност и независимост. Ако* $\mathbf{P}(B) > 0$*, то събитията* A *и* B *са независими, тогава и само тогава, когато е в сила* $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$*. Ако* $\mathbf{P}(B) = 0$*, то* A *и* B *са независими.*

Забележка 1.3. *Ако* A *и* B *са несъвместими събития с положителна вероятност, тоест* $AB = \emptyset$ *и* $\mathbf{P}(A) > 0,\ \mathbf{P}(B) > 0$*, то те са зависими, поради* $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Забележка 1.4. *Ако* A *и* B *са независими събития, то:*
a) A *и* $\overline{B}$
b) $\overline{A}$ *и* $\overline{B}$
също са независими. Твърдението на задачата се обобщава по индукция за $n \geq 3$ *събития.*

1.2 Условия на задачите от упражнение 3

Задача 1 Вероятността стрелец да улучи мишена е $\frac{2}{3}$, ако улучи той получава право на втори изстрел. Вероятността за улучване и на двете мишени е $\frac{1}{2}$. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право да стреля втори път?

Задача 2 Застрахователна компания води статистика за своите клиенти:
- всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;
- 60% посещават повече от веднъж годишно лекар;
- 17% посещават хирург;
- 15% от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург. Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годишно лекар, да не е бил при хирург?

Задача 3 Да се определи вероятността, случайно избрано естествено число, да не се дели:
a) нито на две, нито на три;
b)на две или на три.

Задача 4 Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите се числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Задача 5 Около маса сядат 10 мъже и 10 жени. Каква е вероятността лица от еднакъв пол да не седят едно до друго?

Задача 6 Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността рождените дни на поне двама от тях да съвпадат да е по-голяма от 1/2.

Задача 7 Двама играчи последователно хвърлят монета, играта печели този, който първи хвърли герб. Да се намери вероятността за спечелване на играта за всеки от двамата играчи.

Задача 8 А получава информация (0 или 1) и я предава на Б, той я предава на В, той пък на Г. Г съобщава получената информация. Известно е, че всеки от тях казва истина само в един от три случая. Ако излъжат точно двама, отново се получава истина. Каква е вероятността А да не е излъгал, ако е известно, че Г е съобщил "истината"(тоест отговорът на Г съвпада с информацията, която А получава)?

Задача 9 Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се предели вероятността нито едно лице да не получи своето писмо.

Задача 10 Нека $S = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \mid f - \text{биекция}\}$ е множеството на всички биекции $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Да се определи вероятността при случаен избор на елемент от S, той да няма неподвижна точка.

Задача 11 Каква е вероятността да се получи несъкратима дроб, ако числителят и знаменателят са числа, които се избират от редицата на естествените числа по случаен начин и независимо едно от друго.

1.3 Решения на задачите от упражнение 3

Задача 1 Р-е: Нека A_i са събитията - стрелецът улучва $i-$тата мишена. По условие $\mathbf{P}(A_1) = \frac{2}{3}$ и $\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}$, откъдето $\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$.

Задача 2 Р-е: Нека A, B и C са съответно събитията - случайно избран клиент да посещава точно веднъж, повече от веднъж годишно лекар и да посещава хирург. По условие $\overline{A} = B$ и $\mathbf{P}(B) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $\mathbf{P}(C) = \frac{17}{100}$, $\mathbf{P}(C|B) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$. Търсим $\mathbf{P}(\overline{C}|A)$. Пресмятаме $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(B) = \frac{2}{5}$ и $\mathbf{P}(\overline{C}|A) = \frac{\mathbf{P}(\overline{C} \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(CA)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A) - (\mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(CB))}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(C|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{4}{5}$.

Задача 3 Р-е: а) Нека A, B и C са съответно събитията - случайно избрано естествено число да не се дели на 2, да не се дели на 3, да е взаимно-просто с 6. Тогава $C = AB$ и търсим $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(C)$. За да приложим в този случай класическа вероятност е необходимо да я додефинираме чрез $\mathbf{P}(C) = \lim_{n \to \infty} \frac{|D_n|}{n}$, където $|D_n|$ е броят на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$, взаимно прости с 6. Получаваме $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - (1 - \mathbf{P}(\overline{A \cup B})) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{3}$.

b) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Задача 4 Р-е: Нека A и B са съответно събитията при хвърляне на 2 зара, сумата от падналите се числа е по-малка от 8, сумата е нечетна. Търсим $\mathbf{P}(A|B)$. Пресмятаме $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{2}{3}$. Събитията A и B са зависими, понеже $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \frac{7}{12} \times \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \mathbf{P}(AB)$.

