

Пособие по курсу «Методы оптимальных решений», МИЭФ

Букин К.А., Демешев Б.Б.

29 августа 2014 г.

Содержание

1	Однородные функции	1
2	Оптимизация с ограничениями в виде неравенств. Условия Куна-Таккера.	2
3	Линейное программирование	3
4	Дифференциальные и разностные уравнения	4
5	Теория игр	6
6	Решения	11

1 Однородные функции

Задача **1.1.**

Find the values a and b such that the function f is homogeneous:

$$f(x, y) = 2x^{b-a}y^{b+2} + y^{a+1}x^{-3b} + y^{7b}x^{-2a}.$$

For the values a and b you have found expand the function

$$h(x) = \sqrt{1 + f(x, x)} \cdot (1 - \cos(f(x, x)))$$

as a power series up to x^4 . State the range for x where your expansion is correct. (Spring mock, 2012).

Задача 1.2.

The homogeneous function f is given by the equation

$$f(x, y) = \int_0^{xy^a} (t^3 + xt) dt.$$

Find the value of the parameter a and the degree of homogeneity of $\frac{\partial f}{\partial x}$. (Spring mock 2013).

2 Оптимизация с ограничениями в виде неравенств. Условия Куна-Таккера.

Задача 2.1.

Consider the monopolist producing two distinct goods. The cost function is given by $TC(q_1, q_2) = q_1 + kq_2$, where the constant $k \in (0; 1)$. And the demand functions are given by $q_1(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2) = (p_1 p_2)^{-3}$.

- Find the optimal production bundle for the monopolist.
- For which values of k one of the products is priced under marginal cost? (Spring mock, 2012).

Задача 2.2.

Using the Lagrange multiplier method without reducing the number of variables by substitution find the minimum of the function

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + xy + 8z^2 + 2yz$$

subject to $x + y + \frac{3}{2}z \geq \frac{6}{5}$ and $x + y + z = 1$. (Spring mock 2012).

Задача 2.3.

Use Lagrange multipliers method to solve optimization problem

$$xy \rightarrow \max$$

subject to $x \geq 0, 0 \leq y \leq 3, x + 2y \leq 8, y \geq \frac{x^2}{16} + 1$. (Exam, 2012).

Задача 2.4.

A two-product monopoly seeks to maximize its profit. The revenue follows the formula $R(x, y) = 6x - x^2 + y - y^2$. The total costs function is given by $C(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 3y$, where x and y are outputs. State the problem of the monopoly, given condition that its profit $\pi = R - C$ should always remain nonnegative. Apply the Kuhn-Tucker conditions. Use Weierstrass theorem to confirm sufficiency. (Exam, 2013).

Задача 2.5.

A price-taking firm has a total of L units of labor (the only production factor it has) to allocate to the production of two goods. These can be sold at positive prices $p_x > 0$ and $p_y > 0$, respectively. Producing x units of the first good requires αx^2 units of labor, whereas producing y units of the second good requires βy^2 units of labor, where $\alpha, \beta > 0$ are constants.

The firm seeks to maximize its revenue. Find what output levels of the two goods the firm will choose by using its endowment of labor. Confirm that you found the maximizing outputs. (Retake 2011).

Задача 2.6.

Find the global maximum of the objective function $x^2 + 4y^2 + z^2$ subject to constraints $x + y + z \leq 12, x, y, z \geq 0$. Use Kuhn-Tucker conditions. Verify maximization by applying the Weierstrass theorem or otherwise. (Exam 2009).

3 Линейное программирование

Задача 3.1.

For any real number λ , find the minimal value of the objective function $x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4$

Subject to the constraints $\lambda x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq -1$, $x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_4 \geq 5$, all choice variables are nonnegative. (Exam, 2013).

Задача 3.2.

Consider the linear programming problem with parameter β and nonnegative x_i , for all i :

$$3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 1,$$

$$\beta x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 2.$$

1. Find the optimal values of the primal variables for $\beta = 6$.
2. Find the function $\varphi(\beta)$, where $\varphi(\beta)$ is the maximum value of the objective function for fixed value of β .
3. Sketch the graph of $\varphi(\beta)$.

4 Дифференциальные и разностные уравнения

В этом разделе мы не рассматриваем упражнения по решению уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью – квазиполиномом, т.к. они разобраны в задачниках и пособиях по ДУ.

Задача 4.1.

The point elasticity of demand for a good is given by $\varepsilon = \frac{p^2}{p^2 + 4p + 3}$. Find the demand function $q(p)$ given the initial condition $q(1) = 1$. (Spring mock, 2012).

Задача 4.2.

Let $N(t)$ denote the size of population, $X(t) = \sqrt{N}$ being the total output in the economy. Consider the following model

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{X},$$

where $\dot{N} = \frac{dN}{dt}$ and α, β are some constants. Find and explore its behavior as $t \rightarrow \infty$. (Spring mock, 2013).

Задача 4.3.

Show that Chebyshev's equation $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$, where $|x| < 1$, can be reduced to equation $\ddot{y} + y = 0$ by substituting $x = \cos t$. Hence find the general solution of Chebyshev's equation. (Exam 2013).

Задача 4.4.

Find the general solution of the differential equation $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + \cos x$. (Exam 2012)

Задача 4.5.

Find the general solution of the equation $y'''' - 5y''' + 7y'' - 3y' = -4e^x$. Determine y if $y(0) = 3, y'(0) = 5, y''(0) = 14, y'''(0) = 37$. (Exam 2010)

Задача 4.6.

Solve differential equation $xy' + x^2 + xy - y = 0$. (Exam 2011)

Задача 4.7.

Find the general solution of the difference equation $y_{t+3} + y_{t+2} - 2y_t = \frac{1+4^t}{2^t}$. (Exam 2010)

Задача 4.8.

Solve the system of ODE

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$$

(Exam 2011)

Задача 4.9.

Solve the initial-value problem for the system of difference equations

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + y_t, \\ y_{t+1} = 3x_t - y_t - 5, \end{cases}$$

where $x_0 = y_0 = 0$.

Задача 4.10.

Consider the system of difference equations

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - y_t + 6, \\ y_{t+1} = 2x_t - y_t + 3 \end{cases}$$

1. Solve the system of difference equations.
2. (b) Explore the stability of its solutions.

(Exam 2014)

5 Теория игр

Задача 5.1.

Find all pure and mixed Nash equilibria in the following bimatrix game:

	D	E	F
A	3;4	1;3	1;0
B	2;7	3;6	0;3
C	0;2	2;1	5;6

Задача 5.2.

Two players play a version of Rock-Paper-Scissor game. Paper beats Rock, Rock beats Scissors, Scissors beats Paper. The two players simultaneously make their choice. The first player can choose any object. The second player can choose Rock or Paper. The winner receives 1 rouble from the loser. In case of a draw the wealth of a player does not change.

1. Construct the payoff matrix of the game.

2. Find all pure and mixed Nash equilibria

Задача 5.3.

Two players are trying to bribe the judge. The possible amount of bribe is any real number between 0 and 1 million roubles. The player who gives the biggest bribe is announced as the winner of the affair by the judge. The winner receives 1 million roubles. The loser gets nothing. Obviously bribes are not returned by the judge. In the case of equal bribes each player gets nothing.

1. Are there any pure Nash equilibria in this game?
2. Find at least one mixed Nash equilibrium.

Задача 5.4.

A man has two sons. When he dies, the value of his estate after tax is \$1000. In his will it states that the sons must specify the sum of money s_i that they are willing to accept. If $s_1 + 2s_2 \leq 1000$, then each gets the sum he asked for and the rest goes to the cats' shelter. If $s_1 + 2s_2 > 1000$, then neither of them gets any money and the entire sum goes to the cats' shelter. Assume that the sons only care about the money they will inherit and they ask for the whole dollars. Find the pure strategies Nash equilibria of this game.

Задача 5.5.

There is an auction of a painting with two players. The value of the painting for the first player is a random variable v_1 , for the second player — v_2 . The random variables v_1 and v_2 are independent and uniformly distributed from 0 to 1 million dollars. Each player makes the bid b_i knowing only his own value of the painting. The player who makes the highest bid gets the painting and pays the arithmetic mean of the two bids.

Find a Nash equilibrium where each player uses linear strategy of the form $b_i = k \cdot v_i$.

Задача 5.6.

