Практикум анализа временных рядов

Отчет по индивидуальному заданию

Автор: Павел Соболев

4 апреля 2020 г.

Часть 1

Постановка и решение задачи

Описание задачи из «В. В. Витязев — Спектрально-корреляционный анализ равномерных временных рядов», с. 41:

Дан временной ряд $x_k = x\left(\Delta t k\right), k = 0, 1, \ldots, 2N-1$, у которого первое и второе, третье и четвертое и т. д. значения попарно совпадают. Докажите аналитически, что периодограмма такого ряда будет симметрична относительно частоты $\nu = 0.5\nu_c = 1/4\Delta t$. Проиллюстрируйте это свойство с помощью программы СКАВРя.

1.1 Представление входных данных

Имеем следующий временной ряд:

$$x_k = x\left(\Delta t k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1, \tag{1}$$

для которого выполняется следующее свойство:

$$x_{2k} = x_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Объединяя с (1), получаем систему:

$$\begin{cases} x_k = x\left(\Delta t k\right), \quad k = 0, 1, \ldots, 2N-1; \\ x_{2k} = x_{2k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \end{cases} \tag{3}$$

полностью описывающую входные данные, соответствующие условию задачи.

1.2 Выполнение преобразования Фурье

Имеем следующую формулу для вычисления периодограммы Шустера:

$$D(\nu) = \frac{1}{4N^2} \left| \sum_{k=0}^{2N-1} x_k e^{-i2\pi\nu\Delta t k} \right|^2. \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$X(\nu) \coloneqq \sum_{k=0}^{2N-1} x_k e^{-i2\pi\nu\Delta t k}; \tag{5}$$

$$X_{Re}(\nu) := Re(X(\nu)) = \sum_{k=0}^{2N-1} x_k \cos(2\pi\nu\Delta t k); \tag{6}$$

$$X_{Im}(\nu) := Im(X(\nu)) = -\sum_{k=0}^{2N-1} x_k \sin(2\pi\nu\Delta t k). \tag{7}$$

Тогда выражение (4) можно будет переписать как

$$D(\nu) = \frac{1}{4N^2}|X(\nu)|^2 = \frac{1}{4N^2}(X_{Re}^2(\nu) + X_{Im}^2(\nu)). \tag{8}$$

1.2.1 Вычисление $X_{Re}^2(\nu)$

Воспользуемся свойством (2), характерным исходному временному ряду (3), и преобразуем выражение (6):

$$X_{Re}(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}[\cos(2\pi\nu\Delta t(2k)) + \cos(2\pi\nu\Delta t(2k+1)]. \tag{9}$$

Воспользуемся тригонометрическим тождеством

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{10}$$

и преобразуем (9):

$$\begin{aligned} X_{Re}(\nu) &= 2\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos\left(\frac{2\pi\nu\Delta t(2k+2k+1)}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi\nu\Delta t(2k-2k-1)}{2}\right) = \\ &= 2\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\pi\nu\Delta t(4k+1))\cos(\pi\nu\Delta t) = \\ &= 2\cos(\pi\nu\Delta t)\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \end{aligned} \tag{11}$$

Возведем (11) в квадрат:

$$X_{Re}^2(\nu) = 4\cos^2(\pi\nu\Delta t)\left[\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\pi\nu\Delta t(4k+1))\right]^2. \tag{12}$$

1.2.2 Вычисление $X^2_{Im}(\nu)$

Аналогично предыдущему пункту получим выражение для $X_{Im}(\nu)$, используя следующее тригонометрическое тождество:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{13}$$

$$\begin{aligned} X_{Im}(\nu) &= -\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}[\sin(2\pi\nu(2k)\Delta t) + \sin(2\pi\nu(2k+1)\Delta t)] = \\ &= -2\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\pi\nu\Delta t(4k+1))\cos(\pi\nu\Delta t) = \\ &= -2\cos(\pi\nu\Delta t)\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \end{aligned} \tag{14}$$

Возводя результат в квадрат, получаем:

$$X^2_{Im}(\nu) = 4\cos^2(\pi\nu\Delta t)\left[\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\pi\nu\Delta t(4k+1))\right]^2. \tag{15}$$

1.2.3 Вычисление $D(\nu)$

Воспользуемся полученными выражениями (12) и (15) для вычисления (8):

$$\begin{aligned} D(\nu) = \frac{\cos^2(\pi\nu\Delta t)}{N^2} &\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\pi\nu\Delta t(4k+1))\right)^2 + \right. \\ &\left.\left(\sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\pi\nu\Delta t(4k+1))\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

