Школа Data scientist

Занятие 5

Анализ данных в Python

Тема 2

Disclaimer

Все формулировки далее нестрогие, за более строгими определениями обращайтесь к специализированной литературе

СБЕР

План занятия

- Оценка распределения по выборке
- Важные характеристики распределений
- Важные статистики
- Доверительные интервалы
- Центральная предельная теорема
- Статистический вывод
- API Pandas + Matplotlib

Зачем оценивать распределение по выборке?

- Чтобы получить некое представление о мире
- Чтобы делать базовые прогнозы на основе полученных распределений (при этом имея численное, а не качественное выражение)
- Часто нас не интересуют супер точные результаты, да мы и не можем учесть такое кол-во переменных у себя в голове
- Некоторые алгоритмы машинного обучения (например, Байесовские алгоритмы классификации), основываются на знании априорных (предопределенных, доопытных) вероятностях классов

Оценка распределения по выборке

В общем виде задача формулируется так:

“Требуется оценить плотность распределения p(x) по выборке независимых случайных векторов, распределенных по этому закону p(x).”

Оценка распределения по выборке

Выборка случайной величины X :

$X^n = (X_1, \dots, X_n)$, n – объем выборки

X^n - независимы и распределены одинаково (i.i.d.)

$T(X^n)$ - статистика, функция от выборки, возвращающая какое-то число

* independent and identically-distributed

Оценка распределения по выборке

Воспоминание:

Распределение дискретной случайной величины задается функцией вероятности:

$$X \in \ \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}, \qquad P(X = \omega_k) = pk$$

$$\bar{p}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Xi = \omega_k]$$

Оценка распределения по выборке

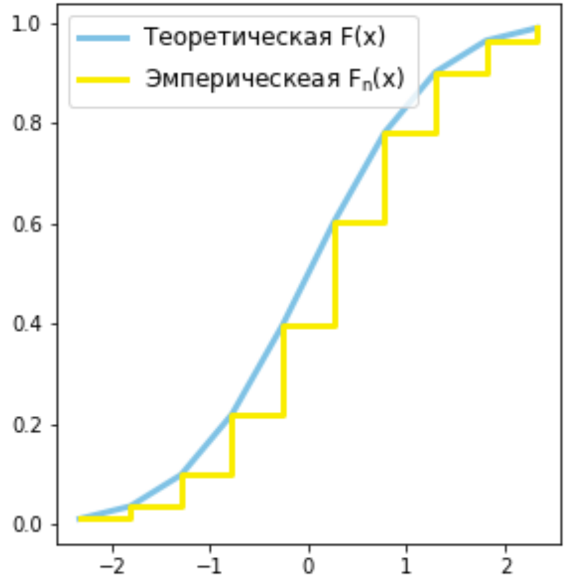
Для дискретной выборки функцию вероятности можно оценить частотами событий

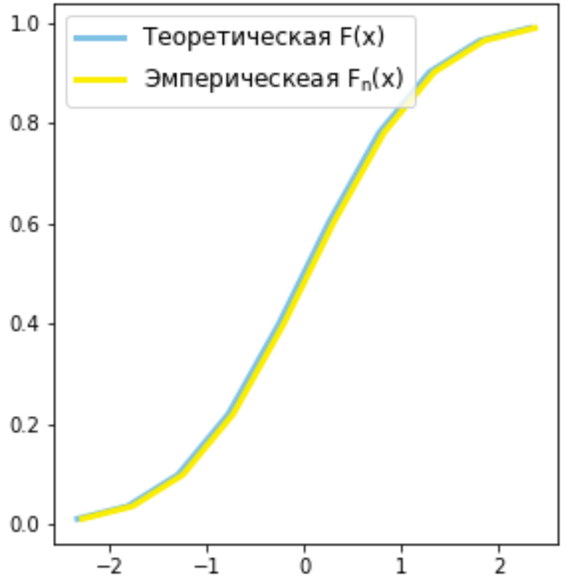
Но что делать для непрерывной случайной величины?

$$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

Оценка распределения по выборке

$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i \leq x]$ - *эмпирическая функция распределения*





$n \to \infty$

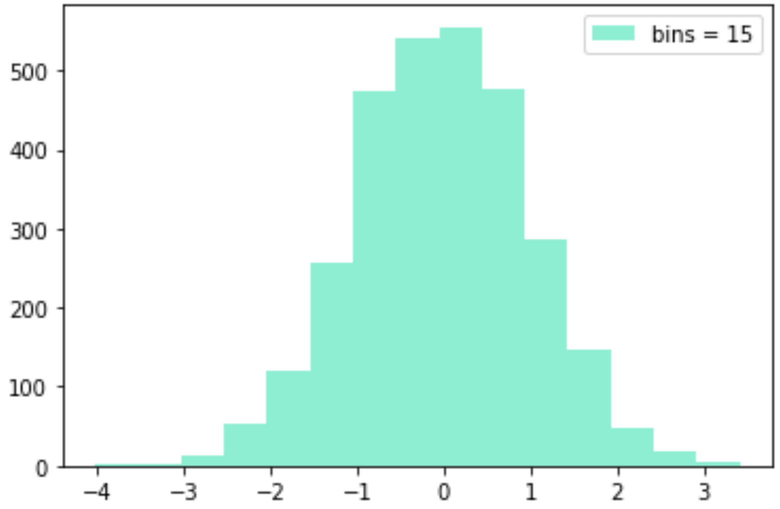
Оценка распределения по выборке

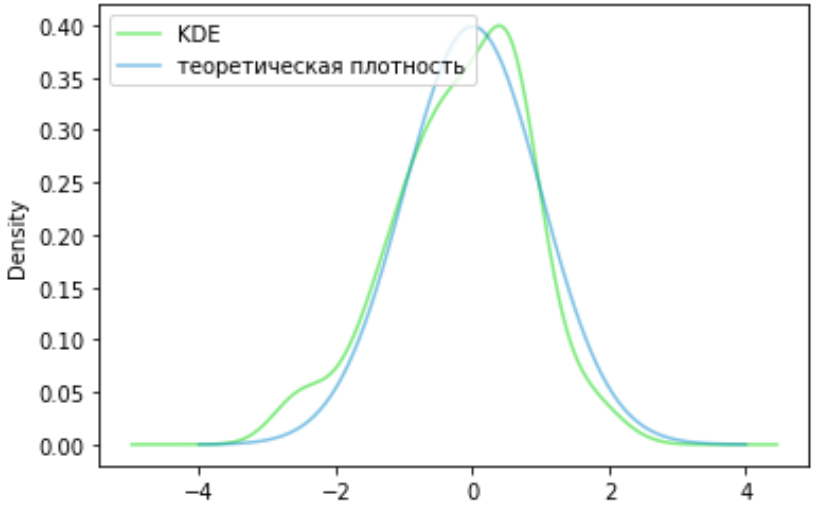
$$X \sim f(x)$$

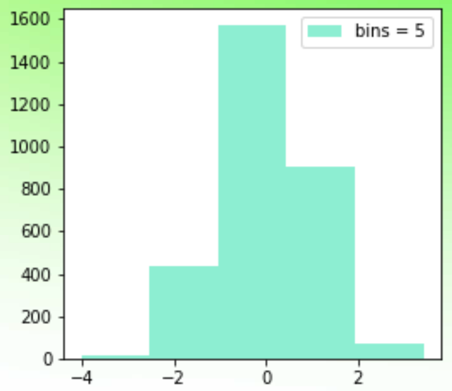
$$f(x):\ \int_a^b f(x)dx = P(a \leq x \leq b)$$

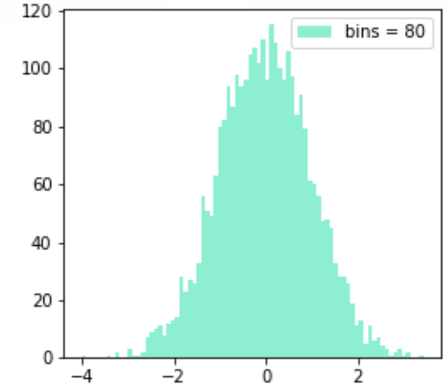
Формула Стерджесса

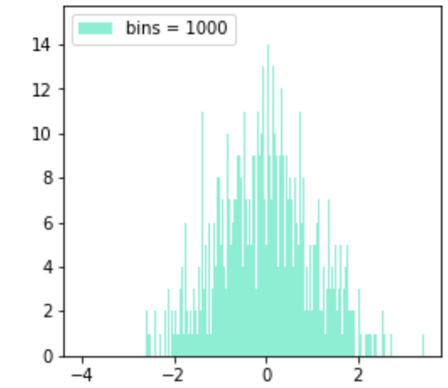
$$bins\ = 1 + [log_2\, N]$$
$$bins\ = 1 + 3.322\ lg\ N$$



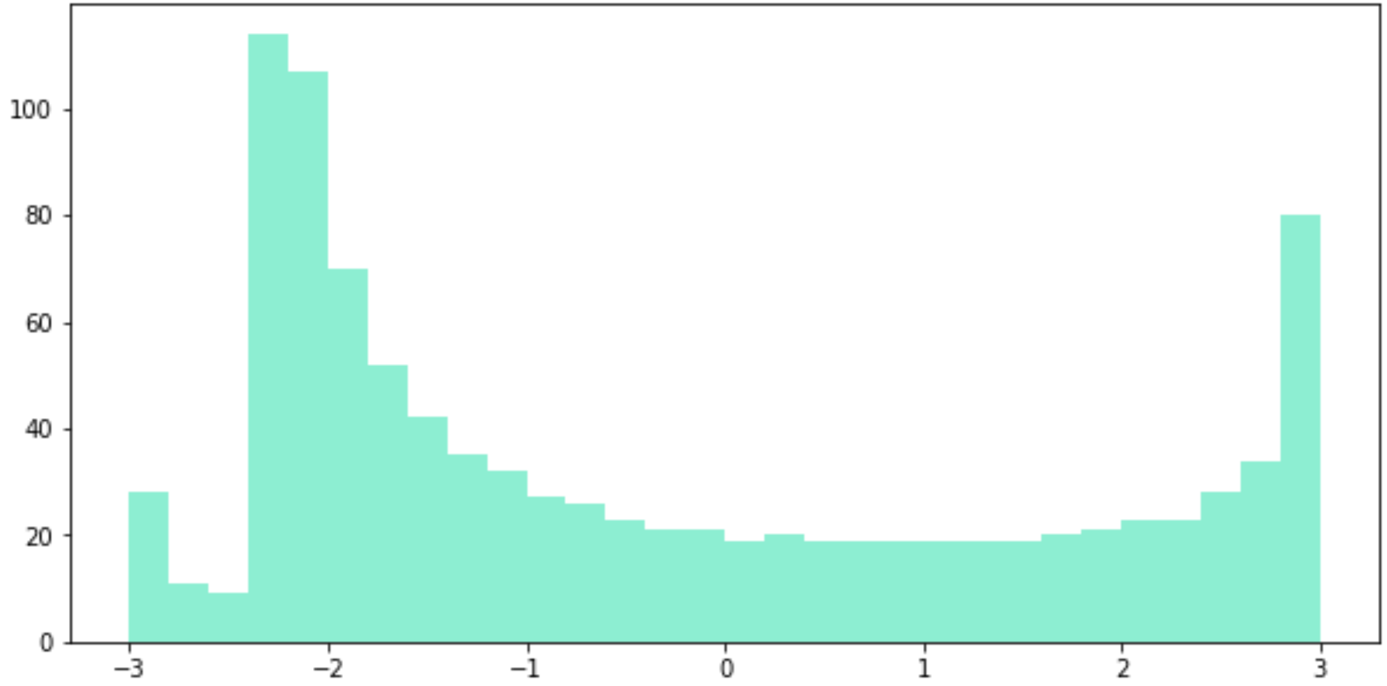








Оценка распределения по выборке



Практика? Практика!