Two players have found The Magic Box. The Box has two holes. Simultaneously each of the two players may put any amount of money from 0 to 100 euros into his hole. Then the Magic Box will multiply the total sum by $a > 1$, divide the resulting sum into two equal parts and give them back to the players. The value of a is known. Find all the pure

and mixed Nash Equilibria of this game for all values of the parameter a .

Задача 5.7.

Три игрока одновременно называют одно из двух слов: арбуз или баклажан. Если все трое называют арбуз, то выигрыш каждого равен 10, если все трое называют баклажан, то выигрыш каждого равен 5. В противном случае их выигрыш равен нулю.

1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях
2. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях
3. Сравните найденную в смешанном равновесии Нэша вероятность выбрать арбуз с $1/2$. Объясните данное неравенство

Задача 5.8.

До весны 2007 года в Швеции существовала необычная лотерея «Limbo». Правила выглядят следующим образом. Вы можете выбрать любое натуральное число. Победителем объявляется тот, кто назвал самое маленькое число, никем более не названное. Например, если игроки называли числа 1, 3, 1, 2, 4, то победителем будет тот, кто назвал число 2. Если наименьшего никем более не названного нет, то приз остается у организаторов.

1. Опишите все равновесия Нэша в чистых стратегиях для n игроков
2. Найдите симметрическое равновесие для трех игроков (т.е. равновесие, в котором все игроки используют одинаковые стратегии). Подсказка: какие есть известные законы распределения на \mathbb{N} ?
3. Предложите версию, почему была закрыта эта лотерея?

Задача 5.9.

Три игрока одновременно выбирают одно число из множества $\{1, 2, 3\}$. Если все три игрока выбрали одно и то же число, то выигрыш каждого равен нулю. В ином случае игрок выбравший наименьшее нечетное число получает 2 рубля, а остальные двое — платят по одному рублю. Например, если игроки называли числа 1, 3 и 1, то деньги получит игрок назвавший тройку.

1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях

2. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Задача 5.10.

Парламент поделен на две партии: республиканцы и демократы. Для принятия реформы необходима ее поддержка обеими партиями. Реформа безразлична обеим партиям. Warren Buffet предложил, чтобы какой-нибудь миллиардер выступил со следующим обещанием: Если реформа не будет принята, то партия, поддержавшая реформу во время голосования получит 1000000000\$ (Один миллиард долларов). Партии голосуют одновременно (можно проголосовать только за или против реформы). Каждая партия хотела бы получить деньги и не хотела бы, чтобы деньги достались конкурентам. Партии верят заявлению миллиардера.

1. Представьте игру в нормальной форме

2. Найдите равновесие Нэша

Задача 5.11.

Два тигра заметили двух антилоп. Маленькую, весом в один условный килограмм, и большую, весом в $a > 1$ условных килограммов. Они одновременно принимают решение, за какой антилопой погнаться. Тигры всегда догоняют антилоп. *Тигр: Если хотят, то конечно.* Если тигры выберут одну антилопу, то они поделят ее поровну.

1. Запишите игру в матричной форме;

2. Найдите все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях в зависимости от a

Задача 5.12.

Человеку плохо. Рядом на остановке стоит n человек. Каждый из них может либо вызвать скорую с помощью мобильного, либо дожидаться троллейбуса и уехать. Если никто не вызовет скорую, то человек умрет. Если человек умирает, то полезность каждого равна 0, если человек остается в живых, то полезность каждого равна 1. Издержки телефонного звонка равны $c \in (0; 1)$.

1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях;

2. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях (все игроки используют одну и ту же стратегию);

3. Как зависит от n вероятность оказания помощи отдельным прохожим?
4. Как зависит от n вероятность получения помощи? К чему стремиться эта вероятность при большом n ?

Задача 5.13.

Два человека пришли в кабак. У одного из них 10 золотых, у второго — 6 золотых. Каждый может тратить деньги на выпивку или на музыку. Музыка является общественным благом — ее слышат все. Выпивка — частным. Полезности равны $u_1 = (m_1 + m_2)d_1$ и $u_2 = (m_1 + m_2)d_2$, где m_i и d_i — расходы i -го человека на музыку и выпивку. Предположим, что деньги бесконечно делимы.

1. Найдите равновесие Нэша
2. Что изменится в случае, если у второго 2 золотых?
3. Являются ли эти равновесия оптимальными по Парето?

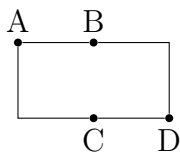
Задача 5.14.

Поиск Истины. Собрались n Мудрых тараканов и решили одновременно искать Истину. Каждый может добросовестно искать или отдыхать. Если Мудрый таракан ищет Истину, то он находит ее независимо от других с вероятностью a . Если Истина будет найдена хотя бы одним Мудрым тараканом, то он расскажет ее всем, и все получают полезность $+1$. Поиск Истины связан с издержками $c \in (0; a)$.

1. Будет ли одинокий Мудрый таракан искать истину ($n = 1$)?
2. Найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях для произвольного n
3. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях для произвольного n
4. Как зависит от n доля Мудрых тараканов ищущих Истину?
5. Как зависит от n вероятность того, что Истина будет найдена?

Задача 5.15.

Из пункта A в пункт D можно попасть двумя путями — через B или через C . Если по дороге AB едет x машин, то время в пути каждой из них будет равно $f_{AB}(x) = x + 32$. Для других отрезков пути функции равны: $f_{BD}(x) = 5x + 1$, $f_{CD}(x) = x + 32$ и $f_{AC}(x) = 5x + 1$. Каждое утро из города A в город D едет 6 машин.



1. Сколько машин и по какой дороге едет в равновесии Нэша? Сколько им требуется времени, чтобы добраться из A в D ?
2. Как изменятся ответы, если между городами B и C построен удобный мост, такой что $f_{BC} = 0$?

6 Решения

1.1. Функция $f(x, y)$ называется однородной степени однородности m , если для любого $t > 0$ и для любых x, y из области определения функции f , выполнено $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$. Функция, заданная формулой в условии задачи является многочленом от двух переменных, состоящим из трех слагаемых. Каждое из слагаемых – однородная функция автоматически, но для того чтобы сумма была однородной, необходимо и достаточно, чтобы однородность всех трех слагаемых была одной степени, откуда получаем систему уравнений

$$b - a + b + 2 = a + 1 - 3b = 7b - 2a,$$

решением, которой является $a = 3, b = 1$. Тогда $f(x, x) = 4x$. Разложим по формуле Тейлора $1 - \cos(4x)$ до члена x^4 . Мы получим $1 - \cos(4x) = 8x^2 - \frac{32}{3}x^4 + \dots$

так как это разложение начинается с x^2 , то нам достаточно разложить $\sqrt{1 + 4x}$ до члена с x^2 . Окончательно получаем $\sqrt{1 + 4x} \cdot (1 - \cos(4x)) = (1 + 2x - 2x^2 + \dots)(8x^2 - \frac{32}{3}x^4 + \dots) = 8x^2 + 16x^3 - \frac{80}{2}x^4 + \dots$, или, используя запись остатка в форме Пеано $h(x) = 8x^2 + 16x^3 - \frac{80}{2}x^4 + o(x^4)$.

1.2. Функция $f(x, y)$ находится интегрированием $f = \frac{1}{4}x^4y^{4a} + \frac{1}{2}x^3y^{2a}$. Оба слагаемых должны иметь одинаковую однородность, т.е. $4 + 4a = 3 + 2a$, откуда $a = -\frac{1}{2}$. Тогда степень однородности функции $f(x, y)$ равна 2. Однородность любой из ее

первых производных будет на единицу меньше, т.е. 1.

2.1. Запишем задачу монополиста по максимизации прибыли:

$$\pi = \frac{p_1 + p_2 - 1 - k}{(p_1 p_2)^3} \rightarrow \max. \text{ Прибыль здесь максимизируется по ценам } p_1, p_2 > 0.$$

Выписывая условия первого порядка $\frac{\partial \pi}{\partial p_1} = 0$ и $\frac{\partial \pi}{\partial p_2} = 0$, и решая систему, получаем значения равновесных цен $p_1 = p_2 = \frac{3}{5}(1 + k)$. Затем вычисляем производные второго порядка π_{11} , π_{22} и $\pi_{12} = \pi_{21}$ при $p_1 = p_2 = \frac{3}{5}(1 + k)$. Чтобы облегчить вычисление этих производных, лучше всего представить прибыль в виде суммы трех дробей

$\pi = \frac{1}{p_1^2 p_2^3} + \frac{1}{p_1^3 p_2^2} - \frac{1+k}{p_1^3 p_2^3}$. Гессиан при равновесных ценах является отрицательно определенным, что означает выполнение достаточного условия максимизации. Чтобы ответить на второй вопрос задачи следует рассмотреть два двойных неравенства

(1) $1 \leq \frac{3}{5}(1 + k) < k$ и (2) $k \leq \frac{3}{5}(1 + k) < 1$. Решением второго из них является пустое множество, а решением первого - $k > \frac{3}{2}$. Окончательный ответ: $k > \frac{3}{2}$.

