Domácí úkoly k přednášce Kvantová teorie

Pavel Stránský

27. března 2024

Obsah

Kapitola

2023 – 2024

1 BCH formule

Jsou dány dva nekomutující operátory $\hat{\mathsf{M}}$, $\hat{\mathsf{N}}$, které komutují se svým komutátorem:

$$\left[\hat{\mathsf{M}}, \left[\hat{\mathsf{M}}, \hat{\mathsf{N}}\right]\right] = \left[\hat{\mathsf{N}}, \left[\hat{\mathsf{M}}, \hat{\mathsf{N}}\right]\right] = 0.$$

Nalezněte, čemu se rovnají operátory $\hat{\mathsf{X}}$, $\hat{\mathsf{Y}}$ ve výrazech

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{M}}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{N}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{M}}+\hat{\mathsf{N}}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{X}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{X}}}\,\mathrm{e}^{\hat{\mathsf{M}}+\hat{\mathsf{N}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathsf{M}}+\hat{\mathsf{N}}+\hat{\mathsf{Y}}}$$

a dokažte, že platí všechny uvedené rovnosti.

Nápověda: Nadefinujte a použijte funkci $\hat{\mathsf{g}}(\xi) \equiv \mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{M}}}\,\mathrm{e}^{\xi\hat{\mathsf{N}}}$. Využijte výsledků příkladů ze cvičení.

Poznámka: Tento vztah se nazývá *Baker-Campbell-Hausdorffova formule* nebo *Glauberova formule*.

2 Jednoduché kvantové systémy

2.1 Kvantový řetízek

Určete vlastní hodnoty a normalizované vlastní vektory Hamiltoniánu dimenze N ve tvaru tridiagonální matice

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} e & v & 0 & 0 & \\ v & e & v & 0 & \\ 0 & v & e & v & \cdots \\ 0 & 0 & v & e & \\ & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Jak se bude měnit energetické spektrum s rostoucím N?

Nápověda: V charakteristické rovnici identifikujte diferenční rovnici pro složky $c_k, k = 1, \cdots, n$ vlastních vektorů a řešte ji pomocí násady $c_k = u^k$.

Poznámka: Tento Hamiltonián popisuje například částici na řetízku délky N, která smí „přeskočit" jen na sousední pozice:

$$\hat{\mathsf{H}} = e \sum_{k=1}^{N} |k\rangle \langle k| + v \sum_{n=1}^{N-1} (|k\rangle \langle k+1| + |k+1\rangle \langle k|) ,$$

kde $\{|k\rangle, k = 1, \ldots, N\}$ je ortonormální báze. V případě, kdy N je velké, se jedná o jednoduchý model jednorozměrného krystalu.

2.2 Kvantový oblak

Určete vlastní hodnoty a normalizované ortogonální vlastní vektory Hamiltoniánu dimenze N daného maticí

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} e & v & v & v & \\ v & e & v & v & \\ v & v & e & v & \cdots \\ v & v & v & e & \\ & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Tento Hamiltonián popisuje například částici na mřížce o N pozicích, přičemž částice může přeskočit na libovolnou pozici mřížky a žádná pozice není upřednostněna.

3 Interakce spinu s dvouhladinovým systémem

Částice se spinem $\frac{1}{2}$ interaguje s dvoustavovým systémem tak, že výsledný stavový vektor systému je ve stavu

$$|\psi\rangle = \alpha\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \otimes |0\rangle + \beta\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right) \otimes |1\rangle\,,$$

kde $|\uparrow\rangle\,, |\downarrow\rangle$ jsou ortonormální bázové vektory Hilbertova prostoru $\mathcal{H}_s$ spinu, které odpovídají projekci spinu podél souřadné osy z a proti souřadné ose z, a $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$ je ortonormální báze Hilbertova prostoru $\mathcal{H}_2$ dvoustavového systému.

1. Nalezněte podmínku pro komplexní parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, aby stav $|\psi\rangle$ byl normalizovaný.

2. Určete, jestli je stav $|\psi\rangle$ provázaný nebo faktorizovaný.

3. Předpokládejte, že měříte projekci spinu částice do směru daného jednotkovým vektorem $\boldsymbol{n}$, který svírá s osou z úhel $\theta = \frac{\pi}{3}$ a leží v rovině xz. Nalezněte projekční operátory odpovídající tomuto měření a pro každý možný výsledek měření určete pravděpodobnost jeho nalezení a stavový vektor složeného systému po měření.

4 Kvartický oscilátor

1. V jednorozměrném harmonickém oscilátoru popsaném Hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}}_0 = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{\mathsf{x}}^2$$

vyjádřete maticové elementy

$$\left\langle m\middle|\hat{\mathsf{x}}^2\middle|n\right\rangle ,$$
$$\left\langle m\middle|\hat{\mathsf{x}}^4\middle|n\right\rangle ,$$

kde $|m\rangle$ a $|n\rangle$ jsou dva libovolné vlastní vektory Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}_0$.

