Задача двух тел

Уравнение движения

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{\varkappa^2}{r^3}\,\bar{r} = 0$$

$$\varkappa^2_{\text{♁}} = 3.986 \cdot 10^{14} m^3/c^2$$

$$\varkappa^2_{\odot} = 1.327 \cdot 10^{20} m^3/c^2$$

$$\varkappa_{\odot} = 0.017202\,\text{а.е.}^3/\text{сутки}^2$$

Именно это последнее значение $\varkappa_{\odot}$ нужно использовать для вычисления эфемериды.

Интегралы

- площадей

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \varkappa \bar{c}$$

- энергии

$$\dot{\bar{r}}^2 = \varkappa^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Уравнение орбиты

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad (1)$$

$$p = c^2 = a(1 - e^2)$$

$$r_\pi = a(1 - e)$$

Построение эфемерид

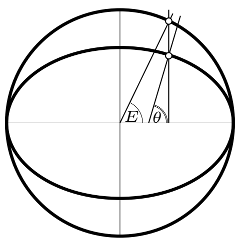
Эфемеридой называется таблица геоцентрических положений небесного тела для (равноотстоящих) моментов времени. Имея эфемериду, можно находить положения для промежуточных моментов. Поисковая эфемерида должна обеспечить возможность поиска и наблюдения небесного тела, точность $1'$ вполне достаточна (4–5 знаков). Точные эфемериды вычисляются, например, для сравнения наблюдений с теорией (доли секунд).

$$\bar{r} = \bar{r}(t, \text{э}),$$
$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \delta\end{pmatrix}(t, \text{э})$$

Некоторые соотношения

Введем эксцентрическую аномалию (рис.):

$$\begin{aligned} \xi &= r\cos\theta \\ \eta &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (2)$$



или

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e) \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{aligned} \qquad (3)$$

№1. Доказать:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \tag{4}$$

Вспомним интеграл площадей:

$$\dot{\bar{r}} \times \bar{r} = \bar{c}$$

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = \varkappa c_z$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \varkappa\sqrt{a(1-e^2)}$$

$$r\,d\theta = a\sqrt{1-e^2}dE$$

Отсюда

$$(1 - e\cos E)dE = \varkappa a^{-3/2}dt$$

Уравнение Кеплера:

$$E - e\sin E = \varkappa a^{-3/2}dt = n\left(t - t_0\right) + M_0$$

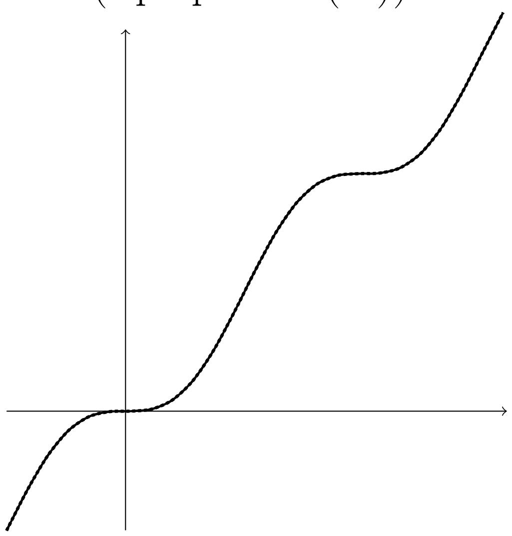
№2. Вычисление эфемерид

1. Определить орбитальные координаты $r, \theta\ (\xi, \eta)$
2. Вычислить гелиоцентрические координаты
3. Получить геоцентрические координаты
4. α, δ

$$
\begin{gathered}
n = \varkappa_{\odot} a^{-3/2}, \\
M = M_0 + n(t - t_0) \\
E - e \sin E = M
\end{gathered}
$$

Последнее уравнение, уравнение Кеплера, — является трансцендентным. (Анализ этого уравнения привело Коши к созданию ТФКП.) Только решение этого уравнения дает возможность связать все интересующие нас небесно-механические величины со временем.

(График $M(E)$).



При $0 \leq e < 1$ очевидны следующие свойства:

1. $M(E)$ — непрерывная функция, определенная на всей числовой оси.

2. $M \underset{E\to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$, $M \underset{E\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ и поскольку M непрерывна, то для любого M существует решение E.

3. $\frac{dM}{dE} = 1 - e\cos E > 0$, то есть функция M строго возрастает

4. Существует обратная функция $E(M)$, которая строго возрастает, поэтому уравнение Кеплера имеет единственное решение.

Уравнение Кеплера решаем методом итераций:

$$E_0 = M,\ E_n = M + e\sin E_{n-1}$$

Вот как уравнение Кеплера решается в системе GPSTk (набор средств для обработки данных GPS):

```
  M = Modulo(M, 2.0*ASConstant::PI);
  if (e<0.8) E=M; else E= ASConstant::PI;

// Iteration
  do
  {
     f = E - e*std::sin(E) - M;
     E = E - f / ( 1.0 - e*std::cos(E) );
     ++i;
     if (i == maxit)
     {
        cerr << " convergence problems in EccAnom" << endl;
        break;
     }
  }
  while (fabs(f) > eps);
```

В своем решении Вы можете использовать свой собственный алгоритм, да и программу можно написать на любом из общепринятых языков (C, C++, Fortran, Python, Perl, ...). Результаты лучше представлять вместе с **работающей** программой, которую можно выполнить на любом компьютере (лучше с Linux), в таком случае проще будет находить возможные ошибки.

Итак, решив уравнение Кеплера, по значению средней аномалии находим эксцентрическую аномалию E, при желании можно по формуле (4) найти истинную аномалию θ.

Орбитальные координаты находим из уравнений (3) или (1) и (2).

2. Вычисление гелиоцентрических координат

Аргумент широты: $u = \theta + \omega$

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) \\ z &= r \sin u \sin i \end{aligned}$$

Экваториальная система координат:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon \\ z' &= y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon \end{aligned}$$

Или, можно записать это преобразование в виде

(P_x,… Q_z легко вычислить

$$\begin{aligned} x' &= \xi P_x + \eta Q_x \\ y' &= \xi P_y + \eta Q_y \\ z' &= \xi P_z + \eta Q_z \end{aligned}$$

3. Вычисление геоцентрических координат

Геоцентрические координаты:

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{\odot}$$

Здесь $\mathbf{r}_{\odot}$ — прямоугольные координаты Солнца на текущий момент, их надо взять из Астрономического Ежегодника. Там же наклон экватора к эклиптике ε.

3. Вычисление α, δ

И, наконец:

$$\begin{aligned} x'' &= \rho'' \cos\delta \sin\alpha \\ y'' &= \rho'' \cos\delta \cos\alpha \\ z'' &= \rho'' \sin\delta \end{aligned}$$

Индивидуальные задания по построению эфемерид нужно взять в архиве `Zadanie-1.tgz`. Элементы орбит сгенерированы случайным образом, нумерация по списку группы.