Учебник для высшей школы

И. П. НАТАНСОН

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ББК 22.11
Н 33

Натансон И. П.
Н 33 Краткий курс высшей математики — Серия «Учебники для вузов. Специальная литература». — СПб.: Издательство «Лань», 1999. — 736 с.

ISBN 5-8114-0123-X

Фундаментальный учебник «Краткий курс высшей математики», в одном томе, профессора И. П. Натансона предназначен для студентов вузов, где математика не является профилирующим предметом.

ББК 22.11

Оформление обложки
С. ШАПИРО, А. ОЛЕКСЕНКО

ОГЛАВЛЕНИЕ

Представляемый учебник моего покойного отца И. П. Натансона является итогом его многолетней педагогической деятельности в высших технических учебных заведениях. Многочисленные отзывы тех, кто использовал эту книгу, дают мне основания надеяться на благожелательный прием данного третьего издания.

Хотя первое издание учебника появилось достаточно давно — в 1963 г. (второе издание — 1968 г.), мне представляется, что курс не устарел. Круг людей, нуждающихся в понятиях производной, интеграла, ряда, остается достаточно широким, значительной части таких людей не требуется тратить силы и время на постижение логических тонкостей. Именно этому контингенту будущих специалистов предназначен учебник И. П. Натансона. Автору удалось достичь значительного выигрыша в понятности, доступности изложения за счет отказа от высоких ступеней математической строгости. В своем жанре «Краткий курс высшей математики» И. П. Натансона уникален.

Г. И. НАТАНСОН,
профессор
кафедры математического анализа
СПб., государственного университета.

Светлой памяти своей жены
Елизаветы Петровны
Соколовой-Натансон
посвящает эту книгу автор

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой руководство, предназначенное для студентов высших технических учебных заведений, в которых на курс высшей математики (вместе с упражнениями) отводится 300 — 400 часов. Материал, напечатанный крупным шрифтом (он независим от петита), охватывает программу подготовки инженеров-эксплуатационников. В петит вынесены вопросы, которые вместе с основным материалом соответствуют программе подготовки инженеров-конструкторов. Служить учебником для будущих инженеров-исследователей, нуждающихся в более основательной математической подготовке, книга не предназначена. Этим определился как выбор материала, содержащегося в книге, так и в еще большей степени характер его изложения. Автор в значительной мере опирается на интуицию читателя. Вопросами строгого логического обоснования, столь важными при построении университетского курса, автор не занимался.

Некоторые разделы книги сопровождаются упражнениями. В основном это разделы, которым уделено сравнительно мало внимания в общепринятых задачниках.

При написании трех первых глав автор использовал обработку своих лекций, произведенную И. А. Камышко (гл. I) и Х. А. Цареградским (гл. II и III). С рукописью в целом подробно ознакомились Г. П. Акилов, Б. З. Вулих и В. Л. Файншмидт, давшие много полезных указаний. Ценные советы были даны также С. И. Залгаллер, В. А. Залгаллером и Г. И. Натансоном. Исключительное внимание к книге в процессе ее издания проявила старший редактор Физматгиза Н. М. Розенгауз. Всем им автор приносит свою благодарность.

17. IV. 63 г. *И. Натансон*

ВВЕДЕНИЕ

1. Высшая математика является одним из важнейших элементов в образовании современного инженера. Для всякого сколько-нибудь сложного сооружения, будь то машина, мост, здание, корабль, самолет, необходим целый ряд расчетов, которые при помощи средств одной лишь элементарной математики выполнить было бы невозможно.

Вот примеры задач, которые требуют для своего решения методов высшей математики.

1. При помощи так называемого дифференциального исчисления определяются наиболее выгодные значения различных величин. Например, устанавливается, что, желая при помощи лампы, подвешенной над центром круглого стола, получить на его краях наибольшую освещенность, надо подвесить ее на высоте $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, где r — радиус стола. В качестве другого примера укажем, что прямоугольная балка, вырезанная из круглого бревна, будет обладать наибольшей прочностью тогда, когда отношение ее высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

2. Вычисление длин кривых линий, площадей фигур, ограниченных такими линиями, объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями; нахождение центров тяжести различных тел и т. п. Все эти задачи решаются в том разделе высшей математики, который называется интегральным исчислением. Например, средствами этого исчисления устанавливается, что центр тяжести конуса лежит на его оси и удален от основания на четверть высоты.