2. Uvažujte Hamiltonián

$$\hat{\mathsf{H}} = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{\mathsf{x}}^2 + \frac{1}{8}b\hat{\mathsf{x}}^4 = \hat{\mathsf{H}}_0 + \frac{1}{8}b\hat{\mathsf{x}}^4 ,$$

kde b je reálný kladný parametr.

- Napočítejte maticové elementy $H_{mn} = \left\langle m\middle|\hat{\mathsf{H}}\middle|n\right\rangle$ pro $M = \Omega = \hbar = 1, b = 10$ a numerickou diagonalizací matice $\mathsf{H} = (H_{mn})$ (například pomocí programů Mathematica, Maple, Matlab, GNU Octave, Python, Julia, knihoven LAPACK, atd.) učete energie základního stavu E_0 a prvních tří vzbuzených stavů $E_{1,2,3}$ Hamiltoniánu $\hat{\mathsf{H}}$. Uvažujte pouze konečný počet N elementů báze, tj. $m, n = 0, 1, \ldots, N-1$.
- Zakreslete graf závislosti $E_j(N)$, $j = 0, 1, 2, 3$ pro $N \le 50$.
- Na základě výsledků z předchozího bodu odhadněte, jaká musí být nejmenší velikost matice N, aby čtyři nejnižší energie byly určeny s přesností na pět platných cifer.

3. Uvažujte nyní Hamiltonián

$$\hat{\mathsf{H}}' = \frac{1}{2M}\hat{\mathsf{p}}^2 - \frac{1}{2}a\hat{\mathsf{x}}^2 + \frac{1}{8}b\hat{\mathsf{x}}^4 ,$$

kde $a > 0$, $b > 0$.

- Načtněte klasický potenciál

$$V(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{8}bx^4$$

pro $a = b = 1$ a nalezněte jeho stacionární body.
- Vypočítejte numericky první čtyři energetické hladiny pro $\hbar = 0.2$, $M = a = b = 1$. Velikost matice ať je taková, aby tyto hladiny byly určeny s přesností alespoň na pět platných cifer.
- Proč jsou dvojice hladin (E_0, E_1) a (E_2, E_3) v téměř degenerovaných dubletech?
- Opakujte výpočet pro jiné hodnoty $\hbar$, například $\hbar = 0.1$ a $\hbar = 0.5$, a diskutujte, jaký vliv má volba $\hbar$ na výsledné spektrum. Nezapomeňte pokaždé zkontrolovat konvergenci energetických hladin (obecně pro menší hodnoty $\hbar$ je potřeba více bázových stavů).

Poznámka: Dvoujámový systém popsaný Hamiltoniánem $\hat{\mathsf{H}}'$ se požívá například k modelování amoniakového maseru, k modelování systémů ochlazených iontů, v teorii kvantové informace, při studiu kvantových fázových přechodů nebo v kvantové chemii.

5 Kvantový míček

Částice o hmotnosti M (míček) skáče v homogenním (např. gravitačním) poli, přičemž od podložky se odráží bez ztráty energie. Potenciál se tedy dá vyjádřit jako

$$V(z) = \begin{cases} Mgz & z > 0, \\ \infty & z < 0, \end{cases}$$

kde z je svislá souřadnice a g konstanta úměrnosti (gravitační zrychlení).

Hledejte variační metodou přibližnou energii základního stavu a odpovídající vlastní funkci v x-reprezentaci.

1. Podle vlastností potenciálu navrhněte vhodnou testovací funkci s jedním parametrem a správnými okrajovými podmínkami (dodatečný multiplikativní parametr bude fixovat normalizaci).

2. Nalezněte optimální hodnotu parametru a jemu odpovídající přibližnou energii základního stavu.

3. *(volitelné)* Vyzkoušejte ještě jinou testovací funkci a rozhodněte, která přesněji aproximuje základní stav.

6 Moment hybnosti atomu vodíku

Jádro atomu vodíku (proton) má spin $s_p = \frac{1}{2}$, spin obíhajícího elektronu je $s_e = \frac{1}{2}$ a elektron se nachází na orbitalu d (velikost orbitálního moment hybnosti je tedy $l = 2$). Operátor celkového momentu hybnosti je

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}}^{(p)} + \hat{\mathbf{S}}^{(e)} + \hat{\mathbf{L}}.$$

1. Určete celkový počet odlišných kvantových stavů, kterých může moment hybnosti $\hat{\mathbf{J}}$ nabývat.
2. Určete, jaké hodnoty může mít celkový moment hybnosti j a kolik stavů přísluší každé jeho hodnotě.
3. Určete normalizované stavy

$$|j\,m\rangle = \begin{cases} |3\,3\rangle \\ |3\,2\rangle \\ |3\,1\rangle \\ |3\,0\rangle \end{cases},$$

   kde m značí projekci celkového momentu hybnosti $\hat{\mathbf{J}}$ na třetí souřadnou osu.
4. Určete střední hodnotu

$$\left\langle 3\,2 \middle| \hat{\mathbf{S}}^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(p)} \middle| 3\,2 \right\rangle .$$

   Nápověda: Skalární součin operátorů $\hat{\mathbf{S}}^{(e)} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(p)}$ vyjádřete pomocí operátorů $\hat{S}_{\pm}^{(e,p)}$ a $\hat{S}_3^{(e,p)}$.

