

# Пособие по курсу «Методы оптимальных решений», МИЭФ

Букин К.А., Демешев Б.Б.

4 февраля 2014 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Однородные функции</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Оптимизация с ограничениями в виде неравенств. Условия Куна-Таккера.</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Линейное программирование</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ОДУ</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Теория игр</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Решения</b>	<b>9</b>

## 1 Однородные функции

Задача **1.1.**

Find the values  $a$  and  $b$  such that the function  $f$  is homogeneous:

$$f(x, y) = 2x^{b-a}y^{b+2} + y^{a+1}x^{-3b} + y^{7b}x^{-2a}.$$

For the values  $a$  and  $b$  you have found expand the function

$$h(x) = \sqrt{1 + f(x, x)} \cdot (1 - \cos(f(x, x)))$$

as a power series up to  $x^4$ . State the range for  $x$  where your expansion is correct. (Spring mock, 2012).

Задача 1.2.

The homogeneous function  $f$  is given by the equation

$$f(x, y) = \int_0^{xy^a} (t^3 + xt) dt.$$

Find the value of the parameter  $a$  and the degree of homogeneity of  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . (Spring mock 2013).

## 2 Оптимизация с ограничениями в виде неравенств. Условия Куна-Таккера.

Задача 2.1.

Consider the monopolist producing two distinct goods. The cost function is given by  $TC(q_1, q_2) = q_1 + kq_2$ , where the constant  $k \in (0; 1)$ . And the demand functions are given by  $q_1(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2) = (p_1 p_2)^{-3}$ .

- a) Find the optimal production bundle for the monopolist.
- b) For which values of  $k$  one of the products is priced under marginal cost? (Spring mock, 2012).

Задача 2.2.

Using the Lagrange multiplier method without reducing the number of variables by substitution find the minimum of the function

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + xy + 8z^2 + 2yz$$

subject to  $x + y + \frac{3}{2}z \geq \frac{6}{5}$  and  $x + y + z = 1$ . (Spring mock 2012).

Задача 2.3.

Use Lagrange multipliers method to solve optimization problem

$$xy \rightarrow \max$$

subject to  $x \geq 0, 0 \leq y \leq 3, x + 2y \leq 8, y \geq \frac{x^2}{16} + 1$ . (Exam, 2012).

Задача 2.4.

A two-product monopoly seeks to maximize its revenue which follows the formula  $R(x, y) = 6x - x^2 + y - y^2$ . The total costs function is given by  $C(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 3y$ , where  $x$  and  $y$  are outputs. State the problem of the monopoly, given condition that its profit  $\pi = R - C$  should always remain nonnegative. Apply the Kuhn-Tucker conditions. Use Weierstrass theorem to confirm sufficiency. (Exam, 2013).

### 3 Линейное программирование

Задача 3.1.

For any real number  $\lambda$ , find the minimal value of the objective function  $x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4$

Subject to the constraints  $\lambda x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq -1, x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 + x_4 \geq 5$ , all choice variables are nonnegative. (Exam, 2013).

### 4 Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы ОДУ

*В этом разделе мы не рассматриваем упражнения по решению уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью – квазиполиномом, т.к. они разобраны в задачниках и пособиях по ДУ.*

Задача 4.1.

The point elasticity of demand for a good is given by  $\varepsilon = \frac{p^2}{p^2+4p+3}$ . Find the demand function  $q(p)$  given the initial condition  $q(1) = 1$ . (Spring mock, 2012).

Задача 4.2.

Let  $N(t)$  denote the size of population,  $X(t) = \sqrt{N}$  being the total output in the economy. Consider the following model

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{X},$$

where  $\dot{N} = \frac{dN}{dt}$  and  $\alpha, \beta$  are some constants. Find and explore its behavior as  $t \rightarrow \infty$ . (Spring mock, 2013).

Задача 4.3.

Show that Chebyshev's equation  $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ , where  $|x| < 1$ , can be reduced to equation  $\ddot{y} + y = 0$  by substituting  $x = \cos t$ . Hence find the general solution of Chebyshev's equation. (Exam 2013).

## 5 Теория игр

Задача 5.1.

Find all pure and mixed Nash equilibria in the following bimatrix game:

	D	E	F
A	3;4	1;3	1;0
B	2;7	3;6	0;3
C	0;2	2;1	5;6

Задача 5.2.

Two players play a version of Rock-Paper-Scissor game. Paper beats Rock, Rock beats Scissors, Scissors beats Paper. The two players simultaneously make their choice. The first player can choose any object. The second player can choose Rock or Paper. The winner receives 1 rouble from the loser. In case of a draw the wealth of a player does not change.

1. Construct the payoff matrix of the game.
2. Find all pure and mixed Nash equilibria

Задача 5.3.

Two players are trying to bribe the judge. The possible amount of bribe is any real number between 0 and 1 million roubles. The player who gives the biggest bribe is announced as the winner of the affair by the judge. The winner receives 1 million roubles. The loser gets nothing. Obviously bribes are not returned by the judge. In the case of equal bribes each player gets nothing.

1. Are there any pure Nash equilibria in this game?
2. Find at least one mixed Nash equilibrium.

Задача 5.4.

A man has two sons. When he dies, the value of his estate after tax is \$1000. In his will it states that the sons must specify the sum of money  $s_i$  that they are willing to accept. If  $s_1 + 2s_2 \leq 1000$ , then each gets the sum he asked for and the rest goes to the cats' shelter. If  $s_1 + 2s_2 > 1000$ , then neither of them gets any money and the entire sum goes to the cats' shelter. Assume that the sons only care about the money they will inherit and they ask for the whole dollars. Find the pure strategies Nash equilibria of this game.

Задача 5.5.

