מבוא לבינה מלאכותית 236501

תרגיל בית מספר 1

מגישים: פבל רסטופצ'ין 311137095 אורי קירשטיין 311137095

פרק ראשון

חלק א

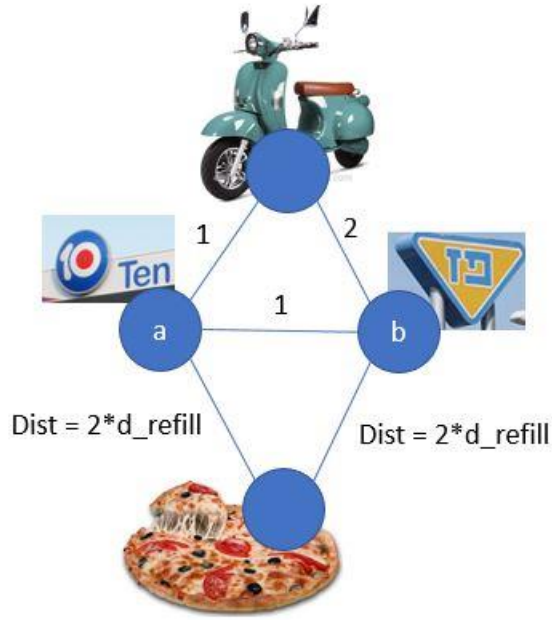
1. להלן הטבלה המבוקשת:

K	K!	K!*L^(K-1)
1	1	1
2	2	10
3	6	150
4	24	3000
5	120	75000
6	720	2250000
7	5040	78750000
8	40320	3150000000
9	362880	1.4175E+11
10	3628800	7.0875E+12

חלק ג

2. מקדם הסיעוף המינימלי האפשרי במרחב החיפוש הוא 0 – יתקבל למשל כאשר נתחיל בלי דלק כלל. לא נוכל להגיע לאף מצב אחר במרחב והגרף יישאר בעל צומת בודד. מקדם הסיעוף המקסימלי האפשרי במרחב החיפוש הוא $|k+l|$, שיתקבל, למשל, אם נוכל להגיע לכל המצבים מנקודת ההתחלה. נוכיח כי זהו המקדם המקסימלי בשלילה. נניח כי קיים מקדם סיעוף $w > |l+k|$. כלומר, קיים מצב במרחב ממנו ניתן להגיע ל w מצבים אחרים. אבל יש רק $|k+l|$ צמתים אחרים לכל היותר בגרף אליהם ניתן להגיע בעזרת האופרטור. סתירה.

3. ייתכנו מעגלים במרחב המצבים שלנו. למשל, עבור המרחב המתואר למטה, נסתכל על סדרת המצבים.



מצב התחלתי - $S_0 = \{v_0, d_{full}, T = \{1\}, F = \emptyset\}$

אם נמשיך לתחנת הדלק הקרובה ביותר נגיע למצב $S_1 = \{v_a, d_{full}, T = \{1\}, F = \emptyset\}$

ממנו נמשיך לתחנת הדלק השנייה $S_2 = \{v_b, d_{full}, T = \{1\}, F = \emptyset\}$.

