Решение краевых задач

При решении дифференциальных уравнений высших порядков или систем уравнений часто получаются задачи, когда условия задаются при двух значения независимой переменной (на концах рассматриваемого отрезка). Такие задачи называются **краевыми.** В общем случае уравнение может быть нелинейным, в этом задании мы ограничимся рассмотрением только линейных ДУ.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка может быть записано следующим образом:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + f(x) = 0; \qquad 0 < x < l \tag{1}$$

Краевые условия в общей форме запишем в виде:

$$-\alpha_1 \frac{dy(0)}{dx} + \beta_1 y(0) = \gamma_1 \tag{2}$$

$$\alpha_2 \frac{dy(l)}{dx} + \beta_2 y(l) = \gamma_2 \tag{3}$$

Здесь x – независимая переменная, изменяющаяся от $x = 0$ до $x = l$; $y = y(x)$ – искомая функция; $p(x), q(x)$ и $f(x)$ – заданные функции, которые чаще всего на промежутке $x \in [0, l]$ являются непрерывными; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ – заданные числа, определяющие вид граничных условий (2) - (3). Требуется найти такое решение $y(x)$ уравнения (1), которое при стремлении x к точке $x = 0$ справа удовлетворяло бы граничному условию (2), а при стремлении x к правой границе $x = l$ слева (изнутри области) – удовлетворяло бы правому граничному условию (3).

Существуют различные частные случаи граничных условий (2) – (3) Так, например, если $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 1$, то говорят, что задано граничное условие первого рода: $y(0) = \gamma_1$; если, например, $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$, то говорят, что на границе задано граничное условие второго рода $y'(l) = \gamma_2$. Если, например, $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$, то говорят, что на границе $x = 0$ задано граничное условие третьего рода. В этом случае при корректной постановке задачи коэффициенты при y и y' в левом граничном условии должны быть различных знаков, а в правом – одного и того же знака, что и отражено в записи граничных условий (2) -(3).

Численные методы решения краевых задач делятся на две группы. К первой группе можно отнести такие методы, когда решение краевой задачи сводится к решению нескольких (двух) задач Коши. Известно, что решение задач Коши можно реализовать с любой заданной точностью различными методами (мы ранее рассмотрели методы Эйлера, Адамса и Рунге-Кутта).

Ко второй группе методов решения краевых задач относится метод конечных разностей. При этом дифференциальные операторы заменяются разностными (чаще всего, на равномерной сетке), и задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом точность результатов оценивается путем двойного расчета при различных шагах сетки (часто при h и h/2).

Метод стрельбы (пристрелки)

Данный метод относится к первой группе и позволяет решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Пусть дана краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0, \qquad 0 < x < l \tag{4}$$

С граничными условиями в виде

$$y(0) = a \tag{5}$$

$$y(l) = b \tag{6}$$

Приведем задачу (4) – (6) к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем обозначение $y' = z$, тогда уравнение (4) перепишется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -p(x)z - q(x)y - f(x). \end{cases} \tag{7}$$

Исходное дифференциальное уравнение второго порядка (4) преобразовалось в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка (7). Для решения (7) необходимо два начальных условия. В случае, если будут определены начальные условия, задача (7) с двумя начальными условиями будет являться задачей Коши. Одно начальное условие для системы уравнений (7) задано в исходной постановке уравнением (5). Для разрешимости (7) необходимо второе условие, соответствующее функции $z(x)$ в координате $x = 0$.

$$y(0) = a \tag{8}$$

$$z(0) =? \tag{9}$$

Задача (7) – (9) есть задача Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

По смыслу значение функции $z(0)$ определяет тангенс угла наклона функции $y(x)$ при $x = 0$. Если в качестве начального значения функции $z(x)$ задать произвольное значение $z(0) = \lambda$, и решить задачу (7) – (9) численно, одним из методов, рассмотренных нами ранее, то в координате $x = l$ будет вычислено некоторое значение $y(l) = y_n$. Очевидно, что при случайном выборе $z(0) = \lambda$ величина $y(l) = y_n \neq b$, что противоречит начальному условию (6) исходной задачи. При изменении параметра λ для граничного условия

$z(0) = \lambda_1$ решение задачи (7) дает отличное от предыдущего значение исходной функции на правой границе, $y(l) = y_{n,1}$. Исходя из этого, можно использовать следующий алгоритм расчета. Вычисляются значения $y(l)$ при $z(0) = \lambda$ и $z(0) = \lambda_1$. Проводится анализ, как при изменении величины λ, изменилась величина y_n: стала ли она «ближе» к величине b, или «дальше». По результатам анализа определяется новая величина параметра λ и повторяется расчет. Многократным заданием величины λ добиваемся совпадения вычисленной величины y_n с величиной b с заданной точностью расчета.