2.2. Проверка NDCQ тривиальна, т.к. ранг матрицы Якоби, составленной на основе ограничений, является полным, т.е. равняется 2. В самом деле, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Преобразуем, ограничения задачи к более простому виду, однако, как предписано условием, не уменьшая число неизвестных:

$$z \geq \frac{2}{5}, x + y + z = 1.$$

Составим функцию Лагранжа задачи. $L = 2x^2 + 4y^2 + xy + 8z^2 + 2yz + \lambda(1 - x - y - z) + \mu(\frac{2}{5} - z)$. Тогда условия первого порядка будут выглядеть

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + y - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8y + x + 2z - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 16z + 2y - \lambda - \mu = 0,$$

$$\mu \geq 0, \mu(2/5 - z) = 0, z \geq 2/5, x + y + z = 1.$$

Рассмотрим 2 случая: 1) пусть ограничение в виде неравенства не активно, т.е. $z > \frac{2}{5}$. Тогда $\mu = 0$, и систему линейных уравнений относительно неизвестных x, y, z, λ можно решить, например, методом Гаусса. Вычисления дают $z = 1/7$, значение, не удовле-

творяющее ограничению. Во втором случае полагаем $z = \frac{2}{5}$. Тогда решив систему относительно x, y, λ, μ , получаем значения $x = 1/2, y = 1/10$. Осталось проверить, будет ли точка $(1/2, 1/10, 2/5)$ решением задачи. Для проверки достаточного условия минимизации, поступим таким образом – проверим, что функция $f(x, y, 2/5)$ является вогнутой для всех x, y . Ее гессиан равен $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, а эта матрица положительно определенная. Таким образом, она является также вогнутой на выпуклом множестве, заданном ограничением $x + y + 2/5 = 1$. Однако, критическая точка вогнутой функции является точкой минимума. Соответственно, минимальное значение функции, заданной на множестве, определенном ограничениями, равняется $\frac{39}{25}$.

2.3. Проверка NDCQ в этой задаче не вызывает трудностей. Градиенты ограничений на границе допустимого множества нигде не обращаются в ноль, а если составить якобиан, порожденный двумя ограничениями, то его равен 2. В этой задаче, всего с учетом неотрицательности переменных, 5 ограничений в виде неравенств. При использовании метода Куна-Таккера нам понадобятся только 3 множителя Лагранжа (вместо пяти). Кроме того, поскольку мы решаем задачу на максимум, то нулевые значения переменных в качестве критических точек не годятся (иначе данная целевая функция обратится в ноль). С учетом сказанного, мы введем функцию Лагранжа $L = xy + \lambda(3 - y) + \mu(y - \frac{x^2}{16} - 1) + \gamma(8 - x - 2y)$. Множество, на котором ищется максимум, является компактом, заданным неравенствами $\{x \geq 0, 0 \leq y \leq 3, x + 2y \leq 8, y \geq \frac{x^2}{16} + 1\}$. Легко видеть, что функция принимает максимальное значение только на границе этой области, т.к. внутри ее градиент всюду отличен от нуля. Тогда разобьем границу на три участка: (1) $\{y = 3, 0 \leq x \leq 2\}$, (2) $\{x + 2y = 8, 2 \leq x \leq 4\}$ и (3) $\{y = \frac{x^2}{16}, 0 \leq x \leq 4\}$. Участки (1) и (2) имеют общую точку $(2, 3)$, а участки (2) и (3) общую точку $(4, 2)$. Выпишем условия Куна-Таккера с учетом положительности x и y :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \mu \frac{x}{8} - \gamma = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda + \mu - 2\gamma = 0,$$

$$\gamma, \mu, \lambda \geq 0, \mu(y - \frac{x^2}{16} - 1) = 0, \gamma(8 - x - 2y) = 0, \lambda(3 - y) = 0.$$

$$x \geq 0, 0 \leq y \leq 3, x + 2y \leq 8, y \geq \frac{x^2}{16} + 1.$$

Будем искать критические точки лагранжиана на каждом из участков по отдельности. На участке (1) $\mu = \gamma = 0$, поэтому мы получим $y = 0$, что не может являться решением (см. выше). Аналогично, на участке (3) $\gamma = \lambda = 0$, откуда $x + \mu = 0$, что также не дает решений. Остался участок (2). Получим систему

$$y - \gamma = 0,$$

$$x - 2\gamma = 0,$$

$$x + 2y = 8.$$

В качестве решения получаем точку $(4, 2)$. Нами, правда, не исследована еще точка $(2, 3)$, лежащая на границе первого и второго участков. Но она не может быть критической точкой лагранжиана, т.к. иначе мы получили бы $\lambda = -4$ (проверьте самостоятельно). По теореме Вейерштрасса данная функция принимает наибольшее значение на данном множестве, стало быть, найденная точка является решением задачи (точка глобального максимума). В этой точке функция принимает значение, равное 8.

2.4. Сформулируем задачу монополиста.

$$\pi = 2x - 2y - 2x^2 - 2y^2 \rightarrow \max$$

при условии, что $x, y \geq 0, 2x - 2y - 2x^2 - 2y^2 \geq 0$.

NDCQ выполнено, т.к. градиент ограничения $(2 - 4x, -2 - 4y)$ обращается в 0 при отрицательном значении y . Выпишем лагранжиан задачи $L = (1 - \lambda)(2x - 2y - 2x^2 - 2y^2)$. Условия Куна-Таккера таковы

$$(1 - \lambda)(2 - 4x) \leq 0, x(1 - \lambda)(2 - 4x) = 0,$$

$$(1 - \lambda)(-2 - 4y) \leq 0, y(1 - \lambda)(-2 - 4y) = 0, \lambda \geq 0, \lambda(2x - 2y - 2x^2 - 2y^2) = 0,$$

кроме того, должны быть выполнены ограничения $x, y \geq 0, 2x - 2y - 2x^2 - 2y^2 \geq 0$.

Решением этой системы является комбинация выпусков $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$. Заметим, что в этом случае $\lambda = 0$. Множество, заданное неравенствами является компактом (представляет собою сегмент круга), поэтому применение теоремы Вейерштрасса возможно и найденная критическая точка является точкой максимума.

2.5. Сначала формализуем задачу
$$\begin{cases} p_x x + p_y y \rightarrow \max, \\ \alpha x^2 + \beta y^2 \leq L, \\ x, y \geq 0. \end{cases}$$

Будем решать методом Куна-Таккера. Выпишем лагранжиан Куна-Таккера $\Lambda = p_x x + p_y y + \lambda(L - \alpha x^2 - \beta y^2)$. Условия первого порядка (необходимые) будут таковы

$$(\text{??}) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = p_x - 2\lambda\alpha x \leq 0 \text{ и } x(p_x - 2\lambda\alpha x) = 0,$$

$$(\text{??}) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = p_y - 2\lambda\beta y \leq 0 \text{ и } y(p_y - 2\lambda\beta y) = 0,$$

$$(\text{??}) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = L - \alpha x^2 - \beta y^2 \geq 0 \text{ и } \lambda(L - \alpha x^2 - \beta y^2) = 0,$$

$$\lambda, x, y \geq 0. \quad (1)$$

Решение этой задачи может быть разбито на перебор нескольких случаев.

Случай 1. Сначала мы проверим, что при оптимальных значениях x и y условие $\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = L - \alpha x^2 - \beta y^2 \geq 0$ выполняется как равенство, т.е. является активным. С экономической точки зрения это будет означать, что фирма использует весь свой запас труда. В самом деле, если предположить противное, то в силу условия дополняющей нежесткости $\lambda(L - \alpha x^2 - \beta y^2) = 0$ значение λ будет равно нулю, но это невозможно, т.к. из (??) и (??) будет следовать неположительность цен на продукцию. Следовательно, справедливо (??) $L - \alpha x^2 - \beta y^2 = 0$.

Случай 2. В этой части решения будем искать внутреннее решение, т.е. такое, что $x, y > 0$.