3. В высшей математике имеется раздел „Теория рядов", где изучается вопрос о фактическом вычислении самых разнообразных величин.

Так, в средней школе без вывода сообщается, что $\pi = 3{,}141592\ldots$ Там же широко пользуются таблицами логарифмов или таблицами тригонометрических величин, хотя способы составления этих таблиц остаются школьнику неизвестными. Именно в теории рядов эти вопросы находят решение.

Число подобных примеров легко можно было бы увеличить, но уже из сказанного видно, насколько важно для инженера владеть средствами высшей математики. Добавим, что и в процессе обучения в высших технических учебных заведениях студенту постоянно приходится пользоваться высшей математикой, ибо такие основные предметы, как физика, теоретическая механика, сопротивление материалов, теория упругости, радиотехника и другие, широко применяют методы высшей математики. Все это объясняет, почему в учебных планах всех технических институтов курсу высшей математики уделяется значительное внимание.

II. Остановимся на том, чем высшая математика отличается от элементарной, изучаемой в средней школе. Разумеется, провести между ними совершенно отчетливую границу невозможно, но можно все же выделить наиболее характерные черты каждой из них.

Основной особенностью вообще всех математических наук является их отвлеченный или, как иначе говорят, абстрактный характер. В арифметике устанавливается, что $2+3=5$. Это абстрактное утверждение. В нем содержатся различные конкретные утверждения. Например, 2 карандаша да 3 карандаша составляют 5 карандашей и т. п. Говоря, что $2+3=5$, мы отвлекаемся от конкретного содержания всех этих утверждений. Высказывая геометрическую теорему, что объем шара равен

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

мы отвлекаемся от того, где находится шар, из чего он сделан, какого он цвета и т. п. Это отвлечение от конкретного содержания характерно для математики. Оно придает ее предложениям характер всеобщности, и в этом его сила. В то же время в этом проявляется и некоторая слабость математического метода. Ведь действительность всегда конкретна, и потому математическое предложение, как и всякая теория, отражает ее лишь с некоторым приближением *).

Диалектический материализм учит нас, что все в мире находится в движении и изменяется. Поэтому те величины, с которыми мы имеем дело при изучении природы, являются величинами изменяющимися, или, как чаще говорят, переменными. Температура воздуха в помещении, давление пара в котле, напряжение в электрической сети, скорость самолета и т. д. — все это переменные величины. В элементарной математике (арифметике, алгебре, геометрии) мы обычно отвлекаемся от того, что рассматриваемые величины являются переменными, и принимаем их за постоянные. Это возможно далеко не всегда, а только тогда, когда мы занимаемся величинами, изменения которых невелики и ими можно пренебречь. Это объясняет, почему область приложения методов элементарной математики, математики постоянных величин, весьма ограничена.

*) Об абсолютной и относительной истине см. у В. И. Ленина (Собр. соч., 5-е изд., 1961, т. 18, стр. 133—140).

В высшей математике, напротив, главное внимание обращено на учет изменяемости рассматриваемых величин. Это есть математика переменных величин. Фр. Энгельс говорит *): «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение и диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем».

Для более полной характеристики предмета высшей математики следует указать, что она изучает переменные величины не изолированно, а в их взаимной связи. Точным математическим понятием, выражающим такую взаимосвязь переменных, является понятие функции. Это основное и важнейшее понятие высшей математики. Отчасти оно знакомо читателю уже из курса алгебры и тригонометрии, но систематически его изучает именно высшая математика в том разделе, который называется математическим анализом. Дифференциальное и интегральное исчисления, о которых мы упоминали выше, представляют собой ветви этого раздела.

Кроме математического анализа, мы будем изучать еще и аналитическую геометрию. Эта часть высшей математики исследует геометрические фигуры при помощи вычислений. Нечто подобное читателю уже встречалось и в элементарной геометрии и в тригонометрии, но методы аналитической геометрии обладают большей общностью и силой.

III. Основные идеи высшей математики можно обнаружить уже в античной науке. Так, великий греческий математик и механик Архимед (287—212 до н. э.) применял некоторые приемы интегрального исчисления, правда в зачаточной форме.