Такой метод расчета называется методом «стрельбы» или «пристрелки». Название пошло из баллистики артиллерийский снарядов, когда путем выстрелов с «недолетом» и «перелетом» третьим выстрелом цель (в нашем случае это величина функции $y(l) = y_n$) поражается.

В случае, когда на левой границе ($x = 0$) задано условие второго рода ($y'(0) = a$), в качестве начальных условий (8) – (9) выступают уравнения: $y(0) = \lambda, z(0) = a,$. Варьируемой величиной является значение исходной функции на границе $x = 0$. Алгоритм расчета при этом не меняется. В случае, когда на правой границе ($x = l$) задано значение производной ($y'(l) = b$), в расчетах с величиной b необходимо сравнивать полученное для разных величин λ значение z_n.

Метод конечных разностей

Наиболее универсальным и достаточно популярным численным методом решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей. Основное содержание метода заключается в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией). Решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки. Обоснованность замены дифференциального уравнения разностным, точность получаемых решений, устойчивость метода – важнейшие вопросы, которые требуют тщательного рассмотрения перед выбором данного метода. Рассмотрим содержание метода на примере решения дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{10}$$

при заданных граничных условиях

$$y(0) = y_0, y(1) = y_1. \tag{11}$$

Разобьем отрезок [0, 1] на n равных частей точками $x_i = ih, (i = 0, 1, \ldots, n)$. Решение краевой задачи (10), (11) сведем к вычислению значений сеточной функции y_i в узловых точках x_i. Для этого воспользуемся уравнением (11) для внутренних узлов:

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)), i = 1, 2, ..., n-1. \tag{12}$$

Заменим производные, входящие в эти соотношения, их конечноразностными аппроксимациями:

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \\ y''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя эти выражения в (11), получаем систему разностных уравнений

$$F(x_i, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}) = 0, i = 1, 2, ..., n-1. \tag{14}$$

являющуюся системой $(n-1)$ алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции $y1, y2, \ldots, y_{n-1}$. Входящие в данную систему y_0 (при $i = 1$) и y_n (при $i = n-1$) выбираются из граничных условий (11):

$$y_0 = y(0), \qquad y_n = y(1).$$

На практике часто граничные условия задаются в более общем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) &= A, \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y'(1) &= B. \end{aligned} \tag{15}$$

В этом случае граничные условия также должны представляться в разностном виде путем аппроксимации производных $y'(0)$ и $y'(1)$ с помощью конечно-разностных соотношений. Если использовать односторонние разности (соответствующий шаблон показан на рис. а), при которых производные аппроксимируются с первым порядком точности, то разностные граничные условия примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B. \end{aligned} \tag{16}$$

Из этих соотношений легко находятся значения y_0 и y_n.

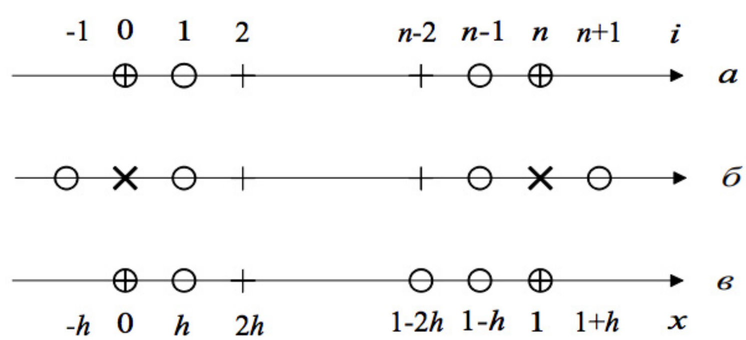

Рис. 1: Рис. Аппроксимация граничных условий

Однако, как правило, предпочтительнее аппроксимировать производные, входящие в (15), со вторым порядком точности с помощью центральных разностей

$$y'(0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + O(h^2), \quad y'(1) = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = O(h^2).$$

В данные выражения входят значения сеточной функции y_{-1} и y_{n+1} в так называемых фиктивных узлах $x = -h$ и $x = 1+h$, лежащих вне рассматриваемого отрезка (рис. b). В этих узлах значения искомой функции также должны быть найдены. Следовательно, количество неизвестных значений сеточной функции увеличивается на два. Для замыкания системы привлекают еще два разностных уравнения (14) при $i = 0$ и $i = n$.