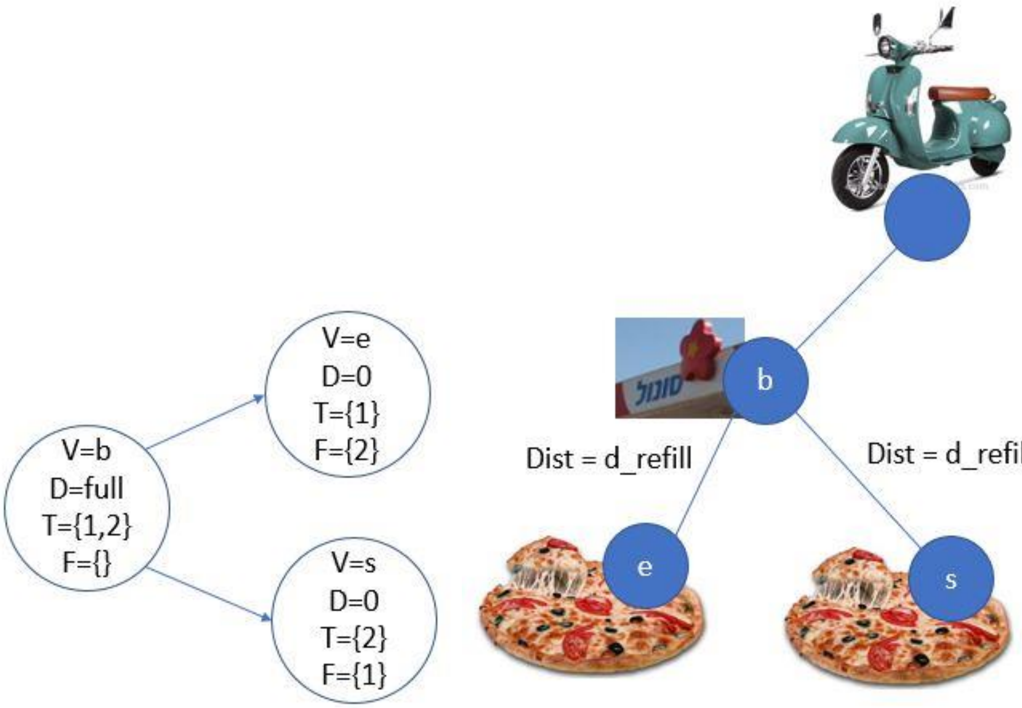
עכשיו יש רק אופרטור אפשרי אחד – ניתן לחזור לתחנת הדלק הקודמת בלבד, ונגיע שוב למצב הקודם,

$$S_1 = \{v_1, d_{full}, T = \{1\}, F = \emptyset\}$$

הגענו לאותו הצומת פעמיים, לכן מצאנו מעגל כנדרש.

4. ישנם אינסוף מצבים במרחב. אמנם מספר האפשרויות השונות לT חסום ע"י $2^{|K|}$, F נקבע ע"י בחירת T באופן יחיד, וכן מספר הצמתים בגרף הוא $|l + k + 1|$, מספר האפשרויות לבחירת d אינסופי כי d פרמטר רציף. לא כל המצבים ישיגים, למשל במפה מהסעיף הקודם שום מצב בצומת התחתון אינו ישיג.

5. ייתכנו בורות שאינם מצבי מטרה במרחב המצבים. למשל במפה שלמטה – המצבים בצמתים e ו s הם בורות, כיוון שבכל דרך בה נגיע אליהם מיכל הדלק יהיה ריק ולא נוכל להמשיך לאף צומת אחר, לכן לא יהיו יותר מעברים חוקיים.



6. $$Succ\big((v_1,d_1,T_1,F_1)\big)=\left\{(v_2,d_2,T_2,F_2)\ \middle|\ \begin{Bmatrix} d_2=d_{full} \\ v_2\in l \\ T_2=T_1 \\ F_2=F_1 \end{Bmatrix}\right\}\cup\left\{(v_2,d_2,T_2,F_2)\ \middle|\ \begin{Bmatrix} d_2=d_1-dist(v_1,v_2)\geq 0 \\ v_2\in k \\ T_2=T_1\setminus\{v_2\} \\ F_2=F_1\cup\{v_2\} \end{Bmatrix}\right\}$$

7. חסם תחתון מינימלי הוא מספר ההזמנות. במקרה הכי טוב, בכל צעד נגיע לצומת הזמנה אחד, ולא ניאלץ לתדלק כלל. לכן החסם הוא $|k|$

חלק ד

8.

load_map_from_csv: 3.34sec

Solve the map problem.

Map(src: 54 dst: 549)

UniformCost time: 0.64 #dev: 17360 total_cost: 7410.00000 |path|: 137

path: [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 28893, 14580, 14590, 14591, 14592, 14593, 81892,

25814, 81, 26236, 26234, 1188, 33068, 33069, 33070, 15474, 33071, 5020, 21699, 33072, 33073, 33074,