7 Dvě δ jámy nebo bariéry

Částice o hmotnosti M se pohybuje v potenciálu složeném ze dvou δ funkcí vzdálených od sebe o délku d,

$$V(x) = c\left[\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right)\right].$$

1. Nalezněte rovnici pro vázané stavy systému ($E < 0$, $c < 0$) a vyřešte ji numericky. Porovnejte výsledné energetické spektrum s případem jedné jámy.

2. Pro $E > 0$ určete pravděpodobnost průchodu $T(E)$ a pravděpodobnost odrazu $R(E)$. Zakreslete $T(E)$ do grafu společně s pravděpodobností průchodu skrz jednu δ funkci.

Pro všechny číselné výpočty uvažujte $\hbar = M = |c| = d = 1$.

8 Diracův hřeben

Částice se pohybuje v potenciálu složeném z periodicky se opakujících δ funkcí

$$V(x) = c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na),$$

jehož vlnové funkce na intervalu $x \in (na; (n+1)\,a)$, $n \in \mathbb{Z}$, $E > 0$ jsou podle Blochova teorému

$$\psi_q(x) = \left[A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-na)} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-na)}\right]\mathrm{e}^{iqna},$$

kde q je krystalová hybnost (kvazihybnost) částice. Mezi $k = \sqrt{2ME}/\hbar$ a K platí vztah

$$\cos qa = \cos ka + \frac{K}{2k}\sin ka,$$

kde $K = 2Mc/\hbar^2$ (M je hmotnost částice).

1. Pro dvě hodnoty $K = 2$ a $K = 10$ vypočítejte a na počítači vykreslete graf disperzní relace $E(q)$ pro nejnižší čtyři energetické pásy. Uvažujte následující konvenci: pokud $\pi n \leq ka \leq \pi(n+1)$, pak $\pi n \leq qa \leq \pi(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Vypočítejte grupovou rychlost
$$v_{\mathrm{g}} = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial q}$$
a zakreslete její závislost na q a na E pro dvě hodnoty parametru $K = 2$, $K = 10$ a nejnižší čtyři energetické pásy. Srovnejte s případem volné částice.

3. Najděte řešení Schrödingerovy rovnice pro případ $K < 0$ (v tomto případě může být energie i záporná, $E < 0$). Podobně jako v bodě 1 zakreslete disperzní relaci $E(q)$ pro $K = -2$ a $K = -10$.

Pro všechny numerické výpočty uvažujte $a = M = \hbar = 1$.

9 Koherentní stavy v x-reprezentaci

1. Vyjádřete vlnovou funkci $\psi_z(x) \equiv \langle x|z\rangle$ koherentního stavu harmonického oscilátoru v x-reprezentaci. Využijte toho, že koherentní stav je vlastním stavem snižovacího operátoru $\hat{\mathsf{a}}$,

$$\hat{\mathsf{a}}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,,$$

   a operátor $\hat{\mathsf{a}}$ vyjádřete pomocí operátorů souřadnice $\hat{\mathsf{x}}$ a hybnosti $\hat{\mathsf{p}}$ v x-reprezentaci. Vyřešte vzniklou diferenciální rovnici pro $\psi_z(x)$.

2. Vlnovou funkci $\psi_z(x)$ nanormujte.

3. Dosaďte

$$z = \sqrt{\frac{M\Omega}{2\hbar}}\left(\langle\hat{\mathsf{x}}_z\rangle + \frac{\mathrm{i}}{M\Omega}\langle\hat{\mathsf{p}}_z\rangle\right)$$

   a dokažte, že hustota pravděpodobnosti $|\psi_z(x)|^2$ nalezení částice v bodě x odpovídá Gaussovskému vlnovému balíku. Určete jeho disperzi σ.

4. Určete hustotu pravděpodobnosti $|\psi_z(x;t)|^2$ v čase t. Dokažte, že se stále bude jednat o gaussovský vlnový balík, jehož disperze σ se s časem nemění (vlnový balík se nerozplývá) a jehož střední hodnota kmitá okolo počátku s klasickou frekvencí harmonického oscilátoru Ω.