СБЕР

Характеристики и статистики

Математическое ожидание

$$\mathbb{E}X = \begin{cases} \sum_i \omega_i p_i & \text{Дискретный случай} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{Непрерывный случай} \end{cases}$$

Важные характеристики распределений

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение

$\mathbb{D}X = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)$ Дисперсия*

$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}X}$ Стандартное отклонение

$\mathrm{IQR} = X_{0.75} - X_{0.25}$ Интерквартильный размах

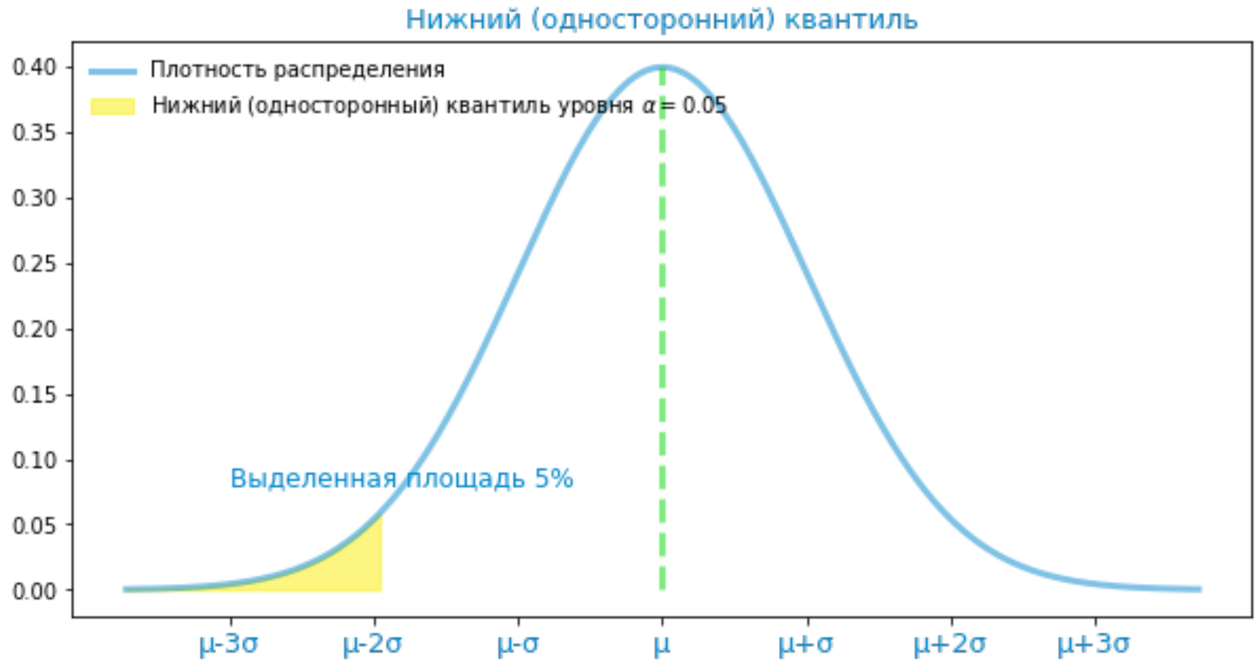
* Средний квадрат отклонения от среднего значения $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ $n \to \infty$

Важные характеристики распределений

X_α Квантиль порядка α ∈ (0, 1):

$$\mathbb{P}(X \leq X_\alpha) \geq \alpha$$

$$\mathbb{P}(X \geq X_\alpha) > 1 - \alpha$$

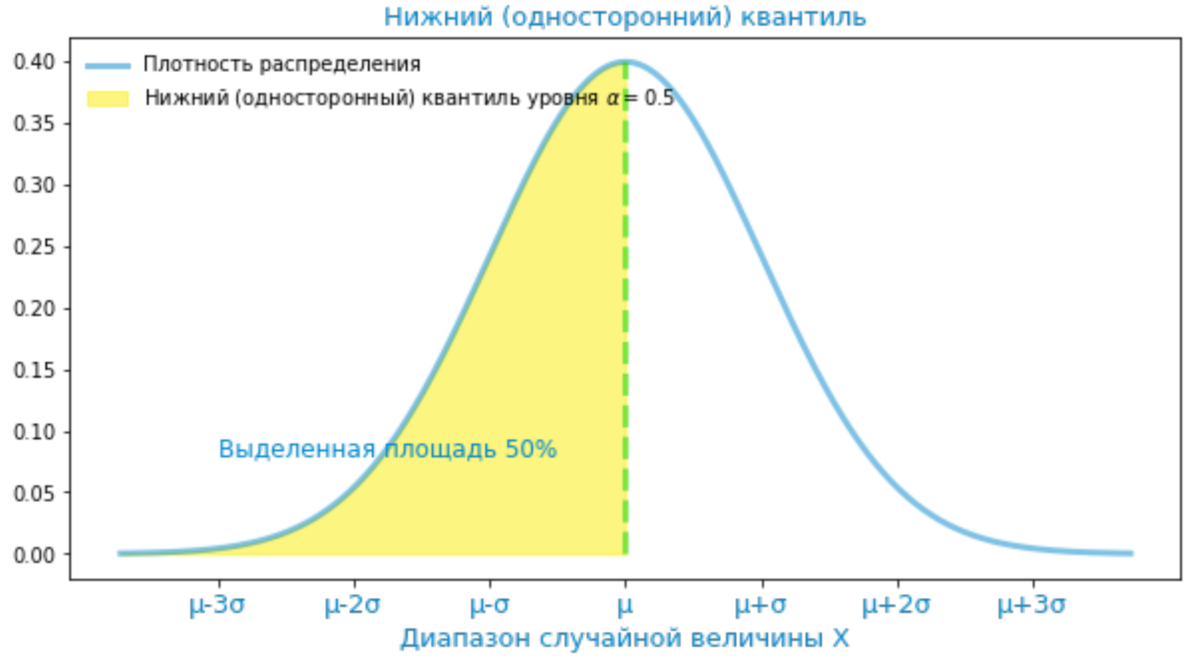


Важные характеристики распределений

Медиана — квантиль с α = 0.5. Т.е. элементы выборки с одинаковой вероятностью попадают по обе стороны медианы.

$$\mathbb{P}(X \leq X_\alpha) \geq 0.5$$

$$\mathbb{P}(X \geq X_\alpha) > 0.5$$

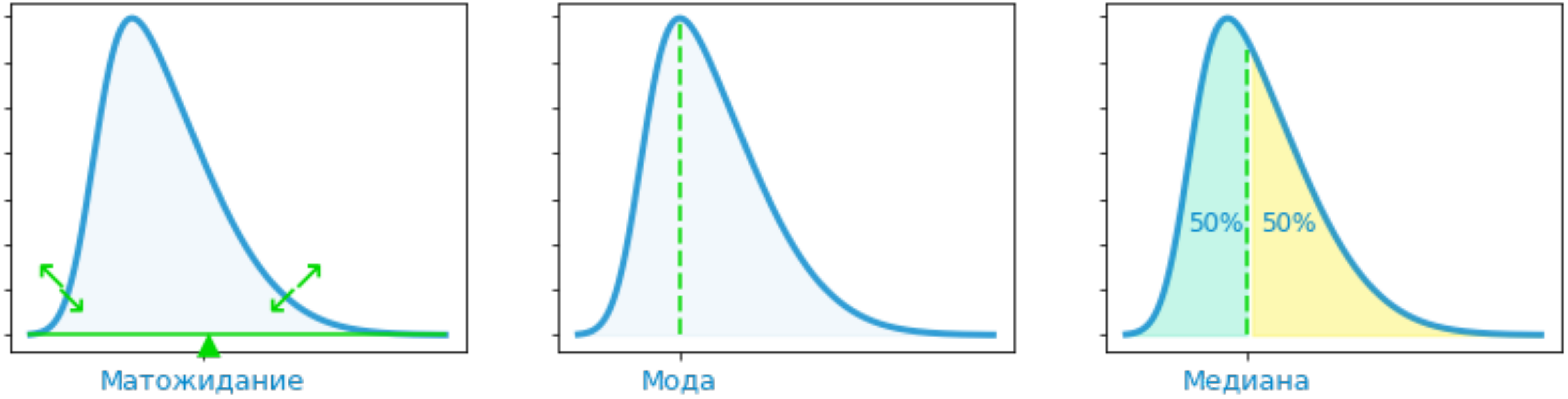


Важные характеристики распределений

Мода — «наиболее вероятное» (частое) значение случайной величины

$$modeX = \begin{cases} \underset{i}{argmax}\, p_i, & X - \text{дискретна} \\ \underset{x}{argmax}\, f(x), & X - \text{непрерывна} \end{cases}$$

Важные характеристики распределений



Важные характеристики распределений

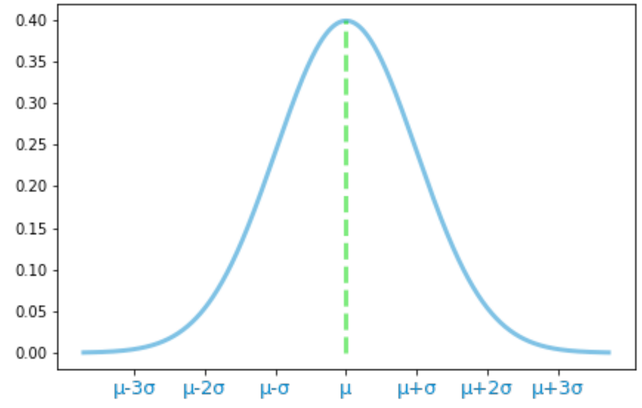
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies \mathbb{E}X = \mu = mode\ X = med\ X$$

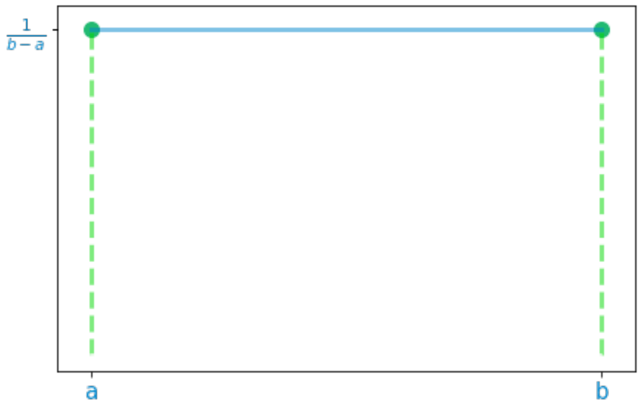
$$\mathbb{D}X = \sigma^2$$

$$X \sim U(a, b) \implies \mathbb{E}X = med\ X = \frac{a+b}{2}$$

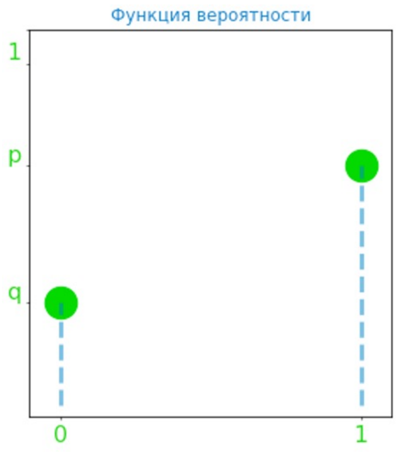
$mode\ X$ – не определена
(любое число на отрезке $[a, b]$)