Аппроксимировать граничные условия со вторым порядком можно и иначе (рис. в). В этом случае используются следующие аппроксимации:

$$y'(0) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2),$$
$$y'(1) = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + O(h^2).$$

Таким образом, решение краевой задачи для дифференциального уравнения сведено к решению системы алгебраических уравнений вида (14). Эта система является линейной или нелинейной в зависимости от того, линейно или нелинейно, искомое дифференциальное уравнение.

Для нелинейной системы необходимо использовать специальные методы, в том числе итерационные.

Для решения линейной системы уравнений (14) используется метод прогонки.

Линейная система равнений (14) приводится к виду

$$\begin{cases} B_0 y_0 + C_0 y_1 = F_0, \\ A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \\ A_n y_{n-1} + B_n y_n = F_n. \end{cases} \tag{17}$$

Система уравнений (17) имеет ненулевые элементы матрицы коэффициентов только на трех диагоналях (трехдиагональная матрица).

$$\begin{vmatrix} B_0 & C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 & & & 0 \\ & & .... & .... & .... & & \\ 0 & 0 & 0 & & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & A_n & B_n \end{vmatrix}$$

Такую систему уравнений удобнее всего решать методом прогонки. Будем искать решение системы уравнений в виде:

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i \tag{18}$$

Здесь α_k и β_k – неизвестные коэффициенты, обычно называемые в литературе «прогоночные коэффициенты» или «коэффициенты прогонки». Равенство (18) имеет место при всех i, поэтому можно записать

$$y_{i-1} = \alpha_{i-1} y_i + \beta_{i-1} \tag{19}$$

Подставим (19) в (17), получим:

$$A_i(\alpha_{i-1}y_i + \beta_{i-1}) + B_i y_i + C_i y_{i+1} = F_i$$

И перепишем его в форме (18):

$$y_i = -\frac{C_i}{A_i\alpha_{i-1} + B_i} y_{i+1} + \frac{F_i - A_i B_{i-1}}{A_i\alpha_{i-1} + B_i} \tag{20}$$

Сравнение (20) и (18) дает рекуррентные соотношения для определения прогоночных коэффициентов α_i и β_i:

$$\alpha_i = -\frac{C_i}{A_i\alpha_{i-1} + B_i}, \quad \beta_i = \frac{F_i - A_i\beta_{i-1}}{A_i\alpha_{i-1} + B_i}, \quad i = 1, 2, ..., n-1 \tag{21}$$

Недостающие коэффициенты α_0 и β_0 определяются из первого граничного условия (17):

$$y_0 = -\frac{C_0}{B_0} y_1 + \frac{F_0}{B_0} = \alpha_0 y_1 + \beta_0.$$

Откуда

$$\alpha_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \beta_0 = \frac{F_0}{B_0}. \tag{22}$$

Для точки $i = n - 1$ справедливо уравнение

$$y_{n-1} = \alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1}. \tag{23}$$

Привлекая второе граничное условие из (17)

$$A_n y_{n-1} + B_n y_n = F_n \tag{24}$$

решаем систему уравнений (23) (24) относительно y_n и находим

$$y_n = \frac{F_n - A_n\beta_{n-1}}{A_n\alpha_{n-1} + B_n}. \tag{25}$$

Таким образом, схема решения системы уравнений (17) состоит в следующей последовательности действий:

1. По формулам (22) вычисляем α_0 и β_0.

2. По реккурентным формулам (21) вычисляем последовательно $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$.

3. По формуле (25) определяем y_n.

4. По формуле (18) вычисляем $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_0$.

После выполнения действий 1 – 4 все значения y_i будут определены.

Задание

Решить краевую задачу (см. ниже) на отрезке двумя методами (метод Стрельбы и метод конечных разностей). Число разбиений n=100.

$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -\frac{1}{5} + e^{\pi} - \frac{6}{5}e^{2\pi}$

$p(x) = -3, q(x) = 2, f(x) = -2sin(x)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + f(x) = 0; \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$-\alpha_1\frac{dy(0)}{dx} + \beta_1 y(0) = \gamma_1 \quad \alpha_2\frac{dy(\pi)}{dx} + \beta_2 y(\pi) = \gamma_2$$

Если есть сложности с использованием граничных условий третьего рода, можно решить задачу для более простых граничных условий.

$$y(0) = 0 \qquad\qquad y(1) = e^{\pi} - \frac{8}{5}e^{2\pi} - \frac{3}{5}$$