

# Systematika jaderných hmotností

Pavel Stránský

7. září 2022

## 1 Jaderné jednotky

V jaderné a částicové fyzice se využívá Einsteinem odvozená ekvivalence mezi hmotností  $M$  a energií  $E$

$$E = Mc^2, \quad (1)$$

kde  $c \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  je rychlost světla. Za jednotku energie se bere *elektronvolt*

$$[E] = \text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \quad (2)$$

což, jak název napovídá, je kinetická energie elektronu urychlená ve vakuu napětím 1 V. Navíc se pracuje v tzv. *přirozených jednotkách*, ve kterých je rychlost světla  $c = 1$ , a tudíž hmotnost i energie mají stejnou jednotku.<sup>1</sup>

## 2 Typické objekty jaderné fyziky

		<b>hmotnost</b>	náboj	poločas rozpadu
<i>elektron</i>	$e^-$	$M_e = 0,511 \text{ MeV}$	–	stabilní
<i>proton</i>	$p^+$	$M_p = 938 \text{ MeV}$	+	stabilní <sup>a</sup>
<i>neutron</i>	$n^0$	$M_n = 940 \text{ MeV}^b$	0	$T_n = 611 \text{ s}$

<sup>a</sup>Některé teorie předpovídají, že proton by se měl rozpadat s enormním poločasem rozpadu  $T_p \approx 10^{32}$  let. To zatím nebylo pozorováno, ale experimenty k měření tohoto rozpadu existují.

<sup>b</sup>Neutron je těžší než proton. Volný neutron se rozpadá procesem

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3)$$

kde  $\bar{\nu}_e$  je elektronové antineutrino.

**Úkol 2.1:** *Převeďte hmotnosti z tabulky na kg.*

## 3 Atomové jádro

Nadále budeme uvažovat pouze atomové jádro, nebudeme se tedy zabývat elektrony z elektronového obalu atomu.

Jádro se skládá z protonů a neutronů. Ty se souhrnně označují jako *nukleony*. Počet protonů  $Z$  se nazývá *protonové číslo*, počet neutronů  $N$  se nazývá *neutronové číslo* a jejich součet  $A = N + Z$  je *hmotnostní číslo* nebo nukleonové číslo.

<sup>1</sup>Často se též lze setkat s „kompromisním“ označením jednotky hmotnosti jako  $[M] = \text{eV}/c^2$ .

Jádro se obecně označuje  ${}^A_ZX$  nebo dokonce  ${}^A_ZX_N$ , kde  $X$  je symbol daného prvku, například  ${}^{235}_{92}\text{U}$  nebo  ${}^{235}_{92}\text{U}_{143}$ . Protonové číslo se často vynechává, protože je jednoznačně dáno symbolem prvku, a neutronové číslo lze dopočítat z hmotnostního čísla.

Hmotnost atomového jádra je

$$M = ZM_p + NM_n - B, \quad (4)$$

kde  $B$  je *vazebná energie*. Aby jádro mohlo existovat, musí být  $B > 0$ . Jedná se o potenciální energii přitahujících se nukleonů. Vazebnou energii lze určit, pokud známe (změříme) hmotnost příslušného atomového jádra. Čím je vazebná energie vyšší, tím je jádro silněji vázané a stabilnější. Další často používaná veličina je vazebná energie na nukleon,

$$b = \frac{B}{A}. \quad (5)$$

Pokud z jádra (několika jader) s malou vazebnou energií na nukleon vytvoříme jádro (několik jader) s větší vazebnou energií na nukleon, přebytečná energie se uvolní a lze ji využít například v jaderné energetice. To je podstatou jaderné fúze a jaderného štěpení.

