

Cvičení k přednášce Atomová fyzika (NFUF301)

Pavel Stránský

1. listopadu 2022

Obsah

1 Černé těleso	2
1.1 Rayleighův-Jeansův zákon	2
1.2 Planckův zákon	2
1.3 Wienův posunovací zákon	2
1.4 Stefanův-Boltzmannův zákon	2
1.5 Střední energie fotonu	2
1.6 Teplota Slunce	2
1.7 Ztráta hmotnosti Slunce	2
1.8 Hlava	2
1.9 Tělo	3
1.10 Fotonová plachetnice	3
1.11 Vláknová žárovka	3
1.12 Kosmické mikrovlnné záření	3
2 Comptonův jev	4
2.1 Comptonův rozptyl	4
2.2 Comptonova vlnová délka	4
2.3 Úhel vylétávajícího elektronu	4
2.4 Spektrum γ při měření v detektoru	4
3 Práh reakce	5
3.1 Greisenův-Zatsepinův-Kuzminův limit	5
4 Rozptyl	6
4.1 Srážkový parametr a diferenciální účinný průřez	6
4.2 Rutherfordův rozptyl	6
4.3 Rozptyl na tvrdé kouli	6
5 Atom vodíku	7
5.1 Nestabilita klasického atomu	7
5.2 Bohrov model atomu	7
5.3 Vlnové délky spektrálních čar atomu vodíku	7
5.4 Energie fotonů viditelného světla	7
5.5 Makroskopický atom	7
5.6 Degenerace hladin atomu vodíku	7
5.7 Poloměr atomu vodíku	7
5.8 Mnohaelektronový atom	7

1 Černé těleso

1.1 Rayleighův-Jeansův zákon

Odvoďte objemovou hustotu energie černého tělesa pro frekvenci ν a vlnovou délku λ . Předpokládejte, že energie jednotlivých módů elektromagnetického záření může nabývat jakýchkoliv hodnot.

1.2 Planckův zákon

Odvoďte objemovou hustotu energie černého tělesa za předpokladu, že energie jednotlivých energie módů elektromagnetického záření může nabývat jen celočíselných násobků frekvence módů ν ,¹

$$E_n = h\nu n,$$

kde n je přirozené číslo a h je konstanta (Planckova konstanta).

1.3 Wienův posunovací zákon

Odvoďte, pro jakou frekvenci a pro jakou vlnovou délku je objemová hustota energie černého tělesa daná Planckovým zákonem maximální.

1.4 Stefanův-Boltzmannův zákon

Odvoďte celkový zářivý výkon černého tělesa o teplotě T .

1.5 Střední energie fotonu

Určete počet fotonů v jednotkovém objemu pro frekvenci ν a vlnovou délku λ a celkový počet fotonů přes všechny vlnové délky. Jaká je střední energie jednoho fotonu v záření černého tělesa o teplotě T ?

1.6 Teplota Slunce

Je-li Slunce v zenitu, je intenzita slunečního záření dopadající na vodorovný zemský povrch $I_{\oplus} = 1367 \text{ W m}^{-2}$. Za předpokladu, že vyzařování Slunce lze považovat za záření černého tělesa, a znáte-li poloměr Slunce R_{\odot} a vzdálenost Země od Slunce d , určete teplotu na povrchu Slunce.

1.7 Ztráta hmotnosti Slunce

Jakou hmotnost ztratí Slunce vyzařováním za 1 s?

1.8 Hlava

Odhadněte celkový zářivý výkon holé lidské hlavy bez pokrývky. Jaký je rozdíl zářivého výkonu a zářivého příkonu v prostředí, které má $t_{\text{okolí}} = 0^\circ\text{C}$? Bazální metabolismus dospělého člověka je přibližně $P_B = 1700 \text{ kcal den}^{-1}$. Určete, jaké procento energie získané metabolismem se v chladném počasí ztratí hlavou pouhým vyzařováním.²

¹Vztah lze ekvivalentně zapsat pomocí úhlové frekvence ω a redukované Planckovy konstanty \hbar jako

$$E_n = \hbar\omega n. \quad (1.2.1)$$

²Proto je dobré nosit v zimě čepici.

1.9 Tělo

Povrch lidského těla je přibližně $S_{\text{tělo}} \approx 2 \text{ m}^2$. Za předpokladu, že by člověk ztrácel energii pouze vyzařováním, odhadněte, jakou nejmenší teplotu okolí by byl schopen přežít bez oblečení, aniž by zmrzl?