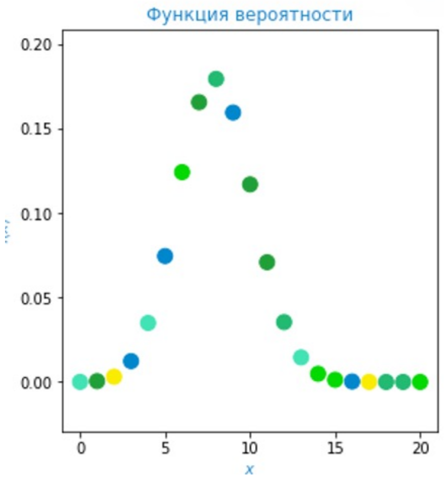
$$\mathbb{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

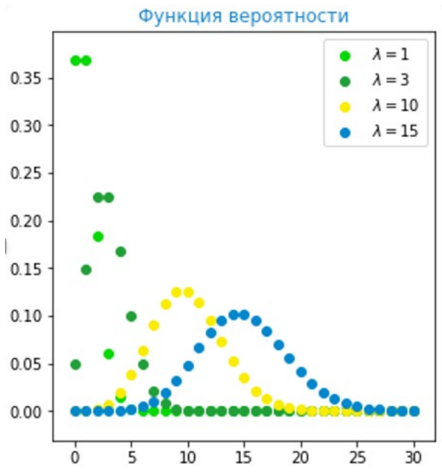




Важные характеристики распределений







$X \sim Ber(p) \implies \mathbb{E}X = p$

$\mathbb{D}X$= pq

$X \sim Binom(n, p) \implies \mathbb{E}X = np$

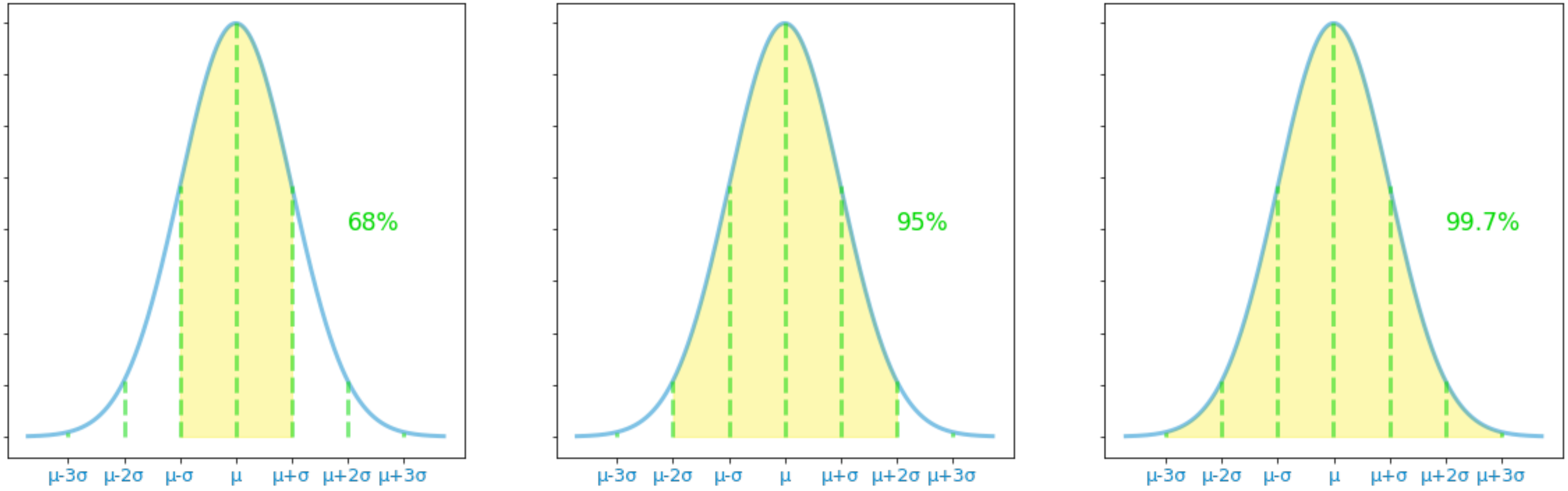
$\mathbb{D}X$= npq

$X \sim Pois(\lambda) \implies \mathbb{E}X = \lambda$

$\mathbb{D}X$= λ

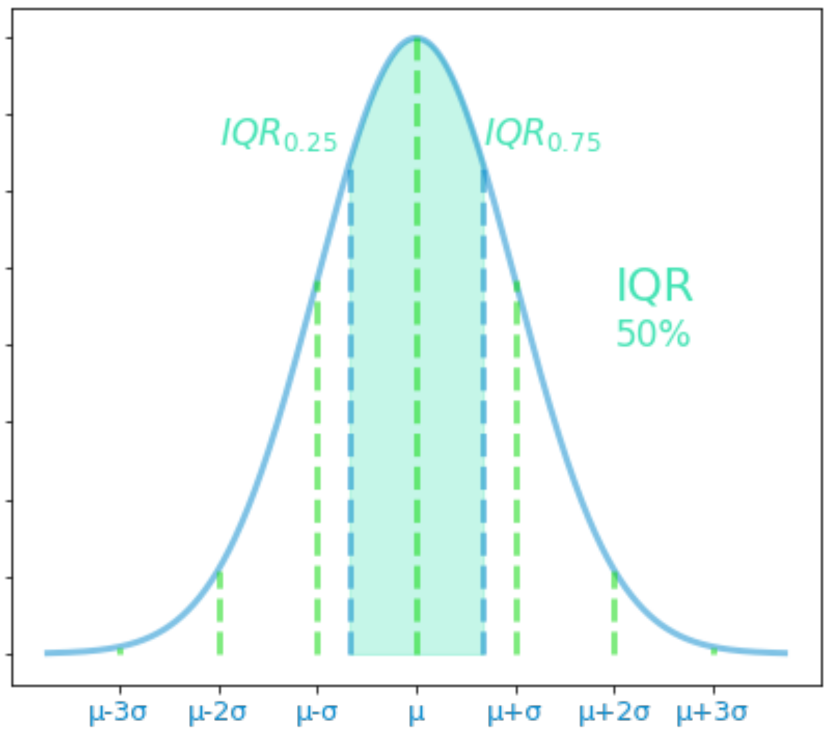
При больших λ X $\implies$ N(λ, λ)