16203, 9847, 9848, 9849, 9850, 9851, 335, 9852, 82906, 82907, 82908, 82909, 95454, 96539, 72369, 94627, 38553, 72367, 29007, 94632, 96540, 9269, 82890, 29049, 29026, 82682, 71897, 83380, 96541, 82904, 96542, 96543, 96544, 96545, 96546, 96547, 82911, 82928, 24841, 24842, 24843, 5215, 24844, 9274, 24845, 24846, 24847, 24848, 24849, 24850, 24851, 24852, 24853, 24854, 24855, 24856, 24857, 24858, 24859, 24860, 24861, 24862, 24863, 24864, 24865, 24866, 82208, 82209, 82210, 21518, 21431, 21432, 21433, 21434, 21435, 21436, 21437, 21438, 21439, 21440, 21441, 21442, 21443, 21444, 21445, 21446, 21447, 21448, 21449, 21450, 21451, 621, 21452, 21453, 21454, 21495, 21496, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549]

חלק ה

.11

Map(src: 54 dst: 549) A* (h=0, w=0.500) time: 0.71 #dev: 17360

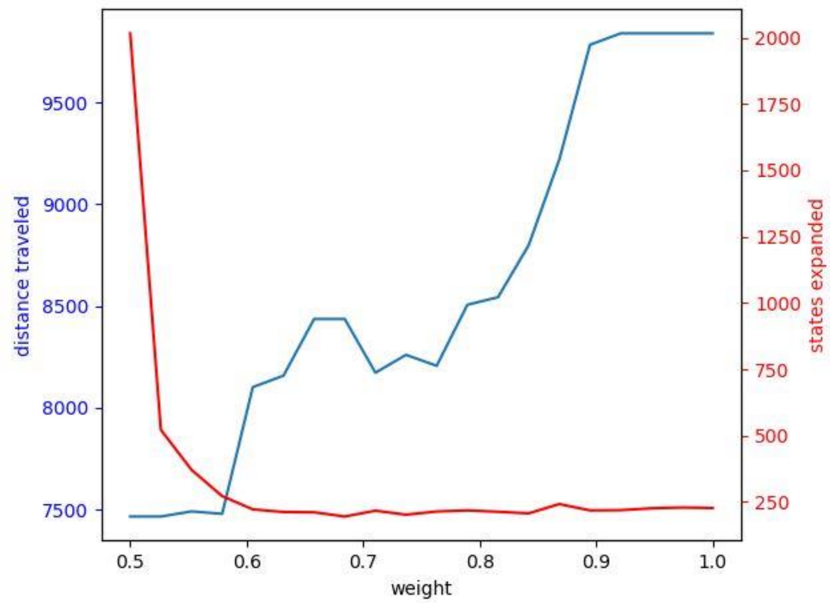
total_cost: 7410.00000 |path|: 137

path: [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 28893, 14580, 14590, 14591, 14592, 14593, 81892, 25814, 81, 26236, 26234, 1188, 33068, 33069, 33070, 15474, 33071, 5020, 21699, 33072, 33073, 33074, 16203, 9847, 9848, 9849, 9850, 9851, 335, 9852, 82906, 82907, 82908, 82909, 95454, 96539, 72369, 94627, 38553, 72367, 29007, 94632, 96540, 9269, 82890, 29049, 29026, 82682, 71897, 83380, 96541, 82904, 96542, 96543, 96544, 96545, 96546, 96547, 82911, 82928, 24841, 24842, 24843, 5215, 24844, 9274, 24845, 24846, 24847, 24848, 24849, 24850, 24851, 24852, 24853, 24854, 24855, 24856, 24857, 24858, 24859, 24860, 24861, 24862, 24863, 24864, 24865, 24866, 82208, 82209, 82210, 21518, 21431, 21432, 21433, 21434, 21435, 21436, 21437, 21438, 21439, 21440, 21441, 21442, 21443, 21444, 21445, 21446, 21447, 21448, 21449, 21450, 21451, 621, 21452, 21453, 21454, 21495, 21496, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549]