There is an auction of a painting with two players. The value of the painting for the first player is a random variable  $v_1$ , for the second player —  $v_2$ . The random variables  $v_1$  and  $v_2$  are independent and uniformly distributed from 0 to 1 million dollars. Each player makes the bid  $b_i$  knowing only his own value of the painting. The player who makes the highest bid gets the painting and pays the arithmetic mean of the two bids.

Find a Nash equilibrium where each player uses linear strategy of the form  $b_i = k \cdot v_i$ .

Задача 5.6.

Two players have found The Magic Box. The Box has two holes. Simultaneously each of the two players may put any amount of money from 0 to 100 euros into his hole. Then the Magic Box will multiply the total sum by  $a > 1$ , divide the resulting sum into two equal parts and give them back to the players. The value of  $a$  is known. Find all the pure and mixed Nash Equilibria of this game for all values of the parameter  $a$ .

Задача 5.7.

Три игрока одновременно называют одно из двух слов: арбуз или баклажан. Если все трое называют арбуз, то выигрыш каждого равен 10, если все трое называют баклажан, то выигрыш каждого равен 5. В противном случае их выигрыш равен нулю.

1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях
2. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях
3. Сравните найденную в смешанном равновесии Нэша вероятность выбрать арбуз с  $1/2$ . Объясните данное неравенство

Задача 5.8.

До весны 2007 года в Швеции существовала необычная лотерея «Limbo». Правила выглядят следующим образом. Вы можете выбрать любое натуральное число. Победителем объявляется тот, кто назвал самое маленькое число, никем более не названное. Например, если игроки называли числа 1, 3, 1, 2, 4, то победителем будет тот, кто назвал число 2. Если наименьшего никем более не названного нет, то приз остается у организаторов.

1. Опишите все равновесие Нэша в чистых стратегиях для  $n$  игроков
2. Найдите симметрическое равновесие для трех игроков (т.е. равновесие, в котором все игроки используют одинаковые стратегии). Подсказка: какие есть известные законы распределения на  $\mathbb{N}$ ?
3. Почему была закрыта эта лотерея?

Задача 5.9.

Три игрока одновременно выбирают одно число из множества  $\{1, 2, 3\}$ . Если все три игрока выбрали одно и то же число, то выигрыш каждого равен нулю. В ином случае игрок выбравший наименьшее нечетное число получает 2 рубля, а остальные двое — платят по одному рублю. Например, если игроки называли числа 1, 3 и 1, то деньги получит игрок назвавший тройку.

1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях
2. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Задача 5.10.

Парламент поделен на две партии: республиканцы и демократы. Для принятия реформы необходима ее поддержка обеими партиями. Реформа безразлична обеим партиям. Warren Buffet предложил, чтобы какой-нибудь миллиардер выступил со следующим обещанием: Если реформа не будет принята, то партия, поддержавшая реформу во время голосования получит 1000000000\$ (Один миллиард долларов). Партии голосуют одновременно (можно проголосовать только за или против реформы). Каждая партия хотела бы получить деньги и не хотела бы, чтобы деньги достались конкурентам. Партии верят заявлению миллиардера.

1. Представьте игру в нормальной форме
2. Найдите равновесие Нэша

Задача 5.11.

Два тигра заметили двух антилоп. Маленькую, весом в один условный килограмм, и большую, весом в  $a > 1$  условных килограммов. Они одновременно принимают решение, за какой антилопой погнаться. Тигры всегда догоняют антилоп. *Тигр: Если хотя, то конечно.* Если тигры выберут одну антилопу, то они поделят ее поровну.

1. Запишите игру в матричной форме;
2. Найдите все равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях в зависимости от  $a$

Задача 5.12.

Человеку плохо. Рядом на остановке стоит  $n$  человек. Каждый из них может либо вызвать скорую с помощью мобильного, либо дожидаться троллейбуса и уехать. Если никто не вызовет скорую, то человек умрет. Если человек умирает, то полезность каждого равна 0, если человек остается в живых, то полезность каждого равна 1. Издержки телефонного звонка равны  $c \in (0; 1)$ .

1. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях;
2. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях (все игроки используют одну и ту же стратегию);
3. Как зависит от  $n$  вероятность оказания помощи отдельным прохожим?

4. Как зависит от  $n$  вероятность получения помощи? К чему стремиться эта вероятность при большом  $n$ ?

Задача 5.13.

Два человека пришли в кабак. У одного из них 10 золотых, у второго — 6 золотых. Каждый может тратить деньги на выпивку или на музыку. Музыка является общественным благом — ее слышат все. Выпивка — частным. Полезности равны  $u_1 = (m_1 + m_2)d_1$  и  $u_2 = (m_1 + m_2)d_2$ , где  $m_i$  и  $d_i$  — расходы  $i$ -го человека на музыку и выпивку. Предположим, что деньги бесконечно делимы.

1. Найдите равновесие Нэша
2. Что изменится в случае, если у второго 2 золотых?
3. Являются ли эти равновесия оптимальными по Парето?

Задача 5.14.

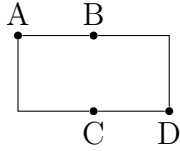
Поиск Истины. Собрались  $n$  Мудрых тараканов и решили одновременно искать Истину. Каждый может добросовестно искать или отдыхать. Если Мудрый таракан ищет Истину, то он находит ее независимо от других с вероятностью  $a$ . Если Истина будет найдена хотя бы одним Мудрым тараканом, то он расскажет ее всем, и все получают полезность  $+1$ . Поиск Истины связан с издержками  $c \in (0; a)$ .

1. Будет ли одинокий Мудрый таракан искать истину ( $n = 1$ )?
2. Найдите равновесия Нэша в чистых стратегиях для произвольного  $n$
3. Найдите симметричное равновесие Нэша в смешанных стратегиях для произвольного  $n$
4. Как зависит от  $n$  доля Мудрых тараканов ищущих Истину?
5. Как зависит от  $n$  вероятность того, что Истина будет найдена?