В средние века наука была в состоянии упадка и лишь начиная с 16-го века возрождается греческая наука вообще и математика в частности. Можно считать, что примерно с середины 17-го века все достижения античной математики уже были превзойдены. В конце 17-го и начале 18-го века в работах И. Ньютона (1642 — 1727) и Г. В. Лейбница (1646 — 1716) было завершено построение математического анализа.

Говоря об этом завершении, мы имеем в виду установление основных идей анализа, но вовсе не хотим сказать, что после Ньютона и Лейбница прекратилось дальнейшее развитие анализа. Интенсивные научные исследования в этой области высшей математики продолжались и в 18-м и в 19-м веках и успешно ведутся в настоящее время. Ежегодно публикуется свыше 10 000 работ по различным отделам высшей математики.

---

*) Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1955, стр. 206.

В дальнейшем развитии математического анализа выдающуюся роль сыграли петербургский академик Л. Эйлер (1707—1783) и французский ученый О. Коши (1789—1857). Эти ученые не только обогатили нашу науку рядом открытий первостепенного значения, но много занимались вопросами формирования анализа как учебного предмета. Именно благодаря методической работе Эйлера и Коши анализ принял свой современный вид.

IV. В России после Эйлера крупнейшими представителями анализа были *) М. В. Остроградский (1801—1861) и особенно П. Л. Чебышев (1821—1894). В Петербургском университете П. Л. Чебышевым была создана большая школа, наиболее выдающимися представителями которой являлись академики А. А. Марков (1856—1922) и А. М. Ляпунов (1857—1918).

В 20-м веке продуктивная научная работа по математике велась и в других городах нашей страны. Мощная научная школа была создана в Москве академиком Н. Н. Лузиным (1883—1950). Полный ее расцвет приходится уже на советский период, и примерно с середины 20-х годов московская математическая школа как по широте своих научных интересов, так и по важности результатов выходит на первое место в мире.

V. В настоящей книге нельзя дать даже и приблизительного представления о том, чем занимается математика наших дней. Лицам, интересующимся этим вопросом, рекомендуем трехтомное издание: „Математика, ее содержание, методы и значение", изд. АН СССР, 1956.

VI. В заключение отметим, что при изучении математики очень существенно решение задач. Еще Ньютон высказывал мнение, что эта сторона дела важнее, чем усвоение теории. Пожалуй, полностью с этим согласиться и нельзя, но нет сомнения, что для инженера одно лишь теоретическое знакомство с материалом было бы бесполезно. Поэтому читатель должен сочетать изучение этой книги с решением задач из задачников.

---

*) Гениальный русский геометр, профессор и ректор Казанского университета Н. И. Лобачевский (1792—1856) также был автором ряда интересных работ по анализу, но в его творчестве эти работы имеют второстепенное значение.

ГЛАВА I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Точки и координаты

n°1. Прямоугольная система координат. Аналитическая геометрия есть ветвь математики, изучающая геометрические образы средствами алгебры. Для этого прежде всего создается некоторый аппарат, позволяющий переводить геометрические понятия на алгебраический язык. Таким аппаратом служит „метод координат", предложенный еще в 17-м веке французскими математиками П. Ферма и Р. Декартом (P. Fermat, 1601—1665; R. Descartes, 1596—1650).

В основе метода лежит некоторое предварительное понятие — система координат. Таких систем существует очень много. Мы познакомимся с так называемой прямоугольной*) системой координат. В конце главы будет введена еще и другая — полярная система координат.

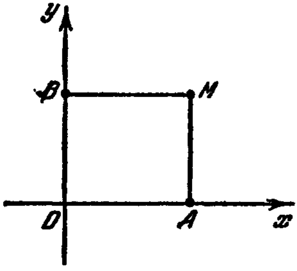


Рис. 1.

Пусть на плоскости проведены (рис. 1) две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy. Обычно Ox располагается горизонтально, а Oy вертикально. Эти прямые называют *осями координат*, причем Ox — осью *абсцисс*, а Oy — осью *ординат*. Точка O пересечения обеих осей называется *началом координат*. Возьмем теперь (см. рис. 1) на плоскости произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. Тем самым от осей отсекутся отрезки OA и OB. Нас будут интересовать длины этих отрезков, взятые с некоторыми знаками. Выбор знаков производится по следующему правилу:

Правило. 1) Если точка A лежит на оси Ox правее точки O, то длине OA приписывается знак „$+$". Если же A лежит левее O, то длине OA приписывается знак „$-$".

---

*) Или декартовой.