Map(src: 54 dst: 549) A* (h=AirDist, w=0.500) time: 0.25 #dev: 1888 total_cost: 7410.00000 |path|: 137

path: [54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 28893, 14580, 14590, 14591, 14592, 14593, 81892, 25814, 81, 26236, 26234, 1188, 33068, 33069, 33070, 15474, 33071, 5020, 21699, 33072, 33073, 33074, 16203, 9847, 9848, 9849, 9850, 9851, 335, 9852, 82906, 82907, 82908, 82909, 95454, 96539, 72369, 94627, 38553, 72367, 29007, 94632, 96540, 9269, 82890, 29049, 29026, 82682, 71897, 83380, 96541, 82904, 96542, 96543, 96544, 96545, 96546, 96547, 82911, 82928, 24841, 24842, 24843, 5215, 24844, 9274, 24845, 24846, 24847, 24848, 24849, 24850, 24851, 24852, 24853, 24854, 24855, 24856, 24857, 24858, 24859, 24860, 24861, 24862, 24863, 24864, 24865, 24866, 82208, 82209, 82210, 21518, 21431, 21432, 21433, 21434, 21435, 21436, 21437, 21438, 21439, 21440, 21441, 21442, 21443, 21444, 21445, 21446, 21447, 21448, 21449, 21450, 21451, 621, 21452, 21453, 21454, 21495, 21496, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549]

.12



כלל שהמשקל מתקרב ל-1, כך האלגוריתם חמדן יותר, כלומר הוא מסתמך יותר על היוריסטיקה. ככל שההסתמכות על היוריסטיקה גדולה יותר, הפתרון יתקבל מהר יותר אך יהיה פחות אופטימלי.

חלק ו

14. היוריסטיקה זו קבילה. כדי להגיע למצב מקבל נצטרך לבקר בכל נקודות ההזמנה. בפרט, ניאלץ לבקר בנקודת ההזמנה הרחוקה ביותר מאיתנו. המרחק לנקודת הזמנה זו הוא לכל הפחות המרחק האווירי שלנו ממנה.

.16

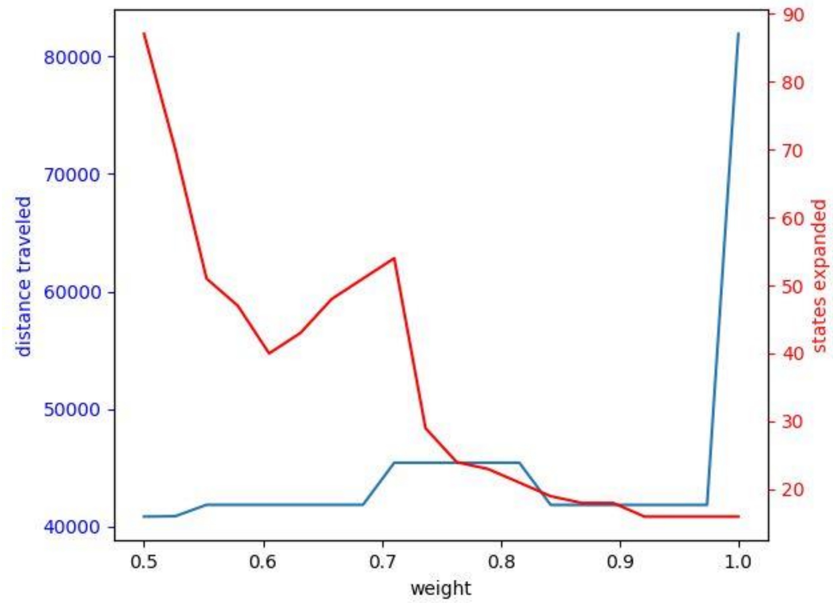
Solve the relaxed deliveries problem.

RelaxedDeliveries(big_delivery) A* (h=MaxAirDist, w=0.500) time: 9.28 #dev: 3908 total_cost: 40844.21165 |path|: 11 path: [33919, 18409, 77726, 26690, 31221, 63050, 84034, 60664, 70557, 94941, 31008] gas-stations: [31221, 70557]

.17

RelaxedDeliveries(big_delivery) A* (h=MSTAirDist, w=0.500) time: 2.48 #dev: 87 total_cost: 40844.21165 |path|: 11 path: [33919, 18409, 77726, 26690, 31221, 63050, 84034, 60664, 70557, 94941, 31008] gas-stations: [31221, 70557]