Задача 5.15.

Из пункта  $A$  в пункт  $D$  можно попасть двумя путями — через  $B$  или через  $C$ . Если по дороге  $AB$  едет  $x$  машин, то время в пути каждой из них будет равно  $f_{AB}(x) = x + 32$ . Для других отрезков пути функции равны:  $f_{BD}(x) = 5x + 1$ ,  $f_{CD}(x) = x + 32$  и  $f_{AC}(x) = 5x + 1$ . Каждое утро из города  $A$  в город  $D$  едет 6 машин.





1. Сколько машин и по какой дороге едет в равновесии по Нэшу? Сколько им требуется времени, чтобы добраться из  $A$  в  $D$ ?
2. Как изменятся ответы, если между городами  $B$  и  $C$  построен удобный мост, такой что  $f_{BC} = 0$ ?

## 6 Решения

**1.1.** Функция  $f(x, y)$  называется однородной степени однородности  $m$ , если для любого  $t > 0$  и для любых  $x, y$  из области определения функции  $f$ , выполнено  $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ . Функция, заданная формулой в условии задачи является многочленом от двух переменных, состоящим из трех слагаемых. Каждое из слагаемых – однородная функция автоматически, но для того чтобы сумма была однородной, необходимо и достаточно, чтобы однородность всех трех слагаемых была одной степени, откуда получаем систему уравнений

$$b - a + b + 2 = a + 1 - 3b = 7b - 2a,$$

решением, которой является  $a = 3, b = 1$ . Тогда  $f(x, x) = 4x$ . Разложим по формуле Тейлора  $1 - \cos(4x)$  до члена  $x^4$ . Мы получим  $1 - \cos(4x) = 8x^2 - \frac{32}{3}x^4 + \dots$

так как это разложение начинается с  $x^2$ , то нам достаточно разложить  $\sqrt{1 + 4x}$  до члена с  $x^2$ . Окончательно получаем  $\sqrt{1 + 4x} \cdot (1 - \cos(4x)) = (1 + 2x - 2x^2 + \dots)(8x^2 - \frac{32}{3}x^4 + \dots) = 8x^2 + 16x^3 - \frac{80}{2}x^4 + \dots$ , или, используя запись остатка в форме Пеано  $h(x) = 8x^2 + 16x^3 - \frac{80}{2}x^4 + o(x^4)$ .

**1.2.** Функция  $f(x, y)$  находится интегрированием  $f = \frac{1}{4}x^4y^{4a} + \frac{1}{2}x^3y^{2a}$ . Оба слагаемых должны иметь одинаковую однородность, т.е.  $4 + 4a = 3 + 2a$ , откуда  $a = -\frac{1}{2}$ . Тогда степень однородности функции  $f(x, y)$  равна 2. Однородность любой из ее

первых производных будет на единицу меньше, т.е. 1.

**2.1.** Запишем задачу монополиста по максимизации прибыли:

$$\pi = \frac{p_1 + p_2 - 1 - k}{(p_1 p_2)^3} \rightarrow \max. \text{ Прибыль здесь максимизируется по ценам } p_1, p_2 > 0.$$

Выписывая условия первого порядка  $\frac{\partial \pi}{\partial p_1} = 0$  и  $\frac{\partial \pi}{\partial p_2} = 0$ , и решая систему, получаем значения равновесных цен  $p_1 = p_2 = \frac{3}{5}(1 + k)$ . Затем вычисляем производные второго порядка  $\pi_{11}$ ,  $\pi_{22}$  и  $\pi_{12} = \pi_{21}$  при  $p_1 = p_2 = \frac{3}{5}(1 + k)$ . Чтобы облегчить вычисление этих производных, лучше всего представить прибыль в виде суммы трех дробей

$\pi = \frac{1}{p_1^2 p_2^3} + \frac{1}{p_1^3 p_2^2} - \frac{1+k}{p_1^3 p_2^3}$ . Гессиан при равновесных ценах является отрицательно определенным, что означает выполнение достаточного условия максимизации. Чтобы ответить на второй вопрос задачи следует рассмотреть два двойных неравенства

(1)  $1 \leq \frac{3}{5}(1 + k) < k$  и (2)  $k \leq \frac{3}{5}(1 + k) < 1$ . Решением второго из них является пустое множество, а решением первого -  $k > \frac{3}{2}$ . Окончательный ответ:  $k > \frac{3}{2}$ .

**2.2.** Проверка NDCQ тривиальна, т.к. ранг матрицы Якоби, составленной на основе ограничений, является полным, т.е. равняется 2. В самом деле,  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Преобразуем, ограничения задачи к более простому виду, однако, как предписано условием, не уменьшая число неизвестных:

$$z \geq \frac{2}{5}, x + y + z = 1.$$

Составим функцию Лагранжа задачи.  $L = 2x^2 + 4y^2 + xy + 8z^2 + 2yz + \lambda(1 - x - y - z) + \mu(\frac{2}{5} - z)$ . Тогда условия первого порядка будут выглядеть

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x + y - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8y + x + 2z - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 16z + 2y - \lambda - \mu = 0,$$

$$\mu \geq 0, \mu(2/5 - z) = 0, z \geq 2/5, x + y + z = 1.$$

Рассмотрим 2 случая: 1) пусть ограничение в виде неравенства не активно, т.е.  $z > \frac{2}{5}$ . Тогда  $\mu = 0$ , и систему линейных уравнений относительно неизвестных  $x, y, z, \lambda$  можно решить, например, методом Гаусса. Вычисления дают  $z = 1/7$ , значение, не удовле-

творяющее ограничению. Во втором случае полагаем  $z = \frac{2}{5}$ . Тогда решив систему относительно  $x, y, \lambda, \mu$ , получаем значения  $x = 1/2, y = 1/10$ . Осталось проверить, будет ли точка  $(1/2, 1/10, 2/5)$  решением задачи. Для проверки достаточного условия минимизации, поступим таким образом – проверим, что функция  $f(x, y, 2/5)$  является вогнутой для всех  $x, y$ . Ее гессиан равен  $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ , а эта матрица положительно определенная. Таким образом, она является также вогнутой на выпуклом множестве, заданном ограничением  $x + y + 2/5 = 1$ . Однако, критическая точка вогнутой функции является точкой минимума. Соответственно, минимальное значение функции, заданной на множестве, определенном ограничениями, равняется  $\frac{39}{25}$ .