При положительных x и y , из условий дополняющей нежесткости (??) и (??) будет следовать система уравнений

(??) $p_x - 2\lambda\alpha x = 0$ и $p_y - 2\lambda\beta y = 0$. Дополнив их уравнением (??), мы получим систему, решением которой являются

$$x^* = p_x \sqrt{\frac{L}{\alpha p_x^2 + \frac{\alpha^2 p_y^2}{\beta}}}, y^* = p_y \sqrt{\frac{L}{\frac{\beta^2 p_x^2}{\alpha} + \beta p_y^2}}. \quad (2)$$

Случай 3. Осталось рассмотреть возможность угловых решений, т.е. таких, что или $x = 0$, или $y = 0$ (одновременно x и y не могут обращаться в 0). Очевидно, угловых решений в данной задаче быть не может, т.к. иначе бы одна из цен стала бы неположительной.

Почему же найденная критическая точка (2) является точкой максимума? Обосновать это проще всего, опираясь на теорему Вейерштрасса о достижении функцией, непрерывной на компакте, своего наибольшего и наименьшего значений. Очевидно, наименьшее значение выручки равняется нулю, а наибольшее достигается в единственной критической точке. То, что множество допустимых значений является компактом, легко следует из того, что неравенства, задающие его, являются нестрогими, кроме того, геометрически на декартовой плоскости граница этого множества представляет собой четверть эллипса и два отрезка координатных осей, т.е. допустимое множество ограничено.

2.6. Исследование на глобальный максимум мы проводим по той же схеме, что и на локальный максимум. Отличие будет состоять в том, что после нахождения всех критических точек, нам нужно будет вычислить значения целевой функции во всех этих точках, и выбрать точку, где функция принимает самое большое значение.

Метод решения Куна-Таккера предполагает формирование лагранжиана в виде $L = x^2 + 4y^2 + z^2 + \lambda(12 - x - y - z)$. Тогда условия Куна-Таккера могут быть выписаны

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda \leq 0, x(2x - \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8y - \lambda \leq 0, y(8y - \lambda) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda \leq 0, z(2z - \lambda) = 0,$$

$$x + y + z \leq 12, x, y, z \geq 0 \text{ и } \lambda \geq 0.$$

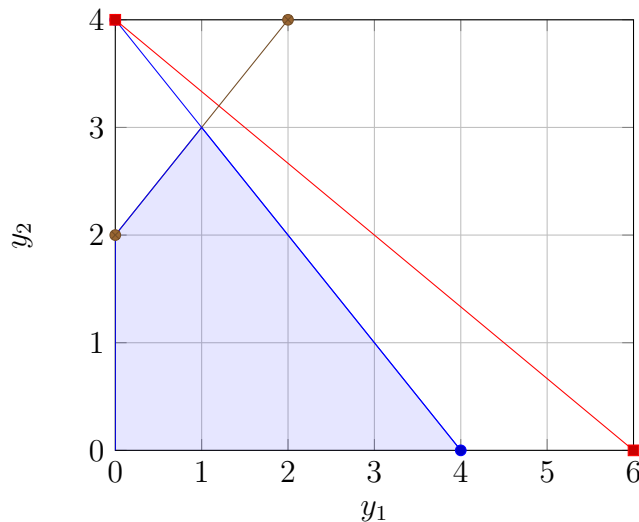
Перебирая разные случаи, как и при решении задачи 2.5, мы приходим к следующим выводам: система уравнений и неравенств, рассмотренная выше, имеет единственное внутреннее решение $x^* = z^* = \frac{16}{3}, y^* = \frac{4}{3}$; остальные 6 критических точек лежат либо в одной из координатных плоскостей (как, например, $x^* = 0, y^* = \frac{12}{5}, z^* = \frac{48}{5}$), либо на одной из координатных осей (как, например, $x^* = 0, y^* = 12, z^* = 0$).

Самое большое значение функция принимает в угловой точке с координатами $x^* = 0, y^* = 12, z^* = 0$, и это значение равно 576.

3.1. Сформулируем двойственную задачу. Матрица ограничений исходной задачи имеет вид $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. В двойственной задаче будет максимизироваться функция $-y_1 + 5y_2$ по неотрицательным двойственным переменным, удовлетворяющим

ограничениям, записанным в матричной форме $A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Изобразим допустимое множество на плоскости переменных (y_1, y_2) (см. рисунок), пока без учета неравенства $\lambda y_1 + y_2 \leq 1$.



Уравнение $\lambda y_1 + y_2 = 1$ при варьировании параметра λ определяет пучок прямых проходящих через точку $(0, 1)$. Без учета этого уравнения (неравенства из системы ограничений) допустимое множество представляет собою четырехугольник, заданный

неравенствами $D = \{y_1, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 \leq 4, y_2 \leq 2 + y_1\}$. В зависимости от знака λ результирующим допустимым множеством будет являться либо часть множества D , лежащая над прямой $\lambda y_1 + y_2 = 1$, или же под нею. Чтобы найти максимальное значение двойственной целевой функции, необходимо рассмотреть следующие диапазоны значений параметра λ : (1) $-\infty < \lambda \leq -2$, (2) $-2 < \lambda \leq 1/5$, (3) $\lambda > 1/5$. Целевая функция принимает равные значения в точках прямой $-y_1 + 5y_2 = C$, тем самым, выбирая наибольшее возможное значение C , мы сдвигаем посредством параллельного переноса прямую $y_2 = \frac{1}{5}y_1$, до тех пор, пока она имеет хотя бы одну общую точку с допустимым множеством. При значениях λ из первого диапазона, максимум целевой функции достигается в вершине четырехугольника D , а именно в точке $(1, 3)$. Тогда минимум целевой функции прямой (исходной) задачи равен 14. При росте значения λ , прямые из пучка, заданного $\lambda y_1 + y_2 = 1$ поворачиваются вокруг общей вершины по часовой стрелке. В диапазоне (2) максимум достигается в точке пересечения прямых $\lambda y_1 + y_2 = 1$ и $y_1 + y_2 = 4$. Тогда оптимальное значение равно $\frac{2-20\lambda}{1-\lambda}$, т.к. оно вычисляется в $(\frac{3}{1-\lambda}, \frac{1-4\lambda}{1-\lambda})$. Наконец, для всех остальных значений λ максимум достигается в $(0, 1)$. Оно равно 5. По теореме двойственности, все найденные максимальные значения функции в двойственной задаче совпадают с минимальными значениями функции прямой задачи.

3.2. Сначала выпишем исходную задачу в матричной форме

$$3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \rightarrow \max,$$

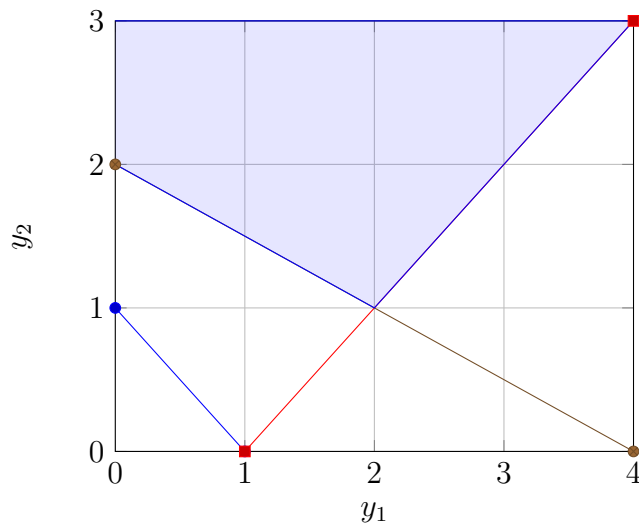
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ \beta & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_i \geq 0.$$

Двойственная задача будет выглядеть следующим образом

$$y_1 + 2y_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ и } y_1, y_2 \geq 0.$$

Задачу лучше решать в таком порядке: изобразить допустимое множество на плоскости переменных y_1, y_2 для всех возможных значений параметра β (может оказаться так, что для некоторых значений этого параметра допустимое множество окажется пустым), а затем найти минимальное значение двойственной целевой функции на этом множестве, а потом, зафиксировав $\beta = 6$, определить значения исходных переменных x_i , при которых достигается это минимальное значение.