2) Если точка B лежит на оси Oy выше (ниже) точки O, то длине отрезка OB приписывается знак „+" (знак „—").

На рисунке у осей Ox и Oy обычно ставятся стрелки, напоминающие об этом правиле знаков.

Длины отрезков OA и OB, взятые с указанными знаками, обозначаются соответственно через x и y:

$$x = OA, \quad y = OB$$

и называются: x — абсциссой точки M, а y — ординатой этой точки; общее же название x и y — координаты*) точки M.

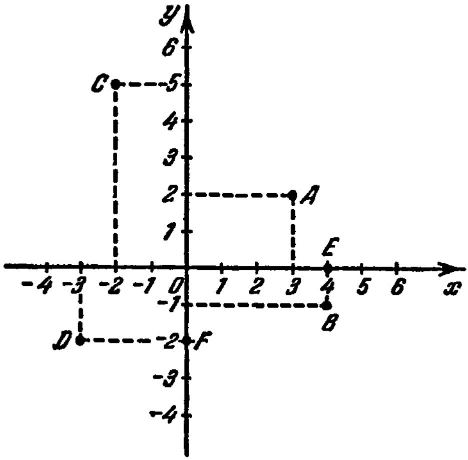


Рис. 2.

Тот факт, что числа x и y являются координатами точки M, записывают так: M (x, y). Легко понять, как, зная координаты точки M, построить эту точку: надо отложить на осях Ox и Oy отрезки OA и OB (в какую сторону — указывают знаки x и y) и восставить в A и B перпендикуляры к осям. Их пересечением и будет точка M.

Пример. Построить точки $A(3, 2)$, $B(4, -1)$, $C(-2, 5)$, $D(-3, -2)$, $E(4, 0)$, $F(0, -2)$.

Решение приведено на рис. 2.

Полезно отметить, что точки, лежащие на оси абсцисс (ординат), имеют ординату (абсциссу), равную нулю. Начало координат имеет координаты (0, 0).

Все изложенное можно резюмировать в следующей форме.

---

*) Или, полнее, декартовы координаты.

Первый принцип соответствия. *Любой точке плоскости соответствуют два числа — ее координаты. Обратно, всякой паре чисел отвечает определенная точка плоскости, имеющая эти числа своими координатами.*

Вместо того, чтобы говорить „найти координаты точки" или „даны координаты точки" и т. п., говорят коротко „найти точку", „дана точка" и т. п.

n° 2. Расстояние между двумя точками.

Задача. *Найти расстояние d между двумя данными точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.*

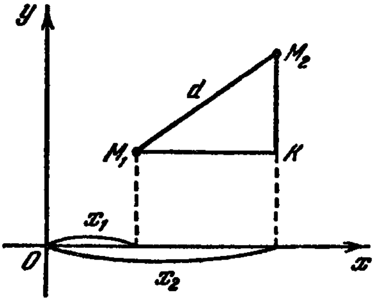


Рис. 3.

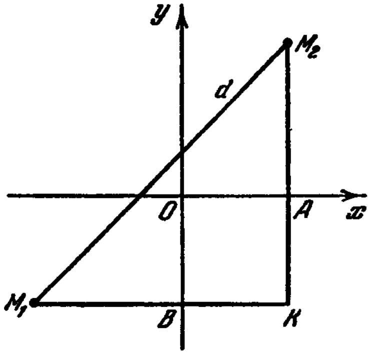


Рис. 4.

Решение. Из рис. 3 видно, что искомое расстояние служит гипотенузой прямоугольного треугольника M_1KM_2. Стало быть,

$$d = \sqrt{(M_1K)^2 + (M_2K)^2}.$$

Но тот же рисунок показывает, что

$$M_1K = x_2 - x_1, \quad M_2K = y_2 - y_1.$$

Значит,

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.} \qquad (1)$$

Эта формула и решает задачу.

Замечание. Мы вывели формулу (1), рассматривая простейшее расположение точек M_1 и M_2, изображенное на рис. 3, однако *формула* (1) *верна при любом расположении* M_1 *и* M_2. Рассмотрим хотя бы случай, изображенный на рис. 4. Здесь

$$M_1K = M_1B + BK.$$

Но *) $M_1B=-x_1$, $BK=x_2$. Значит, по-прежнему

$$M_1K=x_2-x_1.$$

Точно так же

$$M_2K=M_2A+AK=y_2+(-y_1)=y_2-y_1$$

и снова

$$d=\sqrt{(M_1K)^2+(M_2K)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Рекомендуем читателю самому рассмотреть еще несколько случаев расположения точек.