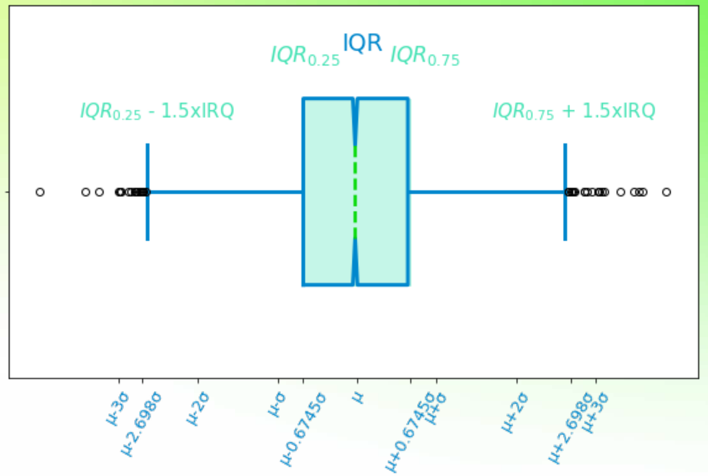
Важные характеристики распределений

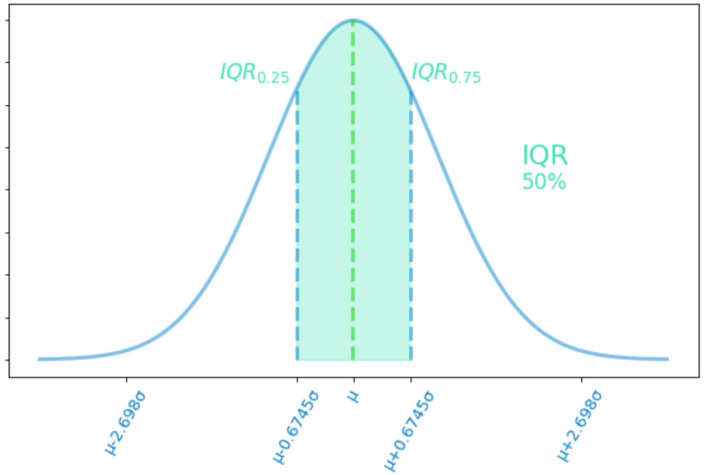


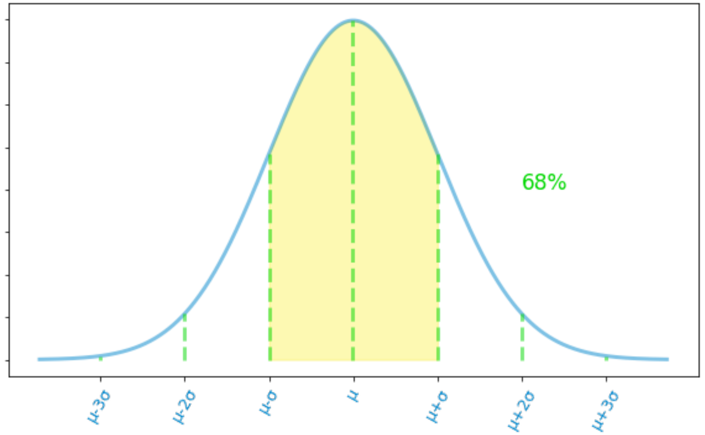
СБЕР

Важные характеристики распределений









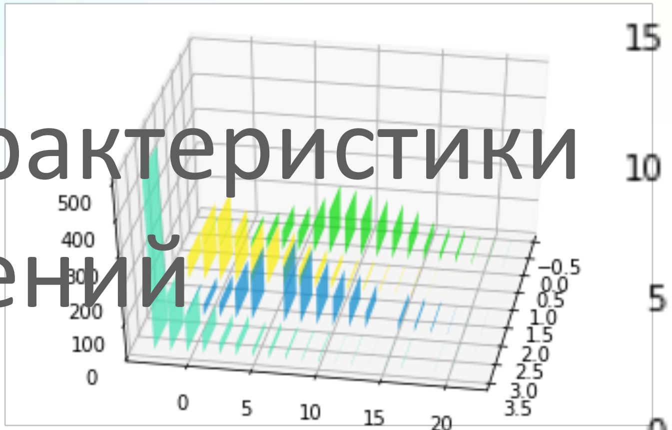
Важные характеристики распределений

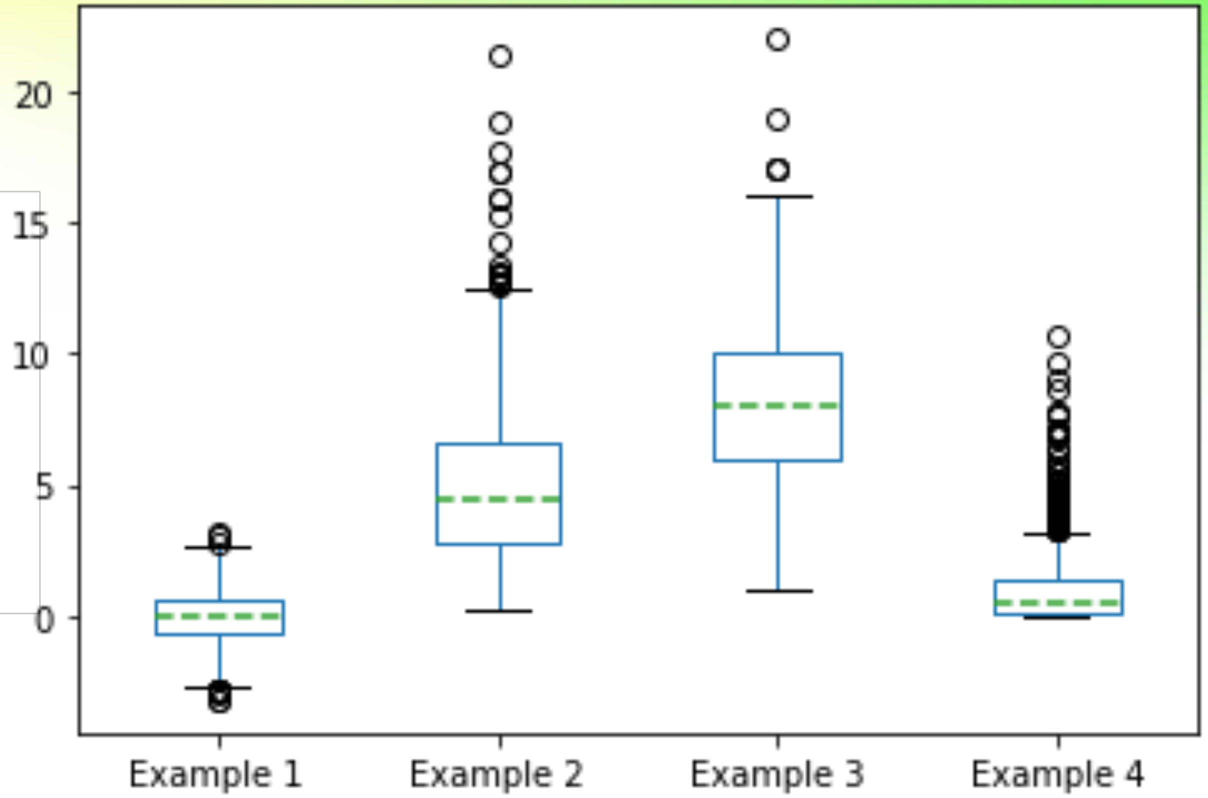
[Why not to trust statistics?]

pandas. DataFrame.describe …
scipy.stats mean/median/var/std/iqr …
numpy mean/median/var/std/quantile …

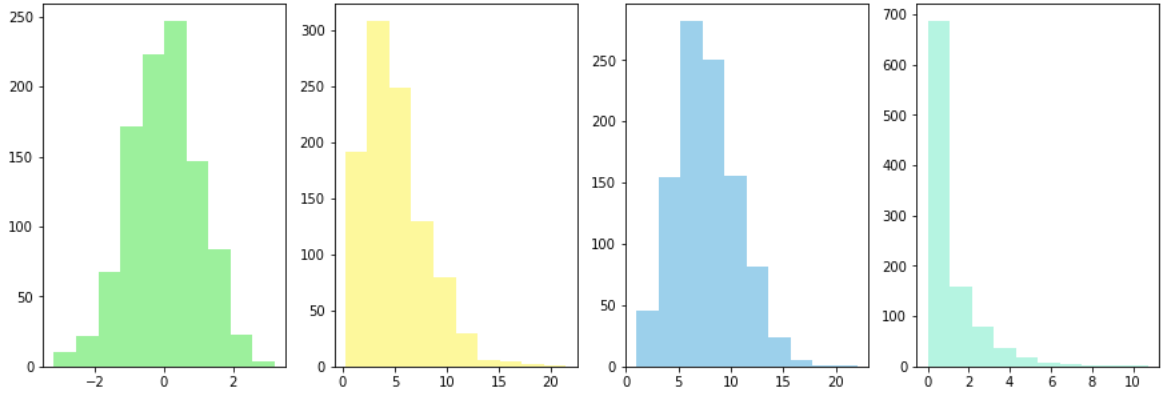
count	5.000000e+03
mean	-0.019447
std	0.983013
min	-3.991560
25%	-0.674213
50%	-0.021726
75%	0.641164
max	3.893373

Важные характеристики распределений

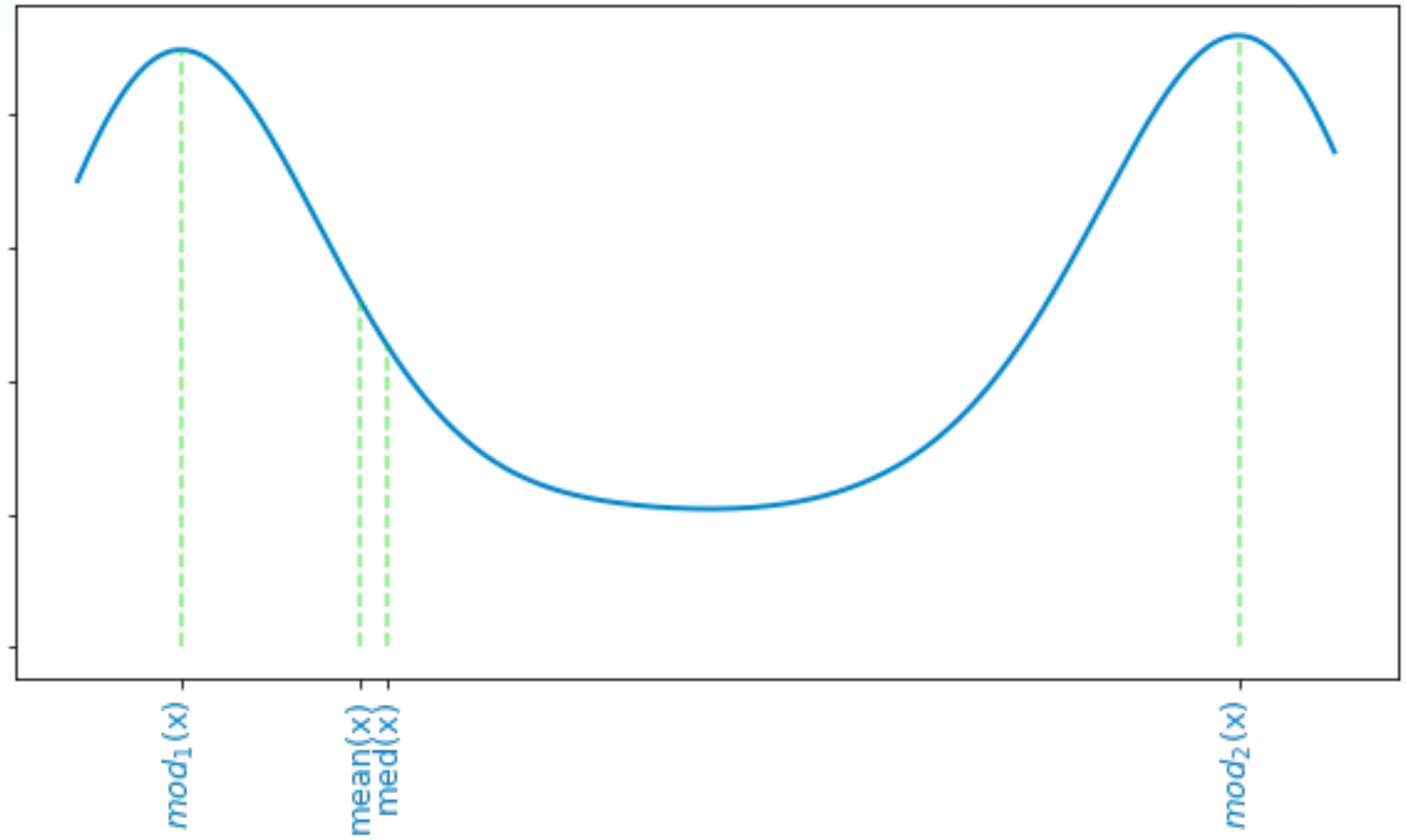




	Example 1	Example 2	Example 3	Example 4
count	1000	1000	1000	1000
mean	0.004355	5.011983	7.883000	1.026078
std	1.028369	2.971487	2.849461	1.413119
min	-3.187946	0.245101	1.000000	0.000002
25%	-0.697595	2.743008	6.000000	0.114400
50%	0.030252	4.488515	8.000000	0.493133
75%	0.673652	6.620770	10.00000	1.361201
max	3.209859	21.437900	22.00000	10.732228

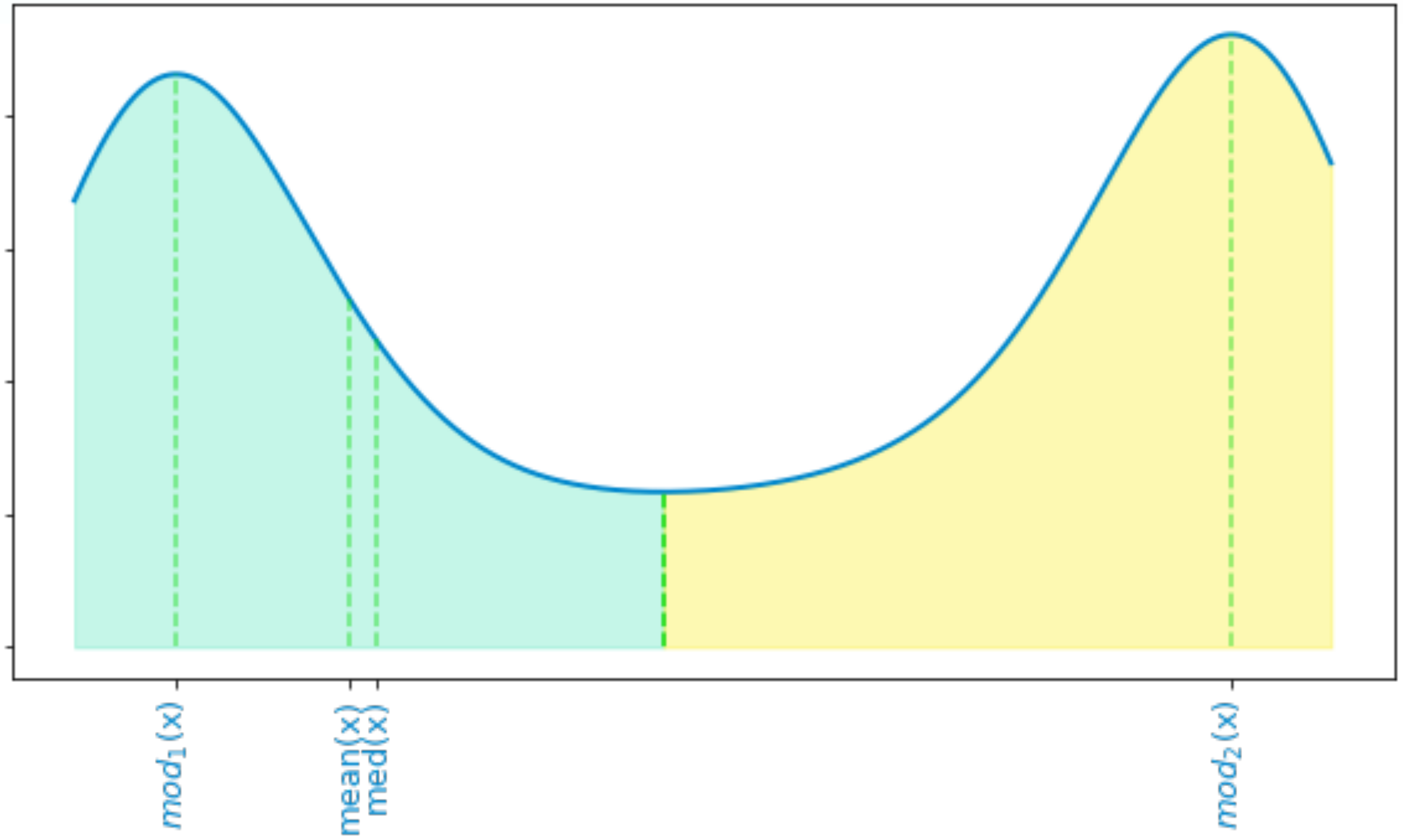


Важные характеристики распределений



Как пользоваться?

