

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 3 |
| 1. Блок-схема программного комплекса..... | 14 |
| 2. Теоретическая часть..... | 15 |
| 2.1 Задача Ламберта..... | 17 |
| 2.2 Межпланетные траектории и их оптимизация..... | 29 |
| 2.2.1 Формализация проблемы нескольких гравитационных маневров..... | 31 |
| 2.2.2 Упрощение проблемы множественных гравитационных маневров.... | 34 |
| 3. Практическая часть..... | 44 |
| 4. Решение и результаты поставленной задачи..... | 53 |
| 4.1 Численные характеристики и расчет траекторий..... | 53 |
| 4.1.1 Земля-Венера-Юпитер..... | 53 |
| 4.1.2 Земля-Земля-Юпитер..... | 57 |
| 4.1.3 Земля-Марс-Юпитер..... | 60 |
| 4.1.4 Земля-Венера-Земля-Юпитер..... | 63 |
| 4.1.5 Земля-Земля-Венера-Юпитер..... | 68 |
| 4.1.6 Земля-Марс-Земля-Юпитер..... | 72 |
| 4.1.7 Земля-Марс-Венера-Юпитер..... | 77 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 82 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 85 |

ВВЕДЕНИЕ

Одним из особых ответвлений по исследованию космического пространства является использование гравитационных маневров около естественных небесных тел. Это позволяет в значительной степени расширить область изучения нашей Солнечной системы. За счет приобретения дополнительной орбитальной энергии от планет и их спутников есть возможность безвозмездно получить приращение характеристической скорости или же наоборот замедлить движение космического аппарата, что в свою очередь, позволяет экономить ресурсы космического аппарата для полетов к планетам солнечной системы, что, в свою очередь, положительно влияет на финансовую составляющую межпланетных миссий. Особый интерес имеет полет к планетам-гигантам нашей солнечной системы, а именно к системам Юпитера и Сатурна [1].

Остановившись на актуальных миссиях по исследованию нашей Солнечной системы, можно заметить, что большинство из них так или иначе задействуют использование гравитационных маневров. Согласно информации с сайта АО "НПО Лавочкина", после 2025 года планируется запуск космического комплекса «Интергелио-Зонд», направленный на изучение Солнца с довольно близких расстояний.

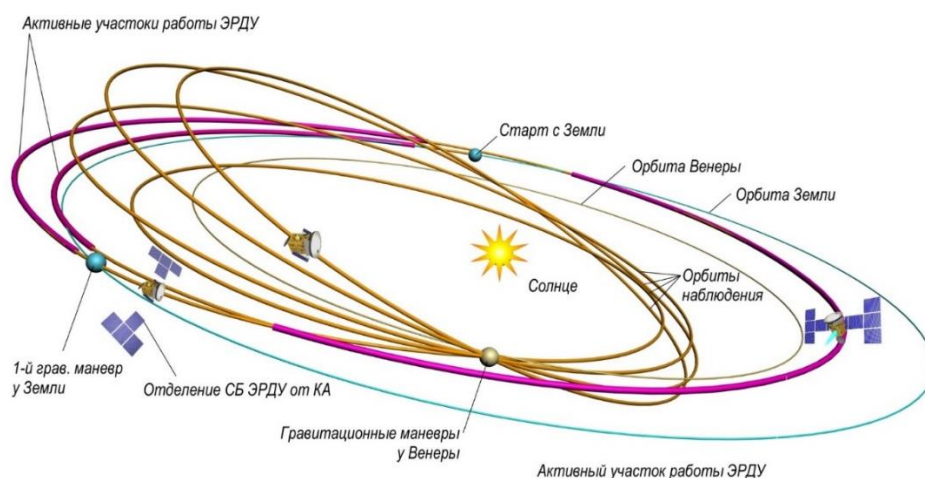


Рисунок 1 – Баллистическая схема миссии «Интергелио-Зонд» [26]

Данный аппарат будет изучать внутреннюю гелиосферу Солнца и должен дать ответы на проблему нагрева солнечной короны, ускорения солнечного ветра, происхождения наиболее мощных проявлений солнечной активности - солнечных вспышек и выбросов. В данной миссии будут использоваться многократные гравитационные маневры у Венеры для сближения с Солнцем и наклона плоскости орбиты.

Европейское космическое агентство совместно с Японским агентством аэрокосмических исследований в 2018 году запустили миссию BepiColombo для исследования Меркурия. Он станет вторым в истории орбитальным аппаратом к Меркурию и самым сложным. BepiColombo попытается ответить на многие озадачивающие вопросы: почему в полярных кратерах выжженной планеты есть лед? Почему у Меркурия есть магнитное поле? И что это за таинственные "впадины" на его поверхности? Во время своего полета BepiColombo осуществит девять гравитационных маневров: один раз у Земли, дважды у Венеры и шесть раз у Меркурия.

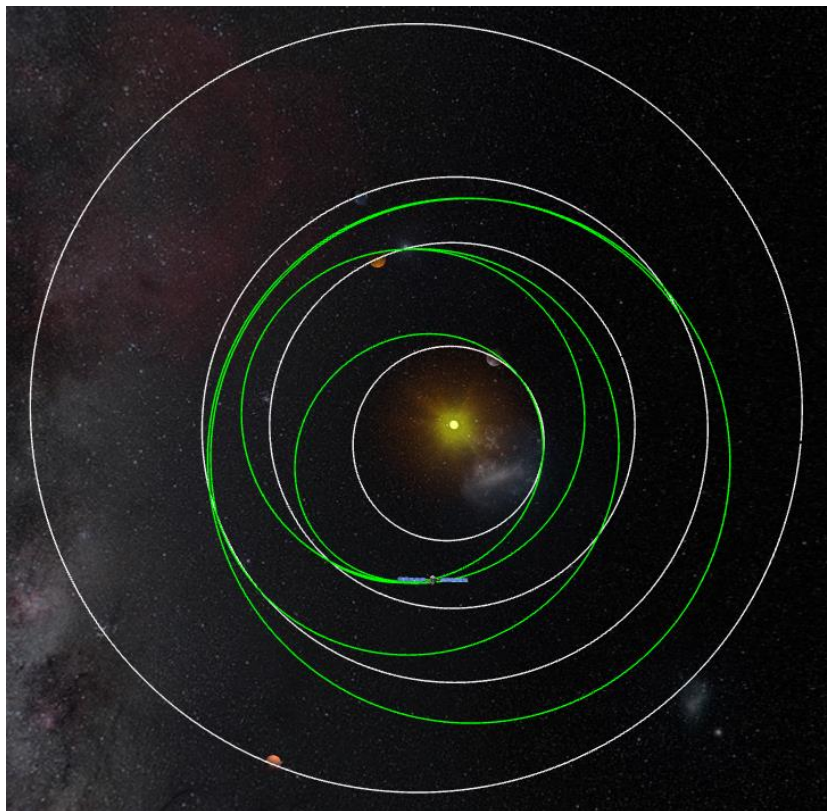


Рисунок 2 – Баллистическая схема миссии «BepiColombo» [25]

По исследованию системы Юпитера ведут работу сразу несколько международных организаций, а именно Европейское космическое агентство (ЕКА), федеральное ведомство США НАСА и государственная корпорация по космической деятельности «Роскосмос».

ЕКА разрабатывает миссию Jupiter Icy Moon Explorer (JUICE), целью которой является изучение магнитосферы Юпитера и его спутников – Ганимеда, Европы и Каллисто с задачей найти у этих лун подповерхностные океаны жидкой воды. Для достижения системы Юпитера JUICE совершит серию гравитационных маневров (Земля, Венера, Земля, Марс, Земля).

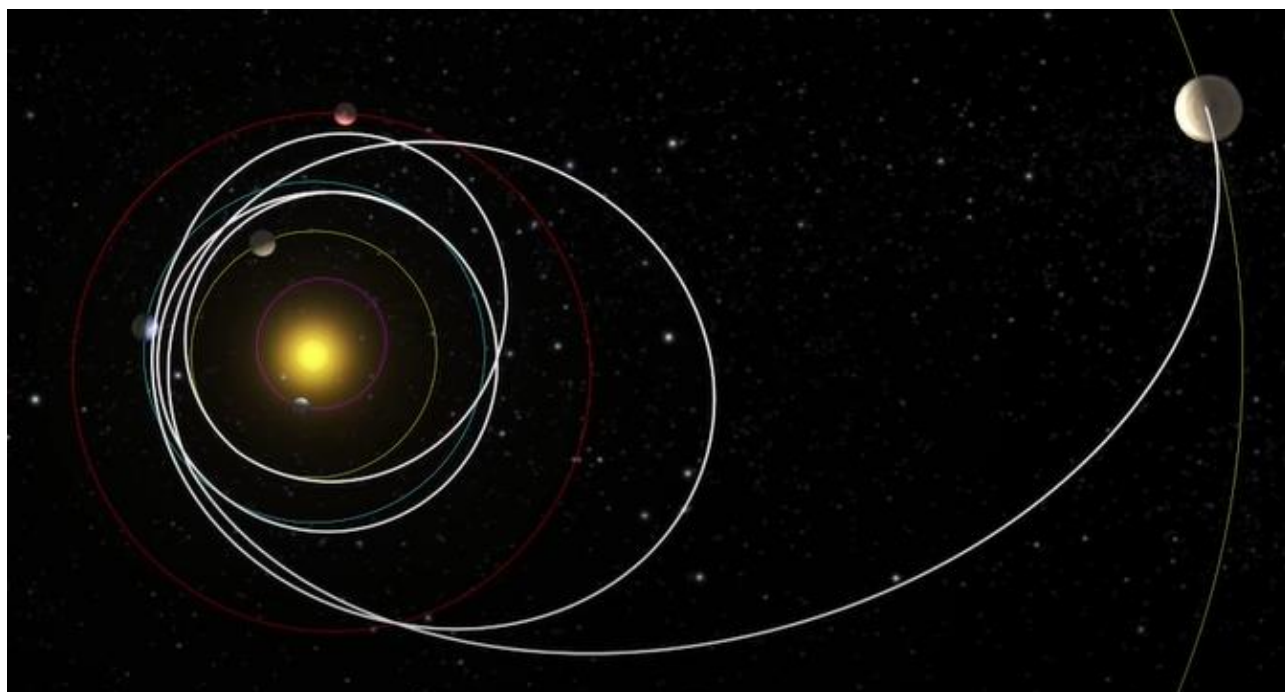


Рисунок 3 – Баллистическая схема миссии «JUICE» [25]

Таблица 1 - график миссии «JUICE»

| Дата | Событие или фаза |
|---------------|----------------------------------|
| Июнь 2022 | Запуск с Куру с помощью Ariane 5 |
| Май 2023 | Гравитационный маневр у Земли №1 |
| Октябрь 2023 | Гравитационный маневр у Венеры |
| Сентябрь 2024 | Гравитационный маневр у Земли №2 |
| Февраль 2025 | Гравитационный маневр у Марса |
| Ноябрь 2026 | Гравитационный маневр у Земли №3 |

| | |
|------------------------------|--|
| Октябрь 2029 | Вывод на орбиту Юпитера |
| Октябрь 2029 - Октябрь 2030 | Фаза снижения энергопотребления |
| Октябрь 2030 | Два гравитационных маневра у Европы |
| Октябрь 2030 - Август 2031 | Наклонная фаза Юпитера – гравитационные маневры у Каллисто |
| Сентябрь 2031 - Ноябрь 2032 | Фаза "пересадка на Ганимед" |
| Декабрь 2032 | Выход на орбиту Ганимеда |
| Декабрь 2032 - Сентябрь 2033 | Эллиптические и круговые орбиты (5000/500 км) |
| Сентябрь 2033 года | Конец миссии |

Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства ведет работу по изучению Европы – спутника Юпитера. Космический корабль НАСА Europa Clipper проведет подробное исследование спутника Юпитера Европы, чтобы определить, могут ли на ледяном спутнике быть условия, подходящие для жизни. Космический аппарат на орбите вокруг Юпитера совершит от 40 до 50 близких пролетов над Европой, меняя траекторию полета для каждого пролета, чтобы парить над другим местом, чтобы в конечном итоге сканировать почти весь спутник.

После каждого пролета космический корабль будет отправлять свои данные обратно на Землю. Время между облетами также даст ученым время для изучения данных и рассмотрения вопроса о корректировке времени и траектории будущих облетов, если они обнаружат области, вызывающие любопытство и требующие дальнейшего изучения.

Баллистическая схема миссии Europa Clipper выглядит следующим образом:

- 21 ноября 2021 года — запуск (стартовое окно — с 15 ноября длительностью 21 день).
- 14 мая 2022 года — первый гравитационный манёвр (Венера).
- 24 октября 2023 года — второй гравитационный манёвр (Земля).

- 24 октября 2025 — третий гравитационный манёвр (Земля).
- 4 апреля 2028 года — прибытие зонда в систему Юпитера и начало исследований Европы (109 дней).
- октябрь 2031 года — номинальное завершение миссии.
- По истечении номинального срока миссия может быть продлена. Продление миссии технически возможно до тех пор, пока у аппарата будет достаточно топлива, а радиация не выведет из строя электронику.
- Миссия завершится сведением зонда с орбиты Европы для последующего его столкновения с Ганимедом.

Для исследования системы Юпитера ведёт разработку и государственная корпорация по космической деятельности «Роскосмос». Космический комплекс «Лаплас-П», ранее именуемый Europa Lander – это миссия, использующая орбитальный аппарат «Лаплас-П1» и посадочный модуль «Лаплас-П2» для изучения системы лун Юпитера и исследования Ганимеда, его ледяной поверхности, оценка обитаемости и поиск биосигнатур на месте с помощью посадочного аппарата. «Лаплас-П» будет использовать маршрут VEEGA (Venus-Earth-Earth Gravity Assist) для подлёта к системе Юпитера. VEEGA – одна из схем гравитационных маневров космического аппарата для достижения большой относительной скорости по отношению к Земле и займет около 6 лет. Космический аппарат запускается с Земли, чтобы совершить облет Венеры. В результате облета Венеры космический аппарат возвращается на Землю под определенным углом, поэтому относительная скорость увеличивается.

Схема полета «Лаплас-П» выглядит следующим образом:

- Старт «Лаплас-П2» — август 2026 года.
- Старт «Лаплас-П1» — сентябрь 2026 года (на неделю позже посадочного аппарата).
- Прибытие в систему Юпитера «Лаплас-П2» — сентябрь 2032 года.
- Прибытие в систему Юпитера «Лаплас-П1» — октябрь 2032 года.

- Исследования Ганимеда — 2034 год.

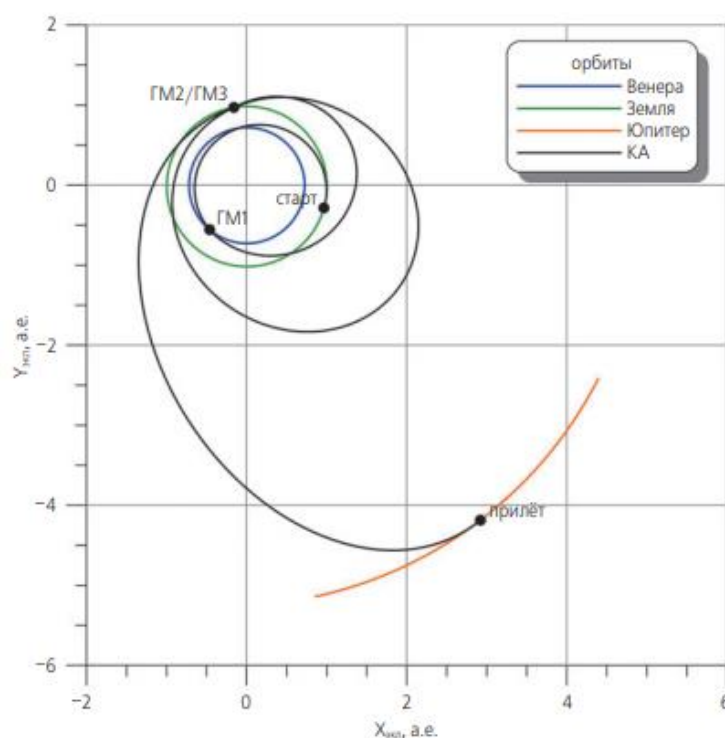


Рисунок 4 – Баллистическая схема миссии «Лаплас-П» [27]

Одна из миссий НАСА по исследованию Солнечной системы заключается в доставке винтокрылого аппарата с 8 лопастями для посещения крупнейшего и богатого органическими веществами спутника Сатурна Титана. Намеченная дата запуска - 2025 году и прибытия в 2034 году, Dragonfly будет исследовать десятки перспективных участков вокруг ледяной луны Сатурна и продолжать поиск ресурсов. Во время его 32-ух месячной миссии, Dragonfly будет исследовать окружающую среду Титана и воспользуется его плотной атмосферой на основе азота, в четыре раза более плотной, чем на Земле, чтобы летать как дрон. Эта миссия знаменует собой первый полет НАСА на многороторном транспортном средстве на другой планете, а также первое транспортное средство, которое когда-либо доставило всю свою научную полезную нагрузку в новые места для повторяемого и целевого доступа к поверхностным материалам. Dragonfly потребуется около 9-ти лет, чтобы достичь систему Сатурна и добраться до Титана. Он совершит маневр EVEEGA

(Earth-Venus-Earth-Earth Gravity Assist) чтобы приобрести дополнительное приращение скорости.

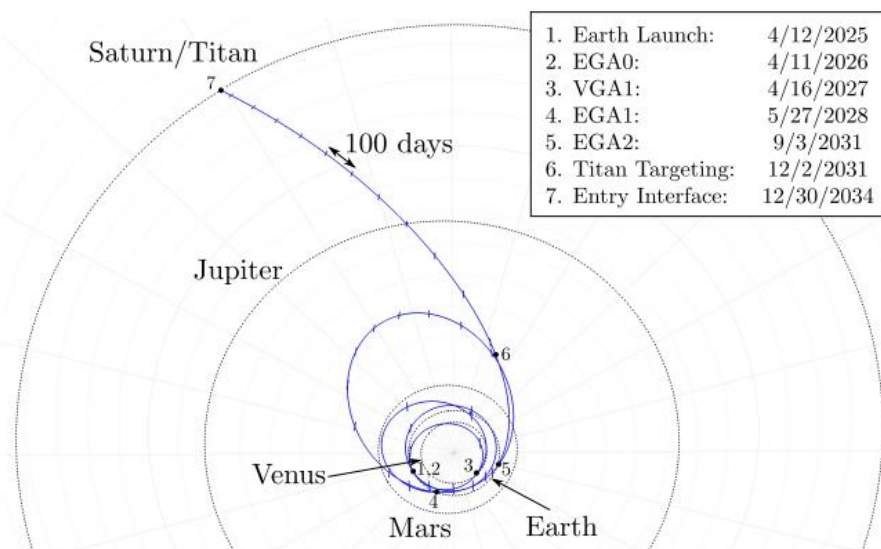


Рисунок 5 – Баллистическая схема миссии «Dragonfly» [25]

Новая миссия под названием Trident направлена на исследование странного спутника Нептуна Тритона.

Самый большой спутник Нептуна, Тритон, может похвастаться необычной ледяной смесью на своей поверхности, среди других уникальных характеристик, которые могут помочь ученым узнать больше об эволюции тел в Солнечной системе. Trident — одна из четырех концепций миссии, конкурирующих в текущем раунде программы NASA Discovery, которая разрабатывает относительно недорогие роботизированные исследования.

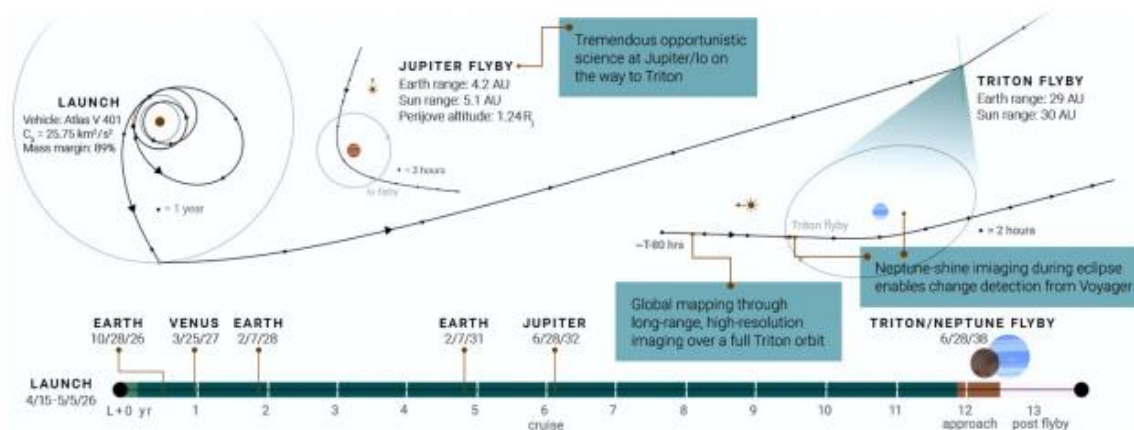


Рисунок 6 – Баллистическая схема миссии «Trident» [25]

Согласно Universities Space Research Association (USRA) в Хьюстоне схема полета, следующая:

- Старт от Земли 28 октября 2026.
- Гравитационный маневр у Венеры 25 марта 2027.
- Гравитационный маневр у Земли 7 февраля 2028.
- Гравитационный маневр у Земли 7 февраля 2031.
- Гравитационный маневр у Юпитера и пролет Ио 28 июня 2032 на расстоянии в 88 650 км.
- Подлет к Нептуну и Тритону 28 июня 2038

Актуальность исследования

Проблема повышения эффективности и снижения транспортных затрат при межпланетных космических перелетах настоящее время приобретает особую актуальность. Каждая новая концепция миссии поднимает планку для будущих миссий, и эти новые миссии часто требуют более сложных конструкций. Траектории, использующие гравитационные маневры, обычно находятся с помощью трудоемкого, широкого численного поиска среди миллиардов и триллионов комбинаций гравитационных маневров, которые могут составлять схему полета космического аппарата.