Если, в частности, требуется найти расстояние d точки $M(x, y)$ от начала координат $O(0, 0)$, то согласно (1) будет

$$\boxed{d=\sqrt{x^2+y^2}.} \qquad (2)$$

Следует запомнить этот результат (так же, как и общую формулу (1)).

Примеры. 1) Найти $d=M_1M_2$, если $M_1=M_1(2,5)$, $M_2= =M_2(6,8)$.

Здесь $d=\sqrt{(6-2)^2+(8-5)^2}=5$.

2) То же для точек $M_1(-2, 1)$ и $M_2(3, -3)$.

Здесь $d=\sqrt{(3+2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{41}\cong 6,4$ **).

3) Найти на оси Oy точку M, отстоящую от точки $N(3, 7)$ на расстояние $d=5$.

Так как M лежит на оси Oy, то абсцисса x точки M равна 0. Остается найти ее ординату y. Но условие $MN=5$ по формуле (1) можно записать в виде $\sqrt{(3-0)^2+(7-y)^2}=5$. Отсюда

$$(7-y)^2=16, \quad 7-y=\pm 4, \quad y_1=3, \quad y_2=11.$$

Итак, задача имеет два решения: $M_1(0, 3)$ и $M_2(0, 11)$.

n°3. Середина отрезка.

Задача. *Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Найти середину $M(x, y)$ отрезка M_1M_2.*

Решение. Построим треугольники M_1PM и MQM_2, изображенные на рис. 5. Ясно, что они равны друг другу. Отсюда, в частности,

$$M_1P=MQ$$

или, что то же самое,

$$x-x_1=x_2-x.$$

---

*) Читатель должен отчетливо понять, что здесь под M_1B мы разумеем длину соответствующего отрезка, т. е. число положительное. Абсцисса же x_1 (для рис. 4) есть эта длина, взятая со знаком „—“, т. е. $x_1=-M_1B$. Стало быть, $M_1B=-x_1$.

**) Символ $\cong$ есть знак приближенного равенства.

Но тогда $2x = x_1 + x_2$ и потому

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}.} \tag{3a}$$

Аналогично, сравнивая MP и M_2Q, получим

$$\boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}.} \tag{3б}$$

Таким образом, ***каждая координата середины отрезка равна полусумме одноименных координат его концов.***

Замечание. Формулы (3) выведены для простейшего расположения точек, изображенного на рис. 5, однако они верны всегда.

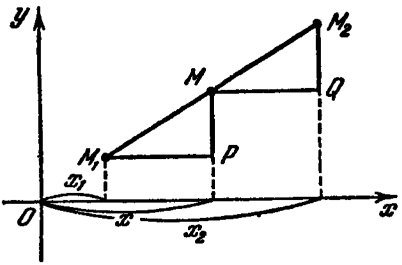


Рис. 5.

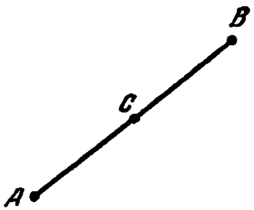


Рис. 6.

Примеры. 1) Найти середину $C(x, y)$ отрезка AB (рис. 6)*), если $A = A(5, 2)$, $B = B(11, 8)$.

Согласно (3) имеем

$$x = \frac{5+11}{2} = 8, \quad y = \frac{2+8}{2} = 5, \quad C = C(8, 5).$$

2) Известен конец $A(2, 3)$ и середина $C(4, 9)$ отрезка AB. Найти его конец B.

Пусть $B = B(x_B, y_B)$. Согласно (3) будет

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2},$$

т. е.

$$4 = \frac{2 + x_B}{2}, \quad 9 = \frac{3 + y_B}{2},$$

откуда $x_B = 6$, $y_B = 15$, т. е. $B = B(6, 15)$.

---

*) Мы рекомендуем (и впредь сами будем их употреблять) подобные „эскизные“ чертежи-наброски, цель которых помочь разобраться в задаче. На этих чертежах мы не заботимся о точном изображении размеров, точном расположении деталей и т. п.

3) Даны (рис. 7)*) три вершины $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(7, 5)$ параллелограмма $ABCD$. Найти вершину D.