.18



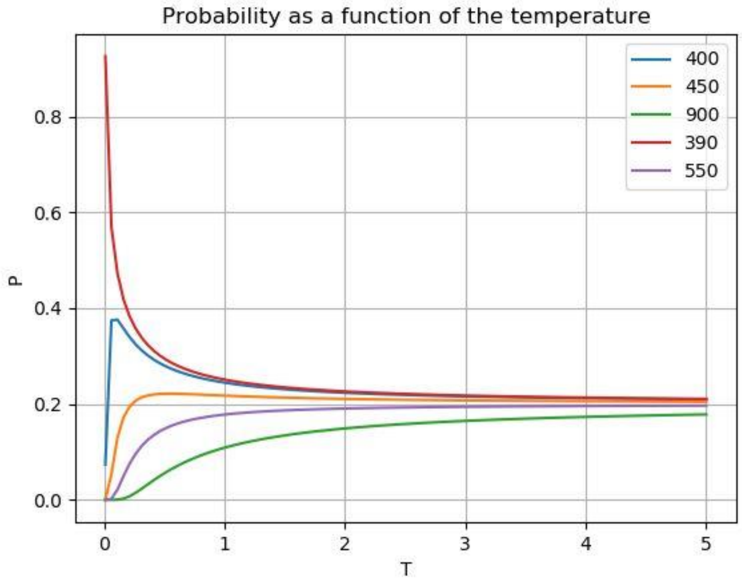
<u>חלק ז</u>

19. יהי $x^t = \left[h_1, h_2, \dots h_{\min(N,|OPEN|)}\right]$. לפי ההגדרה, $\forall x_i \in x^t: \Pr(x_i) = \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}}{\sum_{pnt_h \in best\ N\ points}\left(\frac{x_h}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}}$. נבצע שינוי סקלה:

נכפול את כל איברי הוקטור בקבוע k שאינו 0: $X^t = \left[kh_1, kh_2, \dots kh_{\min(N,|OPEN|)}\right]$. נציב בהגדרה ונקבל:

$$\forall x_i \in X^t: \Pr(x_i) = \frac{\left(\frac{kx_i}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}}{\sum_{pnt_h \in best\ N\ points}\left(\frac{kx_h}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}} = \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}(k)^{-\frac{1}{T}}}{(k)^{-\frac{1}{T}}\sum_{pnt_h \in best\ N\ points}\left(\frac{x_h}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}} = \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}}{\sum_{pnt_h \in best\ N\ points}\left(\frac{x_h}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}}.$$

.20

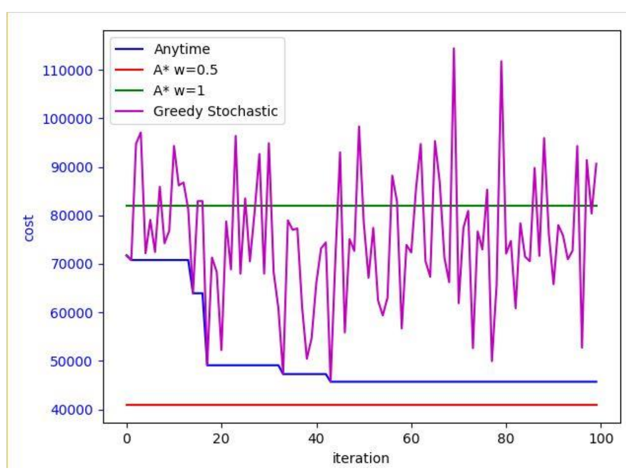


21. מהתבוננות בגרף, $\lim_{T\to 0}\Pr(x_i) = \lim_{T\to 0}\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}}{\sum_{pnt_h\in best\ N\ points}\left(\frac{x_h}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}} = \begin{cases}1\ when\ x_i=\alpha\\ 0\ otherwise\end{cases}$

