Cvičení k přednášce Atomová fyzika (NFUF301)

Pavel Stránský

21. října 2025

Obsah

Literatura

- Arthur Beiser, *Úvod do moderní fyziky* (Academia Praha, 1975) - přeloženo z anglického originálu *Perspectives of Modern Physics* (McGraw-Hill, New York, 1969).
- Paul Ewart, *Atomic Physics* (Morgan & Claypool Publishers, 2019).
- Gordon W.F. Drake, *Springer Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics* (Springer Nature Switzerland AG, 2023).
- G.L. Squires, *Quantum mechanics*, Encyclopedia Britannica, 16. říjen 2024, https://www.britannica.com/science/quantum-mechanics-physics.

1 Černé těleso

1.1 Rayleighův-Jeansův zákon

Odvoďte objemovou hustotu energie černého tělesa pro frekvenci ν a vlnovou délku λ. Předpokládejte, že energie jednotlivých módů elektromagnetického záření může nabývat jakýchkoliv hodnot.

1.2 Planckův zákon

Odvoďte objemovou hustotu energie černého tělesa za předpokladu, že energie jednotlivých energie módů elektromagnetického záření může nabývat jen celočíselných násobků frekvence módů ν,[1]

$$E_n = h\nu n,$$

kde n je přirozené číslo a h je konstanta (Planckova konstanta).

1.3 Wienův posunovací zákon

Odvoďte, pro jakou frekvenci a pro jakou vlnovou délku je objemová hustota energie černého tělesa daná Planckovým zákonem maximální.

1.4 Stefanův-Boltzmannův zákon

Odvoďte celkový zářivý výkon černého tělesa o teplotě T.

1.5 Střední energie fotonu

Určete počet fotonů v jednotkovém objemu pro frekvenci ν a vlnovou délku λ a celkový počet fotonů přes všechny vlnové délky. Jaká je střední energie jednoho fotonu v záření černého tělesa o teplotě T?

1.6 Teplota Slunce

Je-li Slunce v zenitu, je intenzita slunečního záření dopadající na vodorovný zemský povrch $I_\oplus = 1367\,\mathrm{W m^{-2}}$. Za předpokladu, že vyzařování Slunce lze považovat za záření černého tělesa, a znáte-li poloměr Slunce $R_\odot$ a vzdálenost Země od Slunce d, určete teplotu na povchu Slunce.

[1] Vztah lze ekvivalentně zapsat pomocí úhlové frekvence ω a redukované Planckovy konstanty $\hbar$ jako

$$E_n = \hbar\omega n. \tag{1.2.1}$$

1.7 Ztráta hmotnosti Slunce

Jakou hmotnost ztratí Slunce vyzařováním za 1 s?

1.8 Hlava

Odhadněte celkový zářivý výkon holé lidské hlavy bez pokrývky. Jaký je rozdíl zářivého výkonu a zářivého příkonu v prostředí, které má $t_{\text{okolí}} = 0\,°\text{C}$? Bazální metabolismus dospělého člověka je přibližně $P_B = 1700\,\text{kcal}\,\text{den}^{-1}$. Určete, jaké procento energie získané metabolismem se v chladném počasí ztratí hlavou pouhým vyzařováním.[2]

1.9 Tělo

Povrch lidského těla je přibližně $S_{\text{tělo}} \approx 2\,\text{m}^2$. Za předpokladu, že by člověk ztrácel energii pouze vyzařováním, odhadněte, jakou nejmenší teplotu okolí by byl schopen přežít bez oblečení, aniž by zmrzl?

1.10 Fotonová plachetnice

Určete, jaká síla by díky slunečnímu záření působila na čtvercovou plachtu o rozměru $100\,\text{m} \times 100\,\text{m}$, nacházející se na oběžné dráze Země. Jak musí být plachta orientovaná, aby síla byla co největší? Je síla větší, když plachta záření pohltí, nebo když ho odrazí? Pokud by plachta byla vyrobena z běžného alobalu používaného v domácnosti, jakým zrychlením by se pohybovala? S jakým zrychlením by se pohybovala, pokud by se nacházela těsně nad povrchem Slunce?

1.11 Vlákno žárovky

Odhadněte délku a poloměr wolframového vlákna žárovky s příkonem $P = 100\,\text{W}$ zapojené v české elektrické síti, víte-li, že teplota vlákna je $T = 2700\,\text{K}$.

Jaké procento energie vyzařované vláknem je ve viditelné části spektra mezi vlnovými délkami $\lambda \in [380\,\text{nm}, 750\,\text{nm}]$?