Для решения используем то, что диагонали параллелограмма делят друг друга пополам. Вводя точку их пересечения M, имеем в само собою ясных обозначениях

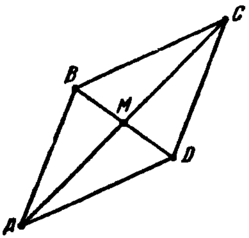


Рис. 7.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+7}{2} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+5}{2} = 3{,}5.$$

С другой стороны,

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_D}{2},$$

т. е.

$$4 = \frac{4 + x_D}{2}, \quad 3{,}5 = \frac{3 + y_D}{2},$$

откуда $x_D = 4$, $y_D = 4$. Итак, $D = D(4, 4)$.

n° 4. Деление отрезка в данном отношении.

Задача. *Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ и положительные числа q_1 и q_2. Найти точку $M(x, y)$, делящую отрезок M_1M_2 в отношении $q_1 : q_2$, т. е. удовлетворяющую соотношению*

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \frac{q_1}{q_2}. \tag{4}$$

Решение. Построим треугольники M_1PM и MQM_2, изображенные на рис. 8. Ясно, что эти треугольники подобны. Стало быть,

$$\frac{M_1P}{MQ} = \frac{M_1M}{MM_2}.$$

Но

$$M_1P = x - x_1, \quad MQ = x_2 - x.$$

Отсюда и из (4) следует, что

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{q_1}{q_2}.$$

Значит,

$$xq_2 - x_1q_2 = x_2q_1 - xq_1$$

и потому

$$\boxed{x = \frac{x_1q_2 + x_2q_1}{q_1 + q_2}.} \tag{5а}$$

Аналогично

$$\boxed{y = \frac{y_1q_2 + y_2q_1}{q_1 + q_2}.} \tag{5б}$$

*) См. предыдущую сноску.

Формулы эти сравнительно громоздки, но их легко запомнить, если обратить внимание на то, что координаты каждой из точек M_1 и M_2 надо умножать на число, соответствующее отрезку, прилегающему к другой точке (так сказать, „бери чужое").

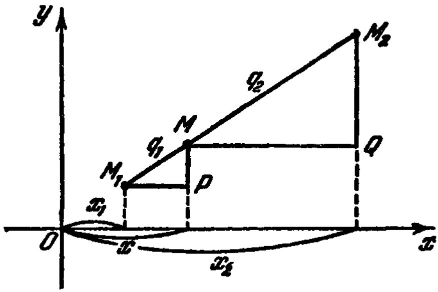


Рис. 8.

Заметим, что формулы (5) справедливы при любом расположении точек M_1 и M_2, не только при изображенном на рис. 8.

Если, в частности, $q_1 = q_2 = q$, то формулы (5) превращаются в выведенные раньше формулы (3), дающие координаты середины отрезка.

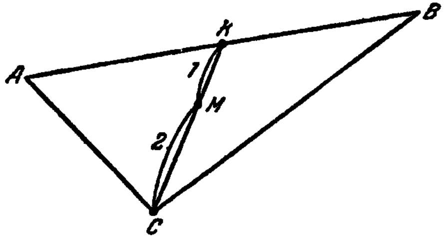


Рис. 9.

Примеры. 1) Найти на отрезке AB, где $A = A(2, 9)$, $B = B(-4, 3)$, точку C, для которой $AC:CB = 7:5$.

Здесь

$$x_C = \frac{2 \cdot 5 + (-4) \cdot 7}{12} = -\frac{3}{2}, \quad y_C = \frac{9 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{12} = \frac{11}{2}, \quad C = C\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

2) Найти центр тяжести M треугольника ABC, если $A = A(1, 5)$, $B = B(7, 8)$, $C = C(4, 2)$ (рис. 9).

Решение. Из физики известно, что искомая точка M лежит на пересечении медиан треугольника и делит каждую из них в отношении $2:1$ (если считать от вершины).

Пусть K — середина стороны AB. Тогда

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+7}{2} = 4, \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+8}{2} = 6{,}5.$$

Найдя точку K, делим отрезок CK в отношении $2:1$

$$x_M = \frac{x_C \cdot 1 + x_K \cdot 2}{3} = \frac{4+8}{3} = 4, \quad y_M = \frac{y_C \cdot 1 + y_K \cdot 2}{3} = \frac{2+13}{3} = 5.$$

Итак, $M = M(4, 5)$.

n° 5. Площадь треугольника.

