

ПРАКТИКУМ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Отчет по индивидуальному заданию

Автор: Павел СОВОЛЕВ

4 апреля 2020 г.

Часть 1

Постановка и решение задачи

Описание задачи из «В. В. Витязев — Спектрально-корреляционный анализ равномерных временных рядов», с. 41:

Дан временной ряд $x_k = x(\Delta tk)$, $k = 0, 1, \dots, 2N - 1$, у которого первое и второе, третье и четвертое и т. д. значения попарно совпадают. Докажите аналитически, что периодограмма такого ряда будет симметрична относительно частоты $\nu = 0.5\nu_c = 1/4\Delta t$. Проиллюстрируйте это свойство с помощью программы СКАВРя.

1.1 Представление входных данных

Имеем следующий временной ряд:

$$x_k = x(\Delta tk), \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1, \quad (1)$$

для которого выполняется следующее свойство:

$$x_{2k} = x_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2)$$

Объединяя с (1), получаем систему:

$$\begin{cases} x_k = x(\Delta tk), & k = 0, 1, \dots, 2N - 1; \\ x_{2k} = x_{2k+1}, & k = 0, 1, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (3)$$

полностью описывающую входные данные, соответствующие условию задачи.

1.2 Выполнение преобразования Фурье

Имеем следующую формулу для вычисления периодограммы Шустера:

$$D(\nu) = \frac{1}{4N^2} \left| \sum_{k=0}^{2N-1} x_k e^{-i2\pi\nu\Delta tk} \right|^2. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$X(\nu) := \sum_{k=0}^{2N-1} x_k e^{-i2\pi\nu\Delta tk}, \quad (5)$$

$$X_{Re}(\nu) := Re(X(\nu)) = \sum_{k=0}^{2N-1} x_k \cos(2\pi\nu\Delta tk); \quad (6)$$

$$X_{Im}(\nu) := Im(X(\nu)) = - \sum_{k=0}^{2N-1} x_k \sin(2\pi\nu\Delta tk). \quad (7)$$

Тогда выражение (4) можно будет переписать как

$$D(\nu) = \frac{1}{4N^2} |X(\nu)|^2 = \frac{1}{4N^2} (X_{Re}^2(\nu) + X_{Im}^2(\nu)). \quad (8)$$

1.2.1 Вычисление $X_{Re}^2(\nu)$

Воспользуемся свойством (2), характерным исходному временному ряду (3), и преобразуем выражение (6):

$$X_{Re}(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} [\cos(2\pi\nu\Delta t(2k)) + \cos(2\pi\nu\Delta t(2k+1))]. \quad (9)$$

Воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (10)$$

и преобразуем (9):

$$\begin{aligned} X_{Re}(\nu) &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos \left(\frac{2\pi\nu\Delta t(2k+2k+1)}{2} \right) \cos \left(\frac{2\pi\nu\Delta t(2k-2k-1)}{2} \right) = \\ &= 2 \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)) \cos(\pi\nu\Delta t) = \\ &= 2 \cos(\pi\nu\Delta t) \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \end{aligned} \quad (11)$$

Возведем (11) в квадрат:

$$X_{Re}^2(\nu) = 4 \cos^2(\pi\nu\Delta t) \left[\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)) \right]^2. \quad (12)$$

1.2.2 Вычисление $X_{Im}^2(\nu)$

Аналогично предыдущему пункту получим выражение для $X_{Im}(\nu)$, используя следующее тригонометрическое тождество:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} X_{Im}(\nu) &= - \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} [\sin(2\pi\nu(2k)\Delta t) + \sin(2\pi\nu(2k+1)\Delta t)] = \\ &= -2 \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)) \cos(\pi\nu\Delta t) = \\ &= -2 \cos(\pi\nu\Delta t) \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \end{aligned} \quad (14)$$

Возводя результат в квадрат, получаем:

$$X_{Im}^2(\nu) = 4 \cos^2(\pi\nu\Delta t) \left[\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)) \right]^2. \quad (15)$$

1.2.3 Вычисление $D(\nu)$

Воспользуемся полученными выражениями (12) и (15) для вычисления (8):

$$\begin{aligned} D(\nu) &= \frac{\cos^2(\pi\nu\Delta t)}{N^2} \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

1.3 Поиск симметрии

Рассмотрим подробнее суммы в выражении (16). Введем следующие обозначения:

$$S_{\cos}(\nu) := \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)); \quad (17)$$

$$S_{\sin}(\nu) := \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \quad (18)$$