1.12 Kosmické mikrovlnné záření

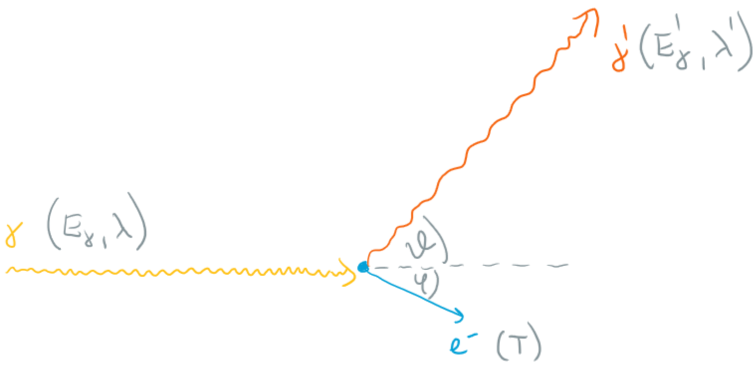
Kosmické mikrovlnné záření (reliktní záření) je odkaz z počátečních fází vývoje vesmíru. Má charakter přibližně izotropního záření černého tělesa o teplotě $T \approx 2{,}7\,\text{K}$. Určete, na jaké frekvenci a pro jakou vlnovou délku je hustota energie nejvyšší. Spočítejte, kolik fotonů reliktního záření dopadá na jednotkovou plochu zemského povrchu za sekundu.

[2] Proto je dobré nosit v zimě čepici.

2 Částicový charakter elektromagnetického záření

2.1 Comptonův rozptyl

Odvoďte vztah pro energii fotonu E'_γ a jeho vlnovou délku λ', který se rozptýlil na elektronu na úhel θ (obrázek 1). Energie a vlnová délka fotonu před rozptylem je E_γ a λ. Předpokládejte, že před rozptylem je elektron v klidu. Hmotnost elektronu je m_e.



Obrázek 1: Comptonův rozptyl fotonu γ na elektronu e^-.

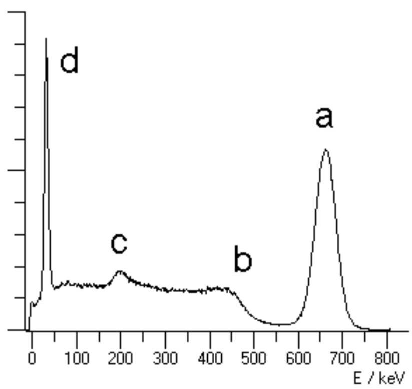
2.2 Comptonova vlnová délka

Vyjádřete vztah pro změnu vlnové délky fotonu při Comptonově rozptylu $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ pomocí Comptonovy vlnové délky $\lambda_c = h/(m_e c)$, kde h je Planckova konstanta, m_e hmotnost elektronu a c rychlost světla.

2.3 Úhel vylétávajícího elektronu

Odvoďte vztah pro úhel φ, pod kterým vylétá elektron po Comptonově rozptylu (obrázek 1).

2.4 Spektrum γ při měření v detektoru



Obrázek 2: Detekované Comptonovské spektrum monochromatického γ záření.

Detektor vysokoenergetických kvant γ funguje na principu Comptonova rozptylu, kdy kinetická energie rozptýlených elektronů vytvoří impuls elektrického proudu, který se následně zesílí a změří.

Předpokládejte, že na detektor dopadá monochromatické záření s energií kvant E_γ vzniklé rozpadem radioaktivního nuklidu. Vysvětlete body a, b, c z obrázku 2; obrázek zobrazuje četnost, se kterou byla detektorem naměřena energie elektronu E. Odhadněte, jaká byla energie E_γ, a z této tabulky určete nuklid, jehož rozpad je měřen.

3 Práh reakce

3.1 Greisenův-Zatsepinův-Kuzminův limit

GZK limit je prahová hodnota energie kosmického protonového záření, nad kterou dojde k interakci protonu s fotonem reliktního záření za vzniku buď protonu a neutrálního pionu, nebo neutronu a kladně nabitého pionu,[3]

$$p^+ + \gamma_{\mathrm{RZ}} \longrightarrow p^+ + \pi^0, \tag{3.1.1a}$$

$$\longrightarrow n^0 + \pi^+, \tag{3.1.1b}$$

čímž vysokonenergetický foton ztratí energii (je zbržděn). Odbvoďte tento limit pro obě reakce.

3.2 Vznik elektron-pozitronového páru

Určete, jakou energii musí mít foton, aby mohl způsobit vznik páru elektron-positron. Proč k uvedené reakci nejsnáze dochází v pevných látkách? Je možné, aby elektron-pozitronový pár vznikl při lékařském rentgenu?

3.3 Fotoefekt

Vysvětlete, proč nemůže foton odevzdat veškerou svou energii a hybnost volnému elektronu. K fotoelektrickému jevu tedy může dojít jen tehdy, když foton zainteraguje s vázaným elektronem.

[3] K reakci dochází přes Δ^+ rezonanci.

4 Rozptyl

4.1 Srážkový parametr a diferenciální účinný průřez

Odvoďte vztah mezi srážkovým parametrem $b(\theta)$ a diferenciálním účinným průřezem $\frac{d\sigma}{d\Omega}$.

4.2 Rutherfordův rozptyl

Vztah pro srážkový parametr u Rutherfordova rozptylu (rozptyl α částice na jádru s protonovým číslem Z) na úhel θ je

$$b(\theta) = \frac{d_0}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}, \tag{4.2.1}$$

kde

$$d_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{T} \tag{4.2.2}$$

je *Sommerfeldův parametr* (vzdálenost nejbližšího přiblížení rozptylující a rozptylované částice) a T je kinetická energie α částice v laboratorní soustavě.