Задача 5 Р-е: Нека A е събитието - при сядане на 10 мъже и 10 жени на една пейка, да няма съседи от един и същи пол. Еквивалентна интерпретация на условието е да намерим вероятността при случаен избор (класическа вероятност) на 20 членна редица от елементи на $\{m, w\}$, всеки от които участва точно 10 пъти, да няма два съседни еднакви. Тогава $\mathbf{P}(A) =$

$\frac{2}{|P(20;10,10)|} = \frac{2(10!)^2}{20!}$.
Второ решение - чрез определяне позициите на 10-те жени, те могат да бъдат или всичките 10 четни позиции или всички нечетни позиции (ако сме ги номерирали последователно за определеност), т.е. 2(10!) възможности, на всяка от които съответстват 10! възможности за раположението на мъжете. Така $\mathbf{P}(A) = \frac{2(10!)^2}{20!}$.
Нека сега разгледаме същата задача, но за кръгла маса. Ще докажем и използваме следното твърдение:

Лема 1.5. *Броя на различните нареждания (различни с точност до ротации, без отражения) на n лица на кръгла маса с n позиции е $(n-1)!$.*

Доказателство: Без ограничение, означаваме n-те позиции и n-те лица с $1, 2, \ldots, n$ и съпоставяме на всяко нареждане, пермутация, чрез съответната биекция задаваща нареждането: $\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ позиция $\longmapsto$ човек. В множеството S_n на пермутаициите въвеждаме следната релация на еквивалентност: $\sigma,\ \tau \in S_n$ са еквивалентни, ако съществува $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} :\ \sigma(i) - \tau(i) \equiv k \mod n,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Еквивалентността на две нареждания с точност до ротация е равносилна на еквивалентност на задаващите ги пермутации. Всеки клас на еквивалентност в S_n се състои от точно n пермутации: класът с представител $\tau \in S_n$ се състои от елементите $\tau_k \equiv \tau + k \mod n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоест, за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ дефинираме $\tau_k(i)$ да е равен на остатъкът при деление на $\tau(i) + k$ на n, ако остатъкът е различен от нула, в противен случай полагаме $\tau_k(i) = n$. Получаваме, че на всяко нареждане съответстват точно n пермутации, и търсеният брой различни нареждания е равен на броя на класовете на еквивалентност в S_n. Следователно търсеният брой е $\frac{|S_n|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$. □

Лема 1.6. *Броя на различните нареждания (различни с точност до ротации и отражения) на n лица на кръгла маса с $n \geq 3$ позиции е $\frac{(n-1)!}{2}$.*

Доказателство: Разсъжденията са аналогични на доказателството на предходната лема 1.5, затова ще използваме въведените там означения. В множеството S_n на пермутаициите въвеждаме следната релация на еквивалентност: $\sigma,\ \tau \in S_n$ са еквивалентни, ако е изпълнено едно от следните две условия:
(1) съществува $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} :\ \sigma(i) - \tau(i) \equiv k \mod n,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$;
(2) $\sigma(i) + \tau(i) = n + 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Всеки клас на еквивалентност в S_n, при $n \geq 3$, се състои от точно $2n$ пермутации: класът с представител $\tau \in S_n$ се състои от пермутациите $\tau_k \equiv \tau + k \mod n,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, както и от пермутациите $\tau'_k(i) = n + 1 - \tau_k(i),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$. Получаваме, че на всяко нареждане съответстват точно $2n$ пермутации, и търсеният брой различни нареждания е равен на броя на класовете на еквивалентност в S_n. Следователно търсеният брой е $\frac{|S_n|}{2n} = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$. □

Решение на задачата: фиксираме 10 позиции, никои две от които не са съседни и разполагаме по $\frac{10!}{10} = 9!$ начина жените на тези позиции. За мъжете имаме 10! възможни начина на разпределяне. Общия брой разпределения без съседни еднакви е 9!10!. Общия брой разпределения без ограничения е $\frac{20!}{20} = 19!$. Тогава $\mathbf{P}(A) = \frac{2(10!)^2}{20!}$.