Важные характеристики распределений



Сегментировать!

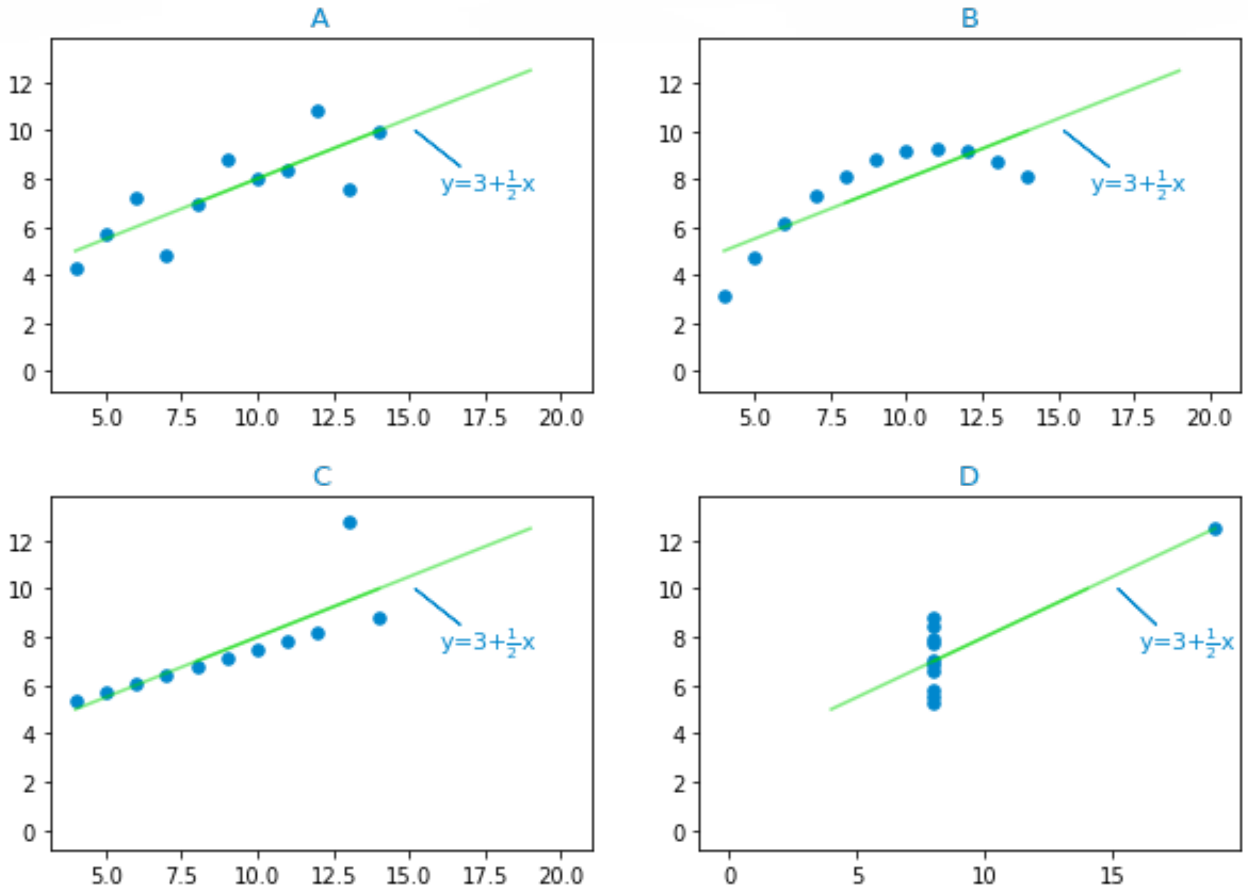
Важные характеристики распределений

Квартет Анскомбе

	A	B	C	D
Среднее значение x	9.00	9.00	9.00	9.00
Дисперсия x	11.00	11.00	11.00	11.00
Среднее значение y	7.50	7.50	7.50	7.50
Дисперсия y	4.21	4.21	4.21	4.21
R^2	0.67	0.67	0.67	0.67
Прямая линейной регрессии	y = 3 + 0.5 x	y = 3 + 0.5 x	y = 3 + 0.5 x	y = 3 + 0.5 x

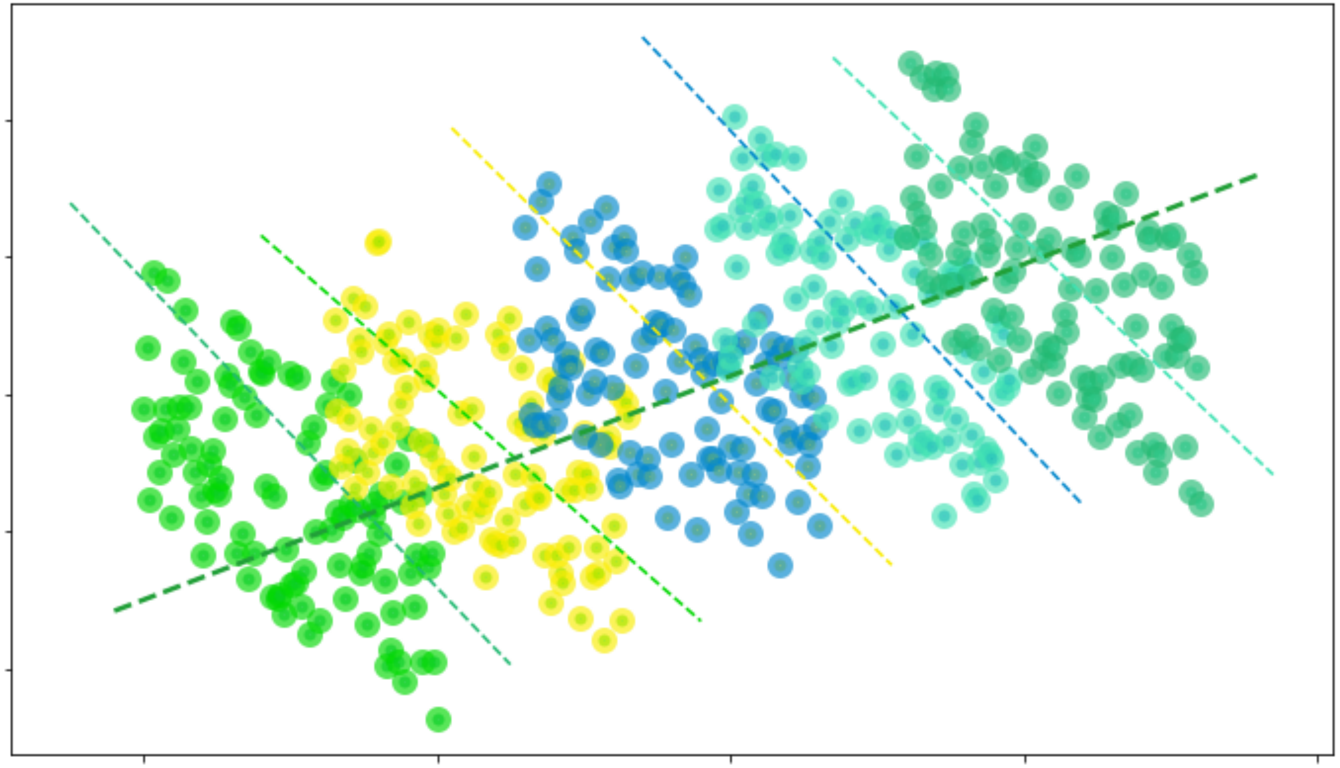
Важные характеристики распределений

Квартет Анскомбе



Важные характеристики распределений

Парадокс Симпсона



Важные характеристики распределений

Всегда смотрите на гистограммы/функции вероятности!

Характеристики могут привести в заблуждение!

Но, если мы работаем в одном и том же пространстве событий, то характеристики помогают сравнивать различные подходы, показатели, препараты, продукты...

Важные характеристики распределений

Выборочное среднее считается по такой формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Важные характеристики распределений

Выборочная медиана, необходимо просто отсортировать выборку и выбрать значение в середине

$$X_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$$

$$med = \begin{cases} X_{(k+1)}, n = 2k+1 \\ \dfrac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, n = 2_k \end{cases}$$

Важные характеристики распределений

Выборочная дисперсия считается по такой формуле, деля на n-1, а не на n мы получаем так называемую “несмещенную оценку” — это точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Предсказательный интервал

Зная как распределена случайная величина X, мы можем понять в каком диапазоне она скорее всего окажется

$$\mathbb{P}(X_{\frac{\alpha}{2}} \leq X \leq X_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

Доверительные интервалы

$$\mathbb{P}(C_L \leq \theta \leq C_R) \geq 1 - \alpha$$

Левый предел

Оцениваемый параметр

Правый предел

Уровень доверия

Технология

Зная как распределена статистика, мы, используя алгебраические преобразования можем понять в каком диапазоне будет изменяться неизвестный параметр. Диапазон при этом чаще всего задается квантилями распределений и другими статистиками по выборке

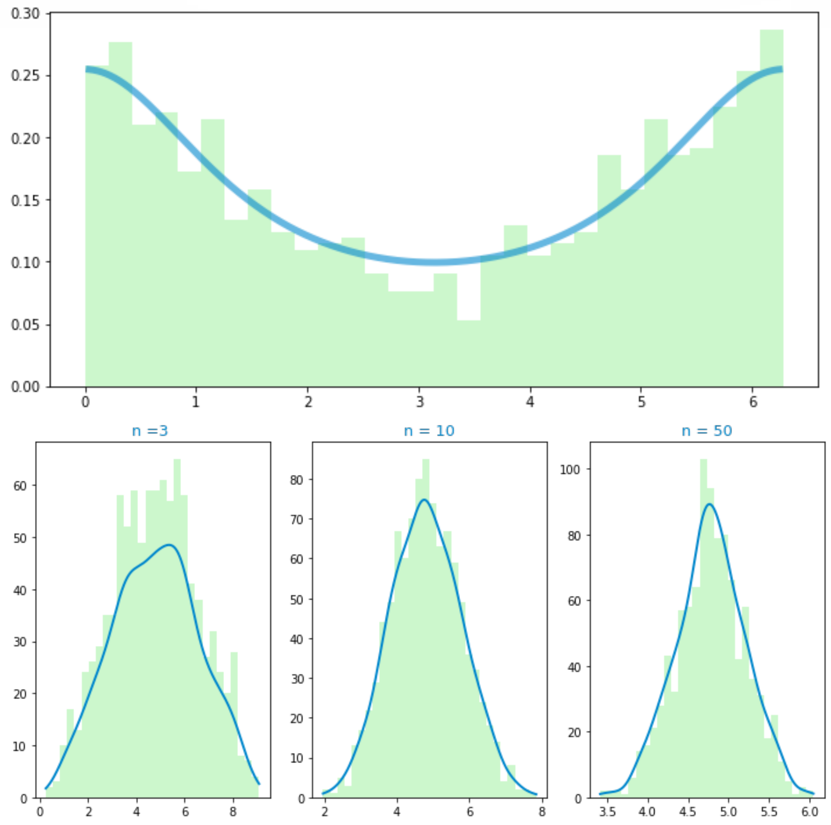
Практика? Практика!