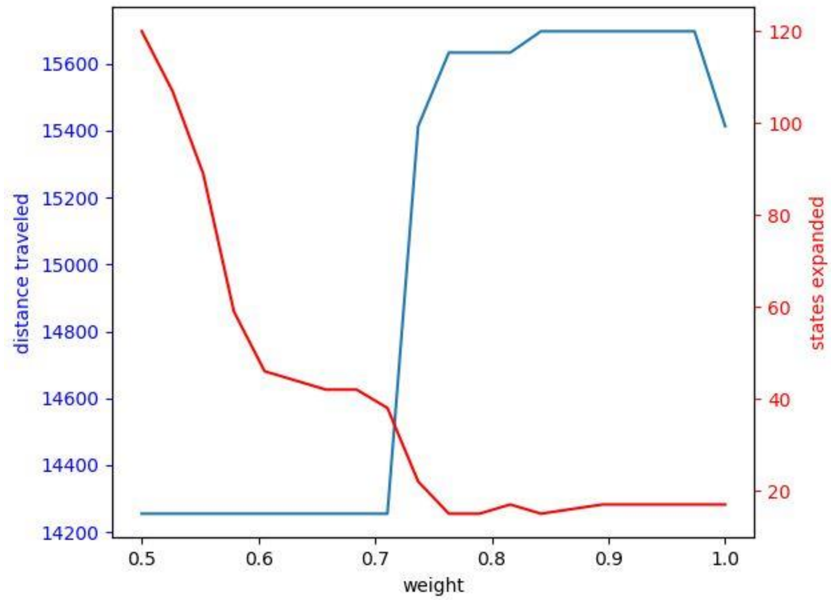
.22

$$\lim_{T\to\infty}\Pr(x_i) = \lim_{T\to\infty}\frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}}{\sum_{pnt_h\in best\ N\ points}\left(\frac{x_h}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{T}}} = \frac{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{0}}{\sum_{pnt_h\in best\ N\ points}\left(\frac{x_h}{\alpha}\right)^{0}} = \frac{1}{\sum_{pnt_h\in best\ N\ points}1}$$
$$= \frac{1}{\min(N, |OPEN|)}$$

24. להלן הגרף המתקבל:



.26



27. נשתמש בהיוריסטיקה – מרחק בבעיית ה RelaxedDeliveriesProblemState. הנתונים לבעיה הם:

צמתי תחנות דלק – זהים לבעיה האמיתית

תחנות עצירה שיש לבקר בהן – תחנות עצירה שעוד לא ביקרנו בהן בבעיה האמיתית

גודל מיכל דלק מלא – זהה לבעיה האמיתית

צומת התחלה – הצומת שעליו אנו בודקים את ערך ההיוריסטיקה

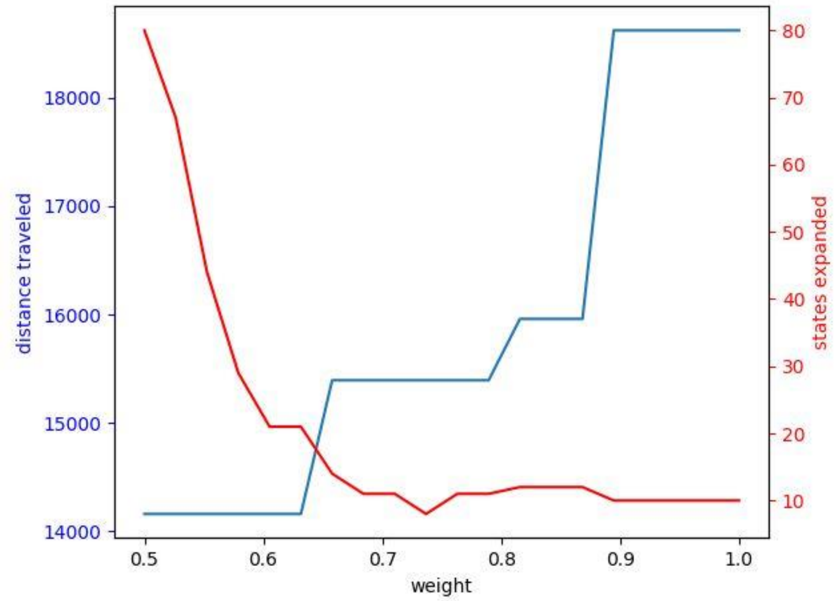
דלק התחלתי – זהה לדלק שיש ברשותנו בבעיה האמיתית

אם נמצא פתרון נחזיר את המחיר שלו (ואנחנו יודעים שהוא יהיה הפתרון האופטימלי לבעיה). אם לא נמצא, נחזיר אינסוף – הבעיה אינה פתירה.

