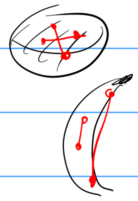
Привет 4

множество → выпуклое (convex)
→ невыпуклое (non convex)



[concave up]

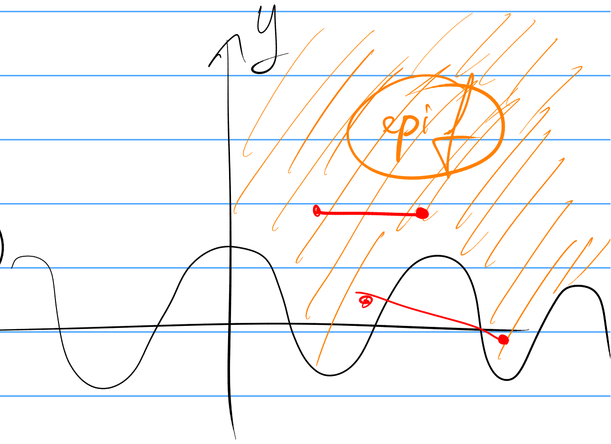
ф → convex — def — epi f — convex set.
→ non-convex — def — epi f — non convex set.

$y = x^2$

множество точек.

epi f

$y = \cos x \quad \{x > 0\}$

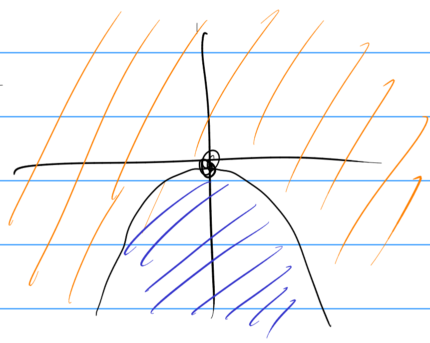


невыпуклый надграфик
невыпуклая ф-ция.

[concave down]

def f — concave $\Longleftrightarrow$ $-f$ — convex
вогнутая — выпуклая

$y = -x^2$



epi f — non convex set
epi f не выпуклое мн-во
f не явл. выпуклой
f non convex function

sub f выпуклое
convex set

f — concave function

Критерии для дважды дифф-х функций

$f(x)$ $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) \geq 0 \iff f$ - convex

$f(x)=x^2$ $f''=2$

$f''(x) \leq 0 \iff f$ - concave

$f(x)=-x^2$ $f''=-2$

$f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$
$x \in \mathbb{R}^n$

H pos. semidef $\iff f$ - convex
H neg. semidef $\iff f$ - concave

Упр.

$$f(x,y) = x^2 + 4y^4 + 6x^2y^2$$

$[(x,y) \in \mathbb{R}^2]$

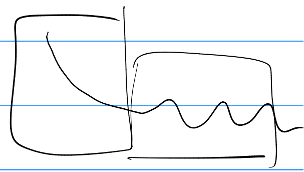
какая по выпук-сти / вогнутости?

pos. semidef

pos def.

решение

$$H = \begin{pmatrix} 2+12y^2 & 24xy \\ 24xy & 48y^2 \end{pmatrix}$$



$\boxed{\text{pos def}}$ $\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 > 0$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{pos. semidef}}$ $m_1 \geq 0$ $m_2 \geq 0$ $m_{12} \geq 0$

$2+12y^2 \geq 0$ ок

$48y^2 \geq 0$ ок

$$\begin{vmatrix} 2+12y^2 & 24xy \\ 24xy & 48y^2 \end{vmatrix} \geq 0$$

$\downarrow$ 2 $\downarrow$ 24

$$2 \cdot 24 \cdot \begin{vmatrix} 1+6y^2 & xy \\ 12xy & 2y^2 \end{vmatrix} = 48\left(2y^2 + 12y^4 - 12x^2y^2\right)$$

$x=0$, $y=10$ $y=1$, $x=10000$

на $\mathbb{R}^2$
non convex
non concave

exact differential equations

(ур-ния в полных дифференциалах)

⊛ Как составить ур-е в полном дифференц-але?