## 4 Tabulka nuklidů

Atomová jádra s daným  $N$  a  $Z$  se nazývají *nuklidy*. Uspořádávají se do [tabulky nuklidů](#),<sup>2</sup> kde na vodorovné ose je obvykle neutronové číslo  $N$  a na svislé ose protonové číslo  $Z$ . Jádra stejného prvku lišící se počtem neutronů se nazývají *izotopy* a v tabulce nuklidů tvoří řádky. V tabulce se také uvádějí další charakteristiky příslušného atomového jádra, jako například způsoby přeměny (rozpadové kanály), poločas přeměny (střední doba života), relativní zastoupení (pro přirozeně se vyskytující izotopy) nebo charakteristické energie  $\gamma$  záření.<sup>3</sup>

Doposud byly změřeny hmotnosti 2550 nuklidů, ale odhaduje se, že celkový počet nuklidů může být okolo 8000. Lehká jádra vznikají v jádrech hvězd, těžká jádra pak při výbuchu supernov a při srážce neutronových hvězd. Původ jader je schematicky vyobrazen například v této [tabulce](#).

## 5 Kompilát jaderných hmotností

Jaderné hmotnosti měří laboratoře po celém světě a své výsledky průběžně publikují v odborných časopisech. Přibližně jednou za čtyři roky je vydán souhrnný článek se všemi doposud změřenými hmotnostmi a jejich experimentálními odchylkami. Poslední vydanou sbírkou je [Atomic Mass Evaluation – AME 2020](#). Obsahuje hmotnosti 2550 měřených nuklidů. Sbíрка je veřejně dostupná a skládá se ze dvou odborných článků shrnujících použité experimentální metody a diskutujících přesnost měření a rozdíly oproti předchozím sbírkám, a z textového souboru se syrovými daty. Analýza textového souboru bude hlavní náplní tohoto projektu.

**Úkol 5.1:** *Stáhněte si z uvedeného odkazu soubor `mass_1.mas20.txt` s jadernými hmotnostmi a vytvořte jednoduchý program, který ze souboru načte k jednotlivým nuklidům jejich hmotnosti a vazebné energie.*

<sup>2</sup>Nuclear chart.

<sup>3</sup>Doplňující údaje k tabulce nuklidů lze nalézt na stránce [Nudat](#) (National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory).

Přesné hodnoty hmotností pro výpočty:

$$M_p = 938,2720882 \text{ MeV}, \quad (6)$$

$$M_n = 939,5654205 \text{ MeV}, \quad (7)$$

$$u = \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}) = 931,4941024 \text{ MeV}. \quad (8)$$

**Úkol 5.2:** *Vykreslete graf vazebné energie na nukleon  $b$  pro všechny nuklidy.*

**Úkol 5.3:** *Nalezněte nuklidy s nejvyšší vazebnou energií na nukleon.*

Jedná se o izotopy železa a niklu. Z těchto nuklidů již nelze získat žádnou energii a pro jakoukoliv jejich radioaktivní přeměnu musíme energii dodat. Nuklidy se vyskytují v konečných fázích vývoje některých hvězd před tím, než explodují jako supernovy.

**Úkol 5.4:** *Kolik energie se uvolní při fúzi 1 g deuteria  $^2\text{H}$  na helium  $^4\text{He}$ ? Nalezněte, jaké je zastoupení molekul  $\text{D}_2\text{O}$  v přirozeně se vyskytující vodě.<sup>4</sup> Kolik energie by se získalo fúzí všeho deuteria z 1 ml vody?*

## 6 Radioaktivní přeměna prvků

Atomová jádra mají tendenci přeměňovat se tak, aby byla co nejstabilnější. Tím se zvyšuje jejich vazebná energie na nukleon a při přeměně se přebytečná energie vyzařuje, což se využívá například v energetice v atomových elektrárnách.

Tři nejdůležitější procesy přeměny jsou

1.  $\alpha$  rozpad. Z jádra vylétne  $\alpha$  částice, což je velmi silně vázané jádro  $^4_2\text{He}$ ,

$$^A_Z\text{X} \rightarrow ^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + ^4_2\text{He}. \quad (9)$$

Tento proces je nejběžnější pro těžká jádra v oblasti údolí stability a nad ním. V tabulce nuklidů získáme procesem jádro posunuté diagonálně o dvě políčka vlevo dolů  $\swarrow\swarrow$ .