Задача 6 Р-е: Нека за всяко естествено $n \leq 366$, $A(n)$ е събитието - при случаен избор на n човека, да има поне 2-ма с еднаква рожденна дата. Търсим $\min\{n |\ \mathbf{P}(A(n)) > \frac{1}{2}\}$. От $\mathbf{P}(A(n)) =$

$1-\mathbf{P}(\overline{A(n)})$, то $\min\{n|\ \mathbf{P}(A(n))>\frac{1}{2}\}=\min\{n|\ \mathbf{P}(\overline{A(n)})<\frac{1}{2}\}=\min\{n|\ \frac{V_{365}^{n}}{V(365;n)}<\frac{1}{2}\}=\min\{n|\ \prod_{k=1}^{n-1}(1-\frac{k}{365})<\frac{1}{2}\}=\min\{n|\ \exp(-\frac{n(n-1)}{730})<\frac{1}{2}\}=\min\{n|\ n(n-1)-730\ln(2)>0\}=23$.

Задача 7 Р-е: Нека $A,\ B,\ A_i,\ B_i,\ i=1,2,\dots$ са съответно събитията - играта е спечелена от първия, втория играч, при $i-$тото хвърляне на играч 1, 2 се пада лице. Нека за всяко естествено $k,\ A(k)$ е събитието - първия играч печели на $(2k-1)$-ви ход. Следователно

$$A(k)=A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}B_{k-1}\overline{A_k}.$$

Ще считаме, че вероятността за герб е $\frac{1}{2}$, откъдето получаваме:

$$\mathbf{P}(A_1)=\mathbf{P}(B_1|A_1)=\mathbf{P}(A_2|A_1B_1)=\mathbf{P}(B_2|A_1B_1A_2)=\cdots=\mathbf{P}(B_{k-1}|A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1})=$$

$$=\mathbf{P}(\overline{A_k}|A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}B_{k-1})=\frac{1}{2}.$$

Съгласно теорема 1.1 за вероятността на събитието $A(k)$ намираме

$$\mathbf{P}(A(k))=\mathbf{P}(A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}B_{k-1}\overline{A_k})$$

$$=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B_1|A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1B_1)\cdots\mathbf{P}(\overline{A_k}|A_1B_1A_2B_2\cdots A_{k-1}B_{k-1})=\frac{1}{2^{2k-1}},$$

Понеже $A(k)\cap A(l)=\emptyset$ при $k\neq l$ ($A(k)$ и $A(l)$ при $k\neq l$ са различни елементарни изходи), то

$$\mathbf{P}(A)=\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{N}A(k))=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P}(A(k))=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2^{2k-1}}$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{4^k}=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\frac{1}{4^N}}{2(1-\frac{1}{4})}=\frac{2}{3}.$$

Понеже $A=\overline{B}$, то $\mathbf{P}(B)=1-\mathbf{P}(\overline{B})=1-\mathbf{P}(A)=\frac{1}{3}$.

Задача 8 Р-е: Нека A и B са съответно събитията - първия е казал истината (1), четвъртият е казал (1). Търсим $\mathbf{P}(A|B)$. Събитието $A\cap B$ се представя като обединение на 2 несъвместими събития - всички кават истината (събитие C), точно двама различни от първия лъжат (казват 0) (събитие D). Следователно $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(C\cup D)=\mathbf{P}(C)+\mathbf{P}(D)=\frac{1}{3^4}+\binom{3}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{13}{81}$. Събитието B се представя като обединение на 3 несъвместими събития - всички казват истината (събитие E), всички лъжат (събитие F), точно двама казват истината (събитие G). Така $\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(E\cup F\cup G)=\mathbf{P}(E)+\mathbf{P}(F)+\mathbf{P}(G)=\frac{1}{3^4}+\frac{2^4}{3^4}+\binom{4}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2=\frac{41}{81}$, откъдето $\mathbf{P}(A|B)=\frac{13}{41}$.