Odvoďte výraz pro diferenciální účinný průřez.

4.3 Poloměr atomu

Geiger a Marsden při provádění experimentu, který vedl Rutherforda k formulování modelu atomu s atomovým jádrem, používali rozptyl α částic získaných z izotopu ^{222}Ra s kinetickou energií $T = 5{,}6\,\mathrm{MeV}$. Pokud na fólii zlata došlo ke zpětnému rozptylu, co to říkalo o poloměru atomového jádra?

4.4 Rozptyl na tvrdé kouli

1. Odvoďte vztah mezi srážkovým parametrem a rozptylem na úhel θ pro tvrdou kouli.

2. Odvoďte výraz pro diferenciální účinný průřez.

3. Určete celkový účinný průřez.

5 Atom vodíku

5.1 Klasický atom vodíku

Spočítejte frekvenci kruhového pohybu elektronu v klasickém modelu vodíkového atomu (elektron se nachází ve vzdálenosti Bohrova poloměru a_0 od atomového jádra). Pokud by elektron vyzařoval elektromagnetické záření o této frekvenci, v jaké oblasti spektra by se nacházelo?

5.2 Nestabilita klasického atomu

Nabitá částice s nábojem q pohybující se se zrychlením a vyzařuje podle klasické teorie elektromagnetického záření s výkonem

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{4\pi\epsilon}\frac{1}{c^3}a^2, \tag{5.2.1}$$

kde ϵ je permitivita a c je rychlost světla.[4]

- Pokud by se elektron v atomu vodíku choval jako klasická nabitá částice, spočítejte, za jak dlouho by dopadl na jádro z kruhové dráhy o poloměru daném Bohrovým poloměrem.
- Určete průměrný vyzařovaný výkon.

5.3 Bohrův model atomu

Odvoďte možné hodnoty energií elektronu atomu vodíku za Bohrova předpokladu, že elektron obíhá okolo atomového jádra díky elektrostatické síle mezi ním a protonem v jádře a že pokud jeho moment hybnosti nabývá celočíselných násobků redukované Planckovy konstanty $\hbar$, nedochází ke ztrátě energie Larmorovým vyzařováním.

Jak se změní výsledek, pokud bude mít jádro náboj Ze, $Z > 1$?

5.4 Vlnové délky spektrálních čar atomu vodíku

Odvoďte nejkratší a nejdelší vlnovou délku pro Lymanovu, Balmerovu a Paschenovu sérii spektrálních čar atomu vodíku. Které z těchto čar budou ležet ve viditelném světle?

5.5 Energie fotonů viditelného světla

Určete rozmezí energií fotonů viditelného světla.

5.6 Makroskopický atom

Pro jak velké hlavní kvantové číslo bude mít atom vodíku rozměr $r = 1\,\mathrm{cm}$?

5.7 Degenerace hladin atomu vodíku

Určete stupeň degenerace (počet různých kombinací kvantových čísel, kterými lze získat danou energetickou hladinu) hladiny atomu vodíku s hlavním kvantovým číslem n.

5.8 Poloměr atomu vodíku

Ze znalosti radiální části vlnové funkce základního stavu atomu vodíku určete vzdálenost od středu jádra, na které najdete elektron nejpravděpodobněji, a střední poloměr atomu (střední hodnotu polohy).

[4] Vztah lze najít pod názvem *Larmorův vztah*. Záření se nazývá podle charakteru zrychlení *synchrotronové záření* nebo *brzdné záření*.

6 Víceelektronové atomy

6.1 Unsöldův teorém

Dokažte Unsöldův teorém, který říká, že pro dané orbitální kvantové číslo l je součet hustot pravděpodobnosti pro všechny stavy s magnetickým kvantovým číslem $m_l = -l, \ldots, l$ nezávislý na úhlech θ, ϕ. Teorém dokažte pro $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$.

6.2 Mnohaelektronový atom

Na základě Bohrova modelu atomu odhadněte rozměr atomu s protonovým číslem Z.

1. Jaký je poloměr kruhové dráhy elektronu v Bohrově modelu, pokud jádro nese náboj Ze a hladina má kvantové číslo n? Vyjádřete v násobcích Bohrova poloměru a_0 pro atom vodíku.
2. Spočítejte poloměr atomu vzácných plynů (zaplněná valenční slupka) a alkalických kovů (jeden elektron ve valenční slupce) a porovnejte s Bohrovým poloměrem a_0.

7 Molekuly a chemická vazba

7.1 Výhřevnost uhlí odhadem

Odhadněte výhřevnost uhlí na základě hrubého odhadu, že při reakci hoření uhlí

$$C + O_2 \longrightarrow CO_2 \tag{7.1.1}$$

se vznikem jedné molekuly uvolní energie 4 eV. Kolik váží oxid uhličitý vzniklý spálením 1 kg uhlí?