**2.3.** Проверка NDCQ в этой задаче не вызывает трудностей. Градиенты ограничений на границе допустимого множества нигде не обращаются в ноль, а если составить якобиан, порожденный двумя ограничениями, то его равен 2. В этой задаче, всего с учетом неотрицательности переменных, 5 ограничений в виде неравенств. При использовании метода Куна-Таккера нам понадобятся только 3 множителя Лагранжа (вместо пяти). Кроме того, поскольку мы решаем задачу на максимум, то нулевые значения переменных в качестве критических точек не годятся (иначе данная целевая функция обратится в ноль). С учетом сказанного, мы введем функцию Лагранжа  $L = xy + \lambda(3 - y) + \mu(y - \frac{x^2}{16} - 1) + \gamma(8 - x - 2y)$ . Множество, на котором ищется максимум, является компактом, заданным неравенствами  $\{x \geq 0, 0 \leq y \leq 3, x + 2y \leq 8, y \geq \frac{x^2}{16} + 1\}$ . Легко видеть, что функция принимает максимальное значение только на границе этой области, т.к. внутри ее градиент всюду отличен от нуля. Тогда разобьем границу на три участка: (1)  $\{y = 3, 0 \leq x \leq 2\}$ , (2)  $\{x + 2y = 8, 2 \leq x \leq 4\}$  и (3)  $\{y = \frac{x^2}{16}, 0 \leq x \leq 4\}$ . Участки (1) и (2) имеют общую точку  $(2, 3)$ , а участки (2) и (3) общую точку  $(4, 2)$ . Выпишем условия Куна-Таккера с учетом положительности  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \mu \frac{x}{8} - \gamma = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda + \mu - 2\gamma = 0,$$

$$\gamma, \mu, \lambda \geq 0, \mu(y - \frac{x^2}{16} - 1) = 0, \gamma(8 - x - 2y) = 0, \lambda(3 - y) = 0.$$

$$x \geq 0, 0 \leq y \leq 3, x + 2y \leq 8, y \geq \frac{x^2}{16} + 1.$$

Будем искать критические точки лагранжиана на каждом из участков по отдельности. На участке (1)  $\mu = \gamma = 0$ , поэтому мы получим  $y = 0$ , что не может являться решением (см. выше). Аналогично, на участке (3)  $\gamma = \lambda = 0$ , откуда  $x + \mu = 0$ , что также не дает решений. Остался участок (2). Получим систему

$$y - \gamma = 0,$$

$$x - 2\gamma = 0,$$

$$x + 2y = 8.$$

В качестве решения получаем точку  $(4, 2)$ . Нами, правда, не исследована еще точка  $(2, 3)$ , лежащая на границе первого и второго участков. Но она не может быть критической точкой лагранжиана, т.к. иначе мы получили бы  $\lambda = -4$  (проверьте самостоятельно). По теореме Вейерштрасса данная функция принимает наибольшее значение на данном множестве, стало быть, найденная точка является решением задачи (точка глобального максимума). В этой точке функция принимает значение, равное 8.

**2.4.** Сформулируем задачу монополиста.

$$\pi = 2x - 2y - 2x^2 - 2y^2 \rightarrow \max$$

при условии, что  $x, y \geq 0, 2x - 2y - 2x^2 - 2y^2 \geq 0$ .

NDCQ выполнено, т.к. градиент ограничения  $(2 - 4x, -2 - 4y)$  обращается в 0 при отрицательном значении  $y$ . Выпишем лагранжиан задачи  $L = (1 - \lambda)(2x - 2y - 2x^2 - 2y^2)$ . Условия Куна-Таккера таковы

$$(1 - \lambda)(2 - 4x) \leq 0, x(1 - \lambda)(2 - 4x) = 0,$$

$$(1 - \lambda)(-2 - 4y) \leq 0, y(1 - \lambda)(-2 - 4y) = 0, \lambda \geq 0, \lambda(2x - 2y - 2x^2 - 2y^2) = 0,$$

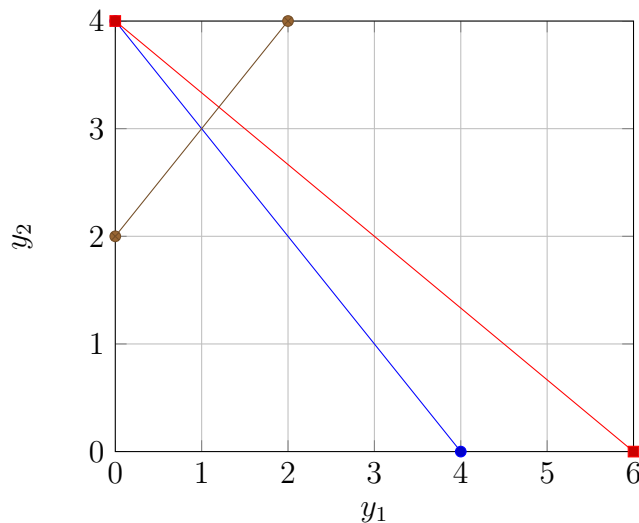
кроме того, должны быть выполнены ограничения  $x, y \geq 0, 2x - 2y - 2x^2 - 2y^2 \geq 0$ .