Задача 9 Р-е: Нека S_n е множеството на всички биекции на $n-$елементно множество. Търсим броя на биекциите без неподвижна точка. Нека $A_k\subset S_n,\ k=1,\dots,n$ се състои от всички биекции, държащи елемента k неподвижно. Тогава броя на биекциите без неподвижна точка е: $|S_n-\cup_{k=1}^{n}A_k|=|S_n|-|\cup_{k=1}^{n}A_k|=n!-(\sum_i|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{n-1}|\cap_{i=1}^{n}A_i|)=n!-(\binom{n}{1}(n-1)!-\binom{n}{2}(n-2)!+\binom{n}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)!)=n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{n!}{n!}=n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. Търсената вероятност е

$$\mathbf{P}=\frac{|S_n-\cup_{k=1}^{n}A_k|}{|S_n|}=\frac{n!\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}{n!}=\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

Доказателство на 1.4 От $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\Omega) = \mathbf{P}(A(B \cup \overline{B})) = \mathbf{P}(AB \cup A\overline{B}) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B})$, следва $\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B})$. Тогава A и $\overline{B}$ са независими. От този резултат и смяната $A \longrightarrow \overline{A}$ получаваме, че $\overline{A}$ и $\overline{B}$ също са независими. Обобщение на твърдението се получава чрез индукция по броя n на разглежданите независими събития.

Задача 11 Нека $a, b \in \mathbb{N}$ са случайно избраните естествени числа. Дробта $\frac{a}{b}$ е несъкратима, ако $\gcd(a, b) = 1$. Нека $\mathbb{P}$ е множеството на простите числа и за всекии $l, n \in \mathbb{N}$, дефинираме събитието $A(n, l)$ да бъде: "l не дели n". За произволно $p \in \mathbb{P}$ дефинираме $A_p = A(a, p) \cup A(b, p)$ и

$$A := \bigcap_{p\in\mathbb{P}} A_p; \quad A_{(n)} := \bigcap_{p\in\mathbb{P};\ p\leq n} A_p.$$

Търсим $\mathbf{P}(A)$, като ще докажем и приложим следните резултати:

- Ако $a, b \in \mathbb{N}$ са различни, то $A(a, p)$ и $A(b, p)$ са независими, като съгласно задача 3:
$$\mathbf{P}(A(a, p)) = \mathbf{P}(A(b, p)) = \frac{p-1}{p};$$
- $\mathbf{P}(A_p) = 1 - \frac{1}{p^2}$;
- Ако $p_1, p_2, \ldots, p_r \in \mathbb{P}$ са различни, то $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$ са независими (в съвкупност) събития.

Ще докажем последните две твърдения:

$$\mathbf{P}(A_p) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_p}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A(a,p)} \cap \overline{A(b,p)}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A(a,p)})\mathbf{P}(\overline{A(b,p)}) = 1 - \frac{1}{p^2}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{p_1} \cap A_{p_2}) &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1} \cap A_{p_2}}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}} \cup \overline{A_{p_2}}) \\
&= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}}) - \mathbf{P}(\overline{A_{p_2}}) + \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}} \cap \overline{A_{p_2}}) \\
&= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_{p_1}}) - \mathbf{P}(\overline{A_{p_2}}) + \mathbf{P}(\overline{A_{p_1 p_2}}) \\
&= 1 - \frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_1^2 p_2^2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) \\
&= \mathbf{P}(A_{p_1})\mathbf{P}(A_{p_2}).
\end{aligned}$$

Следователно A_{p_1}, A_{p_2} са независими при $p_1 \neq p_2 \in \mathbb{P}$. По индукция следва твърдението за независимост на $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_r}$. Пресмятаме

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_{(n)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\bigcap_{p\in\mathbb{P};\ p\leq n} A_p\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq n} \mathbf{P}(A_p) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathbb{P},\ p\leq n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Забележка 1.7.

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

2 Формула за пълната вероятност и Формула на Бейс

2.1 Формула на Бейс

Нека $\mathcal{E}$ е експеримент с вероятностно пространство $(\Omega,\mathfrak{A},\mathbf{P})$, $n\geq 2$ е естествено число или ∞.