Особую актуальность при межпланетных космических перелетах в настоящее время приобретает проблема повышения эффективности и снижения транспортных затрат и ресурсов космического корабля. Космические миссии имеют большой потенциал при исследовании космоса и планет солнечной системы. Использование гравитационных маневров может существенно расширить межпланетные миссии, так как появляется возможность посещения и исследование сразу несколько планет. Его использовании позволяет достичь пунктов назначения, которые были бы недоступны с нынешней технологией, или достигать целей со значительно сниженными требованиями к двигательной установке.

Научная новизна

Межпланетные миссии представляют собой чрезвычайно сложные проблемы проектирования. Фактически, за исключением ближайших к Земле планет, прямая трансферная миссия требует значительного количества двигательной силы, которая лучше всего достигается за счет использования двигательных систем с высоким удельным импульсом, таких как ионные или плазменные двигатели.

В данной работе проектирование траектории с гравитационными маневрами рассматривается как задача оптимизации межпланетной траектории

на каждом из участков траектории. Динамика космического аппарата регулируется гравитационным притяжением планет, у которых производится гравитационный маневр.

В ходе данной работы был реализован алгоритм, позволяющий построить практически любую схему межпланетного перелета, как прямого, так и с использованием серий гравитационного маневра. Необходимо лишь выбрать требуемую схему перелета, после чего программный комплекс подберет оптимальные даты старта, даты гравитационных маневров и дату подлета к планете цели. В свою очередь, это позволит существенно упростить построение схем миссий по исследованию планет солнечной системы и за ее пределами.

Цель работы

Целью данной работы является рассмотрение транспортной задачи межпланетного перелета Земля – Юпитер с использованием пассивных гравитационных маневров у Венеры, Земли и Марса. Производится полный проектно-баллистический расчет траекторий для полета к Юпитеру, анализ гравитационных маневров и написано программно-математическое обеспечение на языке Python с использованием среды программирования Project Jupyter для математического моделирования данного перелета. Данное программно-математическое обеспечение состоит из двух программ.

В первой программе задается цепочка гравитационных маневров, после чего подгружаются данные эфемерид требуемых планет, и производится оптимизацию дат старта от Земли, даты цепочки гравитационных маневров и даты подлета к системе Юпитера.

После чего уже вторая программа производит расчет всего межпланетного перелета и гравитационных маневров, выводя результаты и при этом идет построение всего межпланетного перелета.

В данной работе были построены следующие траектории:

- Земля-Венера-Юпитер
- Земля-Земля-Юпитер
- Земля-Марс-Юпитер
- Земля-Венера-Земля-Юпитер
- Земля-Земля-Венера-Юпитер
- Земля-Марс-Земля-Юпитер
- Земля-Марс-Венера-Юпитер

Данные маневры могут быть использованы для исследования «пролетных» планет и для выведения аппарата на конечную орбиту искусственного спутника Юпитера. Данные маневры позволяют существенно сэкономить ресурсы космического аппарата и позволяют существенно расширить миссию.

Поставленные задачи

В данной работе были определены следующие задачи:

- Сбор зарубежной и отечественной литературы по данной теме, анализ методов решения данной задачи;
- Разработка и проектирование математической модели реализации гравитационного маневра;
- Написание программы оптимизации межпланетного перелета;
- Написание программы для расчета характеристик, гиперболических избытков скорости и параметров каждого участка перелета траекторий межпланетного перелета;
- Получение численных характеристик реализации гравитационных маневров и их последующий анализ.
- Составление отчетности по проделанной работе.

1. Блок-схема программного комплекса



Рисунок 7 – Блок-схема программного комплекса

2. Теоретическая часть

Разработка межпланетных траекторий является основополагающей частью любого будущего начинания для исследования нашей Солнечной системы и за ее пределами. Будь то миссия по возвращению образцов на Марс, исследование одного из наших газовых гигантов, первое зондирование объектов в поясе Койпера или миссия по отклонению астероидов, задачи миссии в конечном итоге определяет ее общую ценность [1].

При построении миссий по исследованию солнечной системы и дальнего космоса первостепенную важность имеют эфемериды планет, их спутников и комет. При проектировании миссий, которые будут представлены в данной работе использовались эфемериды DE430. Серия планетных и лунных эфемерид JPL Development Ephemeris (DE) включает положения Солнца, барицентры восьми планетных систем, Луну, барицентр системы Плутона, барицентр системы Юпитера и лунные либрации, а также связанные с ними скорости. Эфемериды обычно создаются для поддержки полетов космических кораблей к планетам. Периодически создаются новые эфемериды для включения новых данных и уточнения динамических моделей [1].

Для вычисления эфемерид планет подключаю встроенную библиотеку Python Astropy и JPLephem.

- Astropy — библиотека с открытым исходным кодом для языка программирования Python, предназначенная для выполнения астрономических расчётов и широко применяемая в среде профессиональных астрономов.
- JPLephem — это пакет, который может загружать и использовать эфемериды Лаборатории реактивного движения (JPL) для прогнозирования положения и скорости планеты или другого тела Солнечной системы.

Благодаря Astropy и jplephem, можем читать файлы Satellite Planet Kernel (SPK), являющиеся частью набора инструментов NASA SPICE (NAIF). Это означает, что мы можем в любой момент времени запрашивать положение и скорость планет Солнечной системы.

Проектирование сложной межпланетной миссии часто осуществляется путем (оптимальной) сборки решений ряда более мелких проблем, а не решения проблемы в целом.

Во время предварительного проектирования межпланетной траектории, движение космического аппарата аппроксимируется движением точки с переменной массой точки, подверженной гравитационному притяжению одного первичного массивного тела с известным гравитационного параметра μ , и тяги космического аппарата T . Обозначим через r , v и m вектор положения, вектор скорости и массу космического аппарата, решается начально-краевая (НЗ) задача, описывающая его свободное движение в некоторой инерциальной системе отсчета, носит название под названием задачи Кеплера (ЗК) [2], математически определяемой как:

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{\mu}{r^3}r, \\ r(t_s) = r_s, \\ v(t_s) = v_s, \end{cases} \quad (1)$$

где t_s – начальное время, v_s – начальные условия.

Положение и скорость космического аппарата в любой момент времени t получаются путем распространения вышеприведенных уравнений. Численного интегрирования в этом хорошо изученном случае можно избежать, используя метод коэффициентов Лагранжа [2].

Граничная задача (ГЗ), связанная со свободным движением нашего космического аппарата, известна как задача Ламберта (ЗЛ) и математически описывается следующим образом [3]:

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{\mu}{r^3}r, \\ r(t_s) = r_s, \\ r(t_f) = r_f, \end{cases} \quad (2)$$

где t_s — начальное время, t_f — конечное время, а r_s и r_f — граничные условия.

Поиск методов эффективного решения этой задачи имеет интересную историю. Задача Ламберта всегда приводит по крайней мере к одному решению, но, в зависимости от граничных условий, может также привести к нескольким многоветковым решениям [4].

2.1 Задача Ламберта

Задача Ламберта, также известная как задача Гаусса или орбитальная краевая задача двух тел, — это задача определения кеплеровской орбиты, соединяющей два положения за определенное время [5].

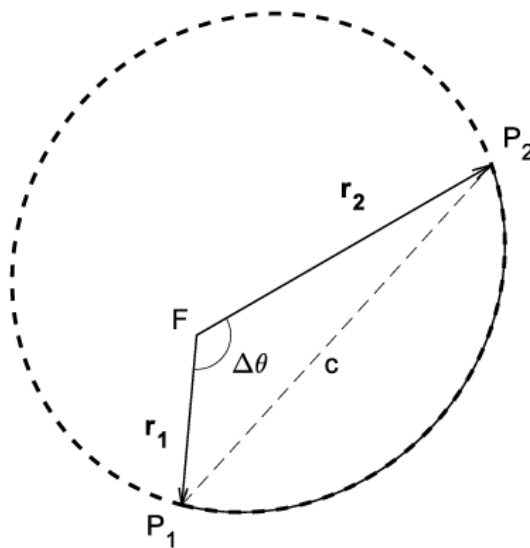


Рисунок 8 – Геометрия задачи Ламберта.

Захваченный фокус F (положение первичного объекта), начальный радиус-вектор и начальная точка (r_1, P_1) и конечный радиус-вектор и конечная точка (r_2, P_2) векторы положения, $\Delta\theta$ угол перелета, хорда C и коническое

сечение, которое решает задачу (в приведенном примере это эллиптическая орбита). В многооборотном случае космический аппарат совершает n оборотов (пунктирная линия) вокруг F , начиная с P_1 , описывает дугу (сплошная линия) от P_1 до P_2 и, в конечном счете, так, что общий угол переноса равен $2\pi n + \Delta\theta$.

Задача Ламберта возникла в XVIII веке как основной компонент при определении орбиты по трем наблюдениям, причем центральное наблюдение использовалось как источник недостающих данных о расстоянии для двух других наблюдений. Таким образом, решение задачи Ламберта было необходимо для получения элементов орбит планет, астероидов и комет [4]. Задача связана с именем Иоганна Генриха Ламберта (1728-1777) благодаря его фундаментальному вкладу в эту тему, включая формулировку теоремы, которая носит его имя: время перелета t , движущегося между двумя точками, является функцией только суммы $r_1 + r_2$. Причем r_1 и r_2 на конической траектории расстояний этих двух точек от начала действия главного гравитирующего тела, линейного расстояния C между точками и полуоси a конического сечения:

$$\Delta t = f(r_1 + r_2, c, a), \quad (3)$$

где a - величина, которую необходимо определить, т.е. неизвестное, является большой полуосью орбиты перелета.

Уравнение (3) представляет собой общую, неявную форму уравнения времени перелета, явная форма зависит от способа представления заданной геометрии (набор r_1 , r_2 и угол перелета $\Delta\theta$) и от выбора неизвестного, т.е. a или любого другого параметра, из которого могут быть выведены элементы орбиты или начальная скорость V_I . Решение уравнения перелета от времени не может быть выражено в замкнутой аналитической форме и, следовательно, должно быть численно аппроксимировано [5].

В настоящее время задача Ламберта имеет важное прикладное значение в проектировании траекторий и навигации, являясь ключевой задачей в расчетах задачи встречи и сближения, наведении ракет и космических аппаратов,

проектировании межпланетных перелетов и определении орбиты [4]. Уравнение времени перелета привлекало интерес математиков всех времен, в то время как с инженерной точки зрения его решение требует точности, скорости сходимости, надежности и формулировок, действительных для всех типов конических сечений (универсальность). В результате проблема Ламберта, безусловно, является одной из наиболее исследуемых тем в небесной механике и астродинамике [1].

Это объясняет, почему в течение многих лет было разработано множество методов решения, которые можно сгруппировать на основе выбора неизвестного параметра. Наиболее распространенное представление основано на универсальных переменных, другие основные группы методов решают относительно большой полуоси, полупрямой, вектора поперечного эксцентриситета или угла траектории полета [4].

Первые формулировки задачи Ламберта относятся к Лагранжу и Гауссу. Однако интенсивные исследования по этой теме начались в середине 1960-х годов. На сегодняшний день более 60 авторов предложили формулировки и решения этой задачи. Все эти методы можно сгруппировать в несколько основных направлений исследований на основе принятого свободного параметра:

- Универсальные переменные:
 - Ланкастер и Бланшард, Гудинг, Иззо.
 - Бейт, Валладо, Луо, Томсон, Арора.
 - Баттин-Воган, Лёхлер, Шэнь, Маклеллан.
- Р-итерация:
 - Херрик-Лиу, Больц.
 - Бейт.
- Большая полуось:
 - Лагранж, Торн, Пруссинг, Чен, Вайльез.
- Вектор эксцентриситета:

- Аванзини, Хэ, Чжан, Вэнь.
- Регуляризованные координаты Кустаанхаймо-Штифеля (К-S):
 - Сим'о.
 - Криз, Ежевский.

Так как в данной работе задача Ламберта решалась с помощью метода универсальных переменных Дарио Иззо, то остановимся на подробном рассмотрении именно этого метода.

Обобщенная модель задачи Ламберта состоит в следующем:

1. Вычисление геометрических параметров перелета;
2. Получение начального значения свободного параметра;
3. Итерации уравнения времени переноса до сходимости;
4. Вычисление векторов скорости.

Алгоритм Иззо описывает общее решение проблемы граничных условий с помощью промежуточной переменной, которая является функцией большой полуоси. Метод работает для всех типов орбит перелета и для одного или нескольких оборотов. Этот алгоритм является более новым, чем алгоритмы универсальных переменных или Гудинга [6].

Введем эксцентрическую аномалию E и гиперболическую аномалию H через соответствующие преобразования Сундмана:

$$\begin{aligned}rdE &= ndt, \\rdH &= Ndt.\end{aligned}\tag{4}$$

Также вводится среднее движение $n = \sqrt{\mu/a^3}$ и его гиперболический эквивалент $N = \sqrt{-\mu/a^3}$. Поскольку мы используем универсальные переменные, мы будем вынуждены привести все наши аргументы дважды: один раз для эллиптического случая $a > 0$ и один раз для гиперболического случая $a < 0$. Для этого некоторые уравнения будут разбиты на две строки, в этом случае строка выше будет справедлива для эллиптического случая, а строка ниже - для

гиперболического [6]. Также используется уменьшенная эксцентрическая аномалия $E_r \in [0, 2\pi]$, так что при M' полных оборотов $E = Er + 2 M'\pi$. Чтобы упростить обозначения, в дальнейшем мы будем опускать подстрочный индекс r , так что E будет уменьшенной эксцентрической аномалией [7]. Для эллиптической орбиты ($a > 0$) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E), \\ nt &= E - e \sin E + 2 M' \pi, \\ r \cos f &= a(\cos E - e), \\ r \sin f &= a \sqrt{(1 - e^2)} \sin E. \end{aligned} \tag{5}$$

Первое из них связывает радиус орбиты r с эксцентрической аномалией E , второе - знаменитое уравнение Кеплера, связывающее эксцентрическую аномалию со временем полета, а следующие два соотношения определяют связи между истинной аномалией f и эксцентрической аномалией E . Аналогичные уравнения имеют место и в случае гиперболического движения:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cosh H), \\ Nt &= e \sinh H - H, \\ r \cos f &= a(\cosh H - e), \\ r \sin f &= -a \sqrt{(e^2 - 1)} \sinh H. \end{aligned} \tag{6}$$

Приведенные выше уравнения действительны вдоль кеплеровой орбиты, включая r_1 и r_2 . Таким образом, время полета может быть записано как:

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = \begin{cases} a^{\frac{3}{2}}(E_2 - E_1 + e \cos E_1 - e \cos E_2 + 2M\pi) \\ -a^{\frac{3}{2}}(e \cosh H_2 - e \cosh H_1 - (H_2 - H_1)), \end{cases} \tag{7}$$

где $M = M_2 - M_1$ - число полных оборотов, сделанных во время перехода от начальной r_1 к конечной r_2 . Затем мы можем определить две новые величины, такие как:

$$\psi = \begin{cases} \frac{E_2 - E_1}{2} \\ \frac{H_2 - H_1}{2}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\cos\phi = \begin{cases} \frac{E_2 - E_1}{2} \\ \frac{H_2 - H_1}{2}. \end{cases}$$

Так что, по существу, и в эллиптическом, и в гиперболическом случае движения $\psi \in [0, \pi]$. Также ограничим $\phi \in [0, \pi]$ (эллиптический случай) и $\phi \geq 0$ (гиперболический случай), чтобы избежать двусмысленности в определении нового угла. Затем уравнение времени полета записывается в виде:

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = \begin{cases} 2a^{\frac{3}{2}}(\psi - \cos\phi \sin\psi + M\pi) \\ -2a^{\frac{3}{2}}(\cosh\phi \sinh\psi - \psi). \end{cases} \quad (9)$$

Две новые величины, ϕ и ψ , зависят только от геометрии задачи и большой полуоси a , что можно легко найти, вычислив

$$c^2 = (r_2 \cos f_2 - r_1 \cos f_1)^2 - (r_2 \sin f_2 - r_1 \sin f_1)^2, \quad (10)$$

и $r_1 + r_2$ из уравнений (5) и (6):

$$r_1 + r_2 = \begin{cases} 2a(1 - \cos\psi \cos\phi) \\ 2a(1 - \cosh\psi \cosh\phi), \end{cases} \quad (11)$$

$$c = \begin{cases} 2a \sin\psi \sin\phi \\ 2a(1 - \cosh\psi \cosh\phi). \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что время полета, заданное уравнением (9), является функцией a , c и $r_1 + r_2$. Для дальнейшего исследования функциональной зависимости времени полета от этих величин удобно ввести два новых угла:

$$\alpha = \phi + \psi, \beta = \phi - \psi. \quad (13)$$

Очевидно, что в эллиптическом случае $\alpha \in [0, 2\pi]$ и $\beta \in [-\pi, \pi]$, а в гиперболическом случае $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq -\pi$. Эти границы очень важны, как мы увидим,

при решении квадрантной неоднозначности вновь определенных величин. Уравнение времени движения f теперь принимает элегантную форму:

$$\sqrt{\mu}(t_2 - t_1) = \begin{cases} a^{\frac{3}{2}}((\alpha - \sin\alpha) - (\beta - \sin\beta) + 2M\pi) \\ -a^{\frac{3}{2}}((\sinh\alpha - \alpha) - (\sinh\beta - \beta)) \end{cases} \quad (14)$$

и вычисляя $r_1 + r_2 \pm c$ из уравнений (11) и (12), легко найти:

$$\begin{aligned} \frac{s}{2a} &= \begin{cases} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ -\sinh^2 \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \\ \frac{s-c}{2a} &= \begin{cases} \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ -\sinh^2 \frac{\beta}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (14-15) были впервые выведены Лагранжем и использованы им при доказательстве теоремы Ламберта. Углы α и β не могут быть определены однозначно из приведенных выше уравнений, так как их квадрант не определен [7]. Таким образом, у нас есть два возможных решения для α и β . Квадрант β может быть решен путем расширения:

$$\frac{\cos\theta}{2} = \frac{\cos(f_2 - f_1)}{2}. \quad (16)$$

С помощью тригонометрических тождеств и, в конечном счете, показать, что имеет место следующее:

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} = \begin{cases} 2a \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \\ -2a \sinh \frac{\alpha}{2} \sinh \frac{\beta}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Поскольку $\sin \frac{\alpha}{2}, \sinh \frac{\alpha}{2} \geq 0$, то из приведенных выше уравнений следует, что $\sin \frac{\beta}{2}$ того же знака, что и $\cos \frac{\theta}{2}, \sinh \frac{\beta}{2}$, поэтому $\beta \in [-\pi, 0]$ при $\theta \geq \pi$ и $\beta > 0$ при $\theta \in [0, \pi]$. Неоднозначность в отношении угла α , напротив, не может быть

устранена, поскольку она вытекает из того факта, что существует ровно два различных эллипса, имеющих одну и ту же полуось a , связывающих r_1 и r_2 и, таким образом, что два различных времени полета, которые удовлетворяют уравнению (14). Из уравнений (15) можно также вывести полезное соотношение:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \lambda \sin \frac{\beta}{2}. \quad (18)$$

В работах Ланкастера, Бланшара, Баттина, Бейта и многих других были сделаны некоторые открытия по решению задачи Ламберта. Поэтому следуя подходу Ланкастера и Бланшара рассмотрим параметр λ , определенный как:

$$s\lambda = \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (19)$$

Используя уравнение (17) и подставляя выражения в уравнения (15), легко показать, что:

$$\lambda^2 = \frac{s - c}{s}. \quad (20)$$

Параметр $\lambda \in [-1, 1]$ положителен, когда $\theta \in [0, \pi]$ и отрицателен, когда $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Значения λ^2 , близкие к единице, указывают на хорду нулевой длины, случай, который действительно чрезвычайно интересен при проектировании межпланетных траекторий, поскольку он связан с проектированием резонансных перелетов. Поэтому вводим безразмерное время полета, определяемое как:

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a_m^3}} (t_2 - t_1) = \sqrt{2 \frac{\mu}{s^3}} (t_2 - t_1), \quad (21)$$

где $a_m = s/2$ - большая полуось эллипса минимальной энергии. Преимущество использования λ и T вытекает из того факта, что T является функцией только a/a_m и λ , что позволяет значительно упростить таксономию возможных проблем Ламберта. По словам Гудинга, все треугольники с одинаковым отношением c/s образуют большой класс эквивалентности и могут быть описаны как L-подобные. Для них все решения Ламберта одинаковы в терминах a/a_m и T [6].