Решением этой системы является комбинация выпусков  $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$ . Заметим, что в этом случае  $\lambda = 0$ . Множество, заданное неравенствами является компактом (представляет собою сегмент круга), поэтому применение теоремы Вейерштрасса возможно и найденная критическая точка является точкой максимума.

**3.1.** Сформулируем двойственную задачу. Матрица ограничений исходной задачи имеет вид  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . В двойственной задаче будет максимизироваться функция  $-y_1 + 5y_2$  по неотрицательным двойственным переменным, удовлетворяющим

ограничениям, записанным в матричной форме  $A^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Изобразим допустимое множество на плоскости переменных  $(y_1, y_2)$  (см. рисунок), пока без учета неравенства  $\lambda y_1 + y_2 \leq 1$ .



Уравнение  $\lambda y_1 + y_2 = 1$  при варьировании параметра  $\lambda$  определяет пучок прямых проходящих через точку  $(0, 1)$ . Без учета этого уравнения (неравенства из системы ограничений) допустимое множество представляет собою четырехугольник, заданный неравенствами  $D = \{y_1, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 \leq 4, y_2 \leq 2 + y_1\}$ . В зависимости от знака  $\lambda$  результирующим допустимым множеством будет являться либо часть множества  $D$ , лежащая над прямой  $\lambda y_1 + y_2 = 1$ , или же под нею. Чтобы найти максимальное значе-

ние двойственной целевой функции, необходимо рассмотреть следующие диапазоны значений параметра  $\lambda$ : (1)  $-\infty < \lambda \leq -2$ , (2)  $-2 < \lambda \leq 1/5$ , (3)  $\lambda > 1/5$ . Целевая функция принимает равные значения в точках прямой  $-y_1 + 5y_2 = C$ , тем самым, выбирая наибольшее возможное значение  $C$ , мы сдвигаем посредством параллельного переноса прямую  $y_2 = \frac{1}{5}y_1$ , до тех пор, пока она имеет хотя бы одну общую точку с допустимым множеством. При значениях  $\lambda$  из первого диапазона, максимум целевой функции достигается в вершине четырехугольника  $D$ , а именно в точке  $(1, 3)$ . Тогда минимум целевой функции прямой (исходной) задачи равен 14. При росте значения  $\lambda$ , прямые из пучка, заданного  $\lambda y_1 + y_2 = 1$  поворачиваются вокруг общей вершины по часовой стрелке. В диапазоне (2) максимум достигается в точке пересечения прямых  $\lambda y_1 + y_2 = 1$  и  $y_1 + y_2 = 4$ . Тогда оптимальное значение равно  $\frac{2-20\lambda}{1-\lambda}$ , т.к. оно вычисляется в  $(\frac{3}{1-\lambda}, \frac{1-4\lambda}{1-\lambda})$ . Наконец, для всех остальных значений  $\lambda$  максимум достигается в  $(0, 1)$ . Оно равно 5. По теореме двойственности, все найденные максимальные значения функции в двойственной задаче совпадают с минимальными значениями функции прямой задачи.

*В этом разделе мы не рассматриваем упражнения по решению уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью – квазиполиномом, т.к. они разобраны в задачниках и пособиях по ДУ.*

**4.1.** В условии задачи эластичность положительна, поэтому воспользуемся формулой эластичности с учетом знака  $\varepsilon = -\frac{dq}{dp} \frac{p}{q}$ . Нам нужно решить задачу Коши, проинтегрировав уравнение первого порядка с начальным значением.

$$-\frac{dq}{dp} \frac{p}{q} = \frac{p^2}{p^2 + 4p + 3}, q(1) = 1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными  $-\int \frac{dq}{q} = \int \frac{pdp}{p^2+4p+3}$ . Представляя дробь  $\frac{p}{p^2+4p+3}$  в виде суммы элементарных дробей  $\frac{p}{p^2+4p+3} = \frac{-1/2}{p+1} + \frac{3/2}{p+3}$ , интегрируем, оставляя константу интегрирования в виде множителя  $q(p) = C \frac{\sqrt{p+1}}{(p+3)^{3/2}}$ . Начальное

условие позволяет определить константу  $C = 4\sqrt{2}$ . Окончательно,  $q(p) = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{p+1}}{(p+3)^{3/2}}$ .

**4.2.** Преобразуем уравнение к виду  $\frac{dN}{N(\alpha-\beta\sqrt{N})} = dt$ , т.е. переменные разделились. Введя замену переменной  $x = \sqrt{N}$ , можем проинтегрировать левую часть уравнения, тогда

$\frac{2}{\alpha} \ln \frac{\sqrt{N}}{\alpha-\beta\sqrt{N}} = t + C$ , где  $C$  константа интегрирования. После ряда алгебраических операций получаем решение уравнения  $N(t) = \left( \frac{\alpha}{\beta + \gamma \exp(-\frac{\alpha}{2}t)} \right)^2$ , где  $\gamma$  константа, которую можно было бы определить, зная  $N(0)$ . Но в условии это значение не задано, поэтому оставим формулу как есть. При стремлении  $t$  к бесконечности численность населения  $N(t)$  стремится к  $\left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2$ , т.е. к конечному пределу.

**4.3.** Из замены  $x = \cos t$  следует, что  $1 - x^2 = \sin^2 t$ ,  $\dot{y} = y'(-\sin t)$ ,  $\ddot{y} = y'(-\cos t) + y'' \sin^2 t$ .

Внимательно посмотрев на уравнение замечаем, что оно имеет вид  $\ddot{y} + y = 0$ .

Находим корни характеристического уравнения  $\lambda = \pm i$ . Отсюда общее решение, как функция от  $t$ , имеет вид

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

В данном случае  $t = \pm \arccos x + 2\pi$ . После подстановки получаем:

$$y(x) = C_1 \cos(\arccos x) + C_2 \sin(\arccos x) = C_1 x + C_2 \sqrt{1 - x^2}$$

**5.1.** Сначала найдем в матрице строго доминируемые стратегии. С точки зрения второго игрока, стратегия  $D$  строго доминирует стратегию  $E$ . В равновесии Нэша не используются строго доминируемые стратегии, поэтому стратегию  $E$  можно вычеркнуть.