Дефиниция 2.1. *Събитията $H_1,H_2,\dots,H_n\in\mathfrak{A}$ образуват пълна група от събития в $\mathfrak{A}$, ако:*

- $H_i\cap H_j=\emptyset,\forall i\neq j,$
- $\cup_{i=1}^n H_i=\Omega.$

Ако $H_1,H_2,\dots,H_n$ образуват пълна група от събития, тогава

$$A=A\cap\Omega=A\cap(\cup_{i=1}^n H_i)=\cup_{i=1}^n(A\cap H_i).$$

При условието $\mathbf{P}(H_i)>0$ за всяко $i\geq 1$, получаваме **формулата за пълната вероятност**:

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n(A\cap H_i))=\sum_{i=1}^n\mathbf{P}(A\cap H_i)=\sum_{i=1}^n\mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i).$$

Теорема 2.2. *Нека $H_1,H_2,\dots,H_n$ образуват пълна група от събития в $\mathfrak{A}$, като $\mathbf{P}(H_i)>0$ за всяко $i=1,2\dots,n$. Тогава за всяко събитие $A\in\mathfrak{A}$ е в сила:*

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{i=1}^n\mathbf{P}(A|H_i)P(H_i).$$

Ако събитието $A\in\mathfrak{A}\ :\ \mathbf{P}(A)>0$, то вероятностите $\mathbf{P}(H_k|A),\ k=1,2,\dots,n$ се пресмятат чрез

$$\mathbf{P}(H_k|A)=\frac{\mathbf{P}(H_kA)}{\mathbf{P}(A)}=\frac{\mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n\mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}.\qquad(1)$$

Теорема 2.3. ***(Формула на Бейс)*** *Нека $H_1,H_2,\dots,H_n$ образуват пълна група от събития в $\mathfrak{A}$, като $\mathbf{P}(H_i)>0$ за всяко $i=1,2\dots,n$. Тогава за всяко събитие $A\in\mathfrak{A}\ :\ \mathbf{P}(A)>0$ е в сила:*

$$\mathbf{P}(H_k|A)=\frac{\mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^n\mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}.$$

2.2 Условия на задачите от упражнение 4

Задача 0 Нека $n \in \mathbb{N}$ и $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ са събития от $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Да се докаже, че

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_i \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(\cap_{i=1}^n A_i).$$

Задача 1 Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n различни адреса и изпратила писмата. Да се определи вероятността:
а) всеки да получи своето писмо;
б) точно $n-1$ лица да получат своите писма;
в) нито едно лице да не получи своето писмо.

Задача 2 В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. Да се определи вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако:
а) след всяко изваждане топката се връща обратно в урната;
б) извадените топки не се връщат обратно.

Задача 3 Вероятността, че в резултат на четири независими опита събитието A ще настъпи поне веднъж е равна на 1/2. Да се определи вероятността за настъпване на A при един опит, ако вероятността за всеки опит е една и съща.

Задача 4 Известни са вероятностите на събитията $A,\ B,\ AB$. Да се определят $\mathbf{P}(A\overline{B})$ и $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A})$.

Задача 5 Дадени са две партиди изделия от 12 и 10 броя. Във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Да се определи вероятността то да е дефектно.

Задача 6 Имаме три нормални зара и един, на който върху всичките страни има шестици. По случаен начин избираме един от тези четири зара и го отделяме, а след това хвърляме останалите три. Да се определи вероятността да се паднат:
а) три шестици; б) различни цифри; в) последователни цифри.

Задача 7 Дадени са n урни и във всяка от тях има по m бели и k черни топки. От първата урна се тегли една топка и се прехвърля във втората, след това от втората една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Задача 8 В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират 3 топки, които след игра се връщат обратно в кутията. За втората игра също се избират 3 топки, каква е вероятността те да са нови?

Задача 9 Петнадесет изпитни билета съдържат по два въпроса. Студент може да отговори на 25 въпроса. Каква е вероятността той да вземе изпита, ако за това е нужно той да отговори на двата въпроса в един билет или на един от двата въпроса, а след това и на посочен въпрос от друг билет?