7.2 Výhřevnost uhlí přesně

Spočítejte výhřevnost uhlí přesně, pokud znáte slučovací enthalpii

$$\Delta H_f^{\Theta}(CO_2) = -393\,\mathrm{kJ\,mol^{-1}}. \tag{7.2.1}$$

O kolik je důsledkem relativistického vztahu mezi hmotností a energií vzniklý oxid uhličitý lehčí, než jsou hmotnosti konstituentů před reakcí?

7.3 Hustoty látek

Odhadněte rozmezí hustot kapalin a pevných látek.

7.4 Odhadněte výšku hor

Předpokládejte, že hory jsou tvořeny křemenem (oxidem křemičitým SiO_2). Odhadněte maximální výšku hor na Zemi a na Marsu.[5] Odhadněte, jaká je minimální velikost vesmírného objektu, aby se začal zakulacovat.

[5] Úloha je inspirována článkem [1].

8 Nerozlišitelné částice

8.1 Kvantový tlak

Určete střední energii jedné částice nerelativistického fermionového plynu o hustotě počtu částic ρ. Určete, jaký je v tomto plynu tlak za předpokladu, že termodynamickou teplotu lze zanedbat.

8.2 Relativistický kvantový tlak

Zopakujte řešení předchozí úlohy pro ultrarelativistický fermionový plyn (rychlosti částic plynu jsou tak velké, že lze zanedbat jejich klidovou hmotnost).

8.3 Poloměr hvězdy

Odhadněte poloměr vyhořelé hvězdy (bílého trpaslíka) s hmotností M. Předpokládejte, že hvězda je složena z uhlíků ^{12}C a je homogenní (její hustota je konstantní, nezávislá na vzdálenosti od středu hvězdy). Spočítejte číselně pro $M = M_\odot$ (poloměr vyhořelého Slunce).

8.4 Chandrasekharova mez

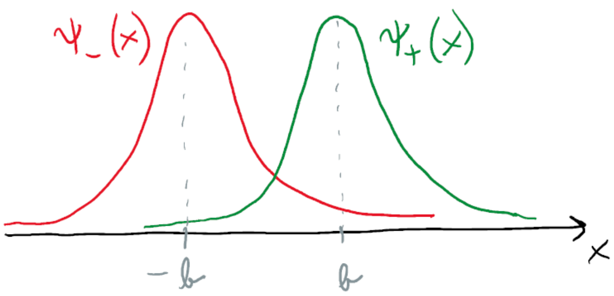
Odhadněte Chandrasekharovu mez pro bílého trpaslíka (jedná se o mezní hmotnost, nad kterou již kvantový tlak elektronového plynu neudrží hvězdu proti gravitační síle a hvězda se zhroutí do neutronové hvězdy nebo černé díry).

8.5 Interakce způsobená nerozlišitelností volných částic

Uvažujte dvě nerozlišitelné volné částice o hmotnosti m pohybující se na přímce. Jejich vlnové funkce jsou dány gaussovskými balíky dobře lokalizovanými okolo bodů $-b$ a $+b$ (obrázek),

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x\mp b)^2}, \tag{8.5.1}$$

kde $\sigma \ll b$ určuje určuje šířku balíku.



1. Určete vlnovou funkci $\psi(x_1, x_2)$ systému těchto dvou nerozlišitelných částic a spočítejte její normalizaci. Vlnové funkce mohou být symetrické (bosony, fermiony s antisymetrickým spinovým stavem) nebo antisymetrické (fermiony se symetrickým spinovým stavem). Uvažujte oba dva případy výměnné symetrie.

2. Spočítejte střední hodnotu energie systému dvou nerozlišitelných částic

$$E = \left\langle \psi \middle| \hat{\mathsf{H}} \middle| \psi \right\rangle = \int \psi^*(x_1, x_2)\hat{\mathsf{H}}\psi(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2. \tag{8.5.2}$$

3. Spočítejte efektivní sílu
$$F \equiv -\frac{\partial E}{\partial b}. \tag{8.5.3}$$
Bude tato síla přitažlivá nebo odpudivá a jak bude záviset na symetrii vlnové funkce?

4. Určete jednočásticovou hustotu pravděpodobnosti, že nalezneme částici v bodě x, a porovnejte ji s hustotou pravděpodobnosti pro rozlišitelné částice.

8.6 Helium

1. Napište Hamiltonián pro elektronový obal atomu helia. Uvažujte, že atomové jádro je bodová částice mnohem těžší než elektronový obal a zanedbejte jaderné pohyby a spin-orbitální interakci. Elektrony jsou nerozlišitelné fermiony se spinem 1/2.

2. V nultém přiblížení zanedbejte vzájemnou interakci obou elektronů a určete základní stav a první excitovaný stav atomu helia (energie a vlnové funkce). V základním stavu bude spinový stav singletní (parahelium) nebo tripletní (ortohelium)?

3. V prvním přiblížení uvažujte vzájemnou interakci obou elektronů jako poruchu. Určete opravu k energii, která se spočítá jako střední hodnota interakčního členu z Hamiltoniánu pro systém ve stavu popsaném vlnovými funkcemi z předchozího bodu.