Проверим наличие симметрии относительно частоты $0.5\nu_c$, где ν_c – частота Найквиста, равная $1/(2\Delta t)$:

$$\begin{aligned} S_{\cos}(\nu_c - \nu) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos(\pi(\nu_c - \nu)\Delta t(4k+1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos\left(\frac{\pi}{2}(4k+1) - \pi\nu\Delta t(4k+1)\right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} S_{\sin}(\nu_c - \nu) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin(\pi(\nu_c - \nu)\Delta t(4k+1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin\left(\frac{\pi}{2}(4k+1) - \pi\nu\Delta t(4k+1)\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Используя формулы приведения, упростим выражения (19) и (20):

$$S_{\cos}(\nu_c - \nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)); \quad (21)$$

$$S_{\sin}(\nu_c - \nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k} \cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \quad (22)$$

Заметим следующее:

$$S_{\cos}(\nu) = S_{\sin}(\nu_c - \nu); \quad (23)$$

$$S_{\sin}(\nu) = S_{\cos}(\nu_c - \nu). \quad (24)$$

Отсюда:

$$S_{\cos}^2(\nu) + S_{\sin}^2(\nu) = S_{\cos}^2(\nu_c - \nu) + S_{\sin}^2(\nu_c - \nu). \quad (25)$$

Следовательно, значения, получаемые внутри квадратных скобок в выражении (16), симметричны относительно частоты, равной половине частоты Найквиста.

Однако значения $D(\nu)$ на частотах ν и $\nu_c - \nu$ не будут совпадать вследствие наличия множителя $\cos^2(\pi\nu\Delta t)/N^2$, также зависящего от частоты ν . Это значит, что пики, имеющиеся на частотах, меньших половины частоты Найквиста, будут отражены на симметричных относительно нее частотах с отличной высотой.

Множитель изменения высоты пика можно вычислить как

$$\Gamma = \frac{\cos^2(\pi(\nu_c - \nu)\Delta t)}{\cos^2(\pi\nu\Delta t)} = \frac{\sin^2(\pi\nu\Delta t)}{\cos^2(\pi\nu\Delta t)}. \quad (26)$$

Часть 2

Практическое подтверждение

Используемые далее графики получены с помощью программ с подключенным модулем SCATS, исходный код которого доступен в репозитории по адресу <https://github.com/Paveloom/C3>. В частности, код для данной части отчета расположен в директории «Упражнение».

2.1 Получение исходного ряда

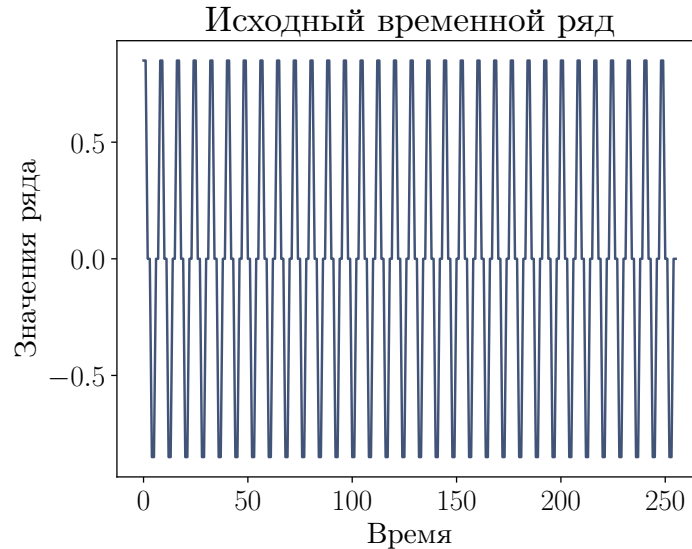
Как было видно в выкладках (19) – (25), свойство отражения значений функции $S_{\cos}^2(\nu) + S_{\sin}^2(\nu)$ относительно частоты $0.5\nu_c$ не зависит от функционального определения исходного временного ряда x_k , а зависит только от того, удовлетворяет ли он системе (3). Тем не менее, желая иметь на периодограмме значимый пик, возьмем ряд, заданный следующим образом:

$$\begin{cases} x_k = A \cos(2\pi\nu_0\Delta tk - \phi), & k\%2 = 0; \\ x_k = A \cos(2\pi\nu_0\Delta t(k-1) - \phi), & k\%2 = 1; \\ k = 0, 1, \dots, 2N-1. \end{cases} \quad (27)$$