2.  $\beta$  rozpad. V jádře se přemění neutron na proton procesem (3). Hmotnostní číslo tedy zůstane zachováno, z jádra vylétne vzniklý elektron (a antineutrino),

$$^A_Z\text{X} \rightarrow ^A_{Z+1}\text{Y} + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (10)$$

Nové jádro se nachází o jedno políčko diagonálně vlevo nahoru  $\nwarrow$ .  $\beta$  rozpad je nejčastější u jader s přebytkem neutronů, což jsou jádra nacházející se pod údolím stability.

3.  $\beta^+$  rozpad. V jádře se přemění proton na neutron. jedná se o proces opačný k  $\beta$  rozpadu. Z jádra vylétne pozitron (a neutrino),

$$^A_Z\text{X} \rightarrow ^A_{Z-1}\text{Y} + e^+ + \nu_e. \quad (11)$$

Nové jádro se nachází o jedno políčko diagonálně vpravo dolů  $\searrow$ . Tato přeměna se vyskytuje u jader s přebytkem protonů (jádra nad údolím stability).

---

<sup>4</sup>Zhruba 160 ppm.

Podobný proces jako  $\beta^+$  rozpad je *elektronový záchyt*<sup>5</sup>, kdy atomové jádro jádro zachytí elektron z elektronového obalu a dojde k procesu



Elektronový záchyt má nižší práh než  $\beta^+$  rozpad.

Kromě těchto procesů mohou ještě jádra přímo vystřelit proton či neutron, pokud se nacházejí za tzv. protonovou nebo neutronovou driplajnou, nebo se samovolně rozštěpit na dvě lehčí jádra. K tomu však dochází jen u extrémních případů nuklidů vyrobených uměle.

**Úkol 6.1:** *Určete, která jádra se mohou rozpadat  $\alpha$  rozpadem a zakreslete je do grafu.*

Jedná se o jádra splňující podmínku

$$M(Z, N) - M_{\text{He}} > M(Z - 2, N - 2), \quad (13)$$

kde  $M_{\text{He}} = M(2, 2)$  je hmotnost  $\alpha$  částice. Jediné lehké jádro rozpadající se  $\alpha$  rozpadem je  ${}^8_4\text{Be}$ , které si lze vlastně představit jako složené ze dvou  $\alpha$  částic.

**Úkol 6.2:** *Určete, která jádra se mohou rozpadat  $\beta$  přeměnou a  $\beta^+$  ( $\epsilon$ ) přeměnou a zakreslete je do grafu. Porovnejte s tabulkou nuklidů.*

## 6.1 Rozpadové řady

Produkty přeměn nestabilních nuklidů mohou opět podléhat radioaktivním přeměnám. Ze směrů rozpadů v tabulce nuklidů je jasné, že celá tabulka se rozpadá na čtyři nezávislé skupiny. Rozpadové řady začínající u v přírodě se vyskytujících nuklidů ze skupiny aktinoidů a končící stabilním prvkem, nejčastěji olovem, jsou:

- ${}^{238}\text{U} \rightarrow {}^{206}\text{Pb}$
- ${}^{235}\text{U} \rightarrow {}^{207}\text{Pb}$
- ${}^{232}\text{Th} \rightarrow {}^{208}\text{Pb}$
- ${}^{237}\text{Np} \rightarrow {}^{205}\text{Tl}$

**Úkol 6.3:** *Pomocí tabulky nuklidů určete všechny meziprodukty těchto rozpadových řad.*

**Úkol 6.4:**  *${}^{238}\text{U}$  je nejtěžší nuklid vyskytující se v přírodě. Proč tomu tak je?*

## 7 Jaderná interakce

Nukleony se drží v jádře díky silné jaderné interakci. Ta je krátkodosahová, přitažlivá a velmi zjednodušeně řečeno působí přibližně stejnou silou mezi protony i mezi neutrony.

---

<sup>5</sup>Elektronový záchyt se obvykle označuje jako  $\epsilon$  přeměna.

