N 2

$$x(t) = a \cdot \sin\omega t \qquad y(x) = a\left(1 - \frac{2x^2}{a^2}\right)$$

$$y(t) = a\left(1 - 2\sin^2\omega t\right)$$

$$\vec{r}_p = \begin{pmatrix} a \cdot \sin\omega t \\ a(1 - 2 \cdot \sin^2\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Дипольное приближение:

$$r \gg r_p \qquad v \ll c$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{\vec{n}\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr} \qquad \vec{A}(r, t) = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr} \qquad \tau = t - \frac{r}{c}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} = \nabla \times \left(\frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr}\right) = \frac{1}{cr}\nabla \times \dot{\vec{d}}(\tau) \ominus$$

$$\nabla \times \vec{a}(u) = (\nabla u) \times \frac{d\vec{a}}{du}$$

$$\ominus \frac{1}{cr}(\nabla\tau) \times \ddot{\vec{d}}(\tau) \equiv$$

$$\nabla\tau = \nabla \cdot \left(t - \frac{r}{c}\right) \approx -\frac{\vec{n}}{c}$$ (в нашем приближении)

$$\equiv \frac{1}{c^2 r}\ddot{\vec{d}}(\tau) \times \vec{n}$$

$$\vec{E} = \vec{H} \times \vec{n} = \frac{1}{c^2 r}\left(\ddot{\vec{d}}(\tau) \times \vec{n}\right) \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{c^2 r}\left(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}(\tau)\right)$$

$$\vec{d} = q \cdot \vec{r}_p = q \cdot \begin{pmatrix} a \cdot \sin\omega t \\ a(1 - 2 \cdot \sin^2\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -qa\omega^2\left(\cos\alpha \sin(\omega t) + 4\cos\beta \cdot \cos(2\omega t)\right)$$

$$\ddot{\vec{d}} = q \cdot \begin{pmatrix} -a\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \\ -4a\omega^2 \cdot \cos(2\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ddot{d} = q \cdot a\omega^2 \cdot \sqrt{\sin^2(\omega t) + 16 \cdot \cos^2(2\omega t)}$$

В сферических координатах:

$$(\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}(\tau))_r = 0 \qquad (\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}(\tau))_\theta = 0 \qquad (\vec{n} \times \ddot{\vec{d}}(\tau))_\varphi = -\ddot{d}(\tau) \cdot \sin\theta$$

$$H_r = 0 \qquad H_\theta = 0 \qquad H_\varphi = \frac{\ddot{d}(\tau)}{c^2 r} \cdot \sin\theta =$$

$$= \frac{q a\omega^2}{c^2 r} \cdot \sin\theta \cdot \sqrt{\sin^2(\omega t) + 16 \cdot \cos^2(2\omega t)}$$

$$\vec{E} \perp \vec{H} \quad \vec{E} \perp \vec{n} \implies$$

$$E_r = 0 \quad E_\varphi = 0 \quad E_\theta = \frac{qa\omega^2}{c^2 r} \cdot \sin\theta \cdot \sqrt{\sin^2(\omega t) + 16 \cdot \cos^2(2\omega t)}$$

2) $$\vec{H} = \frac{1}{c^2 r}\, \ddot{\vec{d}} \times \vec{n}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \qquad \ddot{\vec{d}} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -qa\omega^2 \sin(\omega t) & -4qa\omega^2 \cos(2\omega t) & 0 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot \left(-4qa\omega^2 \cos\gamma \cdot \cos(2\omega t)\right) + \vec{j}\left(qa\omega^2 \cos\gamma \cdot \sin(\omega t)\right) +$$
$$+ \vec{k} \cdot \left(-qa\omega^2 \cos\beta \cdot \sin(\omega t) + 4qa\omega^2 \cos\alpha \cdot \cos(2\omega t)\right)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_\omega + \vec{H}_{2\omega} = \frac{qa\omega^2 \cdot \sin(\omega t)}{c^2 r} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\gamma \\ -\cos\beta \end{pmatrix} + \frac{4qa\omega^2 \cdot \cos(2\omega t)}{c^2 r} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\gamma \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega + \vec{E}_{2\omega} = \frac{-qa\omega^2}{c^2 r} \sin(\omega t) \begin{pmatrix} \cos^2\alpha \\ \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos\alpha \cdot \cos\gamma \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{-4qa\omega^2}{c^2 r} \cdot \cos(2\omega t) \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \cdot \cos\alpha \\ \cos^2\beta \\ \cos\beta \cos\gamma \end{pmatrix}$$

3) $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^4 r^2} \left[\vec{n} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \times (\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}) \right] =$

$= \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left[\ddot{\vec{d}} \cdot (\vec{n} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \cdot \vec{n}) - \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \cdot \ddot{\vec{d}}) \right] =$

$= \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \left[\ddot{\vec{d}} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) - \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}})^2 \right] = \frac{\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}}{4\pi c^3 r^2} \cdot \left[\ddot{\vec{d}} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}}) \right]$

$\vec{n} \cdot \ddot{\vec{d}} = -q a \omega^2 \cdot \left(\cos\alpha \cdot \sin(\omega t) + 4 \cos\beta \cdot \cos(2\omega t) \right)$

$$\vec{S} = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{4\pi c^3 r^2} \left(\cos\alpha \cdot \sin(\omega t) + 4 \cos\beta \cdot \cos(2\omega t) \right) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega t)(1+\cos^2\alpha) + 4\cos\beta \cdot \cos(2\omega t) \cdot \cos\alpha \\ 4 \cdot \cos(2\omega t)(1+\cos^2\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos\beta \\ \cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \sin(\omega t) + 4\cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos(2\omega t) \end{pmatrix}$$

4) $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\langle \vec{S} \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}\, dt = \frac{q a^2 \omega^2 \pi}{2 c^3 r^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha (1+\cos^2\alpha) + 16 \cos^2\beta \cdot \cos\alpha \\ 16 \cdot \cos\beta (1+\cos^2\beta) + \cos^2\alpha \cdot \cos\beta \\ \cos^2\alpha \cdot \cos\gamma + 16 \cos^2\beta \cdot \cos\gamma \end{pmatrix}}_{\vec{N}}$$

5) $\cos\gamma = \cos\theta$

$\cos\alpha = \cos\varphi \cdot \sin\theta$ в сферических координатах

$\cos\beta = \sin\varphi \cdot \sin\theta$

$$\langle P \rangle_T = \iint_0^{2\pi} \langle \vec{S} \rangle_T \cdot \vec{n}\, r^2 d\theta d\varphi = \frac{q^2 a^2 \omega^2 \pi}{2 c^3} \iint_0^{2\pi} (\vec{N} \cdot \vec{n})\, d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{q^2 a^2 \omega^2 \pi}{2 c^3} \iint_0^{2\pi} \left(\cos^2\alpha \cdot (1+\cos^2\alpha) + 17 \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\alpha + 16 \cdot \cos^2\beta (1+\cos^2\beta) + \cos^2\alpha \cdot \cos^2\gamma + 16 \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma \right) d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{q^2 a^2 \omega^2 \pi}{2 c^3} \left(\frac{7\pi^2}{16} + \frac{51\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{4} + 64\pi^2 \right) = \frac{543}{16} \frac{q^2 a^2 \omega^2 \pi^3}{c^3}$$