1.3 Поиск симметрии

Рассмотрим подробнее суммы в выражении (16). Введем следующие обозначения:

$$S_{\cos}(\nu) \coloneqq \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)); \tag{17}$$

$$S_{\sin}(\nu) \coloneqq \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \tag{18}$$

Проверим наличие симметрии относительно частоты $0.5\nu_c$, где ν_c – частота Найквиста, равная $1/(2\Delta t)$:

$$\begin{aligned} S_{\cos}(\nu_c-\nu) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\pi(\nu_c-\nu)\Delta t(4k+1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\frac{\pi}{2}(4k+1)-\pi\nu\Delta t(4k+1)) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} S_{\sin}(\nu_c-\nu) &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\pi(\nu_c-\nu)\Delta t(4k+1)) = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\frac{\pi}{2}(4k+1)-\pi\nu\Delta t(4k+1)) \end{aligned} \tag{20}$$

Используя формулы приведения, упростим выражения (19) и (20):

$$S_{\cos}(\nu_c-\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\sin(\pi\nu\Delta t(4k+1)); \tag{21}$$

$$S_{\sin}(\nu_c-\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x_{2k}\cos(\pi\nu\Delta t(4k+1)). \tag{22}$$

Заметим следующее:

$$S_{\cos}(\nu) = S_{\sin}(\nu_c-\nu); \tag{23}$$

$$S_{\sin}(\nu) = S_{\cos}(\nu_c-\nu). \tag{24}$$

Отсюда:

$$S^2_{\cos}(\nu) + S^2_{\sin}(\nu) = S^2_{\cos}(\nu_c-\nu) + S^2_{\sin}(\nu_c-\nu). \tag{25}$$

Следовательно, значения, получаемые внутри квадратных скобок в выражении (16), симметричны относительно частоты, равной половине частоты Найквиста.

Однако значения $D(\nu)$ на частотах ν и $\nu_c-\nu$ не будут совпадать вследствие наличия множителя $\cos^2(\pi\nu\Delta t)/N^2$, также зависящего от частоты ν. Это значит, что пики, имеющиеся на частотах, меньших половины частоты Найквиста, будут отражены на симметричных относительно нее частотах с меньшей высотой.

Множитель изменения высоты пика можно вычислить как

$$\Gamma = \frac{\cos^2(\pi(\nu_c-\nu)\Delta t)}{\cos^2(\pi\nu\Delta t)} = \frac{\sin^2(\pi\nu\Delta t)}{\cos^2(\pi\nu\Delta t)}. \tag{26}$$

Часть 2

Практическое подтверждение

Используемые далее графики получены с помощью программ с подключенным модулем SCATS, исходный код которого доступен в репозитории по адресу https://github.com/Paveloom/C3. В частности, код для данной части отчета расположен в поддиректории «Упражнение».

2.1 Получение исходного ряда

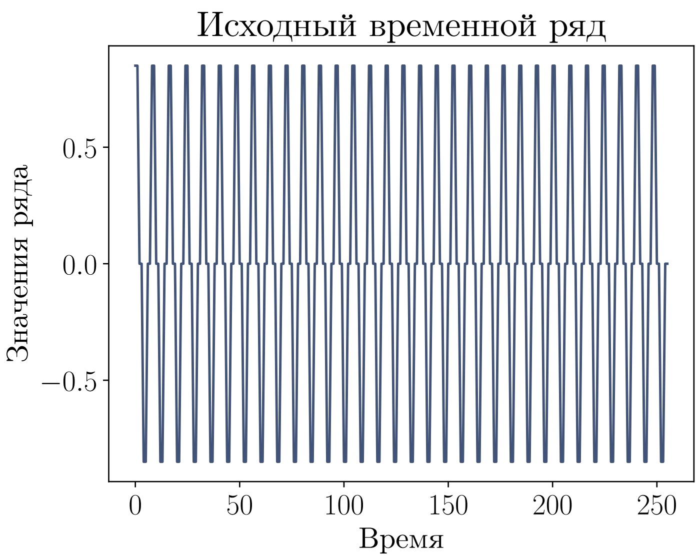
Как было видно в выкладках (19) – (25), свойство отражения значений функции $S^2_{\cos}(\nu) + S^2_{\sin}(\nu)$ относительно частоты $0.5\nu_c$ не зависит от функционального определения исходного временного ряда x_k, а зависит только от того, удовлетворяет ли он системе (3). Тем не менее, желая иметь на периодограмме значимый пик, возьмем ряд, заданный следующим образом:

$$\begin{cases} x_k = A\cos(2\pi\nu_0\Delta t k - \phi), \quad k\%2 = 0; \\ x_k = A\cos(2\pi\nu_0\Delta t(k-1) - \phi), \quad k\%2 = 1; \\ k = 0, 1, \ldots, 2N-1. \end{cases} \tag{27}$$