היוריסטיקה זו קבילה כיוון שהיא מניחה מרחק אווירי בין כל זוג צמתים בגרף. המרחק בפועל בין כל 2 צמתים הוא תמיד לכל הפחות המרחק האווירי ביניהן.

כדי למצוא מרחק זה נשתמש באלגוריתם *A עם היוריסטיקת MSTAirDist כאשר המשקל הוא 0.5. כפי שהוכח בכיתה, מובטח שהאלגוריתם ייתן פתרון אופטימלי.

.28



בהשוואה לסעיף 26, עבור משקל 0.5, רואים כי ההיוריסטיקה החדשה פיתחה 80 מצבים בלבד לעומת 120 ולכן היא ההיוריסטיקה העדיפה. המשקל בסעיף 26 עבורו לראשונה מספר הפיתוחים נמוך יותר מאשר בסעיף 28 הוא 0.5~. איכות הפתרון לא נפגעה, בשני המקרים המרחק הוא הוא המרחק האופטימלי. זמן הריצה השתפר.

פרק שני

סעיף א –

נתונה פונקציה היוריסטית חלקית h(s), כך ש$0 \leq h(S) \leq h^*(s)$. נסתכל על $h_0(s)$:

- מקרה ראשון: $Applicable_h(s) = True$. כאן $h_0(s) = h(s) \leq h^*(s)$.
- מקרה שני: $Applicable_h(s) = False$. כאן $0 = h_0(s) \leq h(s) \leq h^*(s)$.

סעיף ב –

```
def h1(State s, State prev, float prev_hueristic_value):
    if ApplicableH(s) is True:
        return h0(s)
    if is_goal(s):
        return 0
    if prev is None:
        return 0
    inherited_cost = max(prev_hueristic_value - cost(prev, s), 0)
    return inherited_cost
```

אנו מחשבים את ערך ההיוריסטיקה כאשר מעבירים את המצב לOPEN בעת פיתוח מצב האב. לכן, פרמטר האב ידוע לנו בעת הקריאה לפונקציה כמו גם ערכו ההיוריסטי. בנוסף, בגלל שטופולוגיית הגרף היא עץ, יש לכל צומת אב יחיד. הצומת היחיד לו אין צומת קודם במסלול, הוא צומת ההתחלה, עבורו נעביר prev=None וערך prev_heuristic_value כלשהו. לכל צומת אחר, הערך ההיוריסטי של הצומת הקודם כבר חושב לפני פיתוחו ולכן נדע איזה פרמטר prev_heuristic_value להעביר בעת הקריאה לפונקציה.

נוכיח כי ההיוריסטיקה קבילה ומיודעת יותר מהיוריסטיקה h_0.

קבילות –

- אם הצומת הוא צומת מטרה, מתקיים $h^*(s) = 0$, ולכן $h_1(s) = 0 \leq 0 = h^*(s)$
- כאשר $Applicable_h(s) = True$, אז $h_1(s) = h(s) \leq h^*(s)$
- כאשר $Applicable_h(s) = False$ והצומת הוא צומת ההתחלה, $h_1(s) = 0 \leq h^*(s)$.

נוכיח קבילות לשאר המקרים.

- <u>טענת עזר –</u> עבור צומת התחלה עבורו $Applicable_h(s) = False$, ערכי ההיוריסטיקה עבור כל הצמתים בכל מסלול ממנו לצומת המטרה יהיו 0 עד אשר נתקל בצומת t עבורו $Applicable_h(t) = True$. נוכיח באינדוקציה.
- בסיס: עבור צומת ההתחלה, $prev = None$ ולכן לפי התנאי בפסאודו-קוד, ערכו ההיוריסטי 0.
- הנחת האינדוקציה: לצומת prev ערך היוריסטי 0.
- צעד: אם עבור הצומת $Applicable_h(s) = False$ ישנן מספר אפשרויות. אם הצומת הוא צומת מטרה – נחזיר אפס. אחרת, $\max(prev\ heuristic\ value - cost(prev, s), 0) = \max(0 - cost(prev, s), 0)$. כיוון שנתון כי פונקציית המחיר על כל קשת חיובית וחסומה מלרע, ברור כי האיבר השמאלי בסוגריים שלילי ומכאן ערך המקסימום הוא 0.