Центральная предельная теорема

https://habr.com/ru/post/471198/

http://datascientist.one/central-limit-theorem/

https://www.youtube.com/watch?v=InXimz8zikc



Центральная предельная теорема

Распределение выборочного среднего набора независимых одинаково распределенных случайных величин хорошо приближается нормальным распределением:

$$\bar{X}_n \approx\sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n}\right)$$

Центральная предельная теорема

Предсказательный интервал для $\bar{X}$

$$P\left(\mu - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X_{\mathrm{n}}} \leq \mu + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Доверительный интервал для μ

$$P\left(\overline{X_{\mathrm{n}}} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X_{\mathrm{n}}} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Центральная предельная теорема

Доверительный интервал для $\mathbb{E}X$

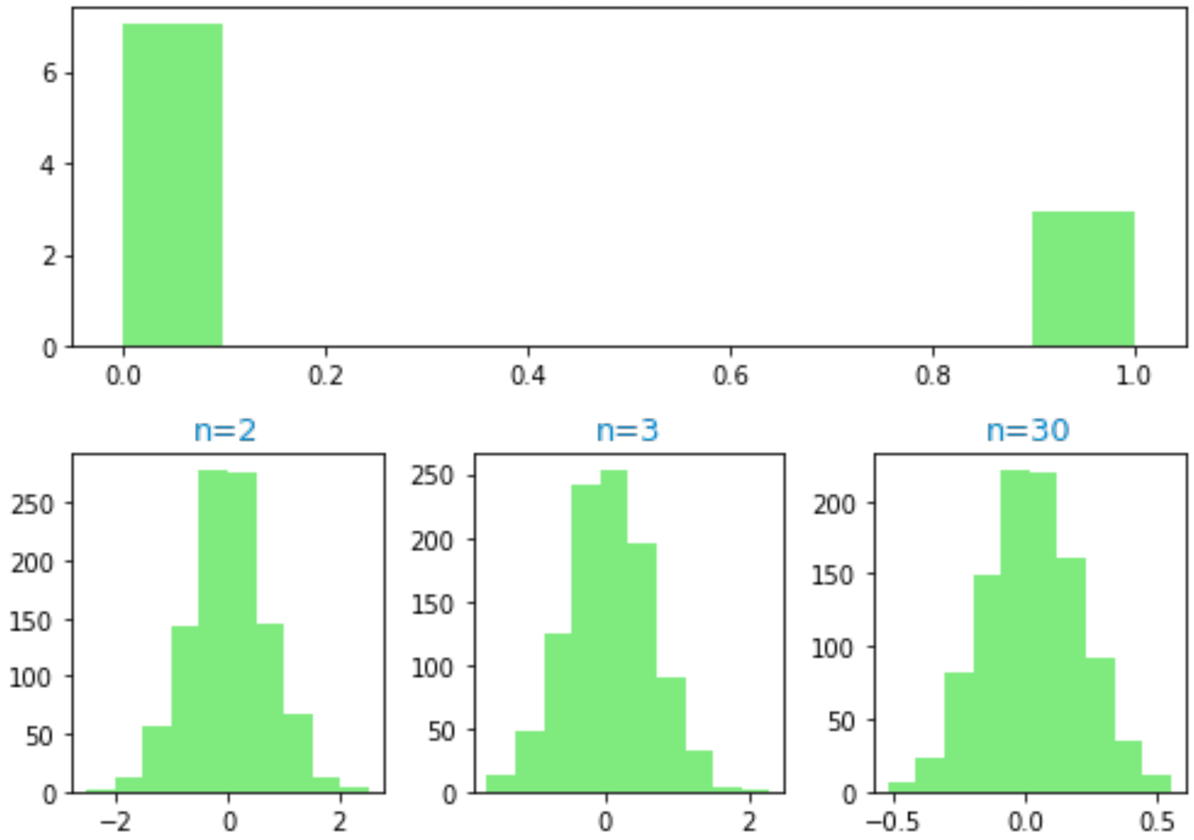
$$P(\overline{X_{\mathrm{n}}} - z_{1-{}^{\alpha}/_{2}}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}} \le \mathbb{E}X \le \overline{X_{\mathrm{n}}} + z_{1-{}^{\alpha}/_{2}}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}}) = 1 - \alpha$$

Центральная предельная теорема

Распределение Бернулли

$X \sim Ber(p)$

$P(X = 1) = p$
$P(X = 0) = 1 - p = q$



Центральная предельная теорема

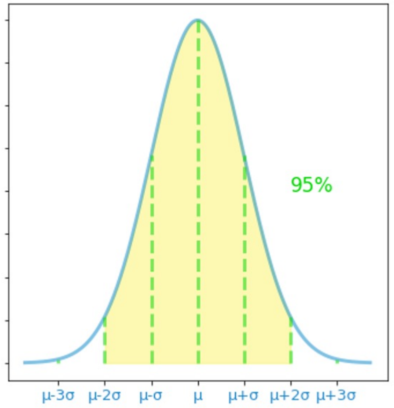
Распределение Бернулли

$$\bar{p} \approx \sim N(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n})$$

$X \sim Ber(p) \Longrightarrow \mathbb{E}X = p, \mathbb{D}X = p(1-p)$

$$\bar{p} \approx \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$



$$P(\bar{p} - 2\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \le p \le \bar{p} + 2\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}) \approx 95\%$$

Пример:

Эксперимент 1: 30 подбрасываний, $\bar{p} = 0.467$

95% доверительный интервал: **0.285…0.649**

Эксперимент 2: 700 подбрасываний, $\bar{p} = 0.556$

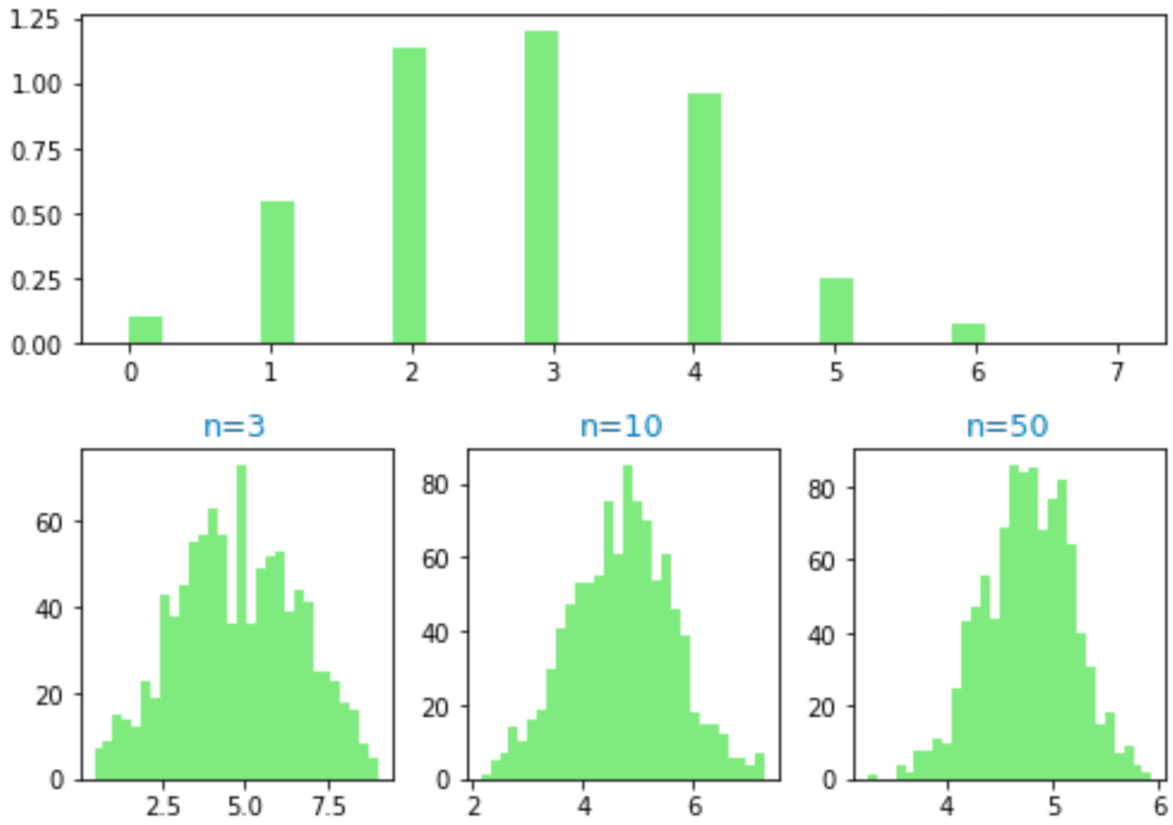
95% доверительный интервал: **0.519…0.594**

Центральная предельная теорема

Биномиальное распределение

$P(X = n) = p^n$ *

$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$. **



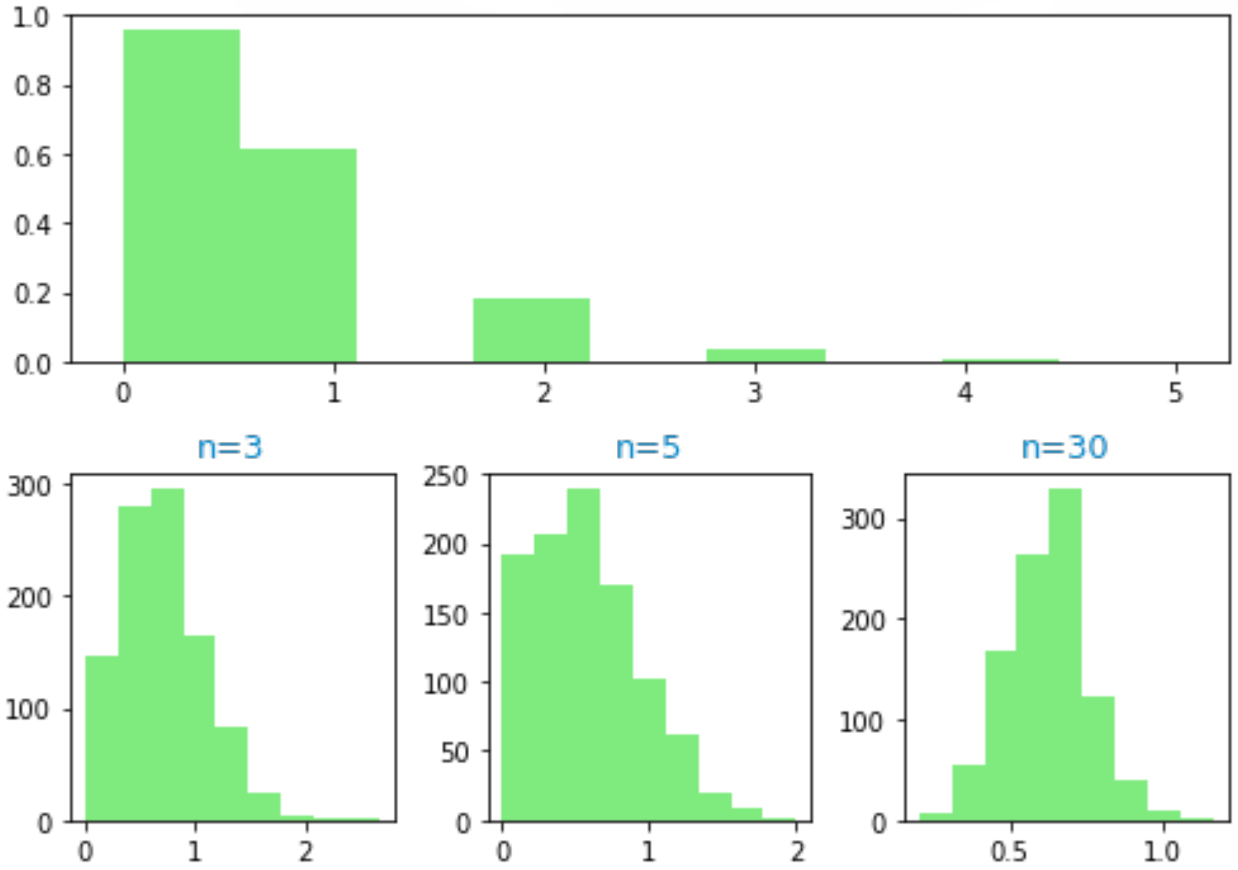
* вероятность попасть n-раз
** вероятность попасть k-раз из n