При нахождении допустимого множества, как легко можно увидеть, ограничение $y_1 + y_2 \geq 1$ является несущественным, т.е. не влияющим на окончательный вид допустимого множества. Фактически множество представляет собой часть первого квадранта, граница которого является отрезками прямых $y_1 + \beta y_2 = 3$, $y_2 = y_1 - 1$, $y_1 + 2y_2 = 4$. При варьировании значения β , первая из указанных прямых поворачивается вокруг точки $(3, 0)$. На рисунке проще сначала изобразить прямые, задаваемые уравнениями $y_2 = y_1 - 1$ и $y_1 + 2y_2 = 4$. Они пересекаются в точке $A(2, 1)$. Таким образом, если, предположим, прямая с уравнением $y_1 + \beta y_2 = 3$ пройдет ниже точки A , то для этих значений параметра минимум функции будет достигаться в точке A и тогда он равняется 4. Очевидно, что такое прохождение прямой $y_1 + \beta y_2 = 3$

соответствует значениям $\beta \geq 1$, ввиду того, что при $\beta = 1$ прямая $y_1 + \beta y_2 = 3$ пройдет через точку A , а при больших значениях β , эта прямая будет проходить ниже.

Теперь изучим двойственную задачу при $0 < \beta < 1$. В этом случае допустимое множество будет ограничено снизу прямой $y_1 + \beta y_2 = 3$, и нам понадобится точка пересечения этой прямой с $y_2 = y_1 - 1$, которую мы обозначим B . Ее координаты $\left(\frac{2}{\beta+1} + 1, \frac{2}{\beta+1}\right)$. Искомое значение $\varphi(\beta)$ составит $\varphi(\beta) = \frac{6}{\beta+1} + 1$. Интересно, что найденное значение $\varphi(\beta)$ останется верным при $\beta = 0$ (при этом значении параметра прямая будет вертикальной), а также и при некоторых отрицательных значениях β . Легко увидеть, что $\varphi(\beta) = \frac{6}{\beta+1} + 1$ также и для значений $-1 < \beta < 0$. При приближении значения β к -1 , точка B удаляется в бесконечность, что вполне согласуется с формулой $\varphi(\beta) = \frac{6}{\beta+1} + 1$. Наконец, при $\beta \leq -1$ допустимое множество вырождается в пустое, и $\varphi(\beta)$ не существует.

Окончательно,

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} +\infty, \beta \leq -1 \\ \frac{6}{\beta+1} + 1, -1 < \beta \leq 1 \\ 4, \beta > 1 \end{cases}$$

Осталось ответить на вопрос пункта а). Минимум двойственной функции достигается в точке A . В этой внутренней точке только два неравенства из четырех являются активными, а именно, $y_2 = y_1 - 1$ и $y_1 + 2y_2 = 4$. Так как $y_1^*, y_2^* > 0$, то, согласно первой теоремы двойственности, ограничения в первичной задаче являются активными, т.е. выполняются как равенства. Напротив, первые два ограничения двойственной задачи являются неактивными, что говорит о том, что $x_1^* = x_2^* = 0$. Осталось найти x_3^* и x_4^* из решения системы уравнений $-x_3 + x_4 = 1$ и $x_3 + 2x_4 = 2$, откуда $x_3^* = 0$, $x_4^* = 1$.

Проверим ответ пункта а). Поставим координаты найденной точки в исходную целевую функцию. Получим найденное ранее число 4.

В этом разделе мы не рассматриваем упражнения по решению уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью – квазиполиномом, т.к. они разобраны

в задачниках и пособиях по ДУ.

4.1. В условии задачи эластичность положительна, поэтому воспользуемся формулой эластичности с учетом знака $\varepsilon = -\frac{dq}{dp} \frac{p}{q}$. Нам нужно решить задачу Коши, проинтегрировав уравнение первого порядка с начальным значением.

$$-\frac{dq}{dp} \frac{p}{q} = \frac{p^2}{p^2 + 4p + 3}, q(1) = 1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными $-\int \frac{dq}{q} = \int \frac{p dp}{p^2 + 4p + 3}$. Представляя дробь $\frac{p}{p^2 + 4p + 3}$ в виде суммы элементарных дробей $\frac{p}{p^2 + 4p + 3} = \frac{-1/2}{p+1} + \frac{3/2}{p+3}$, интегрируем, оставляя константу интегрирования в виде множителя $q(p) = C \frac{\sqrt{p+1}}{(p+3)^{3/2}}$. Начальное условие позволяет определить константу $C = 4\sqrt{2}$. Окончательно, $q(p) = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{p+1}}{(p+3)^{3/2}}$.

4.2. Преобразуем уравнение к виду $\frac{dN}{N(\alpha - \beta\sqrt{N})} = dt$, т.е. переменные разделились. Введя замену переменной $x = \sqrt{N}$, можем проинтегрировать левую часть уравнения, тогда

$\frac{2}{\alpha} \ln \frac{\sqrt{N}}{\alpha - \beta\sqrt{N}} = t + C$, где C константа интегрирования. После ряда алгебраических операций получаем решение уравнения $N(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta + \gamma \exp(-\frac{\alpha}{2}t)} \right)^2$, где γ константа, которую можно было бы определить, зная $N(0)$. Но в условии это значение не задано, поэтому оставим формулу как есть. При стремлении t к бесконечности численность населения $N(t)$ стремится к $\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2$, т.е. к конечному пределу.

4.3. Из замены $x = \cos t$ следует, что $1 - x^2 = \sin^2 t$, $\dot{y} = y'(-\sin t)$, $\ddot{y} = y'(-\cos t) + y'' \sin^2 t$.

Внимательно посмотрев на уравнение замечаем, что оно имеет вид $\ddot{y} + y = 0$.

Находим корни характеристического уравнения $\lambda = \pm i$. Отсюда общее решение, как функция от t , имеет вид

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

В данном случае $t = \pm \arccos x + 2\pi$. После подстановки получаем:

$$y(x) = C_1 \cos(\arccos x) + C_2 \sin(\arccos x) = C_1 x + C_2 \sqrt{1 - x^2}$$

4.4. Составим характеристическое уравнение для однородного уравнения $y'' + 2y' + y = 0$. Оно имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ и имеет единственный корень $\lambda = -1$ кратности 2. Тогда общее решение однородного уравнения определяется формулой $\tilde{y}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$, где C_1 и C_2 произвольные вещественные константы.

Правая часть ДУ является квазимногочленом. При этом первое из слагаемых, входящих в правую часть, содержит e^{-x} , что говорит о том, что при выписывании частного решения неоднородного уравнения мы имеем дело с так называемым «резонансным» случаем. Если бы «резонансного» случая не было, то кандидатом на частное решение была бы функция $y_1(x) = (Ax + B)e^{-x}$, при этом A, B - произвольные константы. Т.к. $\lambda = -1$ является корнем характеристического уравнения кратности 2, то выражение для $y_1(x)$ нужно умножить на x^2 , т.е., пользуясь методом неопределенных коэффициентов, нам нужно искать константы A, B , подставляя в уравнение $y'' + 2y' + y = x e^{-x}$ функцию $(Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$, и после сокращения общего множителя e^{-x} в этом уравнении, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x . После подстановки выражения с неопределенными коэффициентами в уравнение, приведения подобных членов, и сокращения экспоненты, мы получаем выражение $Ax + 2B = x$, откуда $A = \frac{1}{6}$ и $B = 0$. Восстановим в правой части исходного уравнения $\cos x$, убрав $x e^{-x}$. Этот случай не является «резонансным», поэтому, пользуясь, как и прежде, методом неопределенных коэффициентов, будем искать решение в виде $A \sin x + B \cos x$, подставляя это выражение в уравнение $y'' + 2y' + y = \cos x$, и приравнивая затем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$. Находим $A = \frac{1}{2}$ и $B = 0$.

Выписываем окончательный ответ $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{x^3}{6} e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$.

4.5. Корни характеристического уравнения $\lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 - 3\lambda = 0$ могут быть найдены следующим образом: после тривиального корня $\lambda_1 = 0$, следующий корень

уже кубического уравнения $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$, находится подстановкой одного из делителей свободного члена, обычно эту проверку начинают с $\lambda_2 = 1$. Убедившись, что это корень уравнения, и поделив кубическое уравнение на $\lambda - 1$, получаем в качестве делимого квадратный трехчлен $\lambda^2 - 4\lambda + 3$. Корнями квадратного уравнения являются $\lambda_3 = 1, \lambda_4 = 3$. Исходя из найденных корней, выписываем решение однородного уравнения $\tilde{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 + C_4 e^{3x}$. Здесь мы сменили нумерацию корней и учли, что $\lambda = 1$ является корнем кратности 2. При подборе частного решения, учитываем, что имеем дело с «резонансным» случаем, т.к. правая часть уравнения содержит e^x . Тогда кандидат на частное решение – квазимногочлен $Ax^2 e^x$ (из-за кратности корня $\lambda = 1$ умножили на x^2). Подставляем $Ax^2 e^x$ в исходное уравнение, приводим подобные члены, сокращаем на экспоненту, и окончательно приходим к уравнению $-4A = -4$, откуда $A = 1$. Общее решение уравнения имеет вид (??) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 + C_4 e^{3x} + e^x$. Решим задачу Коши. Для этого формула (??) должна быть продифференцирована в точке $x = 0$ до трех раз, а затем составлена система уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4 .