Очевидно, что для инверсии отношения времени полета итерация по a/a_m , хотя и возможна, но не является хорошим выбором. Чтобы избежать этих проблем, следуя Ланкастеру и Бланшару, проводим некоторые дальнейшие вычисления, вводя новые величины:

$$\begin{aligned} x &= \begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \cosh \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \\ y &= \begin{cases} \cos \frac{\beta}{2} \\ \cosh \frac{\beta}{2}, \end{cases} \end{aligned} \tag{22}$$

что подразумевает:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sqrt{x^2-1} = \sinh \frac{\alpha}{2}, \end{cases} \\ &\begin{cases} \lambda \sqrt{1-x^2} = \sin \frac{\beta}{2} \\ \lambda \sqrt{x^2-1} = \sinh \frac{\beta}{2}, \end{cases} \\ &y = \sqrt{1 - \lambda^2(1-x^2)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя эти соотношения, можно связать вспомогательные углы ϕ и ψ непосредственно с x :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= xy - \lambda(1-x^2), \\ \cosh \phi &= xy + \lambda(x^2-1), \\ \sin \phi &= (y+x\lambda)\sqrt{1-x^2}, \\ \sinh \phi &= (y+x\lambda)\sqrt{x^2-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

И, соответственно,

$$\begin{aligned}
 \cos\phi &= xy + \lambda(1 - x^2), \\
 \cosh\psi &= xy - \lambda(x^2 - 1), \\
 \sin\psi &= (y - x\lambda)\sqrt{1 - x^2}, \\
 \sinh\psi &= (y - x\lambda)\sqrt{x^2 - 1}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Что позволяет вывести соотношения

$$\begin{aligned}
 \cos\phi \sin\psi &= (x - \lambda y)\sqrt{1 - x^2}, \\
 \cosh\phi \sinh\psi &= (x - \lambda y)\sqrt{x^2 - 1}.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

И, таким образом, имеем следующее уравнение времени полета, действительное во всех случаях:

$$T = \frac{1}{1 - x^2} \left(\frac{\psi + M\pi}{\sqrt{|1 - x^2|}} |1 - x^2| \right),
 \tag{27}$$

где мы должны установить $M = 0$ в случае гиперболического движения, когда неограниченное движение не позволяет совершить полные обороты. Вспомогательный угол ψ вычисляется с помощью уравнения (26) по соответствующей обратной функции, и, таким образом, оценка времени полета сводится только к одному вычислению обратной функции[7]. Учитывая ограничения на большую полуось a , из определения x мы видим, что $x \in [-1, \infty]$. Кроме того, $x > 1$ подразумевает гиперболическое движение, а при $x < 1$ - эллиптическое. Поскольку $1 - x^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2a} = \frac{am}{a}$, мы видим, что $x = 0$ соответствует эллипсу минимальной энергии. Заметим, что различные задачи Ламберта, имеющие одинаковые значения λ (т.е. одинаковые c/s), приводят к одному и тому же x , тогда мы говорим, что x является инвариантным параметром Ламберта [8].

Вычисляя уравнение (27) при $x = 0$, получаем:

$$T(x = 0) = T_0 M = \arccos \lambda + \lambda \sqrt{1 - \lambda^2} + M\pi = T_{00} + M\pi, \quad (28)$$

где мы ввели T_0 как значение T при $x = 0$ и T_{00} как значение в случае одного оборота $M = 0$.

Рассмотрим следующие новые переменные:

$$\xi = \begin{cases} \log(1 + x), M = 0 \\ \log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), M > 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$\tau = \log(T).$$

Область кривой времени полета теперь расширена до $[-\infty, \infty]$. В случае $M=0$ со-область также расширяется аналогичным образом. Рассмотрим полученное уравнение времени полета $\tau(\xi, \lambda, M)$. Новый введенный параметр ξ является ламбертовским инвариантом согласно определению Гудинга, так как он по существу является преобразованием ламберт-инвариантной переменной x [9]. Исследуя дифференциальные свойства новых кривых, мы имеем:

$$d\xi = \begin{cases} \frac{1}{1+x} dx, M = 0 \\ \frac{2}{1-x^2} dx, M > 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$d\tau = \frac{1}{T} dT.$$

После некоторых манипуляций мы можем получить следующие производные выражения для производных в случае $M = 0$:

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \frac{1+x}{T} \frac{dT}{dx},$$

$$\frac{d^2\tau}{d\xi^2} = \frac{(x+1)^2}{T} \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d\tau}{d\xi} - \left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2, \quad (31)$$

$$\frac{d^3\tau}{d\xi^3} = \frac{(1+x)^3}{T} \frac{d^3T}{dx^3} + \left(\frac{d^2\tau}{d\xi^2} - \frac{d\tau}{d\xi} + \left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2\right) \left(2 - \frac{d\tau}{d\xi}\right) + \frac{d^2\tau}{d\xi^2} - 2 \frac{d\tau}{d\xi} \frac{d^2\tau}{d\xi^2}.$$

Для случая $M = 0$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tau &= -\xi + \log(1 - \lambda|\lambda|), \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tau &= -\frac{3}{2}\xi + \log\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\right).\end{aligned}\tag{32}$$

Для случаев нескольких оборотов производные находятся как:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{d\xi} &= \frac{1 - x^2}{2T} \frac{dT}{dx}, \\ \frac{d^2\tau}{d\xi^2} &= \frac{(1 - x^2)^2}{4T} \frac{d^2T}{dx^2} - x \frac{d\tau}{d\xi} - \left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2, \\ \frac{d^3\tau}{d\xi^3} &= \frac{(1 - x^2)^3}{8T} \frac{d^3T}{dx^3} - \left(\frac{d^2\tau}{d\xi^2} + x \frac{d\tau}{d\xi} + \left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2\right) \left(2x + \frac{d\tau}{d\xi}\right) - \frac{1 - x^2}{2} \frac{d\tau}{d\xi} \\ &\quad - x \frac{d^2\tau}{d\xi^2} - 2 \frac{d\tau}{d\xi} \frac{d^2\tau}{d\xi^2}.\end{aligned}\tag{33}$$

Снова вычисляется в каскаде, и можно получить следующее асимптотическое поведение:

$$\begin{aligned}\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \tau &= \log\left(\frac{\pi + M\pi}{8}\right) - \frac{3}{2}\xi, \\ \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tau &= \log\left(\frac{M\pi}{8}\right) + \frac{3}{2}\xi.\end{aligned}\tag{34}$$

Решатель Ламберта можно определить как процедуру, которая возвращает для гравитационного поля μ , все возможные векторы скоростей v_1 и v_2 вдоль кеплеровых орбиты, связывающей r_1 , r_2 за время перелета T [9]. Составной частью такого алгоритма являются:

- Выбор переменной для итерации и, таким образом, инверсии кривой времени полета
- Метод итерации
- Начальное приближение для использования с методом итерации

- Методология реконструкции для вычисления v_1 и v_2 из значений, полученных в результате итераций.

Опираясь на работы Ланкастера и Бланшара была разработана новая модель решения задачи Ламберта, которое еще больше упрощает решение данной задачи. Был выстроен алгоритм низкой сложности, который способен обеспечить точные решения за по сравнению с современным алгоритмом Гудинга [9].

2.2 Межпланетные траектории и их оптимизация

Оптимизация траектории имеет решающее значение для результата любого проекта космической миссии. Появление компьютера позволило эффективно рассчитывать траектории, а значительный рост вычислительных мощностей обеспечил инструменты для решения новых проблем, возникших в эпоху освоения космоса [8].

Рассматривая конкретную проблему проектирования траекторий для множественных гравитационных маневров, был разработан алгоритм обрезки пространства поиска, который обладает полиномиальной временной и пространственной сложностью. Эмпирически было показано, что он обычно позволяет сократить пространство поиска более чем на шесть порядков, что значительно снижает сложность последующей оптимизации. Алгоритм был полностью реализован в программном пакете, позволяющем простое определение высокоразмерных пространств поиска и эффективную оптимизацию по уменьшенным границам поиска [10].

Многие проблемы проектирования межпланетных траекторий могут быть сформулированы как проблемы оптимизации, где одной из основных целей является максимизация массы космического аппарата, доступной для полезной нагрузки, что эквивалентно минимизации топлива, необходимого на борту.

Обычно учитывается также продолжительность миссии, окно запуска и прибытия, ограничения по скорости и т.д. Две основные проблемы оптимизации траектории возникают в связи с проектированием межпланетных миссий в зависимости от типа двигателя, рассматриваемого для миссии. Первая возникает в связи с космическими аппаратами, оснащенными двигателями, способными работать на тяге в течение длительного времени, как правило, имеющими скромный уровень тяги и высокую экономичность с точки зрения потребления массы. Проблема, обычно называемая проблемой малой тяги, заключается в нахождении оптимального закона управления для вектора тяги таким образом, чтобы требования миссии были выполнены и была оптимизирована некоторая главная цель. Для решения задач такого типа традиционно использовались методы локального поиска, унаследованные от хорошо развитой теории оптимального управления, описанной, например, в работе Брайсона и Хо. Второй тип проблемы возникает, когда тяга космического аппарата имеет более короткую продолжительность при гораздо большей величине и поэтому может быть смоделирована как внезапное изменение скорости космического аппарата. В этом случае оптимизация направлена на поиск значений определенного числа параметров, описывающих количество и величину изменений скорости, а также момент времени, в который они применяются. В обоих случаях, чтобы помочь космическому аппарату набрать необходимый импульс, обычно используется гравитационное притяжение других небесных тел. Такой маневр основан на том простом факте, что при основном взаимодействии космического аппарата с другим небесным объектом, небольшое количество орбитального импульса объекта может быть передано космическому аппарату [11].

В основном, из-за сложного относительного движения между планетами, область функции имеет большое количество кластеризованных минимумов, которые заставляют локальные градиентные методы сходиться к решениям, соответствующим локальным минимумам. В данной работе была использована

техника обрезки пространства, которая может быть удобно использована для улучшения их производительности. При проектировании миссии космический аппарат может быть смоделирован на разных уровнях сложности, что соответствует разным уровням оптимизационной сложности [10]. Космический аппарат с точечной массой может быть самой простой моделью, но оптимальные решения, полученные с ее помощью, могут оказаться неоптимальными при рассмотрении управления.

2.2.1 Формализация проблемы нескольких гравитационных маневров

Введем вектор $x = [t_0; T_1; T_2; \dots; T_{N+1}]$ где N - число планет, которые мы хотим использовать при гравитационном маневре, t_0 - эпоха отправления, а T_i - время, необходимое для перемещения по баллистическим дугам, соединяющим две последовательные планеты [13]. С учетом этих обозначений мы представляем в рамках аппроксимации коники задачу о гравитационном маневре в следующей форме:

$$\text{Найти: } x \in I, \tag{35}$$

$$\text{Максимизировать: } \max_j m^j(x),$$

где $I = I_0 \times I_1 \times \dots \times I_{N+1}$ является гиперпрямоугольником. Более одной траектории может быть связано с данным вектором решений поэтому мы ввели m^j как полную массу космического аппарата, оцененную по j -й траектории, совместимой с x и удовлетворяющей ограничениям:

$$\begin{aligned} \Delta V_0(x) &\leq \Delta V_0^{max}, \\ r_p(x) &\geq r_{pmin}, \end{aligned} \tag{36}$$

где вектор r_{pmin} содержит минимальные значения радиусов перицентров различных гипербол, определяющих повороты, а ΔV_0^{max} – максимальное значение гиперболического избытка скорости при отлете от Земли, допустимая

для космического аппарата. Для завершения математического описания задачи необходимо дать математическое обозначение выражений для $m^j(x), \Delta V_0(x), r_p(x)$ [12].

Рассмотрим общий $x \in I$ тогда положение n -й планеты последовательности при гравитационном маневре с космическим аппаратом равно ее эфемериде в эпоху $t_{n-1} = t_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}$, когда $n > 1$, и t^0 , когда рассматриваемая планета является планетой отправления. Поэтому каждая дуга траектории, соединяющая две последовательные планеты, должна быть решением краевой задачи:

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \frac{r}{r^3} &= 0, \\ r(t_{n-1}) &= r_{n-1}, r(t_n) = r_n, \\ n &= 1 \dots N + 1, \end{aligned} \tag{37}$$

где r_{n-1} и r_n – векторы положения двух последовательных планет в рассматриваемой последовательности гравитационных маневров, и где мы ввели в качестве гравитационной постоянной – гравитационную постоянную Солнца.

Для оценки возможности реализации траекторий с несколькими гравитационными маневрами можем определить его гиперболический избыток скорости при отлете от начальной планеты (Земли), используя простое обозначение:

$$\Delta V_0 = V_{Earth} - V_0^{out}, \tag{38}$$

где V_{Earth} гелиоцентрическая скорость планеты Земля в момент t_0 и V_0^{out} гелиоцентрическая скорость космического аппарата при t_0 .

Стоит учесть, что мы сталкиваемся с проблемой оценки вектора радиуса перицентра r_p , содержащего радиусы перицентров планетоцентрических траекторий, который соединяет последовательные дуги. Это, соответственно, гелиоцентрическая скорость в конце дуги траектории, предшествующей гравитационному маневру и в начале следующей дуги [14]. Гелиоцентрическая

скорость V_i планеты также известна. Тривиально левое и правое значение скорости космического аппарата относительно планеты может быть получено простым применением Галилеева преобразования (скорости относительно планеты обозначены тильдой) с получением величин \tilde{V}_i^{out} и \tilde{V}_i^{in} . Следуя коническому подходу, задача состоит в том, чтобы найти планетоцентрическую траекторию, которая имеет асимптотические скорости \tilde{V}_i^{out} и \tilde{V}_i^{in} . Такая траектория, в пределе конического приближения, мгновенно перенесет космический корабль между двумя последующими участками гелиоцентрической траектории. Мы предполагаем, что космический аппарат обеспечит один единственный импульс, и поэтому планетоцентрическая траектория состоит из двух дуг гиперболы, соединенных вместе. Мы также выдвигаем гипотезу, что импульс задается в перицентре дуги входящей гиперболы и в направлении, касательном к самой траектории. В этом случае простые астродинамические расчеты показывают, что если в качестве единицы длины дуги принять любую длину L этой дуги, а в качестве скорости $\sqrt{\mu_{planet}/L}$ – угол между, то угол будет равен:

$$a_i = \arcsin \frac{a_i^{in}}{a_i^{in} + r_{pi}} + \arcsin \frac{a_i^{out}}{a_i^{out} + r_{pi}}, \quad (39)$$

где $a_i^{in} = 1/(\tilde{V}_i^{in^2})$ и $a_i^{out} = 1/(\tilde{V}_i^{out^2})$

Это уравнение позволяет при заданной траектории, совместимой с x , оценить компоненты r_{pi} вектора r_p с вычислительными затратами [15].

Также у последней планеты космический аппарат должен обеспечить дополнительное изменение скорости для выхода на орбиту искусственного спутника Юпитера:

$$\Delta V_{N+1} = V_{planet} - V_{N+1}^{in}. \quad (40)$$

Таким образом, оценка данного участка траектории производится следующими шагами:

1. Решить $x = [t_0; T_1; T_2; \dots; T_{N+1}]$;
2. Решить $N + 1$ задач Ламберта и найти $N_{sol} = 2^{N+1} \prod_{i=0}^N (1 + 2M_i)$ траектории, совместимые с x ;
3. Проверка осуществимости совместимых траекторий;

2.2.2 Упрощение проблемы множественных гравитационных маневров

Общее обозначение задачи множественных гравитационных маневров, приведенное выше, существенно усложняется тем фактом, что существует более одной траектории, совместимой с каждым $x \in L$. Мы можем упростить описание проблемы, связав однозначно только одну совместимую траекторию с каждой точкой в пространстве поиска I . Это можно сделать, используя некоторые знания о проблеме и рискуя обрезать некоторые интересные зоны пространства поиска. Одна из возможностей заключается, например, в том, чтобы не рассматривать решения с несколькими оборотами и ретроградные траектории [12]. При этих гипотезах всегда существует единственное решение задачи Ламберта, следовательно, однозначная функция $m(x)$ может быть обозначена. Учитывая, что функциональная зависимость между массой космического аппарата и суммой различных приращений скорости является монотонной, перепишем обозначение задачи множественных гравитационных маневров в следующей форме:

Найти: $x \in I$,

$$\text{Максимизировать: } J(x) = \sum_{i=1}^N \Delta V_i(x) + \Delta V_{N+1}(x), \quad (41)$$

При условии: $\Delta V_0(x) \leq \Delta V_0^{max}$,

$$r_p(x) \geq r_{p \min}.$$

Для задачи нескольких гравитационных маневров эффективным методом обрезки является метод, разработанный Мьятт и названный Gravity Assist Space Pruning (GASP). Метод основан на возможности постепенного разделения задачи нескольких гравитационных маневров на каскад двумерных задач, где выборка сетки является вычислительно эффективной. Распространяя критерии обрезки, определенные по удовлетворению ограничений на пролет и по максимально допустимому V_i , можно сократить количество отобранных точек до части исходного пространства [16].

Рассматривая задачу нескольких гравитационных маневров, как указано в уравнении (41), введем:

$$f: x = [t_0; T_1; T_2; \dots; T_{N+1}] \rightarrow X = [t_0; t_1; \dots; t_N; t_{N+1}]. \quad (42)$$

Обозначаемые простым соотношением

$$t_i = t_0 + \sum_{j=1}^i T_j, \quad (43)$$

$$i = 0, \dots, N + 1.$$

Применив то же преобразование к пространству поиска I , мы получим новое пространство поиска, которое обозначим через $I^* = f(I)$. После чего мы можем рассмотреть новую постановку задачи нескольких гравитационных маневров:

Найти: $X \in I^*$,

$$\text{Максимизировать: } J(X) = \sum_{i=1}^N \Delta V_i(X) + \Delta V_{N+1}(X), \quad (44)$$

При условии: $\Delta V_0(X) \leq \Delta V_0^{max}$,

$r_p(X) \geq r_{p \min}$.

Мы сформулировали задачу нескольких гравитационных маневров в терминах абсолютного времени, которое не является гиперпрямоугольным, что

дает преимущество упрощения связи между позициями планет и вектором решений. Кроме того, такая формулировка повышает шансы операций в генетических схемах на генерацию хороших траекторий [14]. Метод оптимизации, который используется в данной работе — это выборка по сетке. Выборка по сетке обычно является очень эффективным оптимизатором, особенно в высоких размерностях. Таким образом, объективная функция для одной межпланетной траектории может быть отображена на сетку с соответствующим разрешением в области времени отправления и времени прибытия. С выборкой по сетке потребуется гораздо меньше расчетов эфемерид, так как не нужно пересчитывать одни и те же положения/скорости для заданного времени отправления или прибытия. Очевидно, что как только речь заходит о гравитационных маневрах, увеличение размерности задачи делает выборку по сетке невыполнимой. К счастью, особая структура задачи нескольких гравитационных маневров позволяет рассматривать выборку сетки и для более высоких размерностей, как было реализовано в данной работе [17].

Рассмотрим формализацию задачи нескольких гравитационных маневров, представленную уравнением (44), и сосредоточим внимание на функциональной зависимости целевой функции и ограничений от вектора решений X . Функция $V_0(X)$ зависит только от первых двух компонент вектора решений, которые позволяют оценить это ограничение:

$$\Delta V_0(X) = C3_{departure}(t_{departure}, t_1), \quad (45)$$

Двумерная выборка $f(I_0 \times I_1)$.

Приращение скорости первого гравитационного маневра V_I зависит от скоростей гиперболического избытка космического аппарата. Но входящая скорость известна из предыдущей двумерной выборки, и дальнейшая двумерная выборка $f(I_0 \times I_1)$ позволяет нам оценить V_I . То же самое относится и к r_{pl} . Мы приходим к последней планете, где V_{arr} зависит только от гиперболического избытка скорости при подлете Юпитеру, уже отобранной для оценки V_N . Эта

особая структура задачи позволяет нам дискретизировать объективную функцию в каскаде из $N+1$ двумерных пространств, а не в одном $N+2$ мерном пространстве. На основе этих простых идей и состоит алгоритм, названный GASP (Gravity Assist Space Pruning) и предназначенный для эффективного обнаружения и обрезки невыполнимых частей пространства, оставляя несколько наборов границ с гораздо меньшим объемом. Эти уменьшенные границы можно затем эффективно искать с помощью стандартного метода глобальной оптимизации.

Стоит расписать основные ограничения для данного метода.

Ограничение ΔV_0 . Максимально допустимое ΔV_0 является первым основным критерием обрезки алгоритма GASP. Он действует на выборочном пространстве $f(I_0 \times I_1)$, отсекая все точки, соответствующие траекториям с невыполнимым ΔV_0 .

Ограничение с опережением. Применение одного только ограничения ΔV_0 значительно уменьшает объем пространства поиска в задаче нескольких гравитационных маневров. Как следствие, многие значения времени прибытия t_1 в $f(I_0 \times I_1)$ становятся невыполнимыми временами отправления в $f(I_0 \times I_1)$. Это наблюдение является ключевым принципом, на котором основан алгоритм GASP: если в определенную дату на планету не приходит ни одной выполнимой траектории, поскольку они были обрезаны в соответствии с различными введенными критериями, то в эту дату не будет ни одного вылета с этой планеты, и все соответствующие точки также будут обрезаны.

