

Domácí úkol na 17.3.2022

Runge-Kuttův algoritmus pro Lorenzův systém

Naprogramujte a odladte řešení nelineární soustavy tří diferenciálních rovnic pro jednoduchý Lorenzův model vedení tepla v atmosféře

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

s hodnotami parametrů $\sigma = 10$, $\rho = 28$ a $\beta = 8/3$, počátečními podmínkami $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ (na počátečních podmínkách zase tolik nezáleží), s krokem $\Delta t = 0.01$ a na časovém intervalu $t \in \langle 0, 100 \rangle$. Vykreslete graf $z(x)$, případně (nepovinně) vykreslete 3D graf funkce $z(x, y)$.

K řešení diferenciálních rovnic použijte Runge-Kuttovu metodu 4. řádu:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_i, t_i), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{w}_i + \mathbf{k}_1 \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{w}_i + \mathbf{k}_2 \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_i + \mathbf{k}_3 \Delta t, t + \Delta t), \\ \phi_i &= \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),\end{aligned}$$

kde $\mathbf{w} = (x, y, z)$ a integrační krok se dělá stejně jako u ostatních procvičovaných jednokrokových algoritmů,

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \phi_i \Delta t.$$

Výsledná křivka je slavný Lorenzův podivný atraktor ve tvaru motýlích křídel, který zpopularizoval teorii klasického chaosu.