Центральная предельная теорема

Биноминальное распределение

$P(X = n) = p^n$ *

$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. **



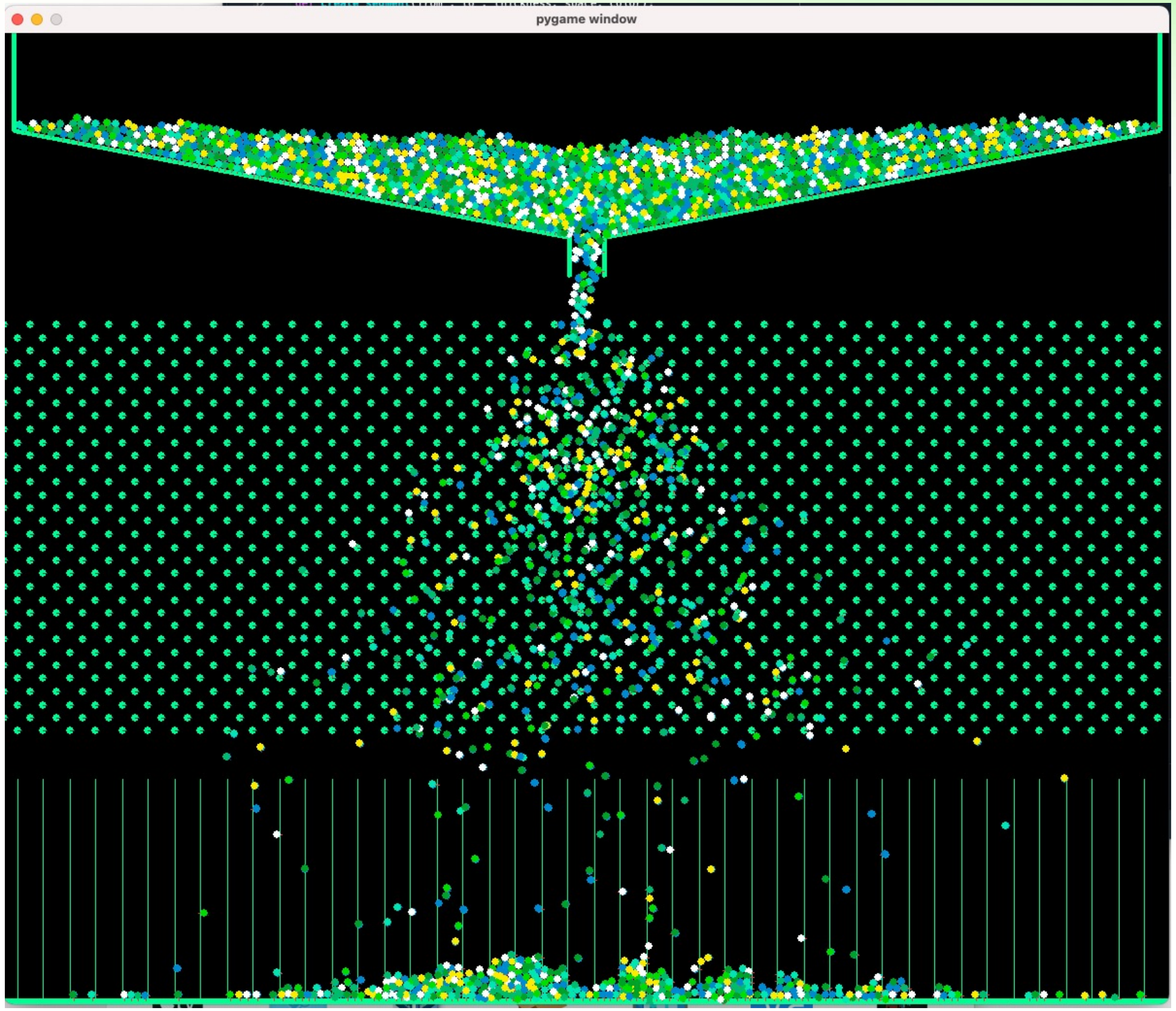
* вероятность попасть n-раз
** вероятность попасть k-раз из n

СБЕР

ЦПТ. Машина Гальтона

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 6$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$

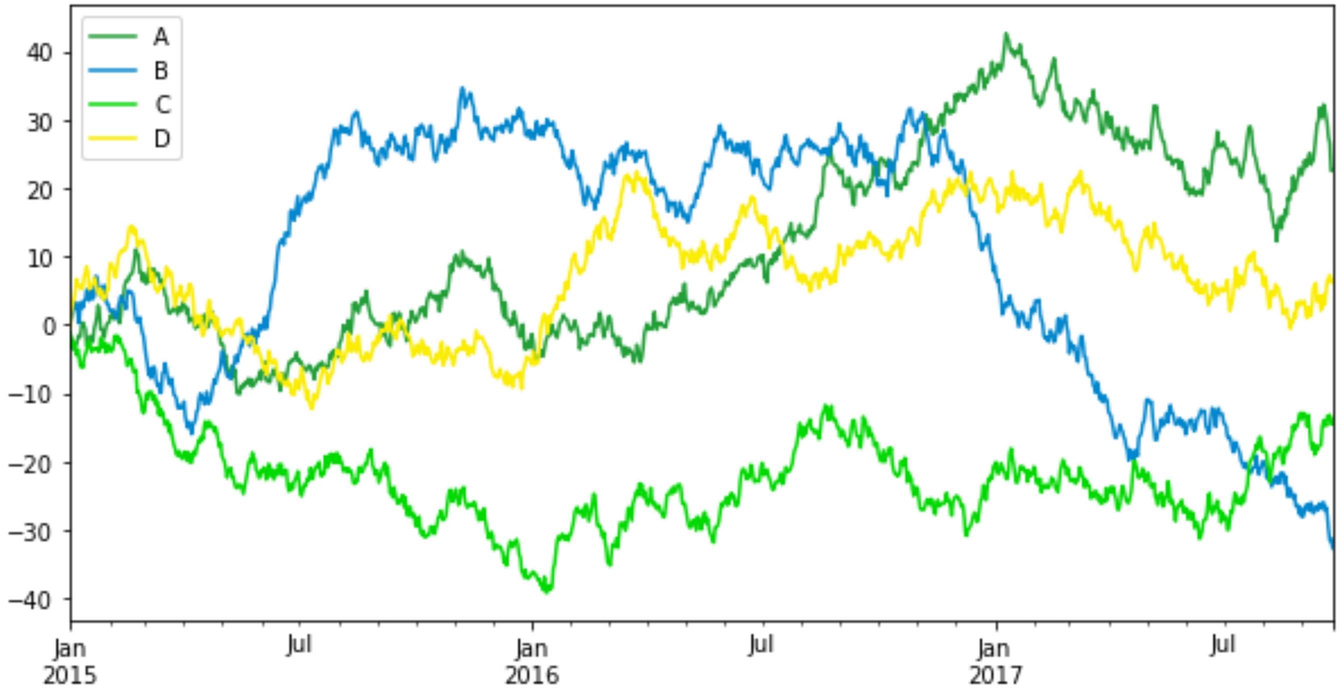
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1



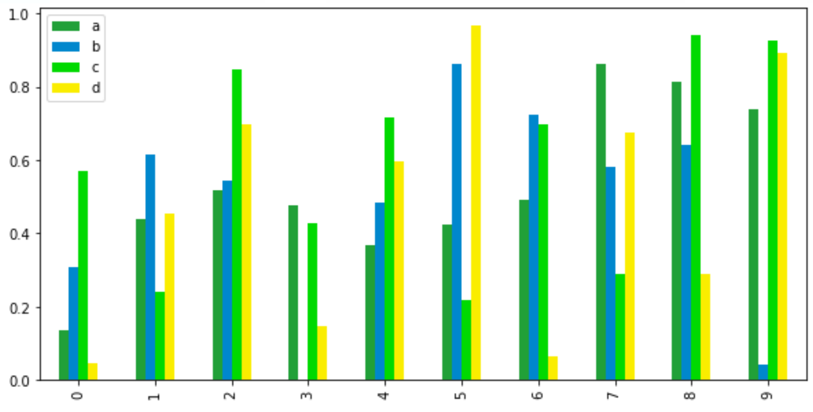
Практика? Практика!

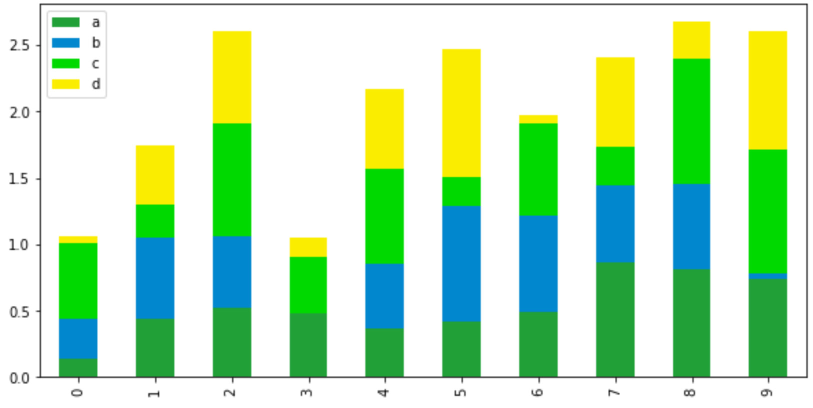
API Pandas + Matplotlib

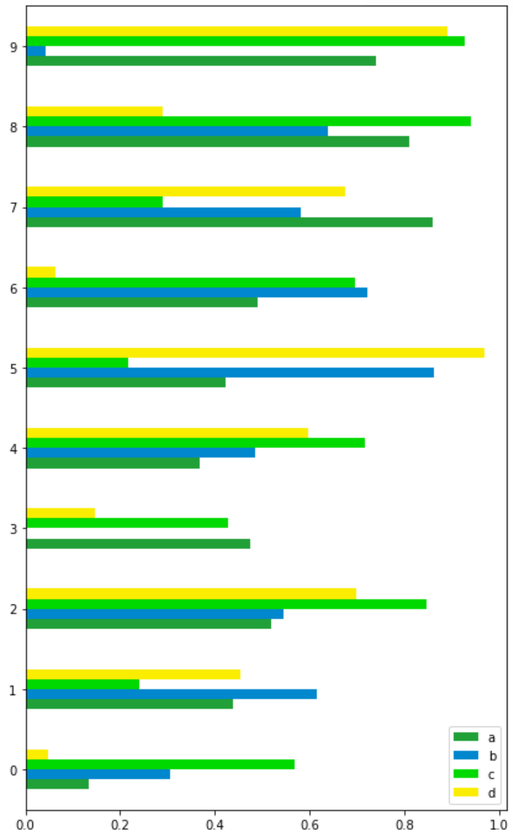
pd.Dataframe.plot(.....)