Для такой системы выполняется свойство (2). Для определенности будем считать:

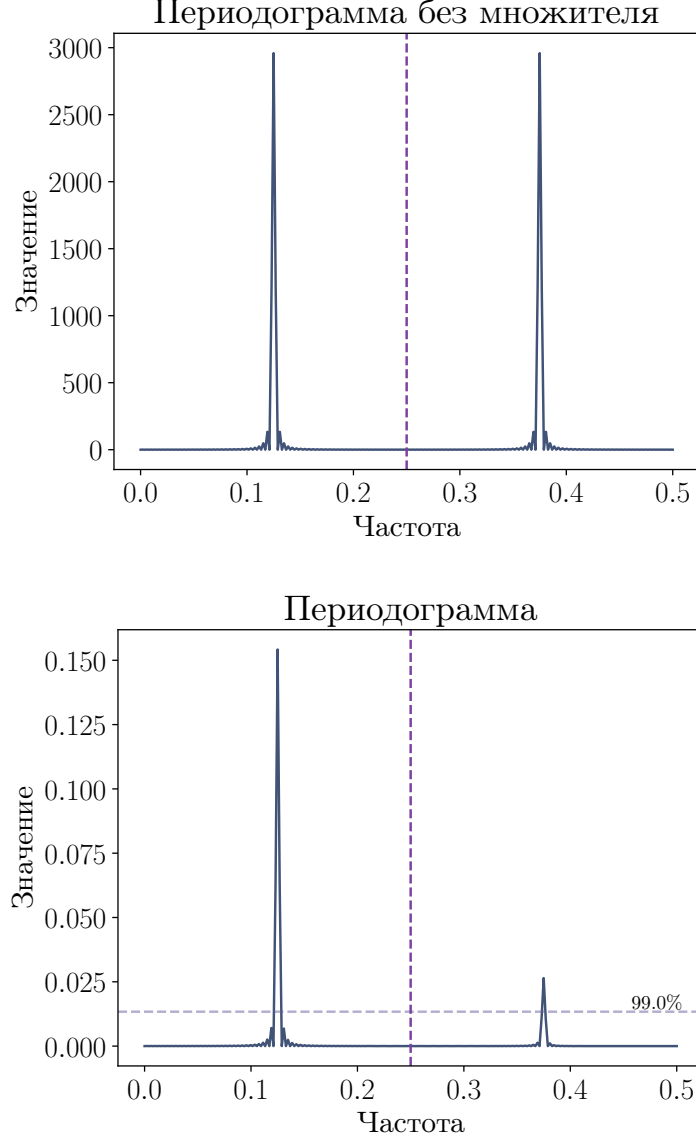
$$A = 1; \quad \nu_0 = 0.125; \quad \Delta t = 1; \quad \phi = 0; \quad N = 256 \quad (28)$$

Сгенерированный таким образом ряд выглядит так:



2.2 Вычисление периодограммы

Покажем разницу между функциями $S_{\cos}^2(\nu) + S_{\sin}^2(\nu)$ и $D(\nu)$:



Пунктирной вертикальной линией отмечена частота, равная половине частоты Найквиста. Получаем относительно нее симметрию значимого пика на графике функции $S_{\cos}^2(\nu) + S_{\sin}^2(\nu)$, а на графике периодограммы отраженное значение уменьшено множителем $\cos^2(\pi\nu\Delta t)/N^2$. Отношение Γ в данном случае равно ≈ 0.1715729 , что совпадает со значением выражения (26) на частоте ν_0 .

2.3 Добавление шума

Добавим шум во временной ряд (27), чтобы получить больше пиков на периодограмме:

$$\begin{cases} x_k = A \cos(2\pi\nu_0\Delta tk - \phi) + \sigma_x \xi_k, & k \% 2 = 0; \\ x_k = A \cos(2\pi\nu_0\Delta t(k-1) - \phi) + \sigma_x \xi_k, & k \% 2 = 1; \\ k = 0, 1, \dots, 2N-1, \end{cases} \quad (29)$$