8.7 Pozitronium

Pozitronium je vázaný systém elektronu a pozitronu.[6] Určete jeho poloměr a energetické spektrum a porovnejte se spektrem atomu vodíku.

Poznámka: Spin elektronu a pozitronu se opět složí na singletní $^1\mathrm{S}_0$ stav (parapozitronium) a tripletní $^3\mathrm{S}_1$ stav (ortopozitronium). Parapozitronium se rozpadá do sudého počtu fotonů, a má tedy mnohem kratší dobu života, $\tau_0 \approx 0{,}12\,\mu$s. Ortopozitronium má sice energii základního stavu o zhruba 1 meV výše než parapozitronium, ale rozpadá se do lichého počtu fotonů s dobou života více jak tisíckrát delší, $\tau_1 \approx 140\,\mu$s.

[6] Až na výjimky je každé *-onium* vázaný systém částice a své antičástice.

9 Kvantové provázání

9.1 Kvantová teleportace

Popište, jakým způsobem lze přenést stav kvantového qubitu z místa A do místa B pomocí klasického komunikačního kanálu. Tento jev se nazývá kvantová teleportace.

9.2 Provázaný stav

Dokažte, že provázaný stav dvou qubitů

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{\uparrow}\rangle_1 |{\uparrow}\rangle_2 + |{\downarrow}\rangle_1 |{\downarrow}\rangle_2 \right) \tag{9.2.1}$$

nelze faktorizovat, tj. nelze ho napsat ve tvaru

$$\left(\alpha |{\uparrow}\rangle + \beta |{\downarrow}\rangle \right)_1 \left(\gamma |{\uparrow}\rangle + \delta |{\downarrow}\rangle \right)_2 , \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}. \tag{9.2.2}$$

9.3 Stav dvouqubitového systému

Rozhodněte, zda stav dvou qubitů

$$|\Phi\rangle = \mathcal{N} \left(2 |{\uparrow\uparrow}\rangle + \mathrm{i} |{\downarrow\uparrow}\rangle + 4\mathrm{i} |{\uparrow\downarrow}\rangle - 2 |{\downarrow\downarrow}\rangle \right) \tag{9.3.1}$$

je provázaný, a svou odpověď zdůvodněte. Nalezněte normalizační faktor $\mathcal{N}$.

V zápisu stavu je použito zjednodušeného značení $|{\uparrow\downarrow}\rangle \equiv |{\uparrow}\rangle_1 \otimes |{\downarrow}\rangle_2$ (analogicky i pro ostatní kombinace spinu nahoru a dolů).

10 Užitečné vztahy

10.1 Vzorce

- Planckův vyzařovací zákon ve frekvencích ν

$$\rho(\nu, T)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \nu^3\,\mathrm{d}\nu \tag{10.1.1}$$

- Planckův vyzařovací zákon ve vlnových délkách λ

$$\rho(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda = 8\pi hc \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda^5} \tag{10.1.2}$$

- Wienův posunovací zákon

$$\lambda_{\max} = \frac{\alpha}{T} \qquad \alpha \approx 2{,}90 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mK} \tag{10.1.3}$$

$$\nu_{\max} = \beta T \qquad \beta \approx 5{,}83 \cdot 10^{10}\,\mathrm{K^{-1}s^{-1}} \tag{10.1.4}$$

- Stefanův-Boltzmannův zákon

$$M = \sigma T^4 \qquad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} \tag{10.1.5}$$

- Vztah mezi energií E, vlnovou délkou λ a frekvencí ν kvant elektromagnetického záření

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{10.1.6}$$

- Comptonův rozptyl

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c\,(1 - \cos\theta) \qquad \lambda_c = \frac{h}{m_e c} \tag{10.1.7}$$

- Rutherfordův rozptyl částice s nábojem ze a kinetickou energií T na jádře s nábojem Ze

$$b = \frac{d_0}{2} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \qquad d_0 = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{T} \tag{10.1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta} = \left(\frac{d_0}{4}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \tag{10.1.9}$$

- Spektrum vodíkupodobného atomu s centrálním nábojem Ze a obíhající částicí hmotnosti m

$$E_n = R_\infty \frac{m}{m_e} Z^2 \frac{1}{n^2} \tag{10.1.10}$$

- Relativistický vztah mezi energií E a hybností p

$$E^2 = \left(Mc^2\right)^2 = \left(M_0 c^2\right)^2 + (pc)^2 \tag{10.1.11}$$

10.2 Konstanty

- Planckova konstanta

$$h \approx 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \tag{10.2.1}$$
$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}. \tag{10.2.2}$$

- Rychlost světla ve vakuu

$$c \approx 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1} \tag{10.2.3}$$

- Hmotnost elektronu

$$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \approx 511\,\mathrm{keV} \tag{10.2.4}$$

- Elementární náboj

$$e \approx 1.60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{10.2.5}$$

- Konstanta jemné struktury

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{10.2.6}$$

- Rydbergova konstanta

$$R_\infty = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{m_e}{2h^2} = hc\frac{\alpha^2}{2\lambda_c} \approx 13{,}6\,\mathrm{eV} \tag{10.2.7}$$