1.10 Fotonová plachetnice

Určete, jaká síla by díky slunečnímu záření působila na čtvercovou plachtu o rozměru $100 \text{ m} \times 100 \text{ m}$, nacházející se na oběžné dráze Země. Jak musí být plachta orientovaná, aby síla byla co největší? Je síla větší, když plachta záření pohltí, nebo když ho odrazí? Pokud by plachta byla vyrobena z běžného alobalu používaného v domácnosti, jakým zrychlením by se pohybovala? S jakým zrychlením by se pohybovala, pokud by se nacházela těsně nad povrchem Slunce?

1.11 Vláknó žárovky

Odhadněte délku a poloměr wolframového vlákna žárovky s příkonem $P = 100 \text{ W}$ zapojené v české elektrické síti, víte-li, že teplota vlákna je $T = 2700 \text{ K}$.

Jaké procento energie vyzařované vláknem je ve viditelné části spektra mezi vlnovými délkami $\lambda \in [380 \text{ nm}, 750 \text{ nm}]$?

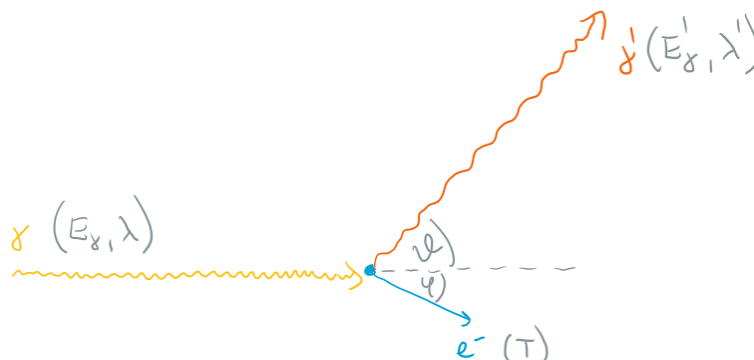
1.12 Kosmické mikrovlnné záření

Kosmické mikrovlnné záření (reliktní záření) je odkaz z počátečních fází vývoje vesmíru. Má charakter přibližně izotropního záření černého tělesa o teplotě $T \approx 2,7 \text{ K}$. Určete, na jaké frekvenci a pro jakou vlnovou délku je hustota energie nejvyšší. Spočítejte, kolik fotonů reliktního záření dopadá na jednotkovou plochu zemského povrchu za sekundu.

2 Comptonův jev

2.1 Comptonův rozptyl

Odvoďte vztah pro energii fotonu E'_γ a jeho vlnovou délku λ' , který se rozptýlil na elektronu na úhel θ (obrázek 1). Energie a vlnová délka fotonu před rozptylem je E_γ a λ . Předpokládejte, že před rozptylem je elektron v klidu. Hmotnost elektronu je m_e .



Obrázek 1: Comptonův rozptyl fotonu γ na elektronu e^- .

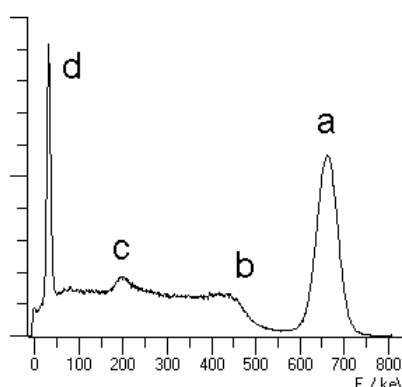
2.2 Comptonova vlnová délka

Vyjádřete vztah pro změnu vlnové délky fotonu při Comptonově rozptylu $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ pomocí Comptonovy vlnové délky $\lambda_c = h/(m_e c)$, kde h je Planckova konstanta, m_e hmotnost elektronu a c rychlost světla.

2.3 Úhel vylétávajícího elektronu

Odvoďte vztah pro úhel φ , pod kterým vylétá elektron po Comptonově rozptylu (obrázek 1).

2.4 Spektrum γ při měření v detektoru



Obrázek 2: Detekované Comptonovské spektrum monochromatického γ záření.

Detektor vysokoenergetických kvant γ funguje na principu Comptonova rozptylu, kdy kinetická energie rozptýlených elektronů vytvoří impuls elektrického proudu, který se následně zesílí a změří.

Předpokládejte, že na detektor dopadá monochromatické záření s energií kvant E_γ vzniklé rozpadem radioaktivního nuklidu. Vysvětlete body a, b, c z obrázku 2; obrázek zobrazuje četnost, se kterou byla detektorem naměřena energie elektronu E . Odhadněte, jaká byla energie E_γ , a z této tabulky určete nuklid, jehož rozpad je měřen.