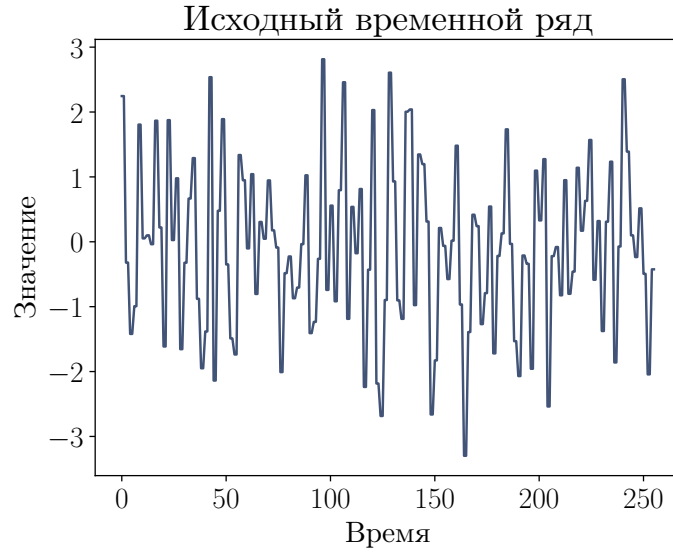
где ξ_k – значения случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение, а

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{A^2}{2\gamma}} - \text{среднеквадратичное отклонение шумового компонента}, \quad (30)$$

где γ – отношение «сигнал к шуму».

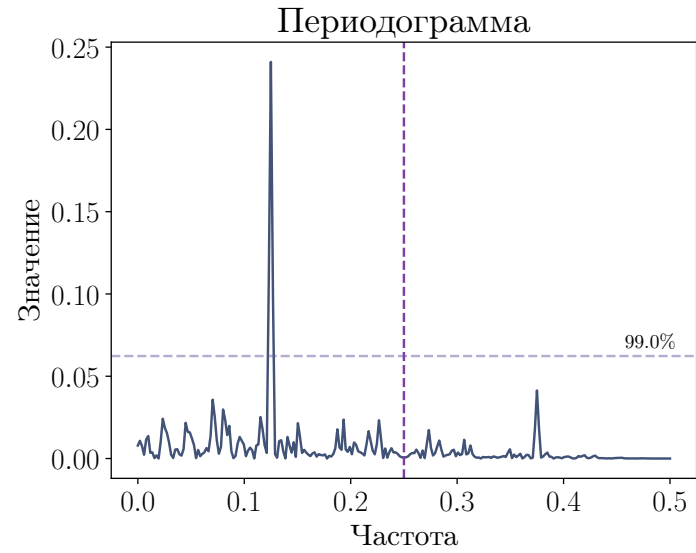
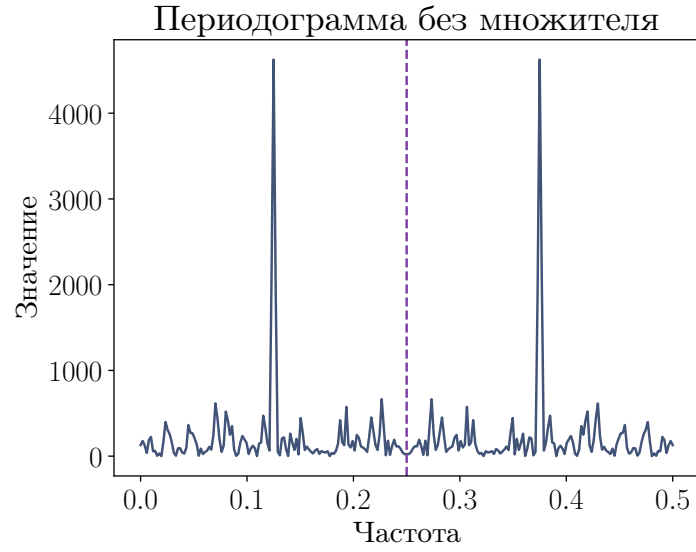
Возьмем ряд с теми же параметрами (28), а γ положим равным 0.5.

С добавлением шума сгенерированный ранее ряд выглядит следующим образом:



2.4 Вычисление периодограммы с шумом

Вновь сравним функции $S_{\cos}^2(\nu) + S_{\sin}^2(\nu)$ и $D(\nu)$:



Видим, что каждый пик шума также имеет симметричное относительно половины частоты Найквиста отражение на графике функции $S_{\cos}^2(\nu) + S_{\sin}^2(\nu)$. На графике периодограммы значения пиков изменены множителем $\cos^2(\pi\nu\Delta t)/N^2$.

Таким образом, практические результаты подтверждают теоретические.