- Comptonova vlnová délka

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} \tag{10.2.8}$$

- Bohrův poloměr

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}\frac{\hbar^2}{m_e} = \frac{\lambda_c}{\alpha} \approx 5{,}3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \tag{10.2.9}$$

- Boltzmannova konstanta

$$k_B \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \tag{10.2.10}$$

- Termodynamická teplota

$$T(0\,^\circ\mathrm{C}) \approx 273{,}15\,\mathrm{K} \tag{10.2.11}$$

- Avogadrova konstanta

$$N_A \approx 6{,}023 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1} \tag{10.2.12}$$

10.3 Jednoelektronový atom

- Radiální vlnové funkce (Z je náboj jádra v jednotkách e)

$$R_{10}(r) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{a_0}} \tag{10.3.1}$$

$$R_{20}(r) = 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{2a_0}} \tag{10.3.2}$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right) \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{2a_0}} \tag{10.3.3}$$

$$R_{30}(r) = 2\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2Zr}{3a_0} + \frac{2Z^2r^2}{27a_0^2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{3a_0}} \tag{10.3.4}$$

$$R_{31}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)\left(1 - \frac{Zr}{6a_0}\right) \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{3a_0}} \tag{10.3.5}$$

$$R_{32}(r) = \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{3a_0}} \tag{10.3.6}$$

Domácí úkol – Fotonová plachetnice *(zadáno: 1.10.2024)*

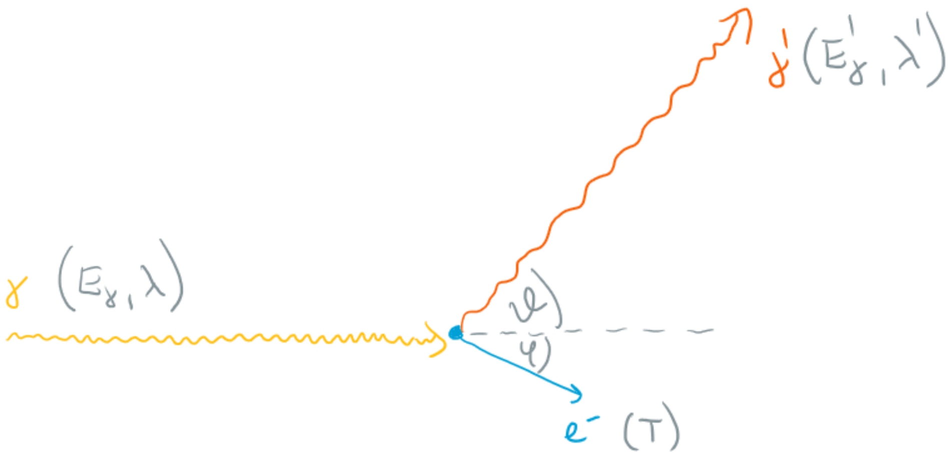
Čtvercová plachta o rozměrech $d \times d$ se nachází ve vesmíru ve vzdálenosti R od Slunce.

1. Určete, jaká síla bude na plachtu působit díky slunečnímu záření, víte-li, že zářivý výkon Slunce na povrchu Země je I_z.
2. Jak musí být plachta orientovaná, aby byla síla od záření co největší?
3. Je síla větší, když plachta záření pohltí, nebo když ho odrazí?
4. Zahrňte do výpočtu i gravitační sílu působící na plachtu. Předpokládejte, že plachta je vyrobena z hliníku (alobalu) o hustotě ρ. Jakou musí mít tloušťku, aby tlak záření překonal gravitační sílu?

Řešte nejprve obecně, pak pro číselné hodnoty $\rho = 2700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $d = 100\,\mathrm{m}$, $I_z = 1370\,\mathrm{W/m^2}$. Využijte vztahu mezi energií a hybností fotonů $E = pc$.

Domácí úkol – Elektron při Comptonově rozptylu *(zadáno: 15.10.2024)*

- Odvoďte vztah pro úhel φ, pod kterým vylétá elektron e^- po Comptonově rozptylu, a vyjádřete ho pomocí vlnových délek nalétávajícího a rozptýleného fotonu λ, λ' a Comptonovy vlnové délky $\lambda_C = h/(m_e c)$.



- Zakreslete graf závislosti $\varphi(\lambda')$ pro $\lambda' \in (\lambda, \lambda + 2\lambda_C)$ a vhodně zvolené λ.

Nápověda: Vyjděte ze zákona zachování hybnosti ve směru nalétávajícího fotonu γ a ve směru kolmém.

Domácí úkol – Klasický model atomu vodíku *(zadáno: 12.11.2024)*

- Nalezněte vztah pro frekvenci kruhového pohybu elektronu v klasickém modelu vodíkového atomu za předpokladu, že elektron neztrácí energii vyzařováním a že se nachází ve vzdálenosti $r = \beta a_0$ od protonu, kde a_0 je Bohrův poloměr. Výsledný vztah **vyjádřete pomocí konstanty jemné struktury** α. Vypočítejte číselně pro $\beta = 1$.