Применяя аналогичные рассуждения к матрице без столбца  $E$ , обнаруживаем, что стратегия  $A$  первого игрока доминирует стратегию  $B$ . Следовательно, стратегию  $B$  также можно вычеркнуть.

Результате мы получили матрицу с меньшим числом стратегий:

	D	F
A	3;4	1;0
C	0;2	5;6

Находим равновесия Нэша в чистых стратегиях:  $(A, D)$  и  $(C, F)$ .

Ищем равновесия в смешанных стратегиях. Пусть первый игрок использует стратегию  $A$  с вероятностью  $p$  и стратегию  $C$  с вероятностью  $(1 - p)$ . Пусть второй игрок использует стратегию  $D$  с вероятностью  $q$  и стратегию  $F$  с вероятностью  $(1 - q)$ .

Находим ожидаемый выигрыш первого игрока:

$$\mathbb{E}(u_1) = 3pq + 1p(1-q) + 0(1-p)q + 5(1-p)(1-q) = \dots = 5 + 7pq - 4p - 5q = p(7q - 4) + 5 - 5q$$

Получаем кривую реакции первого игрока:

$$p = \begin{cases} 1, & 7q - 4 > 0, q > 4/7 \\ [0; 1], & 7q - 4 = 0, q = 4/7 \\ 0, & 7q - 4 < 0, q < 4/7 \end{cases}$$

Аналогично находим ожидаемый выигрыш второго игрока:

$$\mathbb{E}(u_2) = 4pq + 0p(1-q) + 2(1-p)q + 6(1-p)(1-q) = \dots = 6 + 10pq - 6p - 4q = q(10p - 6) + 6 - 4q$$

И его кривую реакции:

$$q = \begin{cases} 1, & 10p - 6 > 0, p > 6/10 \\ [0; 1], & 10p - 6 = 0, p = 6/10 \\ 0, & 10p - 6 < 0, p < 6/10 \end{cases}$$

Точки пересечения кривых реакции дадут равновесия Нэша. Получаем три равновесия Нэша в смешанных стратегиях,  $(p = 0, q = 0)$ ,  $(p = 1, q = 1)$  и  $(p = 6/10, q = 4/7)$ .

Заметим, что эти три смешанных равновесия включают в себя два ранее найденных



чистых равновесия. А именно, вероятности  $(p = 0, q = 0)$  соответствуют профилю стратегий  $(C, F)$ , а вероятности  $(p = 1, q = 1)$  соответствуют профилю стратегий  $(A, D)$ . Вероятности  $(p = 6/10, q = 4/7)$  также можно записать в виде профиля стратегий  $(\frac{6}{10}A + \frac{4}{10}C, \frac{4}{7}D + \frac{3}{7}F)$

5.2. Матрица игры имеет вид:

	Камень	Бумага
Камень	0,0	-1,1
Ножницы	-1,1	1,-1
Бумага	1,-1	0,0

Замечаем, что стратегия Бумага первого игрока строго доминирует стратегию Камень. В равновесии Нэша строго доминируемые стратегии не используются, поэтому вычеркиваем стратегию Камень первого игрока. Получаем матрицу:

	Камень	Бумага
Ножницы	-1,1	1,-1
Бумага	1,-1	0,0

Замечаем, что равновесий в чистых стратегиях нет, ищем равновесия в смешанных стратегиях. Пусть первый игрок использует стратегию Ножницы с вероятностью  $p$  и стратегию Бумага с вероятностью  $(1 - p)$ . Пусть второй игрок использует стратегию Камень с вероятностью  $q$  и стратегию Бумага с вероятностью  $(1 - q)$ .

Находим ожидаемый выигрыш первого игрока:

$$\mathbb{E}(u_1) = -pq + 1p(1 - q) + 1(1 - p)q + 0(1 - p)(1 - q) = \dots = p + q - 3pq = p(1 - 3q) + q$$

Получаем кривую реакции первого игрока:

$$p = \begin{cases} 1, & 1 - 3q > 0, q < 1/3 \\ [0; 1], & 1 - 3q = 0, q = 1/3 \\ 0, & 1 - 3q < 0, q > 1/3 \end{cases}$$

Аналогично находим ожидаемый выигрыш второго игрока:

$$\mathbb{E}(u_2) = +pq - 1p(1-q) - 1(1-p)q + 0(1-p)(1-q) = \dots = -p - q + 3pq = q(3p-1) - p$$

И его кривую реакции:

$$q = \begin{cases} 1, & 3p-1 > 0, p > 1/3 \\ [0; 1], & 3p-1 = 0, p = 1/3 \\ 0, & 3p-1 < 0, p < 1/3 \end{cases}$$

Точки пересечения кривых реакции дадут равновесия Нэша. Получаем одно равновесие Нэша ( $p = 1/3, q = 1/3$ ). Его также можно записать в виде профиля стратегий  $(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}C, \frac{1}{3}D + \frac{2}{3}F)$

**5.3.** If the second player choses his move according continuous distribution function  $F$  then the expected payoff of the first player for the bribe  $b$  is equal to

$$1 \cdot P(b_2 \leq b) - b = 1 \cdot F(b) - b$$

If a rational player uses mixed strategies he is indifferent between the corresponding pure strategies. That means that  $F(b) - b = \text{const}$  for pure strategies that are mixed. For pure strategies that are mixed the density function  $f(b) = F'(b) = 1$ . Do I know such a random variable? Yes, I know! A uniform on  $[0; 1]$ .

**5.4.** Чтобы почувствовать задачу, сначала полезно просто рассмотреть несколько профилей стратегий «от фонаря» и проверить, являются ли они равновесиями Нэша.