3 Práh reakce

3.1 Greisenův-Zatsepinův-Kuzminův limit

GZK limit je prahová hodnota energie kosmického protonového záření, nad kterou dojde k interakci protonu s fotonem reliktního záření za vzniku buď protonu a neutrálního pionu, nebo neutronu a kladně nabitého pionu,³

$$p^+ + \gamma_{\text{RZ}} \longrightarrow p^+ + \pi^0, \quad (3.1.1a)$$

$$\longrightarrow n^0 + \pi^+, \quad (3.1.1b)$$

čímž vysokonenergetický foton ztratí energii (je zbržděn). Odbvod'te tento limit pro obě reakce.

³K reakci dochází přes Δ^+ rezonanci.

4 Rozptyl

4.1 Srážkový parametr a diferenciální účinný průřez

Odvoďte vztah mezi srážkovým parametrem $b(\theta)$ a diferenciálním účinným průřezem $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

4.2 Rutherfordův rozptyl

Vztah pro srážkový parametr u Rutherfordova rozptylu (rozptyl α částice na jádru s protonovým číslem Z) na úhel θ je

$$b(\theta) = \frac{d_0}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}, \quad (4.2.1)$$

kde

$$d_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{T} \quad (4.2.2)$$

je *Sommerfeldův parametr* (vzdálenost nejbližšího přiblížení rozptylující a rozptylované částice) a T je kinetická energie α částice v laboratorní soustavě.

Odvoďte výraz pro diferenciální účinný průřez.

4.3 Rozptyl na tvrdé kouli

1. Odvoďte vztah mezi srážkovým parametrem a rozptylem na úhel θ pro tvrdou kouli.
2. Odvoďte výraz pro diferenciální účinný průřez.
3. Určete celkový účinný průřez.

5 Atom vodíku

5.1 Nestabilita klasického atomu

Nabitá částice s nábojem q pohybující se se zrychlením a vyzařuje podle klasické teorie elektromagnetického záření s výkonem

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{c^3} a^2, \quad (5.1.1)$$

kde ϵ je permitivita a c je rychlost světla. Spočítejte, za jak dlouho by dopadl elektron atomu vodíku na jádro, kdyby se pohyboval jako klasická nabitá částice z kruhové dráhy o poloměru daném Bohrovým poloměrem.

Určete průměrný vyzařovaný výkon.

5.2 Bohrov model atomu

Odvoďte možné hodnoty energií elektronu atomu vodíku za Bohrova předpokladu, že elektron obíhá okolo atomového jádra a že pokud jeho moment hybnosti nabývá celočíselných násobků redukované Planckovy konstanty \hbar , nedochází ke ztrátě energie Larmorovým vyzařováním.

Jak se změní výsledek, pokud bude mít jádro náboj Ze , $Z > 1$?

5.3 Vlnové délky spektrálních čar atomu vodíku

Odvoďte nejkratší a nejdelší vlnovou délku pro Lymanovu, Balmerovu a Paschenovu sérii spektrálních čar atomu vodíku. Které z těchto čar budou ležet ve viditelném světle?

5.4 Energie fotonů viditelného světla

Určete rozmezí energií fotonů viditelného světla.

5.5 Makroskopický atom

Pro jak velké hlavní kvantové číslo bude mít atom vodíku rozměr $r = 1$ cm?

5.6 Degenerace hladin atomu vodíku

Určete stupeň degenerace (počet různých kombinací kvantových čísel, kterými lze získat danou energetickou hladinu) hladiny atomu vodíku s hlavním kvantovým číslem n .

5.7 Poloměr atomu vodíku

Ze znalosti radiální části vlnové funkce základního stavu atomu vodíku určete střední poloměr atomu.

5.8 Mnohaelektronový atom

Na základě jednoduchého Bohrova modelu atomu odhadněte rozměr atomu s protonovým číslem Z .

1. Jaký je poloměr kruhové dráhy elektronu v Bohrově modelu, pokud jádro nese náboj Ze a hladina má kvantové číslo n ? Vyjádřete v násobcích Bohrova poloměru a_0 pro atom vodíku.

2. Předpokládejte, atomové jádro s nábojem Ze doplníte Z elektrony, které mezi sebou navzájem neinteragují, a zanedbejte i spin-orbitální vazbu a další případné interakce. Jaký bude poloměr výsledného atomu v případě, že je ve valenční slupce jen jeden elektron, a v případě, že je valenční slupka zcela zaplněna? Budou atomy větší, nebo menší v porovnání s atomem vodíku?

K výpočtu použijte vzorec

$$\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N}{6}(N+1)(2N+1). \quad (5.8.1)$$