## 8 Kapkový model jádra

Jeden z nejjednodušších modelů atomového jádra aproximuje jadernou hmotu jako *nestlačitelnou homogenně nabitou* kapalinu a jádro pak jako kapku o poloměru

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}, \quad (14)$$

kde  $R_0 = 1,2 \text{ fm}$ .<sup>6</sup> Z charakteru tohoto přiblížení je jasné, že bude platit lépe pro jádra s velkým počtem nukleonů.

Pro vazebnou energii nabitě nestlačitelné kapky kulového tvaru pak platí vztah

$$B = a'_V V - a'_S S - \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2}{R} - a_A \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta. \quad (15)$$

- *Objemový člen.* První člen vyjadřuje interakci jednotlivých nukleonů se svými nejbližšími sousedy, a je tudíž úměrný objemu jádra

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (16)$$

- *Povrchový člen.* Druhý člen snižuje vazebnou energii kvůli tomu, že nukleony na povrchu jádra interagují s méně nukleony než ty uvnitř. Odpovídá povrchovému napětí u klasických kapalin a energie s ním spojená je úměrná povrchu jádra

$$S = 4\pi R^2. \quad (17)$$

- *Coulombický člen.* Třetí člen vyjadřuje elektrostatické odpuzování kladně nabitých protonů. Odpovídá potenciální energii homogenně nabitě koule.
- *Asymetrie (Pauliho člen).* Pro jádro je výhodnější, když má stejný počet protonů a neutronů. Je to důsledek Pauliho vylučovacího principu: Protony a neutrony jsou *fermiony*, které se nemohou vyskytovat ve stejném stavu, a tudíž se nemohou nacházet na stejném místě. Čím více protonů nebo neutronů, tím musejí být dál od středu jádra, a jsou tedy slaběji vázané.
- *Párovací člen.* Pro fermiony je mnohem energeticky výhodnější, pokud se vyskytují v párech. Vazebná energie je tedy vyšší, pokud má jádro sudý počet protonů i neutronů (sudo-sudá jádra) než pokud je  $N$  nebo  $Z$  liché. Licho-lichá jádra jsou nejvíce nestabilní a mají tendenci přeměnit jeden nukleon v opačný typ, čímž se jejich stabilita výrazně zvýší. V přírodě se vyskytuje jen pět stabilních licho-lichých jader, a to čtyři lehká jádra (zde by přeměna  $n^0 \leftrightarrow p^+$  vedla k výrazné asymetrii počtu protonů a neutronů)  ${}^2_1\text{H}$ ,  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$  a  ${}^{14}_7\text{N}$ , a jedno těžké jádro, izomer  ${}^{180}_{73}\text{Ta}$ , které však může mít tak dlouhou dobu života, že jeho rozpad zatím nebyl pozorován.

Párovací člen se zapisuje ve tvaru

$$\delta = \begin{cases} +a_P A^{-\frac{1}{2}} & \text{pro sudo-sudá jádra, tj. pokud } Z \text{ i } N \text{ jsou sudá čísla,} \\ 0 & \text{pro sudo-lichá jádra, tj. pokud } A \text{ je liché číslo,} \\ -a_P A^{-\frac{1}{2}} & \text{pro licho-lichá jádra, tj. pokud } Z \text{ i } N \text{ jsou lichá čísla.} \end{cases} \quad (18)$$

<sup>6</sup>Jednotka femtometr  $\text{fm} = 10^{-15} \text{ m}$  se obvykle v jaderné fyzice nazývá fermi.

Zatímco prvním třem členům lze porozumět pomocí klasické fyziky, Pauliho člen a párovací člen se nedají vysvětlit jinak než pomocí mikroskopické teorie (kvantové teorie).

Vzorec (15) se obvykle užívá ve tvaru

$$B = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta. \quad (19)$$

nebo

$$b = a_V - a_S A^{-\frac{1}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{4}{3}}} - a_A \frac{(N - Z)^2}{A^2} + \frac{\delta}{A}. \quad (20)$$

a nazývá se *Betheho-Weizsäckerova formule*.<sup>7</sup> Parametry  $a_V, a_S, a_C, a_A$  a  $a_P$  jsou všechny kladné a určují se z naměřených vazebných energií známých jader.