Для такой системы выполняется свойство (2). Для определенности будем считать:

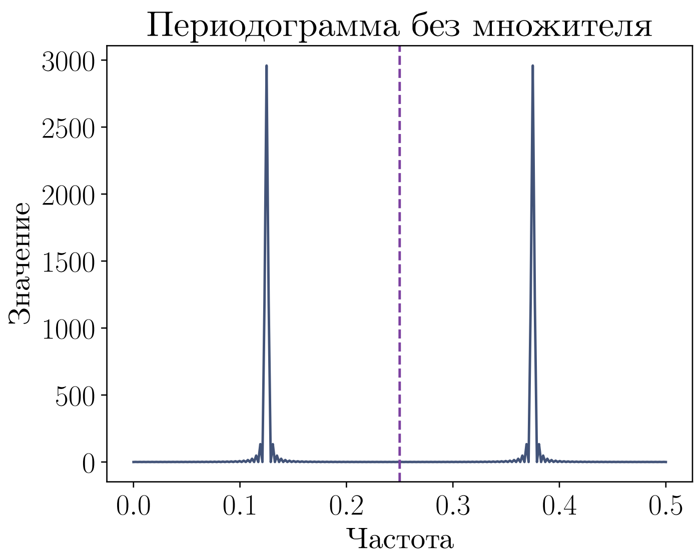
$$A = 1; \;\; \nu_0 = 0.125; \;\; \Delta t = 1; \;\; \phi = 0; \;\; N = 256 \tag{28}$$

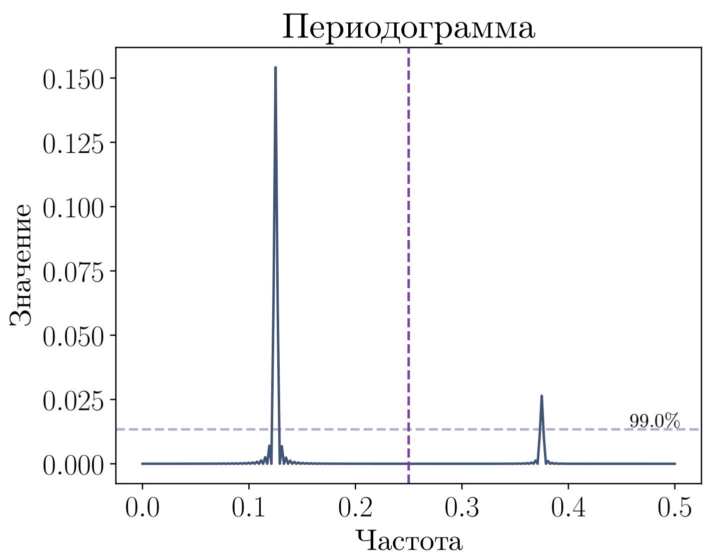
Сгенерированный таким образом ряд выглядит так:



2.2 Вычисление периодограммы

Покажем разницу между функциями $S^2_{\cos}(\nu) + S^2_{\sin}(\nu)$ и $D(\nu)$:





Пунктирной вертикальной линией отмечена частота, равная половине частоты Найквиста. Получаем относительно нее симметрию значимого пика на графике функции $S^2_{\cos}(\nu) + S^2_{\sin}(\nu)$, а на графике периодограммы отраженное значение обрезано множителем $\cos^2(\pi\nu\Delta t)/N^2$. Отношение Γ в данном случае равно ≈ 0.1715729, что совпадает со значением выражения (26) на частоте ν_0.

2.3 Добавление шума

Добавим шум во временной ряд (27), чтобы получить больше пиков на периодограмме:

$$\begin{cases} x_k = A\cos(2\pi\nu_0\Delta tk - \phi) + \sigma_x\xi_k, \quad k\%2 = 0; \\ x_k = A\cos(2\pi\nu_0\Delta t(k-1) - \phi) + \sigma_x\xi_k, \quad k\%2 = 1; \\ k = 0, 1, \ldots, 2N-1, \end{cases} \tag{29}$$