Мы получим систему

$$\begin{aligned} C_1 + C_3 + C_4 + 1 &= 3, \\ C_1 + C_2 + 3C_4 + 1 &= 5, \\ C_1 + 2C_2 + 9C_4 + 1 &= 14, \\ C_1 + 3C_2 + 27C_4 + 1 &= 37. \end{aligned}$$

Решением которой, как можно убедиться, является набор $(-\frac{3}{2}, 2, \frac{7}{3}, \frac{7}{6})$.

4.6. Поделим уравнение на x . Тогда уравнение может быть представлено в виде $y' + \frac{x-1}{x}y = -x$. Это уравнение линейное, неоднородное. Решать его можно разными способами. Например, можно воспользоваться методом вариации постоянной Эйлера. Суть метода состоит в следующем. Сначала отбрасывается правая часть уравнения, после чего уравнение легко интегрируется, т.к. переменные разделяются. В нашем случае мы получаем $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x-1}{x} dx$. После интегрирования находим $y(x) = Cx e^{-x}$. Теперь восстановим правую часть уравнения, считая что $C(x)$ - функция, зависящая от

x . Подставим функцию $y(x) = C(x)xe^{-x}$ в исходное уравнение. Мы получим $C'xe^{-x} = -x$. Откуда $C(x) = -e^x + \tilde{C}$. Здесь \tilde{C} - произвольная константа. Окончательно получаем $y(x) = \tilde{C}xe^{-x} - x$.

4.7. Сначала найдем общее решение однородного уравнения. Для этого выпишем характеристическое уравнение $b^3 + b^2 - 2 = 0$. Один корень, а именно $b = 1$ угадывается сразу, и после деления кубического многочлена на $b - 1$ мы найдем делимое $b^2 + 2b + 2$. Окончательно, $b_1 = 1, b_2 = -1 + i, b_3 = -1 - i$. Общее решение однородного разностного уравнения, полученного обнулением правой части, будет иметь вид $y_t = C_1 + C_2 2^{t/2} \cos(\frac{3\pi}{4}t) + C_3 2^{t/2} \sin(\frac{3\pi}{4}t)$. В этой формуле первое из слагаемых получено умножением произвольной константы C_1 на $1^t = 1$, а два последующих слагаемых является линейной комбинацией вещественной и мнимой частей комплексного решения уравнения $(-1 + i)^t$. При нахождении этих частей нам понадобилось записать корень характеристического уравнения в полярной форме $-1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$, затем возведя в натуральную степень t , воспользоваться формулой Муавра $(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})^t = \cos(\frac{3\pi}{4}t) + i \sin(\frac{3\pi}{4}t)$, и, наконец, выделить вещественную и мнимую части.

Частное решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределенных коэффициентов, при этом, пользуясь аналогией с поиском частных решений дифференциальных уравнений. Пусть $\tilde{y}_t = A(\frac{1}{2})^t + B2^t$, где A, B - константы, находимые после подстановки выражения в исходное уравнения, и приравнивания коэффициентов при соответствующих показательных функциях. Т.к. ни 2, ни $\frac{1}{2}$ не являются корнями характеристического уравнения, то мы имеем дело с «простым», а не «резонансным» случаем. Находим $A = -\frac{8}{13}$ и $B = \frac{1}{10}$.

Окончательный ответ $y_t = C_1 + C_2 2^{t/2} \cos(\frac{3\pi}{4}t) + C_3 2^{t/2} \sin(\frac{3\pi}{4}t) - \frac{8}{13}(\frac{1}{2})^t + \frac{1}{10}2^t$.

4.8. Системы дифференциальных уравнений второго порядка могут быть легко сведены к уравнению второго порядка относительно одной из неизвестных функций, но мы попробуем решить эту систему более общим методом, который применим к системам любого порядка. Для решения нам следует найти собственные значения и принадлежащие им собственные векторы матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Собственные

значения таковы $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Собственному значению кратности 2 принадлежит единственный собственный вектор $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тем самым найдено одно из двух ли-

нейно независимых решений системы, а именно, функция $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(2t)$.

Чтобы найти второе решение, разыщем, так называемый присоединенный вектор e_2 , являющийся решением неоднородной алгебраической системы $Ae_2 = \lambda e_2 + e_1$.

Конкретно в нашем случае, можно выбрать любой вектор $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, компоненты ко-

торого удовлетворяют уравнению $3\alpha + 3\beta = 1$, например, $e_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$. На лекции

было доказано, что второе линейно независимое решение тогда будет иметь вид $(te_1 + e_2) \exp(2t) = \begin{pmatrix} t + 1/3 \\ -t \end{pmatrix} \exp(2t)$.

Окончательно, решение таково $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(2t) + C_2 \begin{pmatrix} t + 1/3 \\ -t \end{pmatrix} \exp(2t)$.

Проверим, что мы получим тот же ответ, решая систему сведением к одному уравнению.

Например, выразим $y = \frac{1}{3}(\dot{x} - 5x)$ из первого уравнения, и подставим во второе $\frac{1}{3}(\ddot{x} - 5\dot{x}) = -3x - \frac{1}{3}(\dot{x} - 5x)$. Упростив уравнение, получим $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$. Его общее решение $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$ (случай кратных корней). Тогда $y(t) = -C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_2 e^{2t} - C_2 t e^{2t}$.

Решая задачу с использованием присоединенного вектора, мы получили бы ровно такой же ответ, если бы выбрали другой присоединенный вектор $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

4.9. Найдем сначала решение однородной системы уравнений $\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы системы $\lambda_1 = 2, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\lambda_2 = -2, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Общее решение однородной си-

системы разностных уравнений имеет вид $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (-2)^t$, где C_1 и C_2 произвольные константы. Правая часть исходной системы является постоянным вектором, поэтому подберем частное решение в виде постоянного вектора с неопределенными компонентами $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Подставив его в систему, получим частное решение $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Перейдем к решению задачи Коши. Для этого, выписав общее решение $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (-2)^t + \begin{pmatrix} 5/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, положим $t = 0$, и приравняем правый столбец решения начальным данным. Из решения системы находим $C_1 = -\frac{5}{4}$, $C_2 = -\frac{5}{12}$.

4.10. Эта неоднородная система разностных уравнений решается аналогично системе из задачи 4.9. Трудность в том, что матрица системы имеет комплексные собственные значения $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Этим значениям принадлежат комплексные собственные векторы $e_1 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 \end{pmatrix}$. Для нахождения общего решения достаточно использовать лишь один из найденных векторов, например, e_1 . Чтобы найти два линейно независимых вещественнозначных решения, следует найти вещественную и мнимую части произведения $e_1 [\cos(\frac{\pi}{2}t) + i \sin(\frac{\pi}{2}t)]$. Обозначая для краткости, соответственно, вещественную часть Re , и мнимую часть Im , находим $Re = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$ и $Im = \begin{pmatrix} -\cos(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$. Следовательно, общее решение однородной системы равно $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = C_1 Re + C_2 Im$. Частное решение неоднородного уравнения является постоянным вектором $\begin{pmatrix} 9/2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Что касается устойчивости общего решения, то оно является устойчивым, но не асимптотически устойчивым. Достаточно рассмотреть общее решение однородного уравнения. То есть с одной

стороны, при любом начальном нетривиальном решении, когда $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, найдутся числа $a > 0$ и $b > 0$ такие, что для любого t $|x_t| \leq a$ и $|y_t| \leq b$. В тоже время при $t \rightarrow \infty$ решение не стремится к $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. В классификации, предложенной в учебнике Fundamental Methods of Mathematical Economics by Alpha C. Chiang, такое решение автор называет “nonconvergent, stepped time path”.