נוכיח את הטענה המרכזית:

- נוכיח כי h1 קבילה באינדוקציה.
- בסיס – צומת עבורו $Applicable_h(s) = True$. הוכחנו כי כל צמתי תחילת העץ עד הופעת הצומת הראשון עבורו תנאי זה מתקיים (אם קיים), ערכם 0 ולכן עבורם ההיוריסטיקה קבילה. עבור צומת זה, $h_1(s) = h(s) \leq h^*(s)$.
- הנחת האינדוקציה – לצומת prev ערך היוריסטי קביל.
- צעד – במקרה בו לצומת $Applicable_h(s) = False$ והוא אינו מטרה,

לכן $h^*(s) \geq 0$ אבל גם $h^*(s) = h^*(prev) - cost(prev,s) \geq h_1(prev) - cost(prev,s)$
ולכן $\max\left(0, h_1(prev) - cost(prev,s)\right) \geq 0$ כמו כן ברור כי $h^*(s) \geq \max(0, h_1(prev) - cost(prev,s))$.
ערך ההיוריסטיקה קביל.

מיודעות –

- כאשר $Applicable_h(s) = False$, h(s) תמיד תחזיר 0, ואילו ההיוריסטיקה h1 יכולה להחזיר ערך חיובי ממש. זה יקרה כאשר הצומת מגיע בשלב כלשהו בעץ אחרי צומת עבורו $Applicable_h(s) = True$, ושמחיר המסלול עד עליו מצומת זה היה קטן מערך ההיוריסטיקה.
- אחרת, שתי ההיוריסטיקות יחזירו ערכים זהים, $h(s)$ או 0 בהתאם למקרה.
- מסקנה: h1 מיודעת יותר.

<u>סעיף ג –</u>

```
def h2(State s, State prev):
    if ApplicableH(s) is True:
        return h0(s)
    if is_goal(s):
        return 0
    if prev is None:
        return 0
    inherited_cost = max(prev_hueristic_value - cost(prev, s), 0)
    old_cost = cache.load_cost(s)
    if old_cost is not None:
        if old_cost < inherited_cost:
            cache.store_cost(s, inherited_cost)
            return inherited_cost
        else:
            return old_cost
    cache.store_cost(s, inherited_cost)
    return inherited_cost
```

באלגוריתם זה יש צורך לזכור לכל צומת את הערך ההיוריסטי המקסימלי הקודם שניתן לו. לצורך כך השתמשנו במטמון דומה לזה שהיה בתרגיל. אם אין ערך קודם במטמון (הוא נתגלה לראשונה), ההנחה היא שהקריאה מהמטמון תחזיר ערך None.

האלגוריתם מבוסס על האלגוריתם מהסעיף הקודם ורק מכיל שיפור שמעלה את מיודעות האלגוריתם. כאשר הטופולוגיה אינה עץ, ייתכן כי נגלה את הצומת כשהוא כבר פתוח (הגענו אליו דרך 2 אבות שונים).

קבילות - הנימוק זהה לנימוק בסעיף הקודם, עבור האב בעל הערך ההיוריסטי המקסימלי מבין כל האבות.

מיודעות – בבחירת הערך המקסימלי בחרנו את האפשרות המיודעת ביותר.

<u>סעיף ד –</u>

קיים אלגוריתם כזה – *IDA עם ההיוריסטיקה $h_0(h', s)$, כאשר החסם הראשון הוא הערך ההיוריסטי של מצב ההתחלה.
מספר הצעדים חסום ע"י $\frac{h'(s_{inital})}{\delta}$, לכן מובטח כי האלגוריתם ימצא את הפתרון האופטימלי. ברגע ש*IDA ימצא מסלול למצב מטרה, זה יהיה מסלול אופטימלי וניתן להפסיק לחפש.

כיוון שמרחב המצבים הוא עץ מכוון, אין בו מעגלים. אלגוריתם *A ואלגוריתם *IDA יפתחו את המסלול באופן דומה.

באלגוריתם *A ייתכן כי האלגוריתם ימשיך לחפש גם אחרי שנמצא מסלול למצב מטרה, אם בתור המצבים OPEN מצב המטרה לא יהיה הראשון.