5. Vyjádřete normalizovanou vlnovou funkci $\tilde{\psi}_z(p;t) \equiv \langle p|z(t)\rangle$ v p-reprezentaci.

10 Ramseyův přístroj pro spin 1

Částice se spinem 1 a velikostí magnetického momentu μ, popsaná vlnovou funkcí

$$|\psi(t)\rangle = \psi_{+1}(t)\,|+1\rangle + \psi_0(t)\,|0\rangle + \psi_{-1}(t)\,|-1\rangle = \begin{pmatrix}\psi_{+1}(t)\\ \psi_0(t)\\ \psi_{-1}(t)\end{pmatrix},$$

kde dolní index určuje projekci spinu na osu z, se pohybuje v zařízení složeném ze tří oblastí. V první oblasti (1. Ramseyova oblast) je zapnuté magnetické pole složené ze stacionární složky $\boldsymbol{B}_0$ směřující podél osy z a rotující složky $\boldsymbol{B}_1(t)$ v rovině (x, y),

$$\boldsymbol{B}_0 = (0, 0, B_0), \qquad \boldsymbol{B}_1(t) = (B_1\cos\omega t, -B_1\sin\omega t, 0),$$

a částice v ní stráví dobu dobu τ. V druhé oblasti je rotující pole vypnuto a po dobu T se částice pohybuje pouze ve stacionárním poli $\boldsymbol{B}_0$. Poté (2. Ramseyova oblast) je rotující pole zapnuto, a to opět na dobu τ.

1. Matice generující rotace částice se spinem 1 jsou $\mathsf{S}_j^{(1)} = \hbar\mathsf{s}_j$, kde

   $$\mathsf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\ \mathrm{i}&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{s}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

   Ukažte, že tyto matice splňují komutační relace pro moment hybnosti

   $$\left[\mathsf{s}_j, \mathsf{s}_k\right] = \mathrm{i}\epsilon_{jkl}\mathsf{s}_l\,.$$

   (Matice s_j jsou analogické k Pauliho maticím σ_j popisujícím částici se spinem 1/2 a tvoří generátory třírozměrné ireducibilní reprezentace grupy SU(2).)

2. Dokažte, že pro matice s_j platí $\mathsf{s}_j^{n+2} = \mathsf{s}_j^n$, kde $n \in \mathbb{N}$, a na základě tohoto vztahu vyjádřete exponenciálu

   $$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{s})} = ?$$

   kde $\hat{\boldsymbol{n}}$ je jednotkový vektor určující osu rotace, okolo které se systém otočí o úhel ϕ, a

   $$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{s} \equiv \hat{n}_1\mathsf{s}_1 + \hat{n}_2\mathsf{s}_2 + \hat{n}_3\mathsf{s}_3\,.$$

3. Vyjádřete složky evolučního operátoru

   $$\mathsf{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t\mathsf{s}_3}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t(\hat{\boldsymbol{n}}_\Omega\cdot\mathbf{s})},$$

   kde

   $$\Omega = \sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \omega_1^2}, \qquad \hat{\boldsymbol{n}}_\Omega = \frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix}-\omega_1\\0\\ \omega-\omega_0\end{pmatrix}, \qquad \omega_{0,1} = \frac{2\mu}{\hbar}B_{0,1}\,.$$

4. Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathsf{U}(t; t_0)$, který vyvíjí systém z času t_0 do času t.

5. Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathsf{U}_0(\tau+T; \tau)$ oblasti, kde je vypnuté pole $\boldsymbol{B}_1$.

6. Proces průchodu zařízením složeným z dvou Ramseyových oblastí s mezioblastí s vypnutým polem B_1 je dán evolučním operátorem

   $$\mathsf{U}_F = \mathsf{U}(2\tau+T; \tau+T)\mathsf{U}_0(\tau+T; \tau)\mathsf{U}(\tau; 0)\,.$$

   Vyjádřete složky evolučního operátoru $\mathsf{U}_F^{\mathrm{rez}}$ pro speciální případ $\omega = \omega_0$ (frekvence oscilujícího magnetického pole $\boldsymbol{B}_1$ je v rezonanci s Larmorovou frekvencí ω_0).

7. Vypočítejte matici $\mathsf{p}^{\mathrm{rez}}$ se složkami p_{fi}^{rez}, které udávají pravděpodobnosti, že systém připravený na před vstupem do přístroje ve stavu s projekcí spinu na osu z rovnou $i \in \{+1, 0, -1\}$, naměříme po průchodu zařízením ve stavu s projekcí spinu $f \in \{+1, 0, -1\}$. Jaká podmínka musí být splněna, aby byla pravděpodobnost překlopení spinu největší?

11 Isotopický posun energie

Hamiltonián elektronu pohybujícího se v blízkosti bodového atomového jádra se Z protony má tvar

$$\hat{\mathsf{H}}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{\gamma Z}{\hat{\mathsf{r}}}\,,$$

kde m je hmotnost elektronu (předpokládáme, že je malá v porovnání s hmotností jádra), $\gamma = e^2/(4\pi\epsilon_0)$, e je elementární náboj a ϵ_0 permitivita vakua. Předpokládáme dále, že atom je ionizovaný a v atomovém obalu se nachází pouze jeden elektron na nejnižším $1s$ stavu. Energie tohoto elektronu a odpovídající vlnová funkce jsou

$$E_0^{(0)} = -\frac{mZ^2\gamma^2}{2\hbar^2} = -\frac{Z^2\gamma}{2a_0}\,,$$

$$\psi_0(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{a_0}}\,,$$

kde $a_0 = \hbar^2/(\gamma m)$ je Bohrův poloměr.