- Jaká bude velikost β, pokud elektron obíhá proton se zadanou frekvencí f? Jaké hodnotě kvantového čísla n Bohrova modelu atomu vodíku by odpovídala tato oběžná dráha? Vyřešte obecně a pak pro číselnou hodnotu $f = 1\,\mathrm{Hz}$.

- Na cvičení jsme si ukázali, že obíhající elektron ve skutečnosti kvůli dostředivému zrychlení postupně ztrácí energii elektromagnetickým vyzařováním, a odvodili jsme vztah pro dobu T, za kterou elektron v atomu vodíku „spadne“ na proton. Nalezněte vztah pro okamžitý vyzařovaný výkon v čase $P(t)$ a vykreslete graf pro $t \in [0, T]$. Elektron je v čase $t = 0$ na orbitě s poloměrem a_0.

Domácí úkol – Rozměr vzbuzeného vodíku *(zadáno: 26.11.2024)*

Vodík se nachází ve vzbuzeném $2s$ stavu. Jeho radiální část vlnové funkce je tedy

$$R_{20}(r) = 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_0}}\,.$$

1. Nalezněte vzdálenost r_p od jádra, na které naměříte elektron s největší pravděpodobností.
2. Určete střední poloměr atomu (střední hodnotu vzdálenost $\langle r\rangle$ od jádra, na které naměříte elektron).
3. Jak se změní měřený rozměr atomu, pokud se vodík bude nacházet ve $2p$ stavu, jehož radiální část vlnové funkce je
$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{r}{a_0}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a_0}}\,?$$
4. Jaká bude vlnová délka vyzářeného fotonu, když elektron spadne ze vzbuzeného stavu do základního stavu? Bude možné tento přechod pozorovat pouhým okem?
5. Vyhledejte si vyjádření kulových funkcí pro p podslupku a dokažte, že pro ni platí Unsöldův teorém (tj. že tato uzavřená podslupka má sféricky symetrické rozložení náboje).

Domácí úkol – Zhroucení Slunce *(zadáno: 10.12.2025)*

Předpokládejte, že naše Slunce se po vyhoření zhroutí a vznikne z něj bílý trpaslík tvořený pouze uhlíkem ^{12}C. Předpokládejte, že hustota trpaslíka je konstantní.

1. Spočítejte číselnou hodnotu Fermiho energie E_F nerelativistického elektronového degenerovaného plynu a odpovídající Fermiho rychlost elektronů v_F danou vztahem
$$E_F = \frac{1}{2} m_e v_F^2 .$$
Vyjádřete Fermiho rychlost v násobcích rychlosti světla. Je nerelativistická aproximace oprávněná?

2. Na základě uvedených předpokladů určete číselně poloměr vzniklého bílého trpaslíka.

3. Předpokládejte, že degenerovaný elektronový plyn je ultrarelativistický a určete Chandrasekharovu mez. Najděte její číselnou hodnotu vyjádřenou v násobcích hmotnosti Slunce.

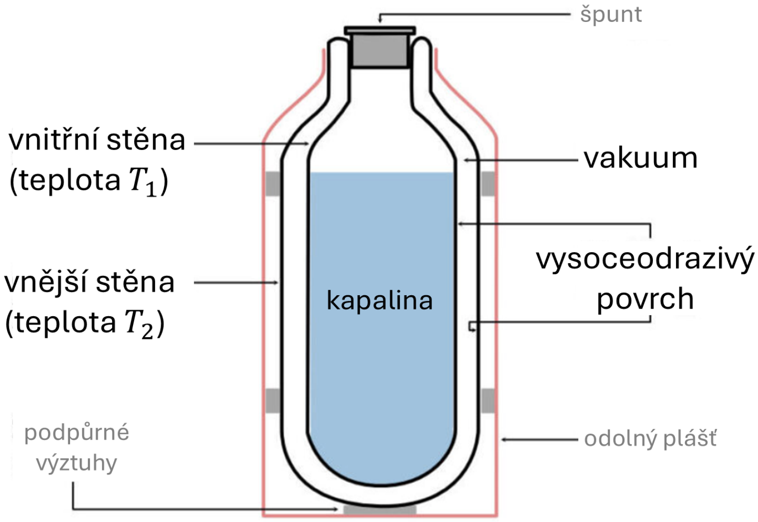
4. Je-li hvězda těžší, než kolik udává Chandrasekharova mez, dojde k jejímu dalšímu zhroucení a vznikne neutronová hvězda. Spočítejte mezní hmotnost pro sférickou hvězdu o konstantní hustotě tvořenou *degenerovaným neutronovým plynem* (tj. předpokládejte, že hvězda je tvořena pouze neutrony). Mezní hmotnost vyjádřete v násobcích hmotnosti Slunce.

Poznámka: Předpoklad konstantní hustoty je velmi hrubý. Po započtení hustoty správně rostoucí s hloubkou pod povrchem a dalších korekcí vycházejí obě meze nižší.

Poznámka: Mezní hmotnost pro neutronovou hvězdu se nazývá Tolmanova-Oppenheimerova-Volkoffova mez. Po překročení této meze dojde k dalšímu zhroucení a vzniku černé díry.