Например, рассмотрим профиль  $(s_1 = 300, s_2 = 200)$ . Здесь  $s_1 + 2s_2 \leq 1000$  и каждый игрок получает столько денег, сколько запросил. Однако профиль равновесием Нэша не является, т.к., например, первому игроку выгодно отклониться и выбрать  $s_1 = 600$ . Второму игроку также выгодно отклониться от данного профиля.

Например, рассмотрим профиль  $(s_1 = 500, s_2 = 400)$ . Здесь  $s_1 + 2s_2 > 1000$ , поэтому игроки денег не получают. Естественно, обоим игрокам выгодно отклониться

и запросить меньше денег. Например, первому выгодно выбрать  $s_1 = 200$ .

Если всё наследство израсходовано, то ни один игрок не сможет получить больше и такая ситуация будет равновесием Нэша. Т.е. любой профиль  $(s_1, s_2)$ , где  $s_1 + 2s_2 = 1000$  является равновесием Нэша.

Также есть равновесия Нэша, где оба игрока супер-жадные, т.е. профили вида  $(s_1, s_2)$ , где  $s_1 \geq 1000$  и  $s_2 \geq 500$ . Ни один игрок не может в одиночку отклониться и получить положительный выигрыш.

**5.5.** По условию, первый игрок использует стратегию вида  $b_1 = k_1 \cdot v_1$ , а второй игрок — стратегию виду  $u_2 = k_2 \cdot v_2$ .

Выпишем ожидаемый выигрыш первого игрока. Здесь следует помнить, что с точки зрения первого игрока, значение  $v_1$  — известная величина, а  $v_2$  — неизвестная равномерно распределенная случайная величина.

$$u_1(k_1, k_2) = \mathbb{P}(b_1 > b_2)(v_1 - \frac{b_1 + \mathbb{E}(b_2 \mid b_1 > b_2)}{2}) + \mathbb{P}(b_1 < b_2)\frac{b_1 + \mathbb{E}(b_2 \mid b_1 < b_2)}{2}$$

**5.6.** Сначала выпишем функции выигрыша игроков. Пусть первый игрок кладёт в шкатулку  $x_1$  евро, а второй —  $x_2$ . Тогда выигрыш первого игрока равен

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{a(x_1 + x_2)}{2} - x_1 = \frac{ax_2 + (a - 2)x_1}{2}$$

В силу симметрии выигрыш второго игрока равен

$$u_2(x_1, x_2) = \frac{a(x_1 + x_2)}{2} - x_2 = \frac{ax_1 + (a - 2)x_2}{2}$$

Уже заметно, что возникает три случая:  $a \in (1; 2)$ ,  $a = 2$ ,  $a > 2$ . Рассмотрим их по порядку.

1. Случай  $a \in (1; 2)$ . В этом случае выигрыш каждого игрока отрицательно зависит от количества денег, которое он положит. Это значит, что стратегия «не класть денег» строго доминирует любую другую стратегию. Поскольку в равно-

весии Нэша не может играть строго доминируемая стратегия, мы получаем единственное равновесие Нэша:  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ .

2. Случай  $a > 2$ . В этом случае выигрыш каждого игрока положительно зависит от количества денег, которое он положит. Это значит, что стратегия «класть все деньги» строго доминирует любую другую стратегию. Поскольку в равновесии Нэша не может играть строго доминируемая стратегия, мы получаем единственное равновесие Нэша:  $(x_1 = 100, x_2 = 100)$ .
3. Случай  $a = 2$ . В этом случае выигрыш каждого игрока не зависит от количества денег, которое он положит. В этом случае любой набор чистых или смешанных стратегий является равновесием Нэша.

**5.7.** Равновесия в чистых стратегиях: все называют арбуз, все называют баклажан. Других нет, т.к. игрок, назвавший не то, что другие два хочет отклониться.

Допустим что в равновесии Нэша игрок выбирает арбуз с вероятностью  $a$ . Тогда условие безразличия первого игрока имеет вид

$$10a^2 = 5(1 - a)^2$$

Находим корни  $a = -1 \pm \sqrt{2}$ . Подходит только один,  $a = \sqrt{2} - 1$ .

Арбуз лучше баклажана, поэтому в равновесии имеет смысл выбирать баклажан, только если другие игроки выбирают его достаточно часто. Поэтому в равновесии арбуз будет выбираться с вероятностью меньше  $1/2$ , и действительно,  $\sqrt{2} - 1 < 1/2$ .

**5.8.** Обозначим  $n_i$  количество игроков, которые выбирают число  $i$ . Все равновесия Нэша делятся на два вида. Во-первых, равновесия, где не выигрывает ни один игрок. Это возможно, если общее количество игроков четно и  $n_1 = n_2 = \dots = 2$ . Во-вторых равновесия, в которых есть ровно один победитель. Допустим победитель назвал число  $k$ , тогда  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$  должны быть больше одного.

Ищем равновесия в смешанных стратегиях. Допустим игрок называет число  $i$  с вероятностью  $p_i$ . Чтобы игроку было все равно что называть:

$$(1 - p_1)^2 = p_1^2 + (1 - p_1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + (1 - p_1 - p_2 - p_3)^2 = \dots$$

Получаем уравнение:  $p_k^2 + p_{k+1}^2 = 2p_{k+1}(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_k)$

Ищем решение в виде геометрического распределения  $p_k = \frac{1-p}{p} p^k$ , получаем уравнение на  $p$ ,  $p^3 + p^2 + p - 1 = 0$

Решать это уравнение не требуется, но для эстетического удовольствия

$$p = \left( \frac{1}{9} \sqrt{11} \sqrt{3} + \frac{17}{27} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9 \left( \frac{1}{9} \sqrt{11} \sqrt{3} + \frac{17}{27} \right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}$$

Лотерея оказалась неустойчива к сговору игроков.