Ve skutečnosti však má jádro konečný poloměr, který lze v prvním přiblížení aproximovat vzorcem

$$R = R_0\sqrt[3]{A}\,,$$

kde $R_0 = 1{,}2\,\mathrm{fm}$ a A je atomové číslo (celkový počet nukleonů).

Předpokládejte, že hustota elektrického náboje v jádře je konstantní.

1. Určete Hamiltonián $\hat{\mathsf{H}}$ elektronu, který se pohybuje v okolí jádra konečného poloměru. Rozdíl mezi $\hat{\mathsf{H}}$ a $\hat{\mathsf{H}}_0$ uvažujte jako malou poruchu $\hat{\mathsf{H}}_\mathrm{I}$.

2. V prvním řádu poruchové teorie spočítejte opravu k energii základního stavu elektronu, způsobenou konečností poloměru atomového jádra.

3. Vypočítejte číselnou hodnotu *isotopického posunu* energie základního stavu mezi v přírodě pozorovaným nejtěžším $A = 124$ a nejlehčím $A = 112$ stabilním izotopem cínu (cín je prvek s největším množstvím stabilních izotopů).

12 Zenonův jev pro Ramseyův přístroj

Částice se spinem 1/2 a velikostí magnetického momentu μ připravená ve stavu $|\psi_i\rangle = |+\rangle$ (spin ve směru osy z) vlétá do Ramseyova přístroje sestávajícího se z N Ramseyových zón. V každé zóně na ni působí působí magnetické pole složené ze stacionární složky $\boldsymbol{B}_0$ směřující podél osy z a rotující složky $\boldsymbol{B}_1(t)$ v rovině (x, y)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_0 &= (0, 0, B_0) \\ \boldsymbol{B}_1(t) &= (B_1 \cos \omega t, -B_1 \sin \omega t, 0) \end{aligned}$$

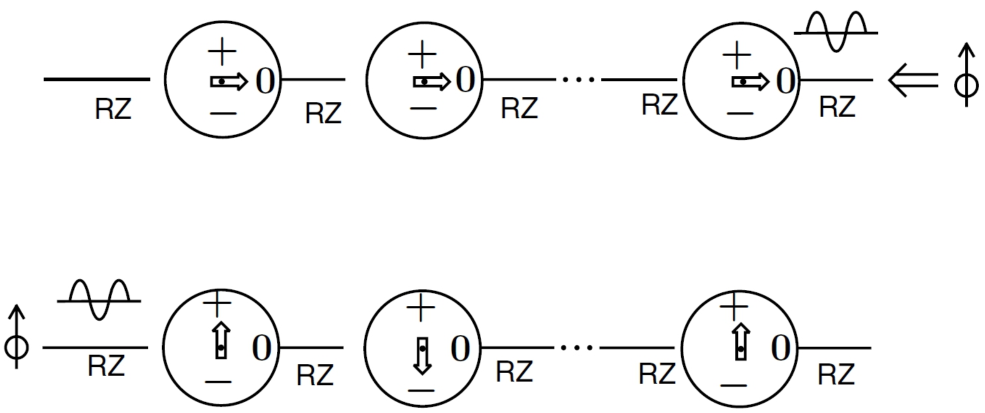
a částice v ní stráví dobu dobu τ. Mezi zónami je tzv. *monitorovací oblast*, ve které je magnetické pole $\boldsymbol{B}_1$ vypnuté a místo toho je zapnuto monitorování pomocí dalšího spinu o velikosti 1/2. Tento spin se z neutrální polohy

$$|\phi_i\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

po interakci s procházejícím spinem za působení Hamiltoniánu

$$\mathsf{H}_0' = \begin{cases} -\mu B_0 \sigma_3 \otimes \left[\mathbb{1} + \frac{\lambda}{2} (\mathbb{1} - \sigma_1) \right], & \tau \leq t < \tau + T_0\,, \\ -\mu B_0 \sigma_3 \otimes \mathbb{1}\,, & \tau + T_0 \leq t < \tau + T\,, \end{cases}$$

[σ_1 je první Pauliho matice, $\lambda = \pi\hbar/(2\mu B_0 T_0)$] přepne do polohy $|+\rangle$ nebo $|-\rangle$ podle orientace prolétávajícího spinu, viz obrázek. V monitorovací oblasti stráví částice dobu T. Změřením orientace monitorovacích spinů můžeme určit, v které z Ramseyových zón se orientace prolétávajícího spinu překlopila. Magnetická pole jsou naladěna tak, že $\omega = \omega_0$, kde $\omega_0 = 2\mu B_0/\hbar$.



Obrázek: Schéma Ramseyova přístroje složeného z N Ramseyových zón (RZ) se zapnutým oscilujícím polem, mezi kterými se nacházejí monitorovací oblasti znázorněné kružnicemi. Spin prochází přístrojem *zprava doleva*. Vpravo nahoře je zakreslena situace v čase $t = 0$, vlevo dole dole v čase $t = N\tau + (N-1)T$.