Ответ: $x^2 + y^3 x + x^3 y^5 + \sin x = C$ $\qquad F(x,y) = C$

$dF = 0$

$F'_x \cdot dx + F'_y \cdot dy = 0$

$(2x + y^3 + 3x^2 y^5 + \cos x)\,dx + (3y^2 x + 5x^3 y^4)\,dy = 0$

в xy!

/dx $\qquad \frac{dy}{dx} = y'$

завуалировать

$y' \cdot (3y^2 x + 5x^3 y^4) = -2x - y^3 - 3x^2 y^5 - \cos x$

поднапортачить сделать $\cdot x^2 y^3$

⊛ $y'(3y^5 x^3 + 5x^5 y^7) = -2x^3 y^3 - x^2 y^6 - 3x^4 y^8$

я - студент и вижу на экзамене:

$$\underbrace{(2x + y^3 + 3x^2 y^5 + \cos x)}_{A = F'_x}\,dx + \underbrace{(3y^2 x + 5x^3 y^4)}_{B = F'_y}\,dy = 0$$

$F''_{xy} = F''_{yx}$

догадка.

проверить: $A'_y \stackrel{?}{=} B'_x$?

Если это условие вып-но, то перед нами exact diff eq.

$$\underbrace{(2x + y^3 + 3x^2y^5 + \cos x)}_{A}\,dx + \underbrace{(3y^2x + 5x^3y^4)}_{B}\,dy = 0$$

$$A'_y = 3y^2 + 15x^2y^4 \qquad B'_x = 3y^2 + 15x^2y^4$$

совпали! ура!!

передо мной ур-ие в полных дифф-х.

$$F'_x = 2x + y^3 + 3x^2y^5 + \cos x$$

$$F = \int 2x + y^3 + 3x^2y^5 + \cos x \cdot dx =$$

$$F(x,y) = x^2 + y^3x + x^3y^5 + \sin x + c(y)$$

$$F'_y = 0 + \cancel{3y^2x} + \cancel{5x^3y^4} + 0 + c'(y) = \cancel{3y^2x} + \cancel{5x^3y^4}$$

$$\boxed{c'(y) = 0}$$

(могло получиться сложнее, но всё равно проще, чем исходное)

$$c(y) = C$$

Ответ: $\boxed{F(x,y) = x^2 + y^3x + x^3y^5 + \sin x + C = 0}$

$\boxed{\text{Ещё один тип ур-ий}}$

$y' = f(x, y)$ f — однородная ф-ция (точнее нулевой степени)

$$y' = \frac{x+y}{x} \qquad y' = \frac{2x-y}{y} \qquad y' = \frac{x^2+2y^2}{xy}$$

$\boxed{\text{Совет:}}$ попробуйте замену $y(x) = x \cdot z(x)$

$$y' = \frac{x+y}{x} \qquad y(x) = x \cdot z(x)$$

$$RHS = \frac{x + x \cdot z(x)}{x} = 1 + z$$

$$LHS = y' = (x \cdot z(x))' = z(x) + x \cdot z'$$

$\boxed{\text{после замены}}$

$$z + x z' = 1 + z$$

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = 1 \qquad \int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + C \rightarrow y = x \cdot (\ln|x| + C)$$

$\boxed{\text{Ещё один трюк!}}$ Посмотрите на ур-ие как на зависимость $x(y)$! Возможно будет линейное. !!

$$\boxed{y' + x^2 \cdot y = x^3} \rightarrow \boxed{\text{линейное отн-но } y' \text{ и } y}$$

$$\boxed{(x + y^3) \cdot dy + dx \cdot y^2 = 0} \rightarrow (x + y^3) + \frac{dx}{dy} \cdot y^2 = 0$$

$$\boxed{x'(y) \cdot y^2 + x = -y^3} \rightarrow \text{лин-но отн-но } x' \text{ и } x$$