**5.9.** Чистые равновесия Нэша: любой набор где названа единица хотя бы одним игроком, кроме случая, когда все трое называли единицу.

Допустим игроки называют единицу, двойку и тройку с вероятностями  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ .

Ожидаемый выигрыш от выбора единицы, двойки и тройки первым игроком равны, соответственно,

$$\begin{cases} u_1 = 2(1 - p_1)^2 + 0 \cdot p_1^2 - 1 \cdot (1 - (1 - p_1)^2 - p_1^2) \\ u_2 = 2(p_1^2 + p_3^2) + 0 \cdot p_2^2 - 1 \cdot (1 - p_1^2 - p_3^2 - p_2^2) \\ u_3 = 2(p_1^2 + p_2^2) + 0 \cdot p_3^2 - 1 \cdot (1 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) \end{cases}$$

Приравнивая эти три выражения и помня об условии  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  находим вектор вероятностей  $(0.5; 0.25; 0.25)$

**5.10.** Ситуацию, когда ни одна партия не получает денег обозначим за нулевую уровень выигрыша. Тогда согласно условию задачи

	за	против
за	0,0	1,-1
против	-1,1	0,0

Т.е. в равновесии Нэша обе партии голосуют «за» и денег не получают

**5.11.** Записываем игру в матричной форме. Ситатунга и Вилорог — виды антилоп

:)

	Большая Ситатунга	Маленький Вилорог
Большая Ситатунга	$a/2, a/2$	$a, 1$
Маленький Вилорог	$1, a$	$1/2, 1/2$

Если  $a > 2$ , то единственное равновесие (Большая Ситатунга, Большая Ситатунга). Если  $a \in (1; 2)$ , то в равновесии тигры гонятся за разными антилопами. И в особом случае  $a = 2$ , равновесны все исходы, кроме одновременного выбора Маленького Вилорога.

В смешанных стратегиях при  $a > 2$  других равновесий не появляется. При  $a = 2$  в равновесии Нэша один из тигров обязательно гонится за Большой Ситатунгой с вероятностью один, а стратегия другого — произвольная. При  $a \in (1; 2)$  получаем помимо чистых равновесий Нэша еще одно в смешанных стратегиях из условия безразличия

$$\frac{a}{2}p + a(1-p) = 1 \cdot p + \frac{1}{2}(1-p)$$

Отсюда находим вероятность погони за Большой Ситатунгой в смешанном равновесии,  $p = \frac{2a-1}{a+1}$ .

**5.12.** В чистых стратегиях в равновесии один человек звонит, остальные не звонят.

В смешанном равновесии каждый игрок безразличен между чистыми стратегиями. Отсюда получаем уравнение

$$1 - c = 1 - (1 - p)^{n-1}$$

Решая его, находим вероятность звонка отдельным человеком  $p^* = 1 - c^{\frac{1}{n-1}}$ . Соответственно, вероятность получения пострадавшим помощи равна  $1 - (1 - p^*)^n = 1 - c^{\frac{n}{n-1}}$ . Обе эти функции убывают с ростом  $n$ .

Находим предел,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - c^{\frac{n}{n-1}} = 1 - c$ .

Примеров этому равновесию в жизни, к сожалению, можно найти много, в част-

ности поймать попутку на оживленной дороге бывает труднее, чем на проселочной.

**5.13.** У первой задачи оптимизации получается внутреннее решение  $(m_1, d_1) = (14/3, 16/3)$ ,  $(m_2, d_2) = (2/3, 16/3)$ .

У второй задачи оптимизации выходит угловое решение  $(m_1, d_1) = (5, 5)$   $(m_2, d_2) = (0, 2)$ .

Оба равновесия не являются Парето-оптимальными.

**5.14.** Одинокий Мудрый таракан всегда ищет истину. Чем же ему ещё заниматься :)

Зададимся вопросом, когда всем тараканам выгодно искать Истину? Если один таракан не ищет истину, а остальные ищут, то его полезность равна  $1 - (1 - a)^{n-1}$ . Если и он начинает искать, то его полезность равна  $1 - (1 - a)^n - c$ . Ленивому мудрецу среди  $n$  тараканов лучше начинать работать, если

$$1 - (1 - a)^{n-1} < 1 - (1 - a)^n - c$$

После преобразований получаем

$$n < 1 + \log_{1-a}(c/a)$$

Таким образом в равновесии Нэша в чистых стратегиях Истину ищут  $\lfloor 1 + \log_{1-a}(c/a) \rfloor$  тараканов. Если общее количество тараканов меньше этой границы, то ищут все.

В симметричном смешанном равновесии каждый таракан ищет Истину с вероятностью  $p^*$ . Условие безразличия для первого таракана выглядит как:

$$1 - (1 - pa)^n - c = 1 - (1 - pa)^{n-1}$$

После упрощения получаем

$$1 - p^*a = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

С ростом  $n$  видно, что  $p^*$  падает.

Вероятность нахождения Истины хотя бы одним тараканом равна

$$1 - (1 - pa)^n = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

И тоже убывает с ростом  $n$ .

Из этой задачи в частности следует мораль, что если в группе слишком много человек, более  $\lfloor 1 + \log_{1-a}(c/a) \rfloor$ , то в ней будут лодыри.

**5.15.** Если моста нет, то есть два пути,  $ABD$  и  $ACD$ . В равновесии Нэша каждым путем едут три машины, поэтому в пути они тратят 49 минут каждая.

Если мост построен, то заметим, что при любом количестве машин путь  $BD$  быстрее пути  $CD$ , а путь  $AC$  быстрее пути  $AB$ . Значит в равновесии Нэша все едут путем  $ACBD$  и каждый тратит на него 62 минуты.

Данный пример является упрощением, но тем не менее демонстрирует, что строительство новой дороги может увеличить количество пробок.