1. Pro Ramseyův přístroj $N = 2$ (tj. ten, který se počítal na cvičení) s vypnutým monitorováním ($\lambda = 0$) nalezněte pravděpodobnost $p^{(2)}_{(\uparrow\uparrow)}$, že spin vylétne ve stejném stavu, v jakém do přístroje vlétal (nepřeklopí se při průchodu přístrojem).

2. Nalezněte pravděpodobnost $p^{(2)\prime}_{(\uparrow\uparrow)}$, že se spin nepřeklopí při zapnutém monitorování. Ukažte, že tato pravděpodobnost je vyšší než $p^{(2)}_{(\uparrow\uparrow)}$.

3. Nalezněte pravděpodobnost $p^{(N)\prime}_{(\uparrow\uparrow)}$, že se spin nepřeklopí při zapnutém monitorování po průchodu N Ramseyovými zónami. Využijte skutečnosti, že při zapnutém monitorování lze počítat s pravděpodobnostmi, že se spin překlopí nebo nepřeklopí v každé jednotlivé Ramseyově zóně, a že tyto pravděpodobnosti jsou pro všechny zóny stejné.

4. Ukažte, že v limitě velkého množství malých kroků takových, aby doba průchodu přístrojem byla konstantní, tj.

$$\tau = \frac{\mathsf{t}}{N}, \quad T = \frac{\mathfrak{T}}{N},$$

platí

$$p^{(N)'}_{(\uparrow\uparrow)} \xrightarrow{N\to\infty} 1.$$

Poznámka: Tento jev, kdy opakované měření zvyšuje pravděpodobnost přežití stavu, se nazývá *kvantový Zenonův jev*. Poprvé ho zmínil již Alan Turing, obecné odvození rozpracovali A. Degasperis, L. Fonda a G.C. Ghirardi (1974).

5. Nalezněte pravděpodobnost $p^{(N)}_{(\uparrow\uparrow)}$, že se spin nepřeklopí při vypnutém monitorování, a ukažte, že při zachování celkového času průletu přístrojem daného veličinami t, $\mathfrak{T}$ tato pravděpodobnost nezávisí celkovém na počtu Ramseyových zón N.

   Nápověda: Napočítejte matici evolučního operátoru pro $N = 2$ a $N = 3$ a „uhodněte“ její tvar pro obecné N.

13 Dvouhladinový systém s periodickou poruchou *(termín odevzdání: 14.3.2024)*

Dvouhladinový systém je popsaný Hamiltoniánem

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathsf{H}}(t) &= \hat{\mathsf{H}}_0 + \hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t), \\
\hat{\mathsf{H}}_0 &= \begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 \\ 0 & E_2^{(0)} \end{pmatrix} \equiv E_1^{(0)} |\phi_1\rangle \langle\phi_1| + E_2^{(0)} |\phi_2\rangle \langle\phi_2| , \\
\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t) &\equiv \Theta(t) \begin{pmatrix} 0 & \gamma\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \gamma\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix} = \Theta(t) \left[\gamma\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} |\phi_1\rangle \langle\phi_2| + \gamma\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} |\phi_2\rangle \langle\phi_1|\right] ,
\end{aligned}
$$

přičemž operátor $\hat{\mathsf{H}}_{\mathrm{I}}(t)$ představuje periodickou poruchu, která je zapnuta v čase $t_0 = 0$ (formálně zapsáno pomocí Heavisideovy skokové funkce Θ), γ je reálný parametr, který určuje sílu poruchy, a $E_{1,2}^{(0)}$ jsou neporušené energie.

Před zapnutím poruchy v čase $t \leq 0$ je systém ve stavu $|\phi_i\rangle \equiv |\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Spočítejte neporuchově pravděpodobnost $\mathcal{P}_{1\to 2}(t)$, že systém v čase v čase $t > 0$ přejde do stavu $|\phi_2\rangle$. Vzorec, který dostanete, se nazývá *Rabiho formule*.

2. Řešte totéž do druhého řádu nestacionární poruchové teorie a získanou pravděpodobnost srovnejte s přesným řešením. Za jaké podmínky toto přibližné řešení dobře aproximuje přesný výsledek?

3. Za jaké podmínky lze v čase $t > 0$ naměřit systém ve stavu $|\phi_2\rangle$ s pravděpodobností jedna?

14 Rozptyl nerozlišitelných částic *(termín odevzdání: 11.4.2024)*

Interakce dvou částic s hmotností M a spinem $s = \frac{1}{2}$ je popsána potenciálem

$$V(r) = V_0(r) - V_\mathrm{s}(r)\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$$

kde r je vzájemná vzdálenost obou částic a $\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}^{(1,2)}$ jsou spinové operátory (dané Pauliho maticemi) odpovídající jednotlivým částicím. Potenciály $V_0(r)$, $V_\mathrm{s}(r)$ nejsou pro začátek blíže specifikovány. Předpokládejte pouze, že interakce jsou dostatečně krátkodosahové, takže integrály

$$v_0(\boldsymbol{q}) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, V_0(r) \mathrm{d}^3\boldsymbol{r},$$
$$v_\mathrm{s}(\boldsymbol{q}) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, V_\mathrm{s}(r) \mathrm{d}^3\boldsymbol{r},$$

existují a jsou konečné ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$ je rozdíl vlnového vektoru libovolné z částic před a po interakci, počítaný v těžišťové soustavě).