Z Betheho-Weizsäckerovy formule je vidět, že kdyby nebylo Coulombického odpuzování, pak by vždy nejstabilnější jádra měla díky asymetrickému členu  $N = Z$ . Coulombické odpuzování způsobuje, že stabilnější jádra budou mít více neutronů než protonů, přičemž tento efekt je výraznější u těžších jader. Z formule (19) se dá odvodit, že nejstabilnější jádra mají

$$\frac{N}{Z} \approx 1 + \frac{a_C}{2a_A} A^{\frac{2}{3}}, \quad (21)$$

tj. *údolí stability* se v tabulce nuklidů otáčí pod diagonálu.

## 8.1 Fitování

Parametry teoretické závislosti se určí z experimentálních dat hledáním minima součtu kvadrátů odchylek

$$\chi^2 = \sum_{Z,N} [b(Z, N; a_V, a_S, a_C, a_A, a_P) - b_{\text{exp}}(Z, N)]^2 \quad (22)$$

kde se sčítá přes všechny měřené hmotnosti nuklidů s protonovým číslem  $Z$  a neutronovým číslem  $N$ . Vzhledem k tomu, že teoretická závislost (19) závisí na všech pěti parametrech lineárně, lze z rovnice pro kvadrát odchylek určit soustavu pěti lineárních rovnic pro pět neznámých a tu pak vyřešit. My namísto toho využijeme již hotových funkcí pro fitování, které dnešní programovací jazyky nabízejí. V Pythonu je to například funkce `curve_fit` z balíku `scipy`.

**Úkol 8.1:** *Nalezněte fitováním parametry rovnice (19).*

**Úkol 8.2:** *Zakreslete do grafu vazebných energií z úlohy 5.2 údolí stability dané rovnicí (21).*

Rovnici je nutné vyřešit numericky. K tomu lze v Pythonu využít například knihovni funkci `fsolve`.

**Úkol 8.3:** *Zakreslete do grafu rozdíl  $\Delta b$  naměřené vazebné energie  $b_{\text{exp}}$  a vazebné energie dané Betheho-Weizsäckerovou formulí (20) s nafitovanými parametry.*

## 8.2 Slupková struktura

V grafu poslední úlohy je vidět pravidelná struktura vodorovných a svislých čar, na kterých je rozdíl  $\Delta b$  větší než pro hodnoty dále od čar. Je to tím, že jádro má ve skutečnosti slupkovou

<sup>7</sup>Kapkový model jádra jako úplně první navrhl George Gamow v roce 1930. Představu jádra jako kapky tekutiny později převzal Niels Bohr a John Archibald Wheeler. Formule v tomto tvaru byla navržena Carlem Friedrichem von Weizsäckerem v roce 1935.

strukturu podobně jako atomový obal a nukleony pro *magická jádra* jsou mnohem silněji vázaná. Jaderná magická čísla pro protony i neutrony jsou 2, 8, 20, 28, 40, 50, 82, 126. Lze je pozorovat nejen na veličině  $\Delta b$ , ale také například na dvouneutronové nebo dvouprotonové<sup>8</sup> separační energii - nukleony v uzavřené valenční slupce jsou mnohem silněji vázané, a je tedy potřeba větší energie k jejich vyražení.

**Úkol 8.4:** *Vyznačte v grafu poslední úlohy magická čísla – místa uzavřených jaderných slupek.*

**Úkol 8.5:** *Zakreslete do grafu dvouneutronovou*

$$S_{2n} = M(Z, N - 2) + 2M_n - M(Z, N) \quad (23)$$

*a dvouprotonovou separační energii*

$$S_{2p} = M(Z - 2, N) + 2M_p - M(Z, N). \quad (24)$$

---

<sup>8</sup>Dvounukleonová proto, aby se eliminoval efekt párovacího členu.