Ограничение максимальной тяги гравитационного маневра. Ограничение тяги гравитационного маневра отсеивает траектории, у которых разница между входящей и выходящей скоростями во время гравитационного маневра больше некоторого порога A_v . Этот порог задается отдельно для каждого гравитационного маневра. Затем для каждого времени прибытия на планету выполняется следующее:

1. Вычислите границы возможной входящей скорости, V_{min}^i и V_{max}^i .
2. Недействительны все исходящие траектории, которые не имеют исходящих скоростей в диапазоне $[V_{min}^i - A_v - L_v, V_{max}^i + A_v + L_v]$, где L_v - соответствующая толерантность, основанная на константе Липшица текущего фазового графика.
3. Вычислите модальные ограничения на исходящую скорость V_{min}^f и V_{max}^f .
4. Признать недействительными все входящие траектории со скоростями вне диапазона $[V_{min}^f - A_v - L_v, V_{max}^f + A_v + L_v]$

Угловое ограничение с помощью гравитационного маневра. Угловое ограничение гравитационного маневра удаляет из пространства поиска неосуществимые повороты асимтоты гиперболы при гравитационном маневре на основании того, что они связаны с гиперболическим перипадом под минимальным безопасным расстоянием для данного тела гравитационного маневра. Это определяется для каждой даты прибытия на планету следующим образом, предполагая i действительных входящих траекторий и j действительных исходящих траекторий:

1. Для всех i входящих траекторий
2. Для всех j исходящих траекторий
3. Если гравитационный маневр возможен для входящей и исходящей траектории, помечаем их как действующие.
4. Признать недействительными все траектории, не отмеченные как действительные.

Угол поворота асимтоты гиперболы уменьшается на соответствующий липшицевский допуск ϑ_L , для того, чтобы компенсировать влияние сеточной дискретизации пространства поиска [4].

Нарушение ограничений маневра. Наряду с ограничением на вылет гиперболического избытка скорости, логично добавить ограничение на

максимальный маневр торможения, который может выполнить космический аппарат, и отсеять траектории с чрезмерно высокой потребностью в топливе.

Обратное ограничение. Очевидно, что если дата отправления в $f(I_i \times I_{i+1})$ становится невыполнимой из-за обрезки, то и относительная дата прибытия в $f(I_{i-1} \times I_i)$ должна быть обрезана.

В целом алгоритм GASP можно свести к следующим шагам:

1. Выполните сеточную выборку пространств $f(I_i \times I_{i+1})$
2. Применить ограничение на вылет ΔV_0
3. Ограничение прямого движения на всех этапах
4. Признание недействительными невыполнимые даты отлета
5. Применить ограничение на гравитационный маневр к максимальной тяге к следующей дуге
6. Применить ограничение на гравитационный маневр к максимальному угловому повороту асимптоты пролетной гиперболы
7. Применяйте ограничение на разрыв маневра
8. Обратное ограничение на всех этапах
9. Ограничить невозможные даты на основе дат отлета.

Необходимый объем памяти прямо пропорционален максимальному количеству задач Ламберта, которые должны быть решены, и, следовательно, временная сложность часть алгоритма GASP, связанная с выборкой, также должна быть порядка $O(n^2)$.

Мы формально представили глобальную оптимизационную задачу многократного гравитационного маневра и показали, как структура ее объективной функции и ограничений позволяет рассматривать многомерное пространство поиска. Основываясь на этом наблюдении, был выбран алгоритм обрезки пространства GASP, который радикально улучшает показатели последующих методов глобальной оптимизации. Сложность алгоритма обрезки алгоритма полиномиальна как по времени, так и по пространству.

Задача определения хорошего приближения межпланетной траектории может быть сведена к решению набора задач двух тел с использованием так называемого приближения конической аппроксимации. Это приближение использует то преимущество, что в Солнечной системе масса Солнца намного больше массы планет, а планеты находятся далеко друг от друга; сила ближайшей планеты или Солнца доминирует над движением на большей части траектории, превращая задачу в задачу двух тел, которую можно решить. Области, где более одной силы являются значительными, достаточно малы, что делает результирующая ошибка достаточно мала для предварительного проектирования миссии.

Центральным телом является Солнце, а космический аппарат - орбитальным телом, однако модель может быть легко изменена на любую другую схему двух тел, например, на систему Юпитер – космический аппарат. Данная модель изменяется каждый раз, когда космический аппарат достигает каждой из планет для совершения гравитационного маневра. Все небесные тела моделируются как точечные массы, центральное тело неподвижно в пространстве и создает постоянное симметричное гравитационное поле и является единственным телом, влияющим на движение космического аппарата [16].

Также в решении задачи построения траекторий с несколькими гравитационными маневрами введем метод импульсной аппроксимации активных участков траектории. Так как мы используем пассивные гравитационные маневры, то активные участки траектории имеют очень малую продолжительность, относительно всего межпланетного полета. Тем самым мы аппроксимируем изменение скорости космического аппарата при отлете от Земли и при подлете к системе Юпитера как точки положения мгновенных импульсов скорости. Таким образом тяга двигателя принимается как скачкообразное изменение скорости полета.

Инерциальная система отсчета, используемая в уравнениях движения, центрирована на центральном теле. Для трехмерного анализа используется прямоугольный базис $\{e_x, e_y, e_z\}$. Для плоского двумерного анализа используются как полярные координаты $\{e_r, e_\theta\}$, так и декартовы координаты $\{e_x, e_y\}$.

Уравнения движения космического аппарата имеют вид:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3} + \tau_x, \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3} + \tau_y, \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3} + \tau_z, \\ \dot{m} &= -\frac{m\tau}{I_{sp}g_0},\end{aligned}\tag{46}$$

где I_{sp} - удельный импульс двигателя импульс на единицу массы топлива при старте с опорной орбиты у Земли. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = (x, y, z)$ расстояние от центрального тела (значения эфемерид выбранного центрального тела в задаче двух тел). Ускорение космического аппарата обусловлено центральной силой тела (первый член правой части уравнений (46)) и приложенной тяги (второй член τ).

Уравнения движения всех остальных небесных тел таковы:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3},\end{aligned}\tag{47}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$ расстояние от космического аппарата до центрального тела, полученное в результате решения задачи двух тел;

a, e, θ - соответственно большая полуось эллипса, эксцентриситет и истинная аномалия.

Зная решение задачи о движении небесных тел, нет необходимости численно интегрировать уравнения движения для получения положения планет в каждый момент времени; это облегчает вычислительную работу, и задача двух тел, хотя и является упрощением реальной физики, адекватна для предварительного проектирования космических миссий.

Для того чтобы провести предварительный анализ гравитационных маневров, можно воспользоваться графиками Тиссеранда. Эти графики иллюстрируют перелет внутри различных тел для различных значений гиперболического избытка скорости V_∞ и угла перелета $\Delta\theta$ и предполагают следующее:

- Идеально круговые и компланарные орбиты планет. Хотя можно включить наклон в анализ и Тиссеранд перестанет быть двумерным графиком, а станет поверхностью в трехмерном пространстве.
- Фазировка не учитывается. Это означает, что учитываются только орбиты, но не рандеву между отправляющимся и целевым телом.

Можно разработать более сложные графы тиссеранда, например, для всех планет Солнечной системы.

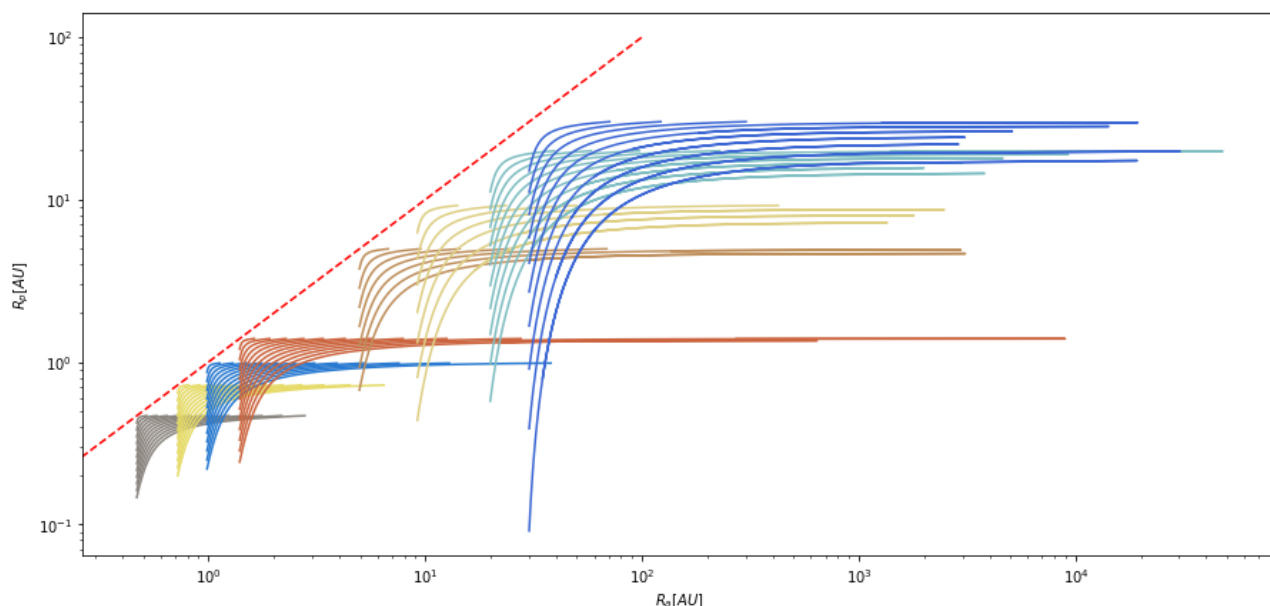


Рисунок 9 – Прецессия линии апсид Тиссеранда планет солнечной системы.

Этот вид графиков полезен для предварительного проектирования баллистических траекторий космического корабля, который использует гравитационные маневры в системе из нескольких тел. Упрощающая гипотеза предполагает, что планеты движутся на копланарно-круговых орбитах. Каждая точка на графике Тиссеранда — это просто пролетная орбита с заданными значениями гиперболического избытка скорости V_∞ и углом перелета. Эта конкретная орбита имеет некоторую энергию, которая может быть вычислена как $C_{Tiss} = 3 - V_\infty^2$.

3. Практическая часть

В данном разделе будут разработаны основные соотношения, которые будут использоваться в последующих расчетах. Целью этих выкладок будет выбор упрощающих предположений, где это возможно, чтобы облегчить исследование космического пространства при проектировании миссии, использующей гравитационные маневры [17].

Так как было сказано выше, начальным упрощением для этого анализа является моделирование траектории гравитационного маневра как последовательности коник с грависферой нулевой протяженности и импульсной аппроксимацией активных участков траектории. То есть, траектории пролета будут моделироваться как круговые орбиты двух тел на тело, оказывающего гравитационный маневр, а траектории относительно центрального тела будут моделироваться как кеплеровские орбиты двух тел с мгновенными импульсами при пролете. Относительно центрального тела траектория будет считаться проходящей через центр гравитационно-опорного тела, а относительно тела, поддерживающего гравитацию, траектории будут считаться исходящими из бесконечности и уходящими в бесконечность [18].

Самый простой способ моделирования гравитационного маневра – прибегнуть к звено-коническому приближению: предполагается, что сфера влияния планеты имеет нулевой радиус, а гравитационный маневр считается мгновенным. Поэтому вектор мгновенного положения не подвержен влиянию маневра:

$$r_i = r_0 = r_p, \quad (48)$$

где r_i – входящее гелиоцентрическое положение, r_0 – вектор исходящего гелиоцентрического положения, а r_p – вектор положения планеты, все взятые в момент встречи. Для идеальной гиперболической орбиты, не подверженной

возмущениям или маневрам ΔV , модуль входящей относительной скорости должен быть равен модулю уходящей относительной скорости.

После получения решения с помощью звено-конической модели вычисляется второе решение заменяя простое звено-коническое приближение полностью пространственно-численным распространением круговых орбит. Каждый поворот рассматривается как новая фаза, которая должна быть связана с входящей частью траектории и выходящей частью траектории в сфере влияния. Поворотные гиперболы являются пассивными участками, поэтому нет необходимости вводить управление вектором тяги вдоль гиперболы поворота. Таким образом, используется система отсчета и динамическая модель, которая центрирована на пролетающую планету, и космический аппарат подвержен гравитационному притяжению планеты и возмущениям, исходящим от Солнца, после совершенного гравитационного маневра. Таким образом, динамика космического аппарата в пределах сферы влияния управляется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) = \begin{pmatrix} V \\ -\frac{\mu_{pl}}{r^3} - \mu_{sun} \left(\frac{d}{d^3} + \frac{r_s}{r_s^3} \right) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где d – вектор КА–Солнце, а r_s – вектор положения Солнца в планетоцентрической системе отсчета. Для повышения надежности, параметры орбиты для каждой гиперболы не выводятся из входящих условий, а включаются в набор параметров и затем оптимизируются. Гиперболы распространяются назад во времени от перицентра до сферы влияния, где они связаны с входящей траекторией, и вперед во времени до сферы влияния, связанной с исходящей траекторией. Затем значения орбитальных параметров оптимизируются для того, чтобы удовлетворить условия соответствия на сфере влияния [1].

Векторы входящей и выходящей скоростей должны лежать в плоскости орбиты и поэтому пользуясь эфемеридным обеспечением мы получаем на

каждой новой пролетной траектории фазовые координаты планет в дату отлета и в дату подлета $r_i = (r_{xi}, r_{yi}, r_{zi})$ и $V_i = (V_{xi}, V_{yi}, V_{zi})$.

Имея данные значения, мы можем определить элементы орбиты аппарата по положению и скорости двух планет. Промежуточным этапом будет нахождение векторных произведений радиус-векторов последовательных планет [18].

$$\begin{aligned} [\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_x &= y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}, \\ [\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_y &= z_i x_{i+1} - x_i z_{i+1}, \\ [\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_z &= x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}, \end{aligned} \quad (50)$$

где нижний индекс i означает планету, в окрестности которой в данный момент находится аппарат, а индекс $i + 1$ означает либо конечную планету, либо планету, у которой следующей будет происходить гравитационный маневр.

Используя формулу, (51) произведем расчет нормали векторного произведения между двумя последовательными планетами, у которых будет производится гравитационный маневр [19].

$$|[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]| = \sqrt{[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_x^2 + [\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_y^2 + [\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_z^2}. \quad (51)$$

Векторы входящей и выходящей скоростей должны лежать в плоскости гелиоцентрического участка траектории орбиты и поэтому можем рассчитать единичный вектор внешней нормали, используя формулу (52).

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= (\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0), \\ \sigma_x^0 &= \frac{[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_x}{|[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]|}, \\ \sigma_y^0 &= \frac{[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_y}{|[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]|}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\sigma_z^0 = \frac{[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]_z}{|[\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1}]|}.$$

Для любого перехода к внешней планете скорость космического аппарата должна асимптотически выровняться с гелиоцентрической скоростью планеты, у которой совершается гравитационный маневр. Таким образом, угловую дальность перелета между двумя радиус-векторами можно определить из геометрии гиперболы вылета как:

$$\Phi = \arccos\left(\frac{(\vec{r}_i, \vec{r}_{i+1})}{r_i r_{i+1}}\right). \quad (53)$$

Наклон орбит планет относительно плоскости орбиты Земли в большинстве случаев отличается менее чем на четыре градуса (исключение составляют Меркурий и Плутон). Учтем трехмерную модель, которая учитывает наклонение и долготу восходящего узла орбиты перелета к плоскости эклиптики:

$$i = \arccos(\sigma_z^0),$$

$$\Omega = \begin{cases} \arccos\left(\frac{-\sigma_y^0}{\sin i}\right), & \text{если } \sigma_x^0 \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{-\sigma_y^0}{\sin i}\right), & \text{если } \sigma_x^0 < 0. \end{cases} \quad (54)$$

Данные параметры гелиоцентрического участка полностью определяют положение плоскости перелета. Компонента линии апсид получаются при решении предыдущей линейной задачи, в то время как аномалия перицентра может быть вычислена как угловое расстояние между апсидальной линией и линией узлов:

$$\omega = 2\pi + \arccos\left(\frac{x_i}{r_i} \cos \Omega + \frac{y_i}{r_i} \sin \Omega\right) - \nu_0. \quad (55)$$

Имея положения и скорости пролетных планет, на гелиоцентрически-ekliптической орбите. Из этих векторов мы можем определить значения большой полуоси, фокального параметра и эксцентриситета орбиты, которые описывают движение спутника [20].

Первый шаг - сформировать вектора, удельный угловой момент h , вектор узлов n и направление периапсиса e показанные на рисунке 10.

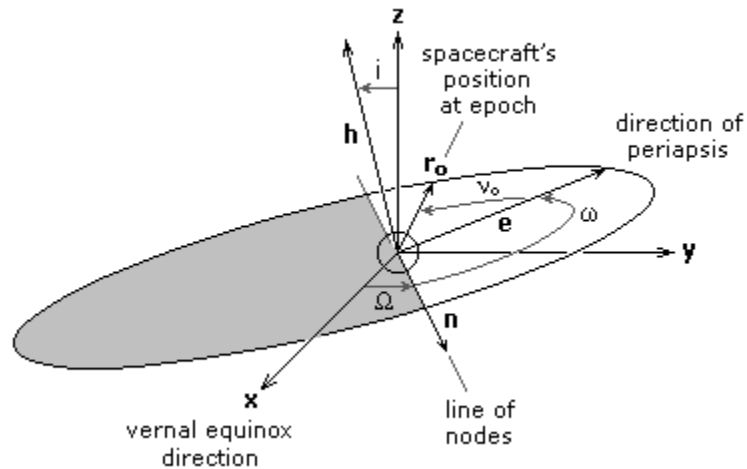


Рисунок 10 – Определение углов.

Важно отметить, что h — это вектор, перпендикулярный плоскости орбиты. Удельный угловой момент h аппарата на участке определяется по формуле:

$$h = (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}) V_x + (z_i x_{i+1} - x_i z_{i+1}) V_y + (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) V_z. \quad (56)$$

Вектор узлов n , определяется как:

$$n = -h_y V_x + h_x V_y. \quad (57)$$

Из определения векторного произведения n должно быть перпендикулярно как z , так и h . Чтобы быть перпендикулярным z , n должно лежать в плоскости эклиптики. Чтобы быть перпендикулярным к h , n должен лежать в плоскости орбиты. Поэтому n должно лежать как в плоскости эклиптики, так и в плоскости орбиты, или на их пересечении, которое называется "линией узлов". Точнее, n — это вектор, направленный вдоль линии узлов в направлении восходящего узла. Величина n не имеет для нас значения; нас интересует только его направление[18].

Вектор e направлен от центра Солнца (фокус орбиты) в сторону перигелия с величиной, точно равной эксцентриситету орбиты. Третий вектор, e , получается из соотношения:

$$\bar{e}(v_0) = \frac{\frac{r_{i+1}}{r_i} - 1}{\cos v_0 - \frac{r_{i+1}}{r_i} e(v_0) \cos(v_0 + \Phi)}. \quad (58)$$

Теперь, когда у нас есть h , n и e , мы можем довольно легко перейти к получению элементов орбиты. Большая полуось a и эксцентриситет, e , следуют непосредственно из r , v и e , а все остальные элементы орбиты — это просто углы между двумя векторами, компоненты которых теперь известны. Если мы знаем, как найти угол между двумя векторами, то проблема решена. В общем случае косинус угла между двумя векторами находится делением точечного произведения двух векторов на произведение их величин [21].

Конечно, способность оценить косинус угла не означает, что мы знаем угол. Нам еще предстоит решить, меньше или больше угол 180 градусов. Как мы увидим, ответ на эту задачу на разрешение квадрата должен быть получен из другой информации в задаче.

Мы можем описать метод нахождения орбитальных элементов следующим образом:

$$\begin{aligned} e &= |\bar{e}(v_0)|, \\ p &= r_0(1 + e \cos v_0), \\ a &= \frac{p}{(1 - e^2)}. \end{aligned} \quad (59)$$

Вышеописанные значения описывают космический аппарат на солнечной орбите, но метод одинаково хорошо работает для спутников на околоземной орбите или вокруг другой планеты или луны, где векторы положения и скорости известны в геоцентрической-экваториальной плоскости отсчета [22].

Решение данной задачи дает нам гелиоцентрическую трансферную орбиту, которая переносит космический аппарат из сферы влияния планеты-отправителя или промежуточной планеты в сферу влияния планеты-прибытия или также в сферу влияния промежуточной планеты, если их несколько. Чтобы завершить патч-конический метод, мы теперь рассмотрим траектории внутри сфер влияния планет.