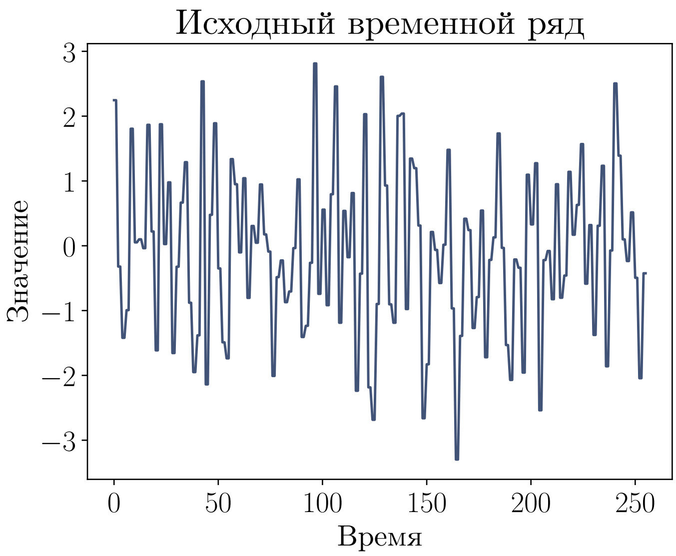
где ξ_k – значения случайной величины, имеющей стандартное нормальное распределение, а

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{A^2}{2\gamma}} \text{ – среднеквадратичное отклонение шумового компонента,} \tag{30}$$

где γ – отношение «сигнал к шуму».

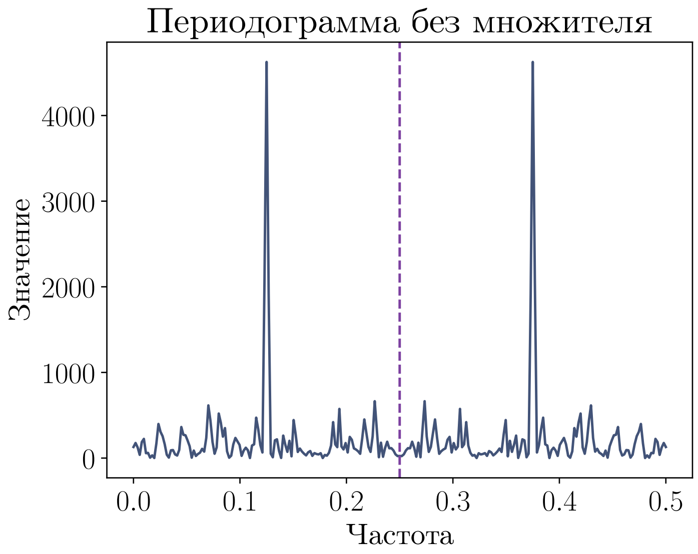
Возьмем ряд с теми же параметрами (28), а γ положим равным 0.5.

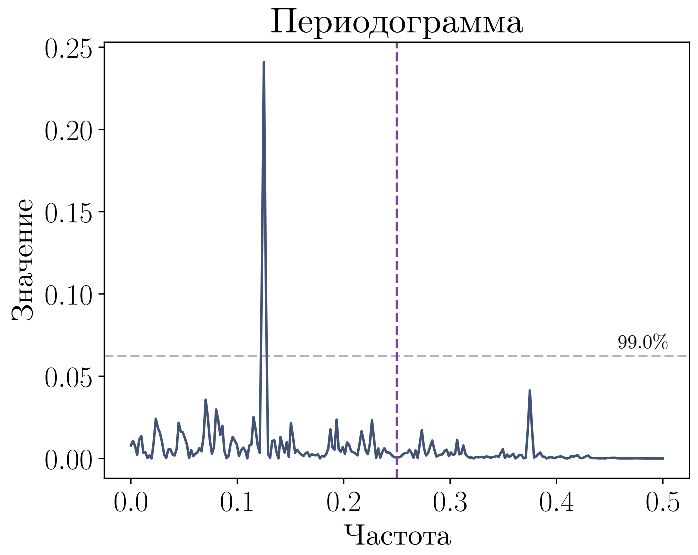
С добавлением шума сгенерированный ранее ряд выглядит следующим образом:



2.4 Вычисление периодограммы с шумом

Вновь сравним функции $S^2_{\cos}(\nu) + S^2_{\sin}(\nu)$ и $D(\nu)$:





Видим, что каждый пик шума также имеет симметричное относительно половины частоты Найквиста отражение на графике функции $S^2_{\cos}(\nu) + S^2_{\sin}(\nu)$. На графике периодограммы эти пики обрезаны множителем $\cos^2(\pi\nu\Delta t)/N^2$.

Таким образом, практические результаты подтверждают теоретические.