5.1. Сначала найдем в матрице строго доминируемые стратегии. С точки зрения второго игрока, стратегия D строго доминирует стратегию E . В равновесии Нэша не используются строго доминируемые стратегии, поэтому стратегию E можно вычеркнуть.

Применяя аналогичные рассуждения к матрице без столбца E , обнаруживаем, что стратегия A первого игрока доминирует стратегию B . Следовательно, стратегию B также можно вычеркнуть.

Результате мы получили матрицу с меньшим числом стратегий:

	D	F
A	3;4	1;0
C	0;2	5;6

Находим равновесия Нэша в чистых стратегиях: (A, D) и (C, F) .

Ищем равновесия в смешанных стратегиях. Пусть первый игрок использует стратегию A с вероятностью p и стратегию C с вероятностью $(1 - p)$. Пусть второй игрок использует стратегию D с вероятностью q и стратегию F с вероятностью $(1 - q)$.

Находим ожидаемый выигрыш первого игрока:

$$\mathbb{E}(u_1) = 3pq + 1p(1-q) + 0(1-p)q + 5(1-p)(1-q) = \dots = 5 + 7pq - 4p - 5q = p(7q - 4) + 5 - 5q$$

Получаем кривую реакции первого игрока:

$$p = \begin{cases} 1, & 7q - 4 > 0, q > 4/7 \\ [0; 1], & 7q - 4 = 0, q = 4/7 \\ 0, & 7q - 4 < 0, q < 4/7 \end{cases}$$

Аналогично находим ожидаемый выигрыш второго игрока:

$$\mathbb{E}(u_2) = 4pq + 0p(1-q) + 2(1-p)q + 6(1-p)(1-q) = \dots = 6 + 10pq - 6p - 4q = q(10p - 6) + 6 - 4q$$

И его кривую реакции:

$$q = \begin{cases} 1, & 10p - 6 > 0, p > 6/10 \\ [0; 1], & 10p - 6 = 0, p = 6/10 \\ 0, & 10p - 6 < 0, p < 6/10 \end{cases}$$

Точки пересечения кривых реакции дадут равновесия Нэша. Получаем три равновесия Нэша в смешанных стратегиях, $(p = 0, q = 0)$, $(p = 1, q = 1)$ и $(p = 6/10, q = 4/7)$.

Заметим, что эти три смешанных равновесия включают в себя два ранее найденных чистых равновесия. А именно, вероятности $(p = 0, q = 0)$ соответствуют профилю стратегий (C, F) , а вероятности $(p = 1, q = 1)$ соответствуют профилю стратегий (A, D) . Вероятности $(p = 6/10, q = 4/7)$ также можно записать в виде профиля стратегий $(\frac{6}{10}A + \frac{4}{10}C, \frac{4}{7}D + \frac{3}{7}F)$

5.2. Матрица игры имеет вид:

	Камень	Бумага
Камень	0,0	-1,1
Ножницы	-1,1	1,-1
Бумага	1,-1	0,0

Замечаем, что стратегия Бумага первого игрока строго доминирует стратегию Камень. В равновесии Нэша строго доминируемые стратегии не используются, поэтому

вычеркиваем стратегию Камень первого игрока. Получаем матрицу:

	Камень	Бумага
Ножницы	-1,1	1,-1
Бумага	1,-1	0,0

Замечаем, что равновесий в чистых стратегиях нет, ищем равновесия в смешанных стратегиях. Пусть первый игрок использует стратегию **Ножницы** с вероятностью p и стратегию **Бумага** с вероятностью $(1 - p)$. Пусть второй игрок использует стратегию **Камень** с вероятностью q и стратегию **Бумага** с вероятностью $(1 - q)$.

Находим ожидаемый выигрыш первого игрока:

$$\mathbb{E}(u_1) = -pq + 1p(1 - q) + 1(1 - p)q + 0(1 - p)(1 - q) = \dots = p + q - 3pq = p(1 - 3q) + q$$

Получаем кривую реакции первого игрока:

$$p = \begin{cases} 1, & 1 - 3q > 0, & q < 1/3 \\ [0; 1], & 1 - 3q = 0, & q = 1/3 \\ 0, & 1 - 3q < 0, & q > 1/3 \end{cases}$$

Аналогично находим ожидаемый выигрыш второго игрока:

$$\mathbb{E}(u_2) = +pq - 1p(1 - q) - 1(1 - p)q + 0(1 - p)(1 - q) = \dots = -p - q + 3pq = q(3p - 1) - p$$

И его кривую реакции:

$$q = \begin{cases} 1, & 3p - 1 > 0, & p > 1/3 \\ [0; 1], & 3p - 1 = 0, & p = 1/3 \\ 0, & 3p - 1 < 0, & p < 1/3 \end{cases}$$

Точки пересечения кривых реакции дадут равновесия Нэша. Получаем одно равновесие Нэша ($p = 1/3, q = 1/3$). Его также можно записать в виде профиля

стратегий $(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C, \frac{1}{3}D + \frac{2}{3}F)$

5.3. If the second player choses his move according continuous distribution function F then the expected payoff of the first player for the bribe b is equal to

$$1 \cdot P(b_2 \leq b) - b = 1 \cdot F(b) - b$$

If a rational player uses mixed strategies he is indifferent between the corresponding pure strategies. That means that $F(b) - b = \text{const}$ for pure strategies that are mixed. For pure strategies that are mixed the density function $f(b) = F'(b) = 1$. Do I know such a random variable? Yes, I know! A uniform on $[0; 1]$.

5.4. Чтобы почувствовать задачу, сначала полезно просто рассмотреть несколько профилей стратегий «от фонаря» и проверить, являются ли они равновесиями Нэша.

Например, рассмотрим профиль $(s_1 = 300, s_2 = 200)$. Здесь $s_1 + 2s_2 \leq 1000$ и каждый игрок получает столько денег, сколько запросил. Однако профиль равновесием Нэша не является, т.к., например, первому игроку выгодно отклониться и выбрать $s_1 = 600$. Второму игроку также выгодно отклониться от данного профиля.

Например, рассмотрим профиль $(s_1 = 500, s_2 = 400)$. Здесь $s_1 + 2s_2 > 1000$, поэтому игроки денег не получают. Естественно, обоим игрокам выгодно отклониться и запросить меньше денег. Например, первому выгодно выбрать $s_1 = 200$.

Если всё наследство израсходовано, то ни один игрок не сможет получить больше и такая ситуация будет равновесием Нэша. Т.е. любой профиль (s_1, s_2) , где $s_1 + 2s_2 = 1000$ является равновесием Нэша.

Также есть равновесия Нэша, где оба игрока супер-жадные, т.е. профили вида (s_1, s_2) , где $s_1 \geq 1000$ и $s_2 \geq 500$. Ни один игрок не может в одиночку отклониться так, чтобы получить положительный выигрыш.

5.5. По условию, первый игрок использует стратегию вида $b_1 = k_1 \cdot v_1$, а второй игрок — стратегию виду $u_2 = k_2 \cdot v_2$.

Выпишем ожидаемый выигрыш первого игрока. Здесь следует помнить, что с точки зрения первого игрока, значение v_1 — известная величина, а v_2 — неизвестная

равномерно распределенная случайная величина.

$$u_1(k_1, k_2) = \mathbb{P}(b_1 > b_2)(v_1 - \frac{b_1 + \mathbb{E}(b_2 | b_1 > b_2)}{2}) + \mathbb{P}(b_1 < b_2)\frac{b_1 + \mathbb{E}(b_2 | b_1 < b_2)}{2}$$

Or,

$$P(W)(v_1 - E[(b_1 + b_2)/2 | W]) = \frac{b_1}{k} \left(v_1 - \frac{b_1 + 0.5b_1}{2} \right)$$

The strategy is $b_i = \frac{2}{3}v_i$.

5.6. Сначала выпишем функции выигрыша игроков. Пусть первый игрок кладёт в шкатулку x_1 евро, а второй — x_2 . Тогда выигрыш первого игрока равен

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{a(x_1 + x_2)}{2} - x_1 = \frac{ax_2 + (a - 2)x_1}{2}$$

В силу симметрии выигрыш второго игрока равен

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{a(x_1 + x_2)}{2} - x_2 = \frac{ax_1 + (a - 2)x_2}{2}$$

Уже заметно, что возникает три случая: $a \in (1; 2)$, $a = 2$, $a > 2$. Рассмотрим их по порядку.