После выбора гелиоцентрической орбиты переноса мы определяем скорость космического аппарата относительно планет. Относительная скорость, которую мы определим как гиперболический избыток скорости – это разница между гелиоцентрической скоростью космического аппарата и орбитальной скоростью планеты:

$$V_{\infty} = V_{gel} - V_{planet}. \quad (59)$$

Теперь мы можем приступить к определению условий запуска вблизи поверхности Земли, которые приведут к требуемой гиперболической избыточной скорости и помогут рассчитать требуемый импульс у поверхности Земли для отлета от нее:

$$V_0 = \sqrt{V_{\infty}^2 + 2 \frac{\mu_{Earth}}{R}}. \quad (60)$$

Если запуск происходит со стояночной орбиты Земли, то V выведения — это просто скорость выведения минус орбитальная скорость:

$$\Delta V = \sqrt{2 \frac{\mu_{Earth}}{R} + V_{\infty}^2} - \sqrt{\frac{\mu_{Earth}}{r}}. \quad (61)$$

Гравитационный маневр вокруг планеты изменяет скорость космического аппарата относительно Солнца, входя и выходя из гравитационного поля планеты. Космический аппарат ускоряется при приближении к планете и замедляется при выходе из ее гравитационного притяжения. Поскольку планета вращается вокруг Солнца, это движение влияет на космический аппарат во время маневра. Для ускорения космический аппарат пролетает через заднюю сторону

планеты, забирая небольшое количество орбитальной энергии планеты. Для замедления космический аппарат пролетает через ведущую сторону планеты. Сумма кинетических энергий обоих тел остается постоянной. Поэтому гравитационный маневр может быть использован для изменения траектории и скорости космического корабля относительно Солнца [23].

Результирующее увеличение или уменьшение кинетической энергии космического корабля противоречит обычному ожиданию, что при такой встрече кинетическая энергия космического корабля после встречи будет такой же, как и до встречи. Однако энергия, полученная космическим кораблем, равна по величине энергии, потерянной планетой, хотя огромная масса планеты по сравнению с космическим кораблем делает результирующее изменение ее скорости пренебрежимо малым. Эти эффекты на планету настолько незначительны, что их можно не учитывать в расчетах, но для наглядности в данной работе данный параметр будет рассчитан [24].

Встречи в космосе требуют рассмотрения трех измерений, однако приблизительное решение проблемы гравитационного маневра может быть найдено с помощью упрощенной двумерной модели. Предполагаются следующие условия:

- Орбиты планеты и космического аппарата компланарны.
- Ось Y параллельна вектору положения планеты, положительно направленному наружу от Солнца.
- Ось X находится в плоскости орбиты, нормальной к оси Y , положительной в направлении движения по орбите.
- Найдены скорость планеты (V_{planet}), угловая дальность перелета (Φ) и скорость космического аппарата.

Вектор начальной скорости космического аппарата решаются с помощью определения скоростей радиальной и трансверсальной составляющей начала гелиоцентрического участка (старт с Земли или начальной планеты при

гравитационном маневре) и скорости на окончании гелиоцентрического участка (при подлете к итоговой планете или при подлете к последующей планете при гравитационном маневре) и умножения на матрицу перехода:

$$\begin{aligned}
 V_{r\ i} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v_0, \\
 V_{n\ i} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v_0), \\
 V_{r\ i+1} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin(v_0 + \phi), \\
 V_{n\ i+1} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos(v_0 + \phi)).
 \end{aligned} \tag{62}$$

Матрица перехода имеет вид:

$$B(u, \Omega, i) = \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i & -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i & -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin u \sin i & \cos u \sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор скорости космического аппарата можно найти по следующей формуле:

$$\overline{V_{l,l+1}^{gel}} = B(u, \Omega, i) \cdot \begin{pmatrix} V_r \\ V_n \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Далее проведем расчеты нескольких траекторий к Юпитеру с использованием гравитационных маневров у Венеры, Земли и Марса. Мы получим численные значения каждого из участков отдельных траекторий (между планетами при выполнении гравитационного маневра), получим значения гиперболического избытка скорости и необходимого отлетного импульса, получим даты старта от Земли, подлета к Юпитеру и дат гравитационных маневров у Венеры, Земли и Марса [25].

4. Решение и результаты поставленной задачи.

4.1 Численные характеристики и расчет траекторий

В этой главе проводится тестирование разработанной программы и представляются результаты для различных задач. Сначала оптимизируется задача поиска оптимальных дат старта, гравитационных маневров и дата подлета к Юпитеру, затем уже производится расчет каждого участка траектории, на котором используется гравитационный маневр.

4.1.1 Земля-Венера-Юпитер

Таблица 2 – Характеристики по схеме Земля-Венера-Юпитер

| | | |
|--|------------|------------|
| Дата старта | 10.04.2025 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Необходимый импульс скорости с промежуточной орбиты Земли высотой 200 км | 4.8961241 | км/с |
| Дата гравитационного маневра у Венеры | 06.10.2025 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Венеры | 711.9929 | км |
| Дата подлета к Юпитеру | 17.02.2034 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Суммарное время полета (сут.) | 3235 | сут. |

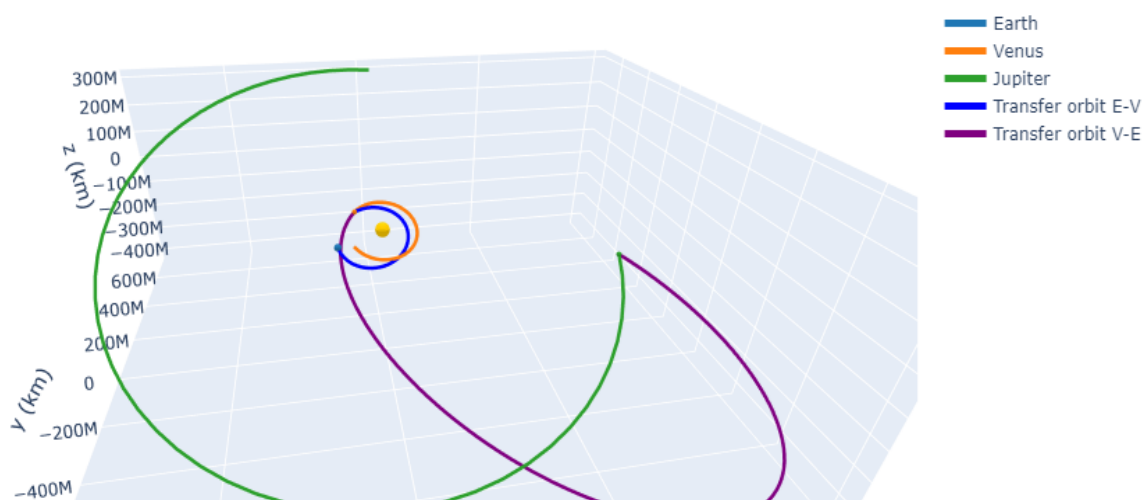


Рисунок 11 – Траектория Земля-Венера-Юпитер

Таблица 3 – Фазовые координаты планет

| Планета, дата | Радиус вектор | Вектор скоростей |
|----------------------|--|--|
| Земля 10.04.2025 | $\begin{pmatrix} -141546276.6814773 \\ -47815740.35406876 \\ -20699281.245386876 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 9.73371338 \\ -25.77452099 \\ -11.17194041 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Венера 06.10.2025 | $\begin{pmatrix} -79389767.63609861 \\ 63856959.60367952 \\ 33757442.170733646 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -23.88306866 \\ -24.17518577 \\ -9.36659125 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Юпитер 17.02.2034 | $\begin{pmatrix} 726553479.5180159 \\ -139426955.66543025 \\ -77442834.37857845 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 2.62450445 \\ 12.31864098 \\ 5.21613 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |

Гиперболические избытки скоростей

Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{отлет.}} \begin{pmatrix} -4.4727786 \\ 4.7318215 \\ 0.52394999 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}} = 6.5322589 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Венере:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} -8.235575 \\ 9.3234944 \\ 2.66752 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}} = 12.722732 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Венеры:

$$V_{\infty}^{\text{Вен}} \begin{pmatrix} -8.0573173 \\ -7.369117 \\ -6.8284957 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}} = 12.878377 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = -0.15564547 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру:

$$V_{\infty}^{\text{подлет.}} \begin{pmatrix} -11.57609 \\ -4.3467527 \\ -1.0083378 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}} = 12.406324 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Параметры участков траектории

Параметры участка Земля – Венера

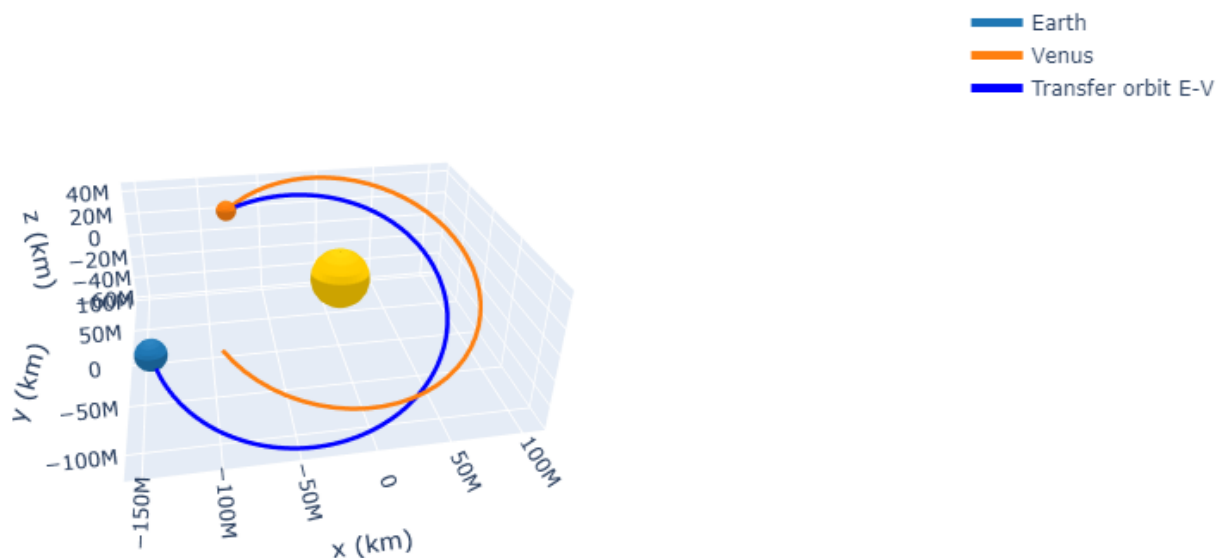


Рисунок 12 – Участок Земля-Венера

Таблица 4 – Характеристики участка Земля-Венера

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 112883415.92869352 | км |
| Фокальный параметр | 98233689.865389 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.3602464256284655 | |
| Наклонение | 3.4021496 | град. |
| Долгота восходящего узла | 20.5350066 | град. |
| Аргумент перицентра | 14.5083959 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 165.4666576 | град. |
| Угловая дальность перелета | 297.539825 | град. |
| Продолжительность участка | 179 | сут. |

Параметры участка Венера – Юпитер

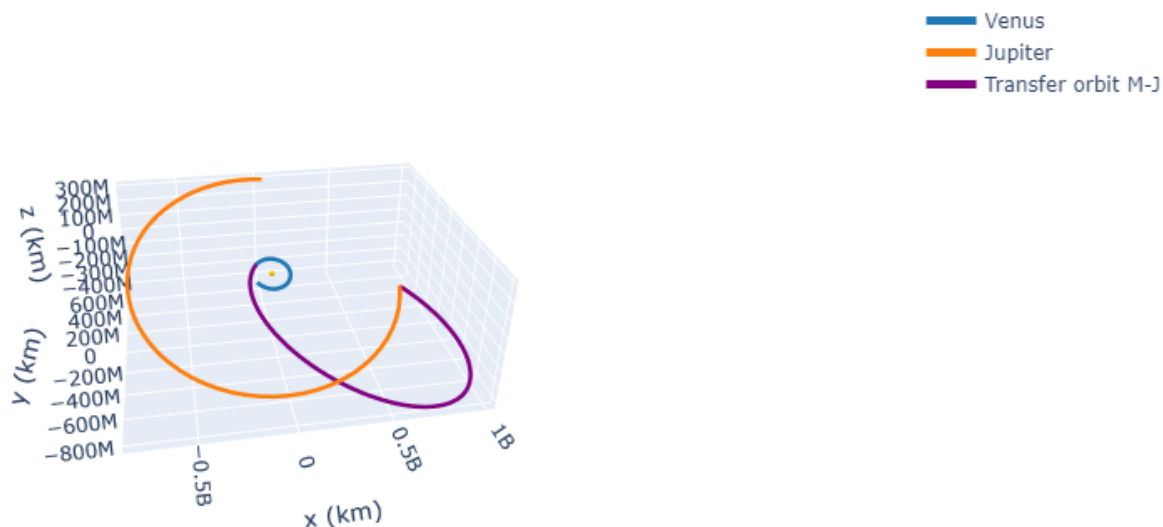


Рисунок 13 – Участок Венера – Юпитер

Таблица 5 – Характеристики участка Венера-Юпитер

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 678821596.3335086 | км |
| Фокальный параметр | 197691695.5728774 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.8418861182613433 | |
| Наклонение | 4.1835645 | град. |
| Долгота восходящего узла | 4.4631287 | град. |
| Аргумент перигея | 133.9916159 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 0.1629519 | град. |
| Угловая дальность перелета | 209.91923 | град. |
| Продолжительность участка | 3056 | сут. |

Тем самым была полностью рассчитана траектория к Юпитеру, с использованием гравитационного маневра у Венеры. Рассчитаны все основные параметры данной траектории и отдельные ее участки.

4.1.2 Земля-Земля-Юпитер

Таблица 6 – Основные характеристики траектории по данной схеме

| | | |
|--|------------|------------|
| Дата старта | 28.05.2029 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Необходимый импульс скорости промежуточной орбиты Земли высотой 200 км | 6.6505523 | км/с |
| Дата гравитационного маневра у Земли | 14.02.2031 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Земли | 7016.1966 | км |
| Дата подлета к Юпитеру | 27.11.2033 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Суммарное время полета (сут.) | 1644 | сут. |

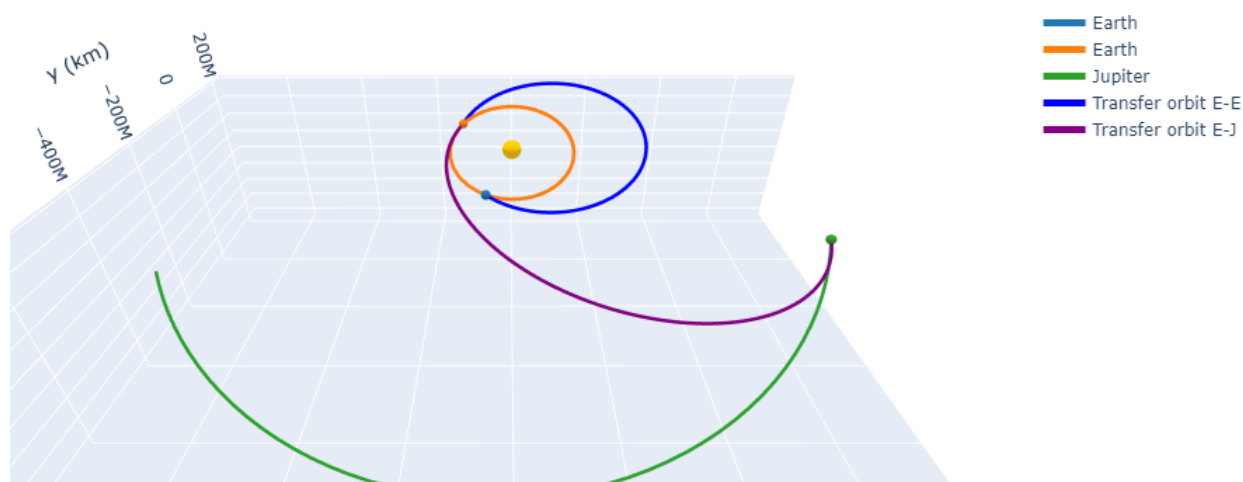


Рисунок 14 – Траектория Земля-Земля-Юпитер

Таблица 7 – Фазовые координаты планет

| Планета, дата | Радиус вектор | Вектор скоростей |
|----------------------|--|--|
| Земля 28.05.2029 | $\begin{pmatrix} -60143098.70230435 \\ -127695278.3750023 \\ -55346793.51878729 \end{pmatrix}_{\text{км}}$ | $\begin{pmatrix} 26.83043818 \\ -10.96231978 \\ -4.7531655 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Земля 14.02.2031 | $\begin{pmatrix} -120654929.48869102 \\ 78590609.19266155 \\ 34078780.41113805 \end{pmatrix}_{\text{км}}$ | $\begin{pmatrix} -17.73708488 \\ -22.38556682 \\ -9.70433443 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Юпитер 27.11.2033 | $\begin{pmatrix} 702163550.476614 \\ -225350609.49954826 \\ -113677735.79351984 \end{pmatrix}_{\text{км}}$ | $\begin{pmatrix} 4.24896779 \\ 11.90523476 \\ 4.99939469 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |

Гиперболические избытки скоростей

Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{отлет.}} \begin{pmatrix} -0.036336892 \\ -8.7366428 \\ -3.7884431 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 9.5227385 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Земле:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} 4.9620877 \\ -7.470172 \\ -3.2361238 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 9.534059 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{зем}} \begin{pmatrix} -1.7527299 \\ -9.2883922 \\ -0.97812495 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 9.5027901 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = 0.031268892 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру:

$$V_{\infty}^{\text{подлет.}} \begin{pmatrix} -2.4942 \\ -4.8443474 \\ -2.5019673 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 5.9957131 \frac{\text{км}}{c}$$

Параметры участка Земля – Земля

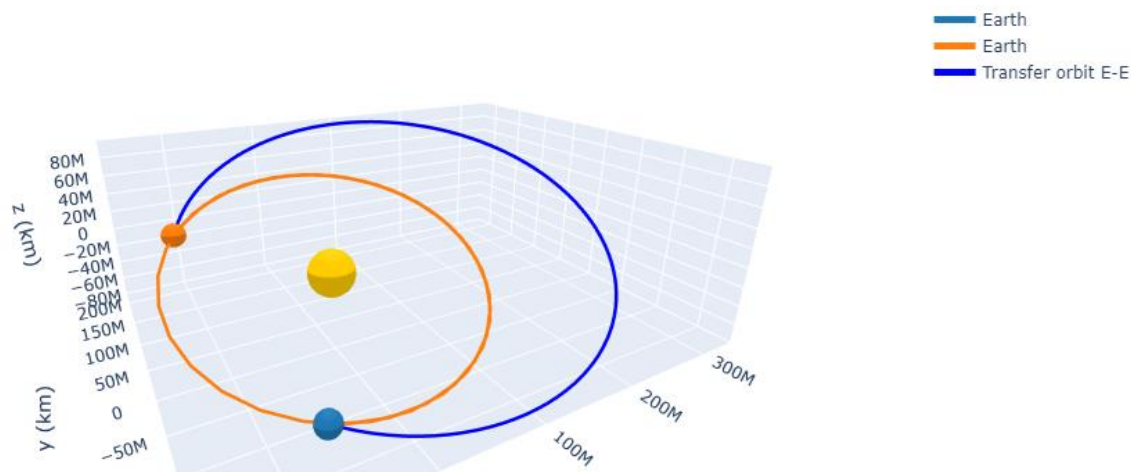


Рисунок 15 – Участок Земля – Земля

Таблица 8 – Основные характеристики участка Земля – Земля

| | | |
|-----------------------------------|---------------------|-------|
| Большая полуось | 221108432.71359769 | км |
| Фокальный параметр | 186844842.59714365 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.39365319438005886 | |
| Наклонение | 0.0039324 | град. |
| Долгота восходящего узла | 175.4133167 | град. |
| Аргумент перицентра | 17.5865572 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 53.8207123 | град. |
| Угловая дальность перелета | 257.99772 | град. |
| Продолжительность участка | 627 | сут. |

Параметры участка Земля – Юпитер

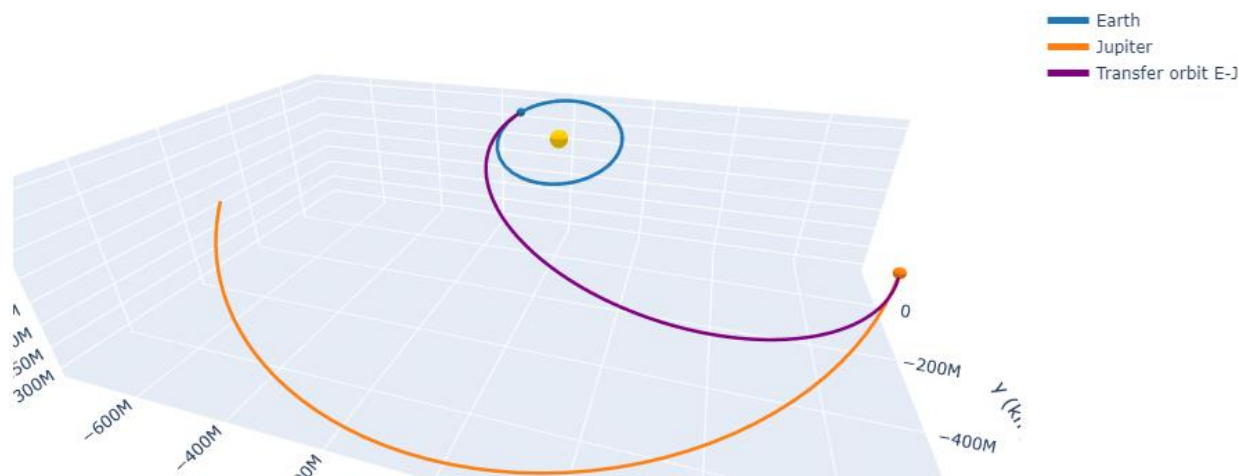


Рисунок 16 – Участок Земля – Юпитер

Таблица 9 – Основные характеристики участка Земля – Юпитер

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 447531300.748567 | км |
| Фокальный параметр | 245154642.5632055 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.6724631680250577 | |
| Наклонение | 4.2129318 | град. |
| Долгота восходящего узла | 144.8912221 | град. |
| Аргумент перицентра | 12.3739070 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 347.5988856 | град. |
| Угловая дальность перелета | 195.6722 | град. |
| Продолжительность участка | 1017 | сут. |