- Uvažujte nejprve, že částice jsou rozlišitelné. V rámci 1. Bornovy aproximace vyjádřete amplitudy rozptylu

  $$f_{\uparrow\uparrow\longrightarrow\uparrow\uparrow}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}), \qquad f_{\downarrow\downarrow\longrightarrow\downarrow\downarrow}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}),$$
  $$f_{\uparrow\downarrow\longrightarrow\uparrow\downarrow}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}), \qquad f_{\uparrow\downarrow\longrightarrow\downarrow\uparrow}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}),$$

  a odpovídající diferenciální účinné průřezy, přičemž šipky udávají orientace jednotlivých spinů před interakcí a po interakci; poslední případ odpovídá procesu, kdy si jednotlivé částice během interakce prohodí spin.

- Pokud částice budou *nerozlišitelné*, po účinných průřezech jakých procesů má smysl se ptát?

- Pro speciální případ interakce Yukawova typu

  $$V_0(r) = \frac{\rho}{r}\,\mathrm{e}^{-\mu r}, \quad V_s(r) = \frac{\rho}{r}\,\mathrm{e}^{-\nu r},$$

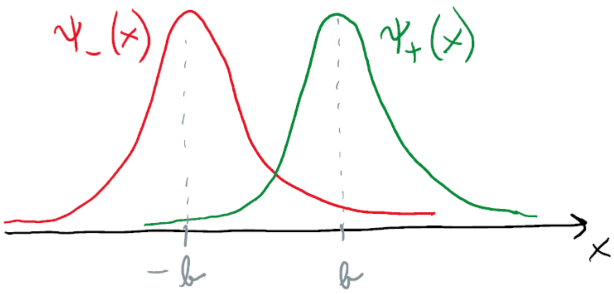
  kde $\rho, \mu, \nu > 0$, spočítejte nenulové účinné průřezy pro rozlišitelné i nerozlišitelné částice. Diskutujte obdržené výsledky.

15 Interakce způsobená nerozlišitelností částic *(termín odevzdání: 9.5.2024)*

Uvažujte dvě bezspinové volné nerozlišitelné částice o hmotnosti M pohybující se na přímce. Jejich vlnové funkce jsou dány gaussovskými balíky dobře lokalizovanými okolo bodů $-b$ a $+b$ (obrázek),

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x\mp b)^2}, \tag{.1}$$

kde $\sigma \ll b$ určuje určuje šířku balíku.



1. Určete vlnovou funkci $\psi(x_1, x_2)$ systému těchto dvou nerozlišitelných částic a spočítejte její normalizaci. Částice mohou být bosony nebo fermiony. Uvažujte oba dva případy.

2. Spočítejte střední hodnotu energie systému dvou nerozlišitelných částic

$$E = \left\langle \psi \middle| \hat{\mathsf{H}} \middle| \psi \right\rangle = \int \psi^*(x_1, x_2) H \psi(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2. \tag{.2}$$

3. Spočítejte efektivní sílu

$$F \equiv -\frac{\partial E}{\partial b}. \tag{.3}$$

   Bude tato síla přitažlivá nebo odpudivá a jak závisí na typu nerozlišitelných částic (bosony, fermiony)?

Příloha A

Úkoly z dřívějších let

1 Hladká konečně hluboká potenciálová jáma

Částice o hmotnosti M se pohybuje v jednorozměrném potenciálu

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \frac{x}{a}},$$

kde $a > 0$ a $V_0 > 0$ jsou parametry udávající šířku a hloubku potenciálové jámy. Předpokládejte, že energie $E < 0$, tj. uvažujte pouze vázané stavy.

1. Načrtněte potenciál.
2. Schrödingerovu rovnici převeďte pomocí vhodných substitucí na rovnici pro hypergeometrické funkce.
3. Napište obě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice. Za jakých podmínek budou tato řešení kvadraticky integrovatelná? Nalezněte kvantovací podmínky a energetické spektrum.
4. Jaké podmínky musejí parametry a, V_0 a M splňovat, aby měl systém alespoň jeden vázaný stav?
5. Kolik bude mít systém vázaných stavů pro $a = V_0 = M = \hbar = 1$? Napište jejich energie.
6. *(nepovinně)* Zakreslete vlnové funkce příslušející energiím z předchozího bodu. Vlnové funkce nemusíte normalizovat.