1. Случай $a \in (1; 2)$. В этом случае выигрыш каждого игрока отрицательно зависит от количества денег, которое он положит. Это значит, что стратегия «не класть денег» строго доминирует любую другую стратегию. Поскольку в равновесии Нэша не может играть строго доминируемая стратегия, мы получаем единственное равновесие Нэша: $(x_1 = 0, x_2 = 0)$.
2. Случай $a > 2$. В этом случае выигрыш каждого игрока положительно зависит от количества денег, которое он положит. Это значит, что стратегия «класть все деньги» строго доминирует любую другую стратегию. Поскольку в равновесии Нэша не может играть строго доминируемая стратегия, мы получаем единственное равновесие Нэша: $(x_1 = 100, x_2 = 100)$.
3. Случай $a = 2$. В этом случае выигрыш каждого игрока не зависит от количества денег, которое он положит. В этом случае любой набор чистых или смешанных

стратегий является равновесием Нэша.

5.7. Равновесия в чистых стратегиях: все называют арбуз, все называют баклажан. Других нет, т.к. игрок, назвавший не то, что другие два хочет отклониться.

Допустим что в равновесии Нэша игрок выбирает арбуз с вероятностью a . Тогда условие безразличия первого игрока имеет вид

$$10a^2 = 5(1 - a)^2$$

Находим корни $a = -1 \pm \sqrt{2}$. Подходит только один, $a = \sqrt{2} - 1$.

Арбуз лучше баклажана, поэтому в равновесии имеет смысл выбирать баклажан, только если другие игроки выбирают его достаточно часто. Поэтому в равновесии арбуз будет выбираться с вероятностью меньше $1/2$, и действительно, $\sqrt{2} - 1 < 1/2$.

5.8. Обозначим n_i количество игроков, которые выбирают число i . Все равновесия Нэша делятся на два вида. Во-первых, равновесия, где не выигрывает ни один игрок. Это возможно, если общее количество игроков четно и $n_1 = n_2 = \dots = 2$. Во-вторых равновесия, в которых есть ровно один победитель. Допустим победитель назвал число k , тогда n_1, n_2, \dots, n_{k-1} должны быть больше одного.

Ищем равновесия в смешанных стратегиях. Допустим игрок называет число i с вероятностью p_i . Чтобы игроку было все равно что называть:

$$(1 - p_1)^2 = p_1^2 + (1 - p_1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + (1 - p_1 - p_2 - p_3)^2 = \dots$$

Получаем уравнение: $p_k^2 + p_{k+1}^2 = 2p_{k+1}(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_k)$

Ищем решение в виде геометрического распределения $p_k = \frac{1-p}{p} p^k$, получаем уравнение на p , $p^3 + p^2 + p - 1 = 0$

Решать это уравнение не требуется, но для эстетического удовольствия

$$p = \left(\frac{1}{9} \sqrt{11} \sqrt{3} + \frac{17}{27} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9 \left(\frac{1}{9} \sqrt{11} \sqrt{3} + \frac{17}{27} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}$$

Лотерея оказалась неустойчива к сговору игроков.

5.9. Чистые равновесия Нэша: любой набор где названа единица хотя бы одним игроком, кроме случая, когда все трое назвали единицу.

Допустим игроки называют единицу, двойку и тройку с вероятностями p_1 , p_2 и p_3 .

Ожидаемый выигрыш от выбора единицы, двойки и тройки первым игроком равны, соответственно,

$$\begin{cases} u_1 = 2(1 - p_1)^2 + 0 \cdot p_1^2 - 1 \cdot (1 - (1 - p_1)^2 - p_1^2) \\ u_2 = 2(p_1^2 + p_3^2) + 0 \cdot p_2^2 - 1 \cdot (1 - p_1^2 - p_3^2 - p_2^2) \\ u_3 = 2(p_1^2 + p_2^2) + 0 \cdot p_3^2 - 1 \cdot (1 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) \end{cases}$$

Приравнявая эти три выражения и помня об условии $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ находим вектор вероятностей $(0.5; 0.25; 0.25)$

5.10. Ситуацию, когда ни одна партия не получает денег обозначим за нулевую уровень выигрыша. Тогда согласно условию задачи

	за	против
за	0,0	1,-1
против	-1,1	0,0

Т.е. в равновесии Нэша обе партии голосуют «за» и денег не получают

5.11. Записываем игру в матричной форме. Ситатунга и Вилорог — виды антилоп :)

	Большая Ситатунга	Маленький Вилорог
Большая Ситатунга	$a/2, a/2$	$a, 1$
Маленький Вилорог	$1, a$	$1/2, 1/2$

Если $a > 2$, то единственное равновесие (Большая Ситатунга, Большая Ситатунга).

Если $a \in (1; 2)$, то в равновесии тигры гонятся за разными антилопами. И в особом случае $a = 2$, равновесны все исходы, кроме одновременного выбора Маленького Вилорога.

В смешанных стратегиях при $a > 2$ других равновесий не появляется. При $a = 2$ в равновесии Нэша один из тигров обязательно гонится за Большой Ситатунгой с

вероятностью один, а стратегия другого — произвольная. При $a \in (1; 2)$ получаем помимо чистых равновесий Нэша еще одно в смешанных стратегиях из условия безразличия

$$\frac{a}{2}p + a(1-p) = 1 \cdot p + \frac{1}{2}(1-p)$$

Отсюда находим вероятность погони за Большой Ситатунгой в смешанном равновесии, $p = \frac{2a-1}{a+1}$.

5.12. В чистых стратегиях в равновесии один человек звонит, остальные не звонят.

В смешанном равновесии каждый игрок безразличен между чистыми стратегиями. Отсюда получаем уравнение

$$1 - c = 1 - (1 - p)^{n-1}$$

Решая его, находим вероятность звонка отдельным человеком $p^* = 1 - c^{\frac{1}{n-1}}$. Соответственно, вероятность получения пострадавшим помощи равна $1 - (1 - p^*)^n = 1 - c^{\frac{n}{n-1}}$. Обе эти функции убывают с ростом n .

Находим предел, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - c^{\frac{n}{n-1}} = 1 - c$.

Примеров этому равновесию в жизни, к сожалению, можно найти много, в частности поймать попутку на оживленной дороге бывает труднее, чем на проселочной.

5.13. У первой задачи оптимизации получается внутреннее решение $(m_1, d_1) = (14/3, 16/3)$, $(m_2, d_2) = (2/3, 16/3)$.

У второй задачи оптимизации выходит угловое решение $(m_1, d_1) = (5, 5)$ $(m_2, d_2) = (0, 2)$.

Оба равновесия не являются Парето-оптимальными.

5.14. Одинокий Мудрый таракан всегда ищет истину. Чем же ему ещё заниматься :)

Зададимся вопросом, когда всем тараканам выгодно искать Истину? Если один таракан не ищет истину, а остальные ищут, то его полезность равна $1 - (1 - a)^{n-1}$. Если и он начинает искать, то его полезность равна $1 - (1 - a)^n - c$. Ленивому мудрецу

среди n тараканов лучше начинать работать, если

$$1 - (1 - a)^{n-1} < 1 - (1 - a)^n - c$$

После преобразований получаем

$$n < 1 + \log_{1-a}(c/a)$$

Таким образом в равновесии Нэша в чистых стратегиях Истину ищут $\lfloor 1 + \log_{1-a}(c/a) \rfloor$ тараканов. Если общее количество тараканов меньше этой границы, то ищут все.

В симметричном смешанном равновесии каждый таракан ищет Истину с вероятностью p^* . Условие безразличия для первого таракана выглядит как:

$$1 - (1 - pa)^n - c = 1 - (1 - pa)^{n-1}$$

После упрощения получаем

$$1 - p^*a = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

С ростом n видно, что p^* падает.

Вероятность нахождения Истины хотя бы одним тараканом равна

$$1 - (1 - pa)^n = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

И тоже убывает с ростом n .

Из этой задачи в частности следует мораль, что если в группе слишком много человек, более $\lfloor 1 + \log_{1-a}(c/a) \rfloor$, то в ней будут лодыри.

5.15. Если моста нет, то есть два пути, ABD и ACD . В равновесии Нэша каждым путем едут три машины, поэтому в пути они тратят 49 минут каждая.

Если мост построен, то заметим, что при любом количестве машин путь BD

быстрее пути CD , а путь AC быстрее пути AB . Значит в равновесии Нэша все едут путем $ACBD$ и каждый тратит на него 62 минуты.

Данный пример является упрощением, но тем не менее демонстрирует, что строительство новой дороги может увеличить количество пробок.