4.1.3 Земля-Марс-Юпитер

Таблица 10 – Основные характеристики траектории по данной схеме

| | | |
|--|------------|------------|
| Дата старта | 06.07.2029 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Необходимый импульс скорости промежуточной орбиты Земли высотой 200 км | 4.2074283 | км/с |
| Дата гравитационного маневра у Марса | 30.12.2030 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Марса | 633.5542 | км |
| Дата подлета к Юпитеру | 01.06.2035 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Суммарное время полета (сут.) | 2156 | сут. |

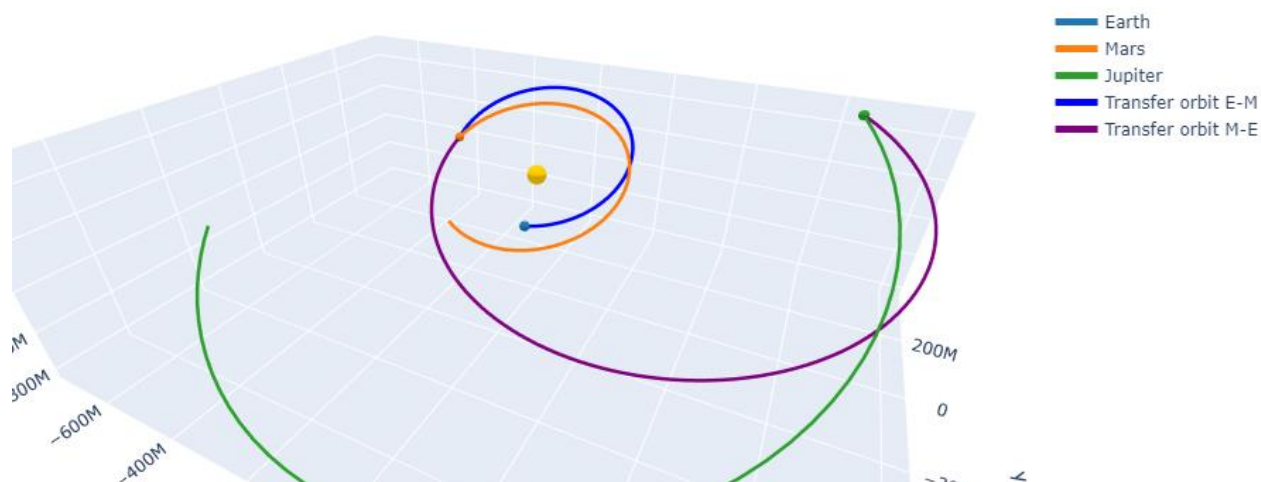


Рисунок 17 – Траектория Земля-Марс-Юпитер

Таблица 11 – Фазовые координаты планет

| Планета, дата | Радиус вектор | Вектор скоростей |
|----------------------|---|---|
| Земля 06.07.2029 | $\begin{pmatrix} 36480176.949702546 \\ -135575476.11002797 \\ -58763701.68457585 \end{pmatrix}_{\text{км}}$ | $\begin{pmatrix} 28.44547638 \\ 6.42577066 \\ 2.78595158 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |
| Марс 30.12.2030 | $\begin{pmatrix} -241371146.80995303 \\ 53080629.257726066 \\ 30857580.29783413 \end{pmatrix}_{\text{км}}$ | $\begin{pmatrix} -5.02599382 \\ -19.52431941 \\ -8.8199922 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |
| Юпитер 01.06.2035 | $\begin{pmatrix} 638327719.1660622 \\ 351852877.53404033 \\ 135276695.11736917 \end{pmatrix}_{\text{км}}$ | $\begin{pmatrix} -6.79796303 \\ 10.84038031 \\ 4.81185506 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |

Гиперболические избытки скоростей

Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{отлет.}} \begin{pmatrix} 4.6068942 \\ 2.0417626 \\ -0.33716478 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 5.0503414 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Марсу:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} 7.1086269 \\ -0.77858558 \\ 0.13678021 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 7.1524458 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Марса:

$$V_{\infty}^{\text{Марс}} \begin{pmatrix} 1.9378564 \\ -6.428676 \\ -2.519651 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 7.171597 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = -0.019151247 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру:

$$V_{\infty}^{\text{подлет.}} \begin{pmatrix} -1.253508 \\ -5.2080206 \\ -2.0810027 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 5.7467672 \frac{\text{км}}{c}$$

Параметры участка Земля – Марс

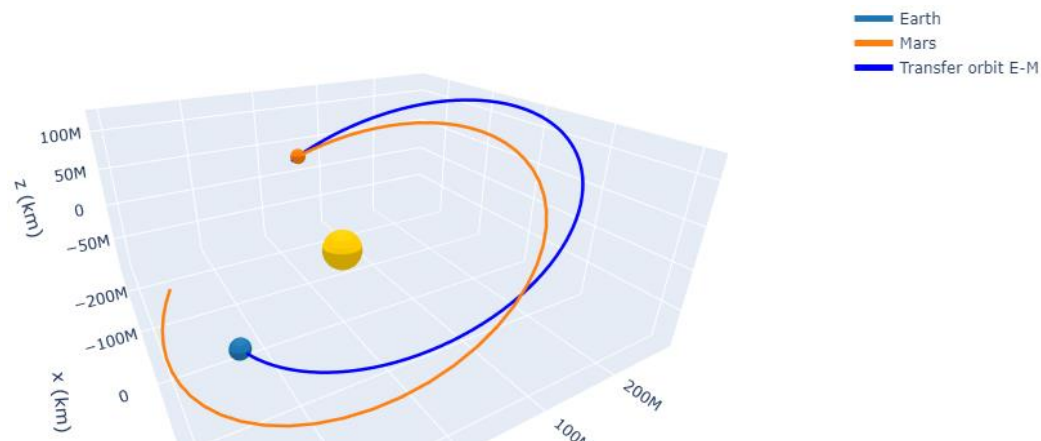


Рисунок 18 – Участок Земля – Марс

Таблица 12 – Основные характеристики участка Земля – Марс

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 231538412.35605156 | км |
| Фокальный параметр | 204290938.0752738 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.3430454000209822 | |
| Наклонение | 1.8645969 | град. |
| Долгота восходящего узла | 104.1073973 | град. |
| Аргумент перицентра | 183.7748499 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 356.1164273 | град. |
| Угловая дальность перелета | 241.96748 | град. |
| Продолжительность участка | 542 | сут. |

Параметры участка Марс – Юпитер

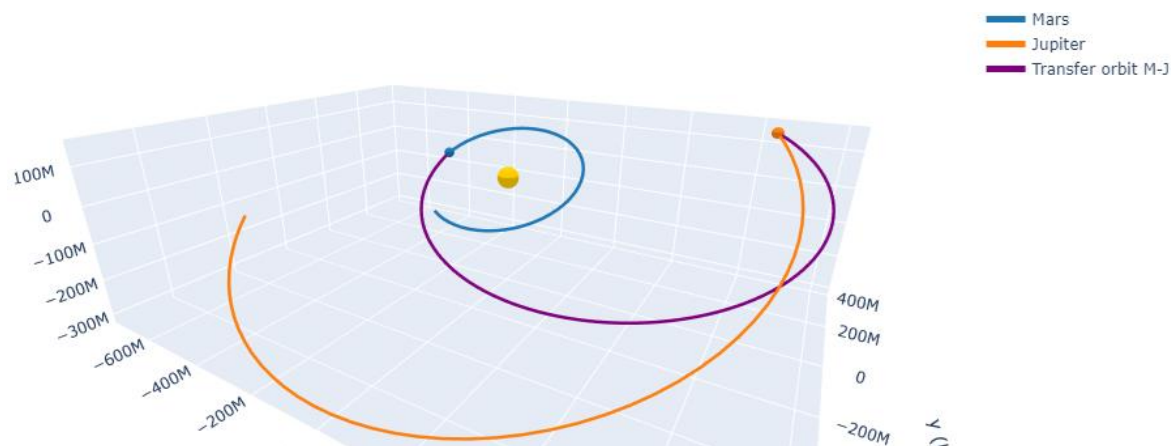


Рисунок 19 – Участок Марс – Юпитер

Таблица 13 – Основные характеристики участка Марс – Юпитер

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 522185151.9258666 | км |
| Фокальный параметр | 372240950.6156711 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.5358615281605189 | |
| Наклонение | 1.6502093 | град. |
| Долгота восходящего узла | 78.5011944 | град. |
| Аргумент перицентра | 110.4029219 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 337.3677377 | град. |
| Угловая дальность перелета | 224,7061 | град. |
| Продолжительность участка | 1614 | сут. |

4.1.4 Земля-Венера-Земля-Юпитер

Таблица 14 – Основные характеристики траектории по данной схеме

| | | |
|--|------------|------------|
| Дата старта | 03.09.2026 | дд.мм.гггг |
| Необходимый импульс скорости с промежуточной орбиты Земли высотой 200 км | 4.5505513 | км/с |
| Дата гравитационного маневра у Венеры | 21.03.2027 | дд.мм.гггг |
| Высота пролетной гиперболы у Венеры | 662.5771 | км |
| Дата гравитационного маневра у Земли | 17.04.2029 | дд.мм.гггг |
| Высота пролетной гиперболы у Земли | 49.0531 | км |
| Дата подлета к Юпитеру | 15.05.2034 | дд.мм.гггг |
| Суммарное время полета (сут.) | 2811 | сут. |

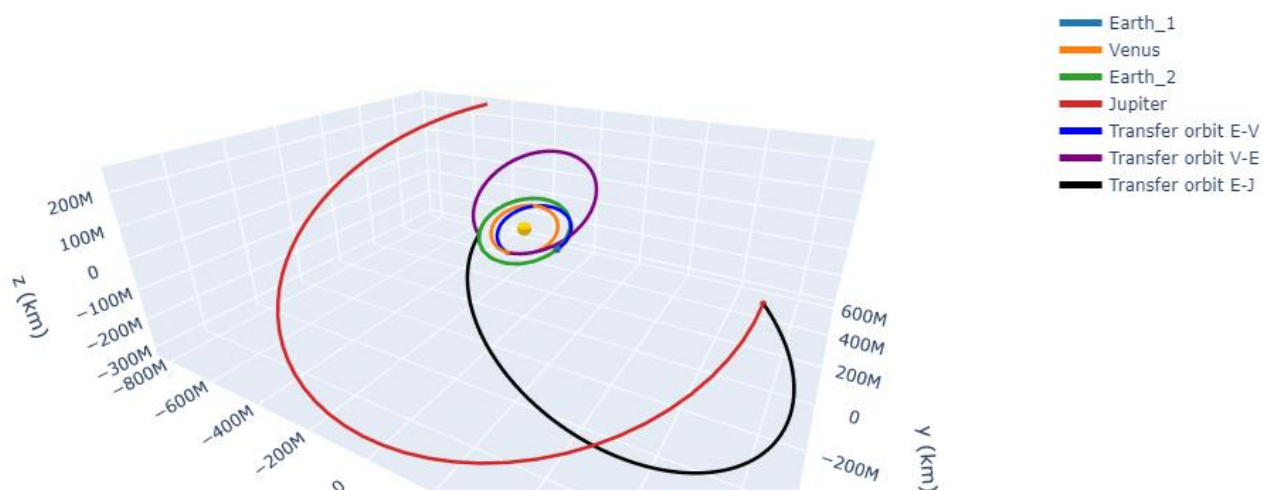


Рисунок 20 – Траектория Земля-Венера-Земля-Юпитер

Таблица 15 – Фазовые координаты планет

| Планета, дата | Радиус вектор | Вектор скоростей |
|----------------------|---|--|
| Земля 03.09.2026 | $\begin{pmatrix} 141748702.441818 \\ -47717751.503790826 \\ -20670187.206359386 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 9.64775029 \\ 25.60369115 \\ 11.09830404 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Венера 21.03.2027 | $\begin{pmatrix} -2956102.566331664 \\ -99827883.96427827 \\ -44713590.997041464 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 34.78340309 \\ -0.16975636 \\ -2.27676163 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Земля 17.04.2029 | $\begin{pmatrix} -133785603.35315704 \\ -62378793.037437625 \\ -27033922.31992602 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 12.98488456 \\ -24.48139493 \\ -10.61115695 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Юпитер 15.05.2034 | $\begin{pmatrix} 739606192.0652983 \\ -45846888.64090448 \\ -37650285.93692198 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 0.84098329 \\ 12.54265487 \\ 5.35555869 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |

Гиперболические избытки скоростей

Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{отлет.}} \begin{pmatrix} 2.413963 \\ -4.984742 \\ -1.8067111 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}} = 5.8257253 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Венере:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} -0.034872722 \\ -9.7740382 \\ -2.0050719 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 9.9776426 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Венеры:

$$V_{\infty}^{\text{Вен}} \begin{pmatrix} 8.689766 \\ 3.0352211 \\ 3.2622938 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 9.7656111 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = 0.21203146 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Земле:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} 15.204242 \\ 5.2494288 \\ 1.7995548 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 16.185298 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{Зем}} \begin{pmatrix} -10.625891 \\ -10.592162 \\ -6.2354323 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 16.247586 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = -0.062288584 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру:

$$V_{\infty}^{\text{подлет.}} \begin{pmatrix} -7.754909 \\ -5.5707417 \\ -1.8700345 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 9.7297896 \frac{\text{км}}{c}$$

Параметры участка Земля – Венера

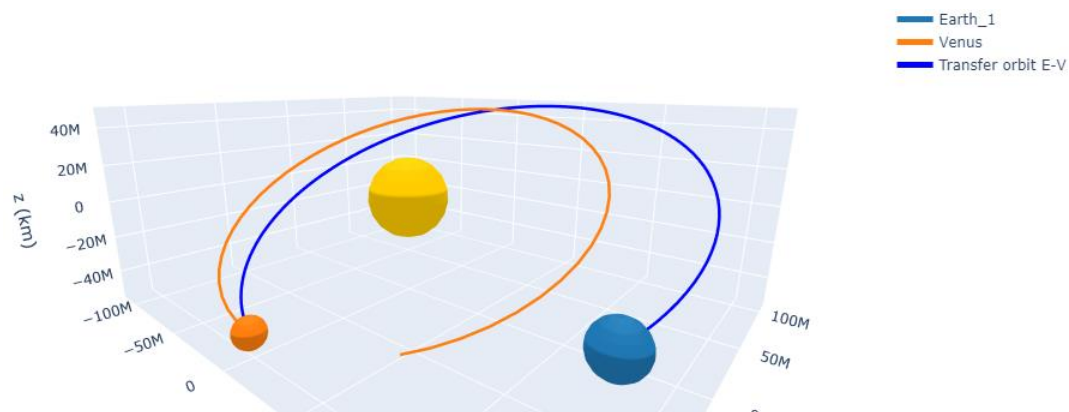


Рисунок 21 – Участок Земля – Венера

Таблица 16 – Основные характеристики участка Земля – Венера

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 120864225.8490634 | км |
| Фокальный параметр | 111168633.92809369 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.2832293637347125 | |
| Наклонение | 0.7548556 | град. |
| Долгота восходящего узла | 340.5672949 | град. |
| Аргумент перицентра | 201.4414111 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 158.6088174 | град. |
| Угловая дальность перелета | 288.59682 | град. |
| Продолжительность участка | 199 | сут. |

Параметры участка Венера – Земля

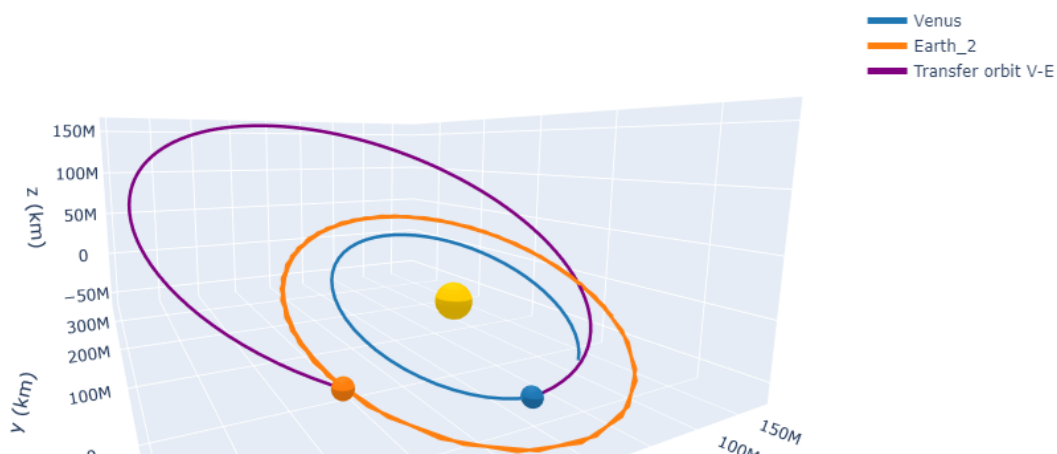


Рисунок 22 – Участок Венера – Земля

Таблица 17 – Основные характеристики участка Венера – Земля

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 244316695.6240368 | км |
| Фокальный параметр | 168129309.62065807 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.5584251423731116 | |
| Наклонение | 0.8174333 | град. |
| Долгота восходящего узла | 27.4820666 | град. |
| Аргумент перицентра | 257.4156095 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 343.8882424 | град. |
| Угловая дальность перелета | 298.48385 | град. |
| Продолжительность участка | 758 | сут. |

Параметры участка Земля – Юпитер

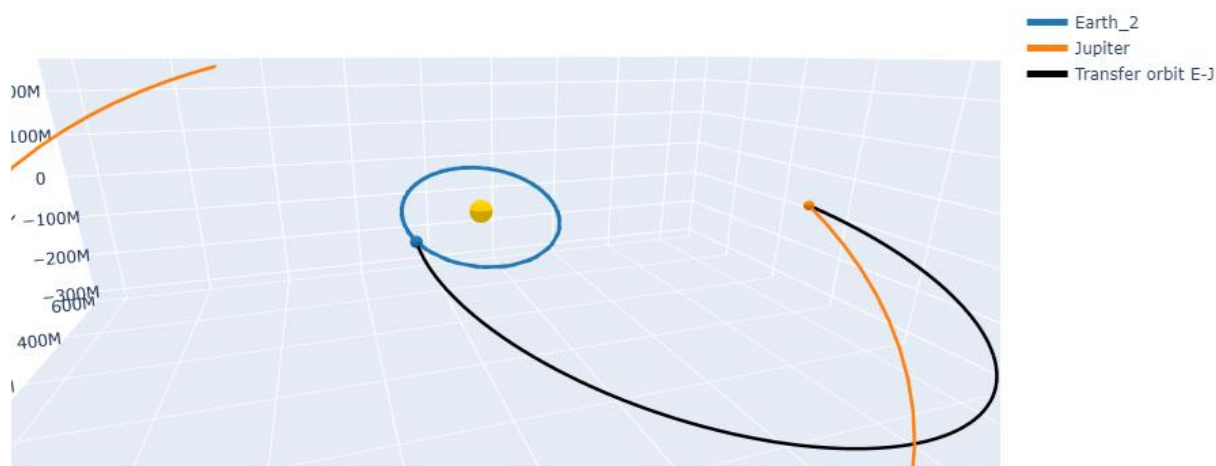


Рисунок 23 – Участок Земля – Юпитер

Таблица 18 – Основные характеристики участка Земля – Юпитер

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 532232541.42771256 | км |
| Фокальный параметр | 216622173.0266147 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.7700606275274965 | |
| Наклонение | 2.3962267 | град. |
| Долгота восходящего узла | 27.3908361 | град. |
| Аргумент перицентра | 125.1164784 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 54.8362819 | град. |
| Угловая дальность перелета | 148.6294 | град. |
| Продолжительность участка | 1854 | сут. |

4.1.5 Земля-Земля-Венера-Юпитер

Таблица 19 – Основные характеристики траектории по данной схеме

| | | |
|---|------------|------------|
| Дата старта | 09.07.2026 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Необходимый импульс скорости промежуточной орбиты Земли высотой 200 км | 7.8388619 | км/с |
| Дата гравитационного маневра у Земли | 11.04.2029 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Земли | 38.6753 | км |
| Дата гравитационного маневра у Венеры | 03.02.2030 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Венеры | 973.4575 | км |
| Дата подлета к Юпитеру | 07.05.2034 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Суммарное время полета (сут.) | 2859 | сут. |