Domácí úkol – Dewarova nádoba (termoska) *(zadáno: 30.9.2025)*

Dewarova nádoba se používá k udržení teploty kapalin, a to jak studených (například kapalný dusík), tak horkých (například káva nebo čaj). Nádoba má dvojitou lesklou stěnu z vysoceodrazivého materiálu, uvnitř které je vakuum. Vakuum zabraňuje přenosu tepla vedením a prouděním, zatímco lesklé stěny minimalizují přenos tepla zářením.



Uvažujte že reflexivita stěn nádoby je $r = 0{,}98$ (platí například pro postříbřené povrchy). Předpokládejte, že $r + \epsilon = 1$, kde ϵ je emisivita povrchu. Teplotu vnitřní stěny nádoby označme T_1 a teplotu vnější stěny T_2, přičemž $T_2 > T_1$.

1. Jaká je intenzita vyzařování vnitřního a vnějšího povrchu nádoby?
2. Jaký je čistý tok energie z vnější stěny na vnitřní stěnu?
3. Kolikrát je tento tok menší, než kdyby byla reflexivita nulová, tedy kdyby stěny nádoby vyzařovaly jako černé těleso?

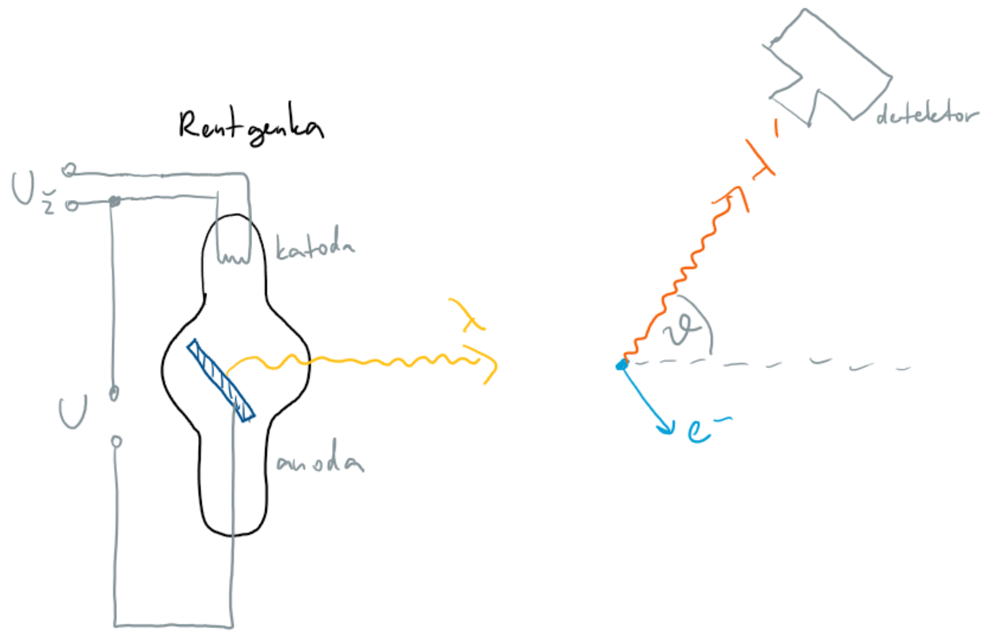
Domácí úkol – Rentgenka *(zadáno: 21.10.2025)*

Rentgenka je vakuová trubice, ve které vylétávají ze žhavené katody elektrony, které se urychlují napětím U a které dopadají na anodu. Rentgenové záření pak vzniká dvěma procesy:

1. Urychlený elektron vyrazí elektron z atomového obalu materiálu anody (často se jedná o wolfram). Do uvolněné mezery „spadnou“ elektrony z vyšších energetických hladin atomu nebo volné elektrony, což vede k vyzáření fotonu s ostrou hodnotou energie.

2. Urychlený elektron je v materiálu anody velmi rychle zabržděn, přičemž vyzáří brzdné záření se spojitým energetickým spektrem.

V další části příkladu uvažujte pouze první proces a předpokládajete, že rentgenové záření je monochromatické (všechny fotony vylétávající z anody mají stejnou energii).



1. Jaká musí být vlnová délka λ rentgenového záření, aby se po rozptylu na elektronech o úhel $\vartheta = 60^o$ zvětšila o $\alpha = 4\,\%$?

2. Vyjádřete energii jednotlivých fotonů rentgenového záření v jednotkách [eV].

3. Jakou vlnovou délku naměříte při rozptylu na úhel 90^o a při zpětném rozptylu?

4. Jaká bude rychlost elektronu rozptýleného elektronu po zpětném rozptylu? Předpokládá se, že před rozptylem byl elektron v klidu.

5. Jaké musí být minimální napětí U mezi katodou a anodou rentgenky, abyste získali toto rentgenové záření o vlnové délce λ?

Odkazy

[1] Victor F. Weisskopf. „Of Atoms, Mountains, and Stars: A Study in Qualitative Physics“. In: *Science* 187.4177 (ún. 1975), s. 605–612. DOI: 10.1126/science.187.4177.605.