Nápověda: Vlnovou funkci hledejte ve tvaru

$$\psi(x) = u(x) \cosh^{\alpha} \frac{x}{a},$$

kde $\alpha < 0$. Zvolte vhodně tento parametr. Zaveďte nezávisle proměnnou

$$z = -\sinh^2 \frac{x}{a}.$$

2 Stimulovaná emise

Atom vodíku popsaný Hamiltoniánem

$$\hat{\mathsf{H}}_0 = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{\gamma}{\hat{\mathsf{r}}},$$

se nachází v excitovaném stavu 2p, tj. ve stavu popsaném vektorem $|n = 2, l = 1, m\rangle$, kde projekce orbitálního momentu hybnosti m může nabývat libovolné z hodnot $\{-1, 0, 1\}$. Na atom působí elektromagnetické vlnění s vektorovým potenciálem

$$\boldsymbol{A}(\hat{\mathbf{r}}, t) = 2A_0\boldsymbol{\epsilon}\cos\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\hat{\mathbf{r}} - \omega t\right)$$

(jednotkový vektor $\boldsymbol{\epsilon}$ určuje polarizaci vln, $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{n}\omega/c$ je vlnový vektor určující směr postupu vlny) a skalárním potenciálem

$$\Phi(\hat{\mathbf{r}}, t) = 0.$$

Předpokládejte, že vlnová délka $\lambda = 2\pi/\kappa$ je mnohem větší než efektivní rozměr atomu a_0, lze tedy počítat v dipólové aproximaci.

1. Nalezněte hustotu pravděpodobnosti za jednotku času, že atom přejde do základního stavu a vyzáří foton o frekvenci ω do elementu prostorového úhlu Ω.

2. Napište diferenciální účinný průřez tohoto procesu.

3. Nalezněte směr polarizace $\boldsymbol{\epsilon}$ dopadajícího elektromagnetického vlnění, pro kterou je pravděpodobnost stimulované emise nejvyšší. Jak se se tento směr liší podle hodnoty kvantového čísla m v počátečním stavu?

3 Magnetický moment

Dva nezávislé impulsmomenty $\hat{\mathbf{L}}$ (například orbitální moment hybnosti) a $\hat{\mathbf{S}}$ (vnitřní spin systému) splňující $\left[\hat{\mathbf{L}},\hat{\mathbf{S}}\right]=0$ se složí na celkový impulsmoment

$$\hat{\mathbf{J}}=\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{S}}.$$

Stavem $|(ls)jm\rangle$ označme vlastní vektory operátorů $\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{S}}^2, \hat{\mathbf{J}}^2, \hat{\mathrm{J}}_3$:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}^2\,|(ls)jm\rangle &= l(l+1)\,|(ls)jm\rangle\ ,\\
\hat{\mathbf{S}}^2\,|(ls)jm\rangle &= s(s+1)\,|(ls)jm\rangle\ ,\\
\hat{\mathbf{J}}^2\,|(ls)jm\rangle &= j(j+1)\,|(ls)jm\rangle\ ,\\
\hat{\mathrm{J}}_3\,|(ls)jm\rangle &= m\,|(ls)jm\rangle\ .
\end{aligned}$$

Definujme operátor magnetického momentu[1]

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=g_L\hat{\mathbf{L}}+g_S\hat{\mathbf{S}},$$

přičemž g_L, g_S jsou reálné parametry, které se nazývají gyromagnetické faktory (g-faktory).[2]

Spočítejte diagonální maticový element[3]

$$\langle(ls)jm|\hat{\boldsymbol{\mu}}|(ls)jm\rangle\ .$$

[1]Magnetický moment je vyjádřen v jednotkách Bohrova (jaderného) magnetonu

$$\mu_0=\frac{e\hbar}{2M},$$

kde e je elementární náboj, M je hmotnost elektronu (nukleonu). Uvedený výraz platí v jednotkách SI, v Gaussovských elektromagnetických jednotkách se objevuje ještě rychlost světla c ve jmenovateli.

[2]Jejich číselné hodnoty jsou

$$\begin{aligned}
g_{\text{elektron}} &= -2.00231930419922\approx 2\\
g_{\text{mion}} &= -2.0023318414\approx 2\\
g_{\text{neutron}} &= -3.82608545\\
g_{\text{proton}} &= 5.585694702
\end{aligned}$$

(znaménka $g_{L,S}$ a μ_0 bývají občas definována obráceně).

[3]Veličina s největší projekcí $j=m$ se nazývá *magnetický moment částice*,

$$\mu\equiv\langle(ls)jj|\mu_z|(ls)jj\rangle\ .$$

4 Rozptyl na $\frac{1}{r^2}$ potenciálu

Uvažujte rozptyl částice o hmotnosti M na potenciálu

$$V(r) = \frac{v}{r^2},$$

kde parametr v může být kladný (pro odpudivou sílu) nebo záporný (pro sílu přitažlivou).

- Řešením Schrödingerovy rovnice nalezněte vlnovou funkci pro energii $E > 0$.
- Spočítejte fázové posunutí $\delta_l(k)$ l-té parciální vlny a načrtněte jeho závislost na k (nebo na energii E).
- Nalezněte totální účinný průřez pro l-tou parciální vlnu $\sigma_l(k)$. Diskutujte fyzikální příčinu skutečnosti, že pro $k \to 0$ účinný průřez diverguje.