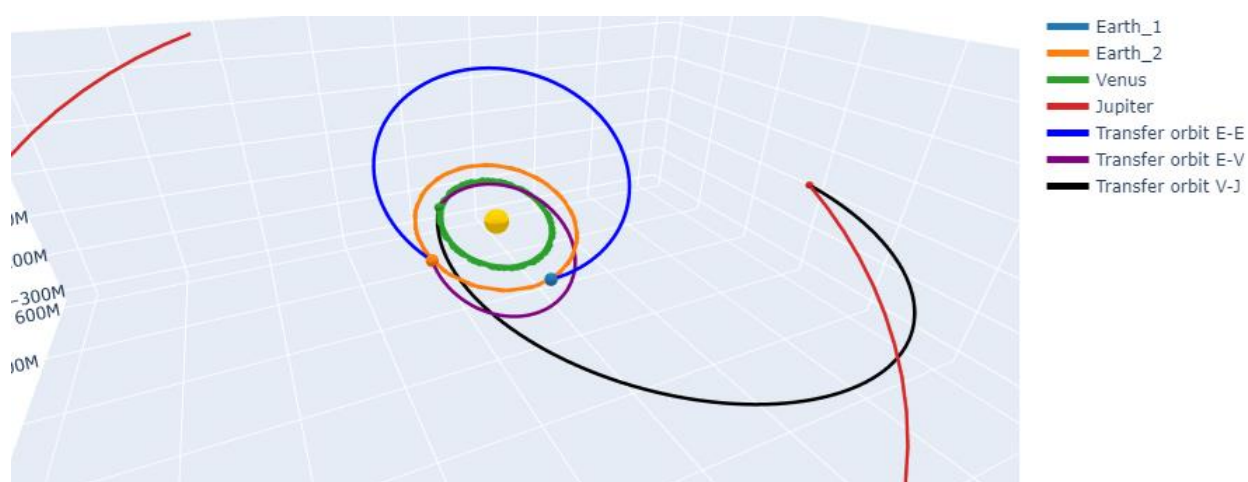


Рисунок 24 – Траектория Земля-Земля-Земля-Юпитер

Таблица 20 – Фазовые координаты планет

| Планета, дата | Радиус вектор | Вектор скоростей |
|---------------------|--|--|
| Земля 09.07.2026 | $\begin{pmatrix} 42834998.79830547 \\ -134556471.14523274 \\ -58311296.31814858 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 28.10263038 \\ 7.63768945 \\ 3.30983355 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Земля 11.04.2029 | $\begin{pmatrix} -139796078.26578867 \\ -49379812.46847284 \\ -21399348.47494507 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 10.17964763 \\ -25.62317567 \\ -11.10739398 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |

| | | |
|----------------------|--|--|
| Венера 03.02.2030 | $\begin{pmatrix} -93287698.87472689 \\ 46242698.90286343 \\ 26720000.397357162 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -17.43994655 \\ -28.32488771 \\ -11.64281276 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |
| Юпитер 07.05.2034 | $\begin{pmatrix} 738967637.7226346 \\ -54512635.34936055 \\ -41349052.75078177 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 1.00664594 \\ 12.53152119 \\ 5.3467543 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |

Гиперболические избытки скоростей

Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{отлет.}} \begin{pmatrix} 8.0142721 \\ -7.252155 \\ -3.1427241 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 11.256066 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Земле:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} 10.938573 \\ -1.798649 \\ -0.7760966 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 11.112598 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{зем}} \begin{pmatrix} -10.618777 \\ -0.11431164 \\ -2.2041695 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 10.84573 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = 0.26686791 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Венере:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} -11.146381 \\ 4.1587145 \\ -0.016608574 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 11.896932 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Венеры:

$$V_{\infty}^{\text{вен}} \begin{pmatrix} -3.6595022 \\ -8.5391757 \\ -8.1629356 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 12.367012 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{diff} = -0.47008002 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру:

$$V_{\infty}^{\text{подлет.}} \begin{pmatrix} -6.5995069 \\ -6.1448536 \\ -1.7705903 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}} = 9.1895433 \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

Параметры участка Земля – Земля

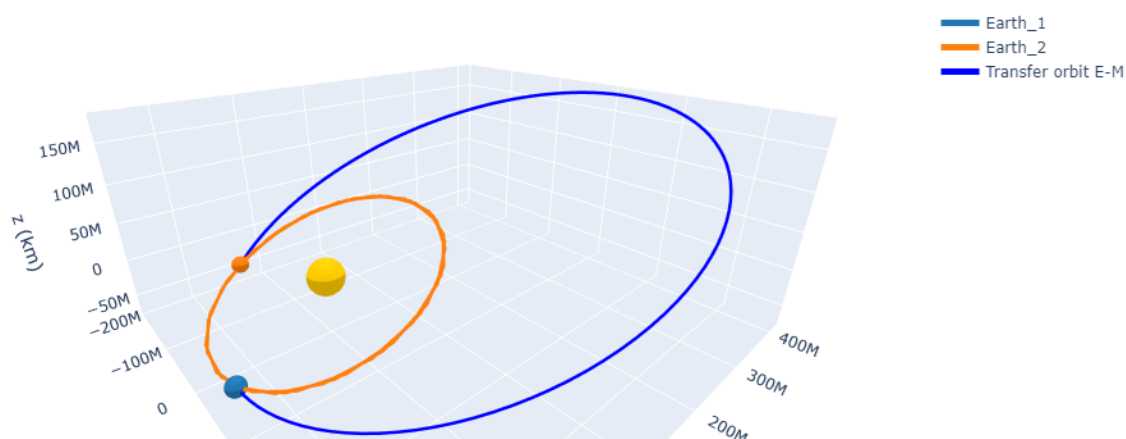


Рисунок 25 – Участок Земля – Земля

Таблица 21 – Основные характеристики участка Земля – Земля

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 1219277851.6606894 | км |
| Фокальный параметр | 250222181.52803963 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.8915034354523979 | |
| Наклонение | 0.0033247 | град. |
| Долгота восходящего узла | 173.6596991 | град. |
| Аргумент перицентра | 68.5792329 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 44.3188547 | град. |
| Угловая дальность перелета | 274.772437 | град. |
| Продолжительность участка | 1007 | сут. |

Параметры участка Земля – Венера

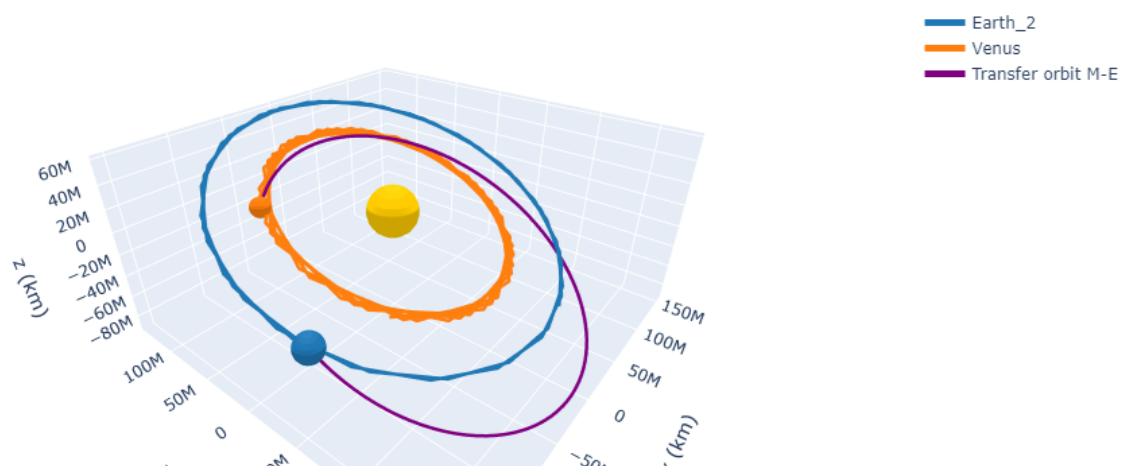


Рисунок 26 – Участок Земля – Венера

Таблица 22 – Основные характеристики участка Земля – Венера

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 142211529.81435838 | км |
| Фокальный параметр | 121147037.60924 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.3848647121905905 | |
| Наклонение | 4.3490334 | град. |
| Долгота восходящего узла | 21.0223679 | град. |
| Аргумент перицентра | 60.1811231 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 119.7987395 | град. |
| Угловая дальность перелета | 309.240794 | град. |
| Продолжительность участка | 298 | сут. |

Параметры участка Венера – Юпитер

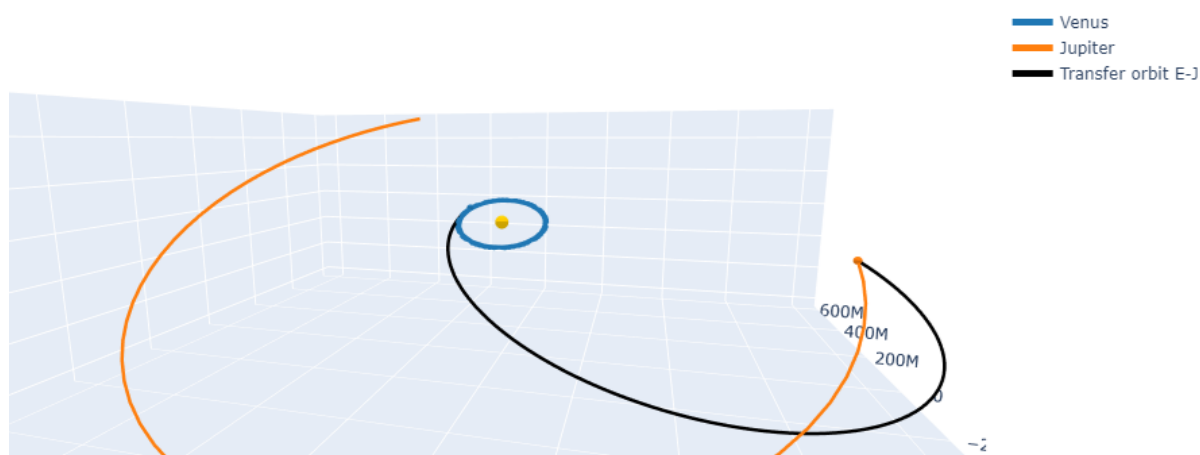


Рисунок 27 – Участок Венера – Юпитер

Таблица 23 – Основные характеристики участка Венера – Юпитер

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 486288284.21197325 | км |
| Фокальный параметр | 190899342.79533935 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.7793817155519431 | |
| Наклонение | 5.5883474 | град. |
| Долгота восходящего узла | 7.9360502 | град. |
| Аргумент перицентра | 149.3606319 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 354.5888241 | град. |
| Угловая дальность перелета | 204.55062 | град. |
| Продолжительность участка | 1554 | сут. |

4.1.6 Земля-Марс-Земля-Юпитер

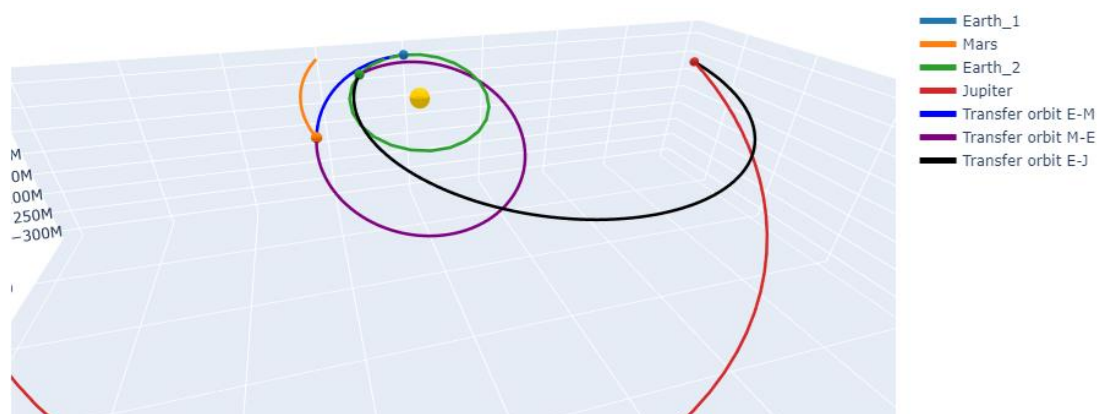


Рисунок 28 – Траектория Земля-Марс-Земля-Юпитер

Таблица 24 – Основные характеристики траектории по данной схеме

| | | |
|--|------------|------------|
| Дата старта | 24.12.2028 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Необходимый импульс скорости с промежуточной орбиты Земли высотой 200 км | 4.8312016 | км/с |
| Дата гравитационного маневра у Марс | 30.04.2029 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Марс | 3205.8062 | км |
| Дата гравитационного маневра у Земли | 11.02.2031 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Земли | 437.9202 | км |
| Дата подлета к Юпитеру | 18.08.2034 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Суммарное время полета (сут.) | 2063 | сут. |

Таблица 25 – Фазовые координаты планет

| Планета, дата | Радиус вектор | Вектор скоростей |
|----------------------|--|---|
| Земля 24.12.2028 | $\begin{pmatrix} -5716599.546472191 \\ 134699484.5463672 \\ 58393408.58919535 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -30.2490879 \\ -1.19931253 \\ -0.5199126 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |
| Марс 30.04.2029 | $\begin{pmatrix} -226179074.4425368 \\ -80275270.65798238 \\ -30709046.837280877 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 9.48397594 \\ -18.61643519 \\ -8.79500365 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |
| Земля 11.02.2031 | $\begin{pmatrix} -115893867.80091257 \\ 84281275.8801818 \\ 36545675.72056785 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -18.99108526 \\ -21.51442144 \\ -9.32617477 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |
| Юпитер 18.08.2034 | $\begin{pmatrix} 738403429.2924684 \\ 57223250.847409785 \\ 6556876.238077645 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -1.13521071 \\ 12.52602907 \\ 5.39653309 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c}$ |

Гиперболические избытки скоростей

Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{отлет.}} \begin{pmatrix} -6.2148484 \\ -1.5450484 \\ -0.017966385 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 6.4040485 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Марсу:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} -12.48476 \\ -4.2338244 \\ -1.0400334 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 13.224075 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Марса:

$$V_{\infty}^{\text{Марс}} \begin{pmatrix} -12.845127 \\ -2.6713902 \\ -0.038230661 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 13.120026 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = 0.10404928 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Земле:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} -10.676114 \\ 3.8719528 \\ 2.3329905 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 11.593717 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{зем}} \begin{pmatrix} 1.8666281 \\ -10.93409 \\ -3.3644791 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 11.591304 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = 0.002412657 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру:

$$V_{\infty}^{\text{подлет.}} \begin{pmatrix} -3.0793045 \\ -5.8051959 \\ -2.5945963 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 7.0650085 \frac{\text{км}}{c}$$

Параметры участка Земля – Марс

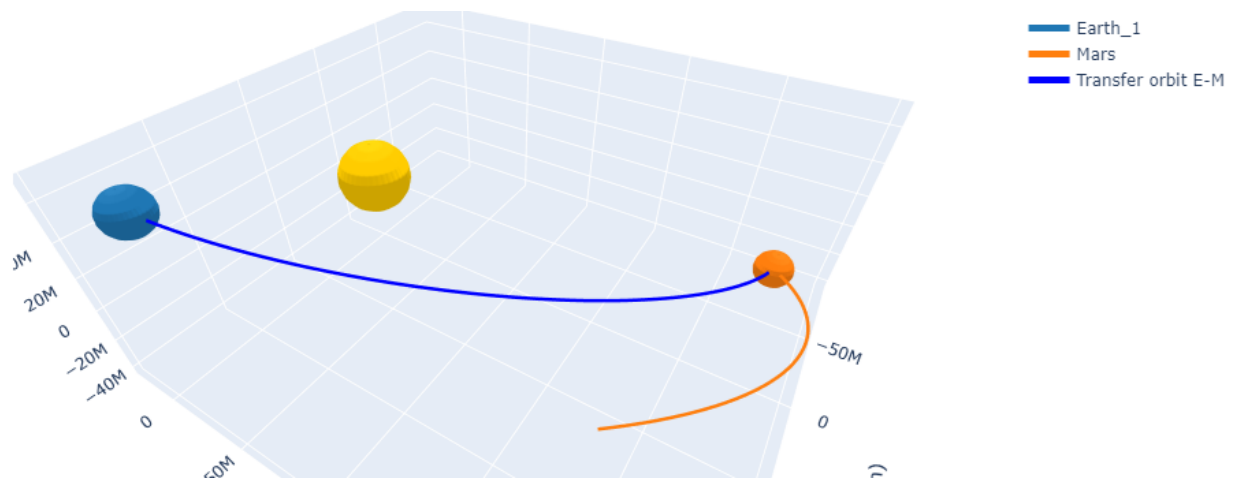


Рисунок 29 – Участок Земля – Марс

Таблица 26 – Основные характеристики участка Земля – Марс

| | | |
|--------------------------|--------------------|----|
| Большая полуось | 281992580.05530274 | км |
| Фокальный параметр | 217089979.57294577 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.479746934750368 | |

| | | |
|-----------------------------------|-------------|-------|
| Наклонение | 0.9210586 | град. |
| Долгота восходящего узла | 93.5216120 | град. |
| Аргумент перицентра | 5.2087187 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 354.5456271 | град. |
| Угловая дальность перелета | 108.55658 | град. |
| Продолжительность участка | 127 | сут. |

Параметры участка Марс – Земля

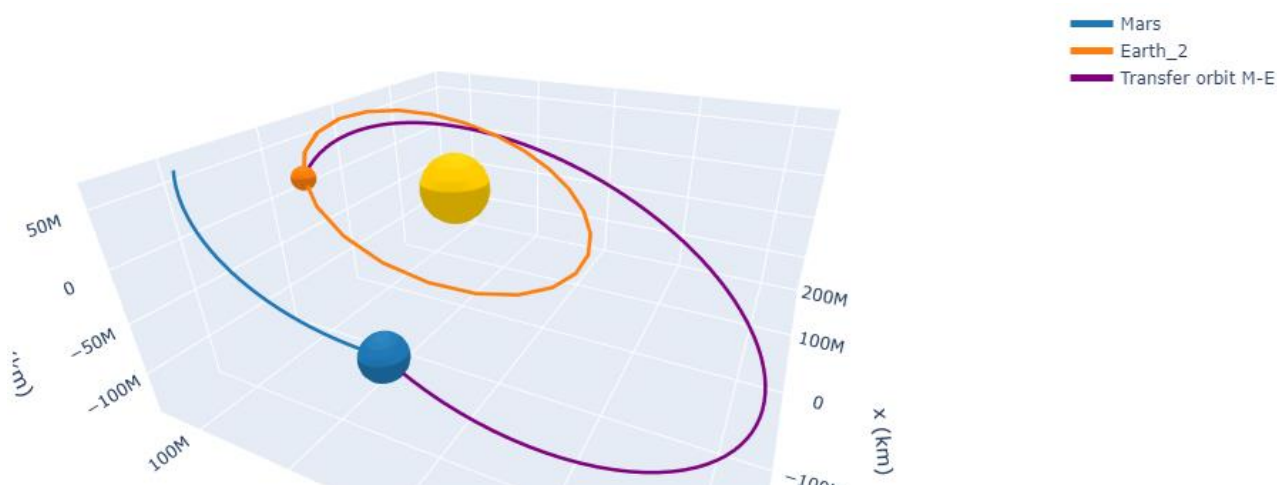


Рисунок 30 – Участок Марс – Земля

Таблица 27 – Основные характеристики участка Марс – Земля

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 238981395.3206977 | км |
| Фокальный параметр | 182680816.076094 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.4853716267609773 | |
| Наклонение | 1.0222985 | град. |
| Долгота восходящего узла | 141.9142899 | град. |
| Аргумент перицентра | 298.8783038 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 120.3149260 | град. |
| Угловая дальность перелета | 300.804983 | град. |
| Продолжительность участка | 652 | сут. |

Параметры участка Земля – Юпитер

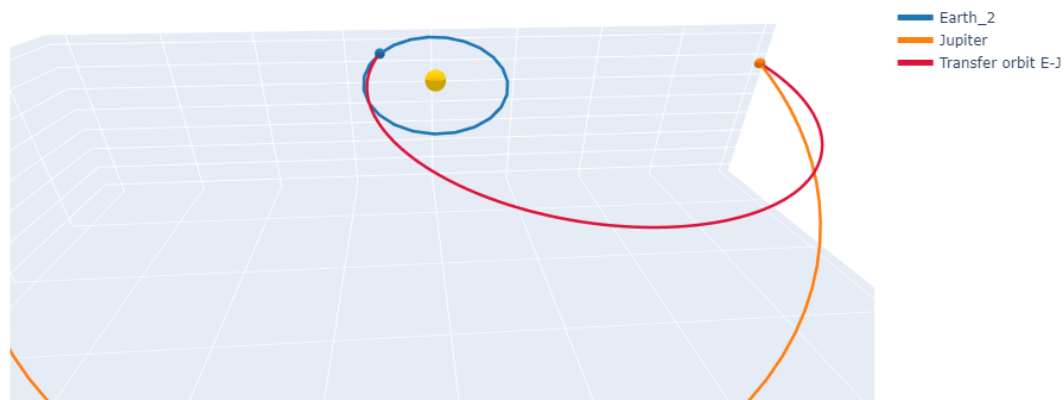


Рисунок 31 – Участок Земля – Юпитер

Таблица 28 – Основные характеристики участка Земля – Юпитер

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 461317687.496406 | км |
| Фокальный параметр | 237316206.37356904 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.6968276768632596 | |
| Наклонение | 1.9183018 | град. |
| Долгота восходящего узла | 141.8594955 | град. |
| Аргумент перицентра | 29.7309440 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 330.2065390 | град. |
| Угловая дальность перелета | 222.68628 | град. |
| Продолжительность участка | 1284 | сут. |