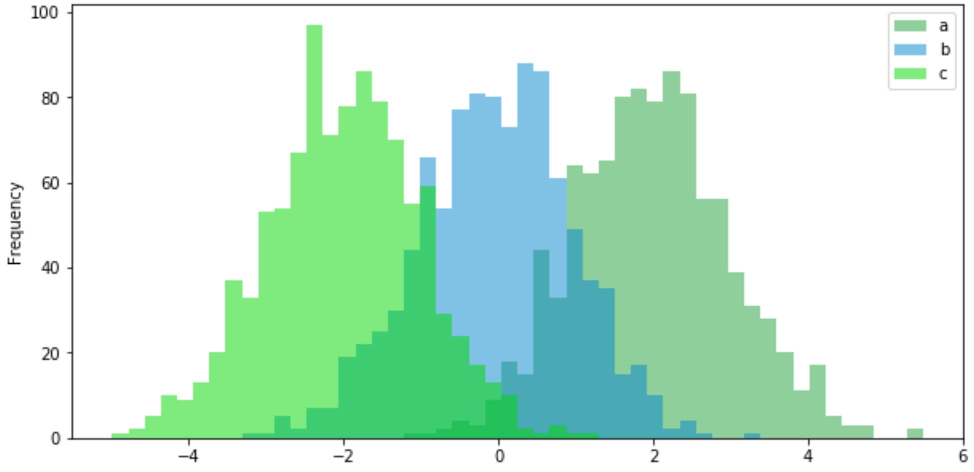
pd.Dataframe.bar(...) и ...barh

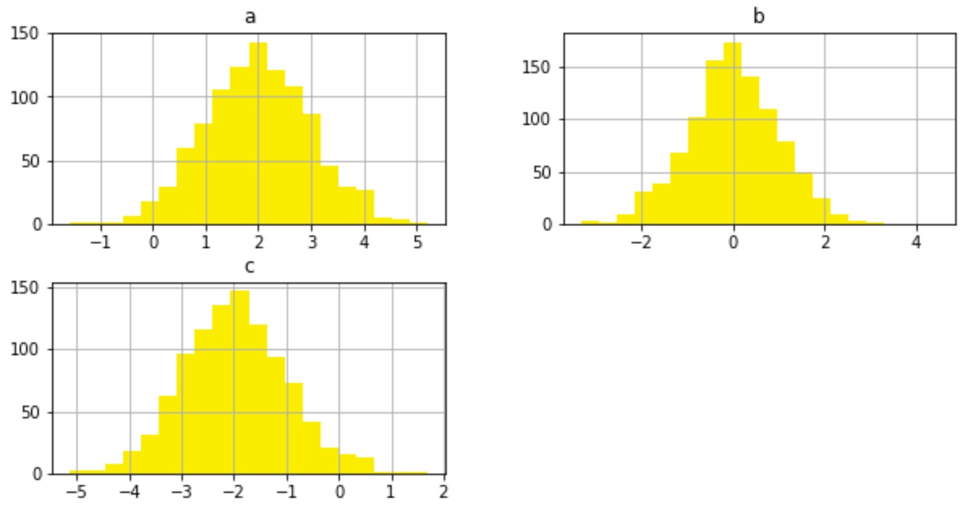




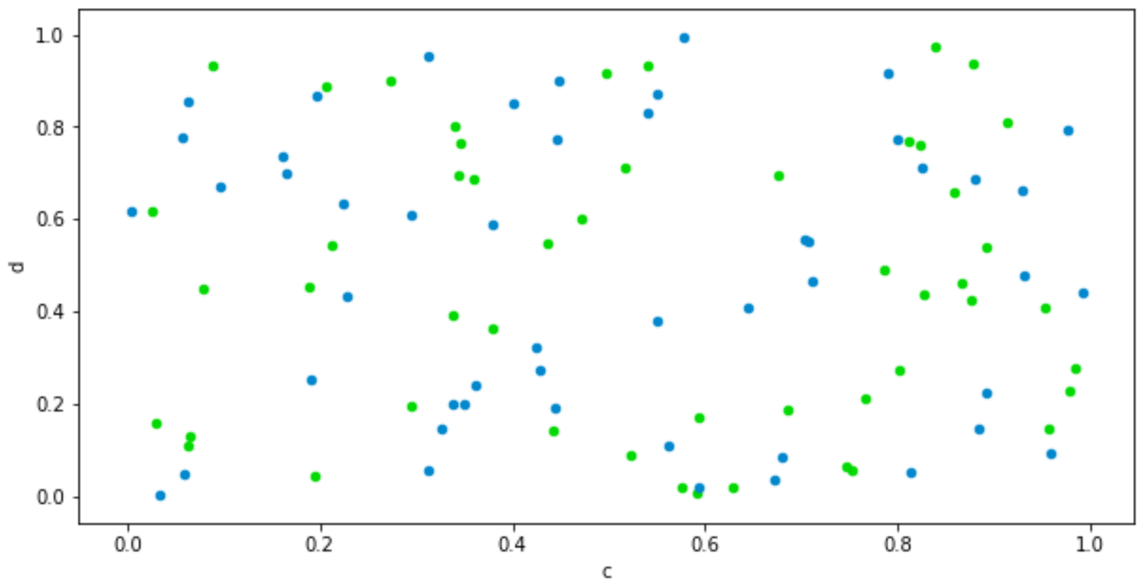


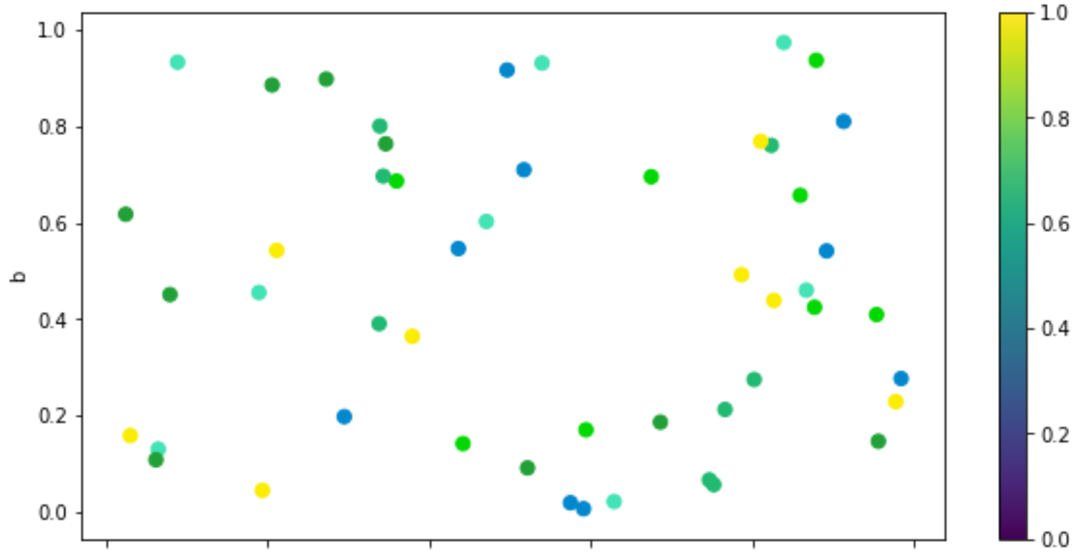
pd.Dataframe.plot.hist(…) и pd.Dataframe.hist(…)



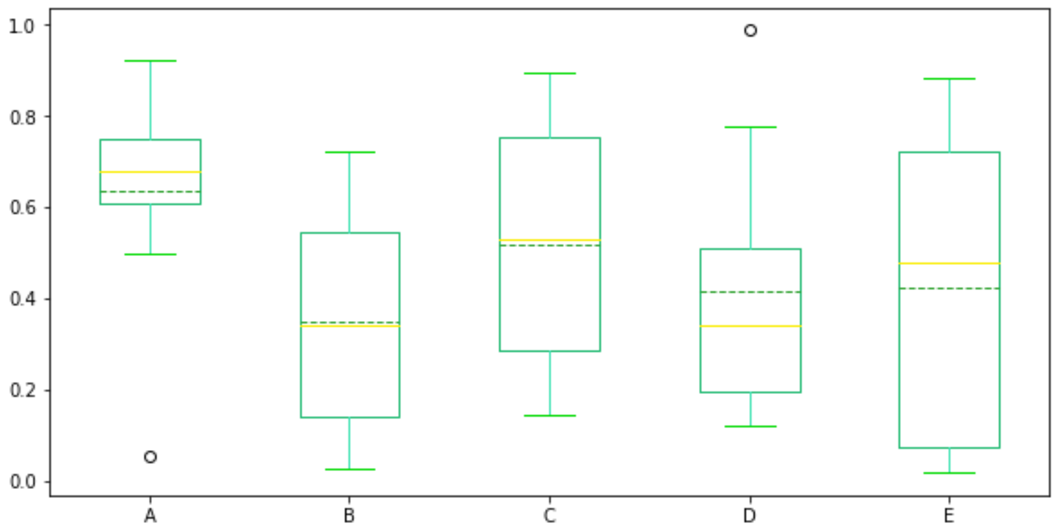


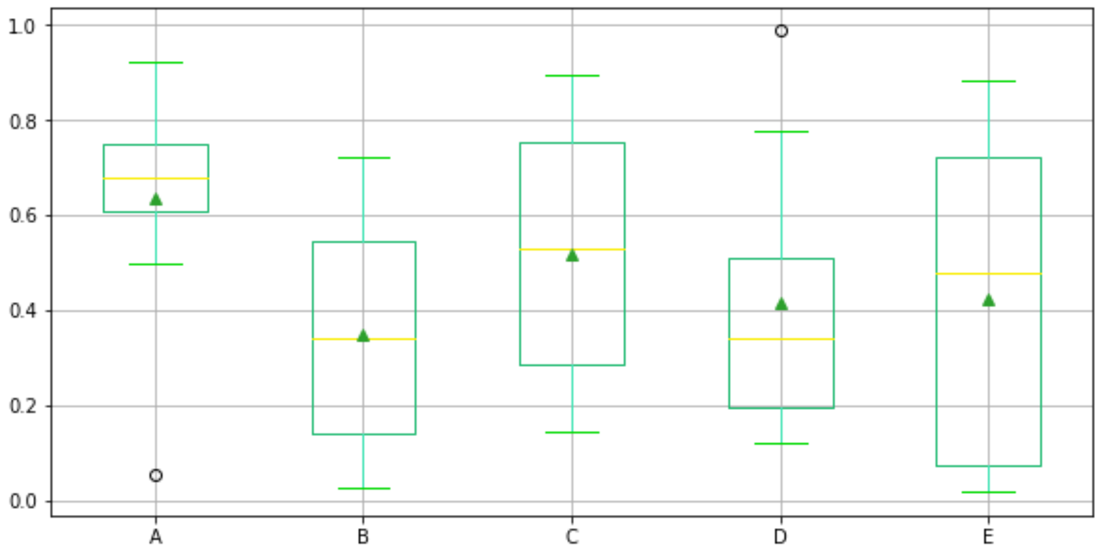
pd.Dataframe.plot.scatter(...)





pd.Dataframe.plot.box(...) и pd.Dataframe.boxplot(...)





Что делать с потерянными данными?

Plot Type	Способ исправления NaN
Line	Остаются пропуски в местах NaNs (не исправляются)
Line (stacked)	Fill 0’s
Bar	Fill 0’s
Scatter	Drop NaNs
Histogram	Drop NaNs (по столбцам)
Box	Drop NaNs (по столбцам)
Area	Fill 0’s
KDE	Drop NaNs (по столбцам)
Hexbin	Drop NaNs
Pie	Fill 0’s

Практика? Практика!

Резюме

- Узнали как оценивать распределение по выборке
- Рассмотрели важные характеристики распределений
- Посмотрели на важные статистики
- Узнали что такое Центральная предельная теорема и чем она может быть полезна
- Познакомились с API Pandas + Matplotlib

Полезные ссылки

Визуализация в Pandas:
https://pandas.pydata.org/docs/user_guide/visualization.html
Примеры подвинутой визуализации Dash:
https://dash.gallery/Portal

Обратная связь

?

Спасибо за внимание!