4.1.7 Земля-Марс-Венера-Юпитер

Таблица 29 – Основные характеристики траектории по данной схеме

| | | |
|--|------------|------------|
| Дата старта | 13.02.2026 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Необходимый импульс скорости с промежуточной орбиты Земли высотой 200 км | 5.5328402 | км/с |
| Дата гравитационного маневра у Марс | 02.05.2028 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Марс | 117.8383 | км |
| Дата гравитационного маневра у Венеры | 16.07.2029 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Высота пролетной гиперболы у Венеры | 363.3363 | км |
| Дата подлета к Юпитеру | 16.11.2034 | ДД.ММ.ГГГГ |
| Суммарное время полета (сут.) | 3198 | сут. |

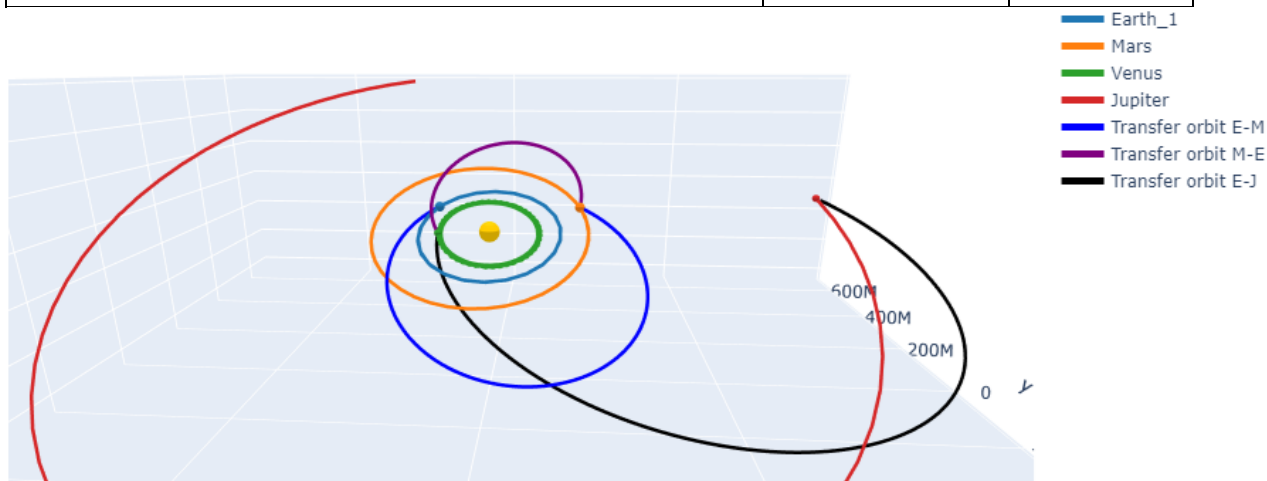


Рисунок 32 – Траектория Земля-Марс-Венера-Юпитер

Таблица 30 – Фазовые координаты планет

| Планета, дата | Радиус вектор | Вектор скоростей |
|----------------------|--|--|
| Земля 13.02.2026 | $\begin{pmatrix} -119782285.14412466 \\ 79041959.80215667 \\ 34284867.104739465 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -18.02609487 \\ -22.19132515 \\ -9.62019085 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Марс 02.05.2028 | $\begin{pmatrix} 191279592.59435442 \\ 87243151.55805336 \\ 34878623.54605326 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -9.79496601 \\ 21.55222907 \\ 10.14952239 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Венера 16.07.2029 | $\begin{pmatrix} -106617330.07940297 \\ -14874195.835034434 \\ 67680.47154989187 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} 4.19122029 \\ -31.72390262 \\ -14.5406735 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |
| Юпитер 16.11.2034 | $\begin{pmatrix} 722333754.618259 \\ 153737446.87030372 \\ 48315888.336591184 \end{pmatrix} \text{ км}$ | $\begin{pmatrix} -2.99175894 \\ 12.25666453 \\ 5.32626542 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{\text{с}}$ |

Гиперболические избытки скоростей

Вектор гиперболического избытка скорости при старте от Земли:

$$V_{\infty}^{\text{отлет.}} \begin{pmatrix} -7.5007635 \\ -1.7554526 \\ -0.20053842 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 7.7060549 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Марсу:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} -12.149414 \\ -6.0168769 \\ -3.4256238 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 13.983775 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Марса:

$$V_{\infty}^{\text{Мар}} \begin{pmatrix} 13.95259 \\ -0.81588294 \\ 1.4974195 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 14.056411 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = -0.072636159 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Венере:

$$V_{\infty}^{-} \begin{pmatrix} 17.595708 \\ 0.96293162 \\ -5.0085373 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 18.319979 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при отлете от Венеры:

$$V_{\infty}^{\text{Вен}} \begin{pmatrix} -5.6018381 \\ -3.0021807 \\ -17.256022 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 18.389235 \frac{\text{км}}{c}$$

Разница подлетного и отлетного гиперболического избытка скорости

$$\Delta V_{\infty}^{\text{diff}} = -0.069256221 \frac{\text{км}}{c}$$

Вектор гиперболического избытка скорости при подлете к Юпитеру:

$$V_{\infty}^{\text{подлет.}} \begin{pmatrix} -6.2569916 \\ -9.1285521 \\ -1.2515387 \end{pmatrix} \frac{\text{км}}{c} = 11.137628 \frac{\text{км}}{c}$$

Параметры участка Земля – Марс

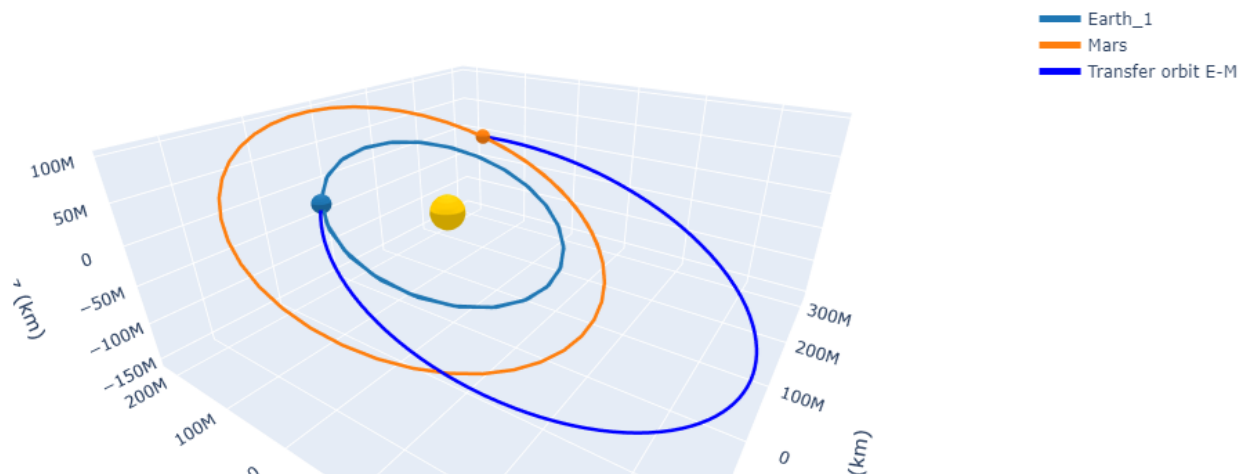


Рисунок 33 – Участок Земля – Марс

Таблица 31 – Основные характеристики участка Земля – Марс

| | | |
|-----------------------------------|---------------------|-------|
| Большая полуось | 278015214.87723863 | км |
| Фокальный параметр | 211928094.908125 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.48755557969057484 | |
| Наклонение | 0.8013450 | град. |
| Долгота восходящего узла | 144.0730744 | град. |
| Аргумент перицентра | 333.3820031 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 26.5032714 | град. |
| Угловая дальность перелета | 241.88015 | град. |
| Продолжительность участка | 809 | сут. |

Параметры участка Марс – Венера

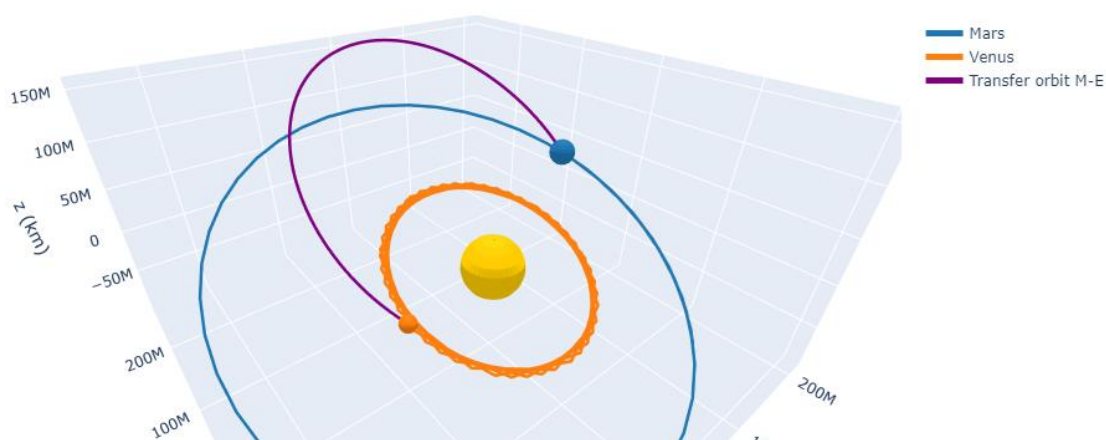


Рисунок 34 – Участок Марс – Венера

Таблица 32 – Основные характеристики участка Марс – Венера

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 200062283.68491668 | км |
| Фокальный параметр | 130786992.01086451 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.5884459396927729 | |
| Наклонение | 7.5125471 | град. |
| Долгота восходящего узла | 32.2106360 | град. |
| Аргумент перицентра | 223.5133284 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 131.0306516 | град. |
| Угловая дальность перелета | 160.98204 | град. |
| Продолжительность участка | 440 | сут. |

Параметры участка Венера – Юпитер

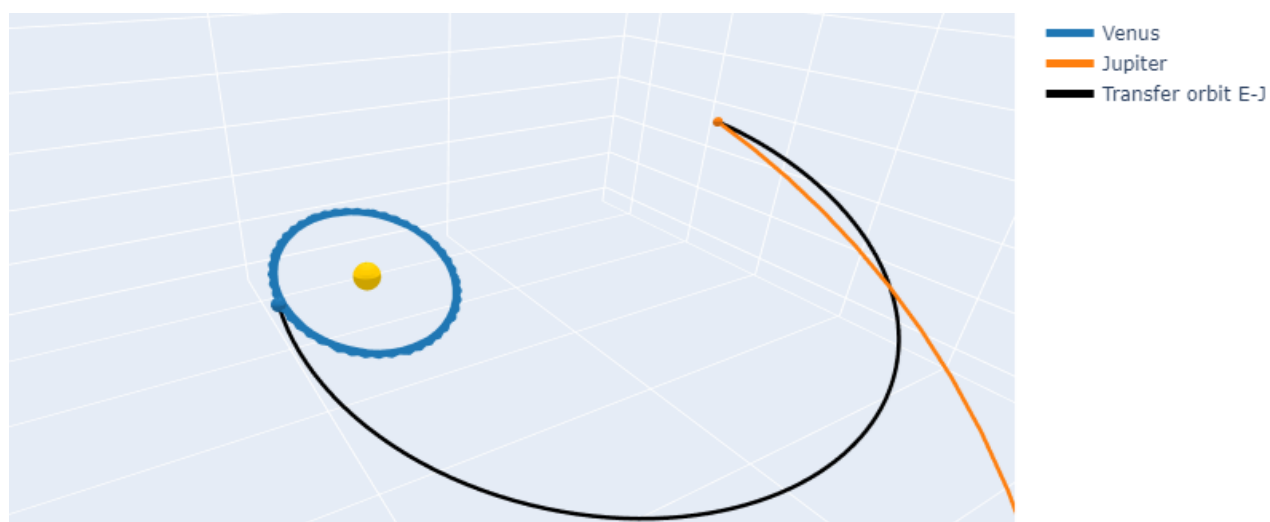


Рисунок 35 – Участок Венера – Юпитер

Таблица 33 – Основные характеристики участка Венера – Юпитер

| | | |
|-----------------------------------|--------------------|-------|
| Большая полуось | 537532428.385791 | км |
| Фокальный параметр | 190420705.59463012 | км |
| Значение эксцентриситета | 0.8035858960776914 | |
| Наклонение | 19.8537669 | град. |
| Долгота восходящего узла | 16.1729609 | град. |
| Аргумент перицентра | 153.7157959 | град. |
| Истинная аномалия начальной точки | 16.8983079 | град. |
| Угловая дальность перелета | 185.55421 | град. |
| Продолжительность участка | 1949 | сут. |

Таким образом были построены и рассчитаны 7 траекторий к Юпитеру с использованием гравитационных маневров у Венеры, Земли и Марса. Были получены все необходимые параметры миссии и их отдельных траекторий. Определены гиперболические избытки скорости при реализации гравитационного маневра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представляются траектории к Юпитеру для запуска с Земли с использованием пассивных гравитационных маневров у Венеры, Земли и Марса в период с 2025 по 2035 годам.

Сначала решается задача рационального выбора трассы и ее оптимизации для космического аппарата. Была решена проблема оптимизации траектории космического аппарата с использованием гравитационных маневров у Венеры, Земли и Марса. Процедура оптимизации удовлетворяет заданным характеристикам: она надежна, универсальна и глобальна. Надежность обеспечивается благодаря методу обрезки пространства поиска, который гарантирует, что для большинства начальных предположений, даже случайно сгенерированных, будет получено выполнимое решение. Глобальный аспект подхода достигается с помощью метода Gravity Assist Space Pruning, который исчерпывает пространство приближенных решений, генерируя начальные предположения для локального оптимизатора. Результаты показывают, что реализованный метод работает и имеет приемлемую производительность. Метод Gravity Assist Space Pruning оказалась адекватным инструментом для глобальной оптимизации. Основное ограничение было связано с вычислительными средствами; увеличение числа пролетов в последовательности примерно в два раза увеличивает и без того дорогое время вычислений. Была выявлена необходимость в эвристике, которая могла бы направлять поиск хорошего решения. Это позволило бы сэкономить много времени во время глобального поиска.

Начиная со списка комбинаций с Венерой, Землей и Марсом используются энергетические соображения, оценки времени полета и инженерные суждения во время полета до Юпитера, тем самым, определив оптимальные траектории с гравитационными маневрами.

Эффективность траекторий с гравитационными маневрами значительно варьируется в зависимости от года миссии (за исключением случаев, когда пролетным телом является только Земля) и выбором пролетных планет. Когда пролетное тело включает только Землю приводит к изменениям характеристик миссий на порядка 15% или вариации общего время миссии от нескольких месяцев до года. Для данных миссий, решения с более высоким ускорением соответствуют более высокому уровню технологий. Если принять современную технологию, то для выполнения миссий, требующих малых затрат топлива, необходимо увеличить размер космического аппарата и рассматривать различные значение время полета.

Был применен алгоритм поиска оптимальных дат для определения оптимальных низкоэнергетических гравитационных траекторий к Юпитеру с пролетами у Венеры, Земли и Мара. Нельзя утверждать, что данные глобальные оптимальные решения для каждой из траекторий являются наилучшими, но можно с уверенностью считать, что результаты в целом репрезентативны в отношении эффективности как классических, так и неклассических траекторий.

Методы поиска путей и автоматического проектирования траекторий должны быть применимы для поиска гравитационных траекторий к другим телам Солнечной системы. Можно надеется, что данные траектории к Юпитеру обеспечат разработчиков полезными ориентирами для будущих миссий к нашей крупнейшей планете. Данные результаты могут иметь смысл в качестве первых приближений для реализации непосредственно реальных миссий.

Данный программный комплекс может быть внедрен в общую систему по исследованию планет Солнечной системы. Также может быть внедрен в институты, для подробного изучения влияния гравитационного маневра для студентов. Непосредственное применение может быть рассмотрено в НИИ, занимающимися составлением траекторий по исследованию планет Солнечной системы и за ее пределами.

В планах развивать данную работу и рассматривать применение гравитационных маневров в окрестности Юпитера у его спутников. В последнее десятилетие НАСА и Европейское космическое агентство (ЕКА) исследовали несколько концепций для запуска на орбиту Европы, Каллисто, Ио, Ганимед (спутники Юпитера). Данные четыре спутника имеют довольно большой интерес для исследователей. Юпитер может стать основным кандидатом в нашей Солнечной системы для обнаружения подледных океанов и возможных бактерий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахшиян Б.Ц., Федяев К.С. Основы космической баллистики и навигации, Курс лекций. М.: ИКИ РАН, 2013. 119с.
2. Иванов Н.М., Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1986. – 296с.
3. Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астеродинамике, М.: Наука. 1976. – 864с.
4. Константинов М.С., Каменков Е.Ф., Перелыгин Б.П., Безвербый В.К. Механика космического полета. Под ред. В.П. Мишина. — М.: Машиностроение, 1989. — 408 с
5. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1990. – 448с.
6. Izzo, D.: Revisiting lambert’s problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 121(1), 1–15 (2014)
7. Izzo, D. (2006) Advances in Global Optimization for Space Trajectory Design. Proceedings of the international symposium on space technology and science, 563 стр.
8. Izzo, D., Becerra, V., Myatt, D., Nasuto, S., and Bishop, J. (2007) Search Space Pruning and Global Optimisation of Multiple Gravity Assist Spacecraft Trajectories, Journal of Global Optimization, 38, No. 2, 283–296.
9. Izzo, D. Revisiting Lambert's Problem – 16 стр., 2014
10. Casalino L., Colasurdo G., Pastore D, Optimal Low-Thrust Trajectories Using Gravity Assist, AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.22, No.5, 1999.

11. R.H. Battin. An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, стр. 423–424. AIAA Press, Reston, Va., пересмотренное издание, 1999.
12. Суханов А.А. Астродинамика, М.: ИКИ РАН, 2010. – 204с.
13. Лидов, М.Л. Курс лекций по теоретической механике. – 2-ое изд. – М.: Физматлит, 2010. – 496с.
14. Константинов М.С., Нгуен Диен Нгок. Оптимизация траектории КА с ЭРДУ к Юпитеру с гравитационным маневром в рамках задачи трех тел. «Труды МАИ». Выпуск №72. 24с.
15. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения // Космич. исслед. 2008. Т. 46. № 3. С. 224–237. (Cosmic Research. 219 стр).
16. A.V. Labunsky, O.V. Papkov, and K.G. Sukhanov. Multiple gravity assists interplanetary trajectories, стр. 33–54. CRC Press, 1998.
17. Lorenzo Casalino, Guido Colasurdo and Matteo Rosa Sentinella. Indirect optimization method for Low-Thrust interplanetary trajectories. The 30th International Electric Propulsion Conference, Florence, Italy. IEPC2007-356, 9с
18. Овчинников М.Ю., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Проектирование межпланетных полетов с пассивными гравитационными маневрами с помощью метода виртуальных траекторий. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 22. 26 с.
19. В.В. Салмин, О.Л. Старинова, В.В. Волоцуев, К.В. Петрухина, И.С. Ткаченко, М.Ю. Гоголев, А.С. Четвериков, И.Л. Матерова. Оптимизация околоземных и межпланетных миссий космических аппаратов с электрореактивными двигательными установками. «Труды МАИ». Выпуск №60. 25с.

- 20.Г.К. Боровин. Полёты в системе Юпитера с использованием гравитационных манёвров около галилеевых спутников. Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2013. № 72. 32с.
- 21.Соловьев Ц.В., Тарасов Е.В. Прогнозирование межпланетных полетов. – М.: Машиностроение, 1973. – 400с.
- 22.Соловьев В.А. Лысенко Л.Н., Любинский В.Е., Управление космическими полетами: учеб. пособие: в 2 ч. М.: МГТУ им Н.Э. Баумана, 2009. – 476.с, 426с.
- 23.Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 410с.
- 24.Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем, М.: Наука, 1971. – 424с.
- 25.Image Galleries [Электронный ресурс]. URL: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/index.html> (дата обращения 12.03.2022)
- 26.Космический комплекс «Интергелио-Зонд» [Электронный ресурс]. URL: <https://www.laspacespace.ru/projects/planets/igz/> (дата обращения 24.02.2022)
- 27.Космический комплекс «Лаплас-П1» [Электронный ресурс]. URL: <https://www.laspacespace.ru/projects/planets/laplas-p1/> (дата обращения 24.02.2022)