Задача. *Даны точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$. Найти площадь F треугольника $M_1M_2M_3$.*

Решение. Опустим из точек M_1, M_2, M_3 перпендикуляры на ось Ox (рис. 10). В результате получится фигура, напоминающая домик. Этот „домик" составлен из трапеций $A_1M_1M_3A_3$ и $A_3M_3M_2A_2$, а интересующий нас треугольник получается удалением из „домика" трапеции $A_1M_1M_2A_2$. Значит,

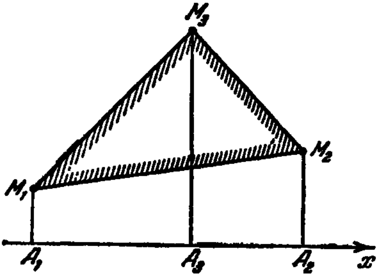


Рис. 10.

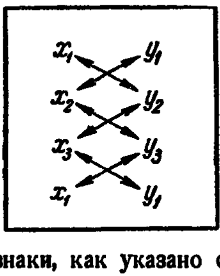
$$F = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2} \times$$
$$\times (x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1).$$

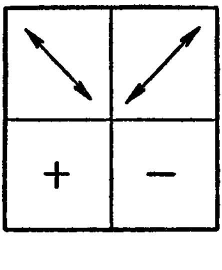
Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$\boxed{F = \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)].} \qquad (6)$$

Чтобы запомнить этот результат, рекомендуем

Правило. Для вычисления выражения, стоящего в формуле (6) в скобках, надо выписать в столбец координаты первой, второй, третьей и снова первой вершин треугольника и произвести перемножение по схеме





расставив знаки, как указано справа.

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами (2, 1), (8, 3), (6, 5).

Решение. Составляем столбец, о котором шла речь:

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 8 & 3 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 6 & 5 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 2 & 1 \end{array}$$

Тогда

$$F = \frac{1}{2}[(2\cdot 3 + 8\cdot 5 + 6\cdot 1) - (1\cdot 8 + 3\cdot 6 + 5\cdot 2)] = 8 \textit{ кв. ед.}$$

Замечания. 1) Иногда формула (6) дает отрицательное значение*) для F. Тогда знак минус отбрасывается, т. е. площадь F равна абсолютной величине (или, как ее иначе называют, модулю) числа, стоящего в правой части формулы (6).

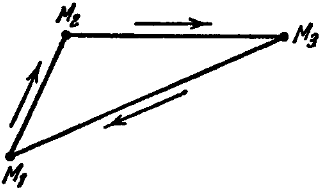


Рис. 11.

2) Если, вычисляя F по формуле (6), мы получим $F = 0$, то это будет означать, что точки M_1, M_2, M_3 лежат на одной прямой. Это дает

Правило. Чтобы узнать, лежат ли три данные точки на одной прямой, надо принять их за вершины треугольника и найти его площадь F. Если окажется $F = 0$, то точки лежат на одной прямой.

Пример. Узнать, лежат ли на одной прямой точки $A(1, 12)$, $B(5, 6)$, $C(9, 0)$.

Решение. Составляем столбец:

$$\begin{array}{cc} 1 & 12 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 5 & 6 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 9 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 1 & 12 \end{array} \qquad F = \frac{1}{2}[(1\cdot 6 + 5\cdot 0 + 9\cdot 12) - (12\cdot 5 + 6\cdot 9 + 0\cdot 1) = 0.$$

Поскольку $F = 0$, то A, B, C лежат на одной прямой.

---

*) Представим себе наблюдателя, обходящего контур треугольника $M_1M_2M_3$, причем вершины обходятся в порядке $M_1M_2M_3M_1$. Если при этом обходе сам треугольник будет оставаться слева от наблюдателя (т. е. дело обстоит, как в случае рис. 10), то правая часть формулы (6) будет положительна. Если же треугольник будет лежать справа от наблюдателя, как на рис. 11, то правая часть формулы (6) будет отрицательна.

n° 6. Площадь многоугольника. Площадь любого многоугольника вычисляется по формуле, аналогичной формуле (6). Например, площадь F пятиугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5) равна

$$F = \frac{1}{2}[(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_1) - \\ - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_5 + y_5x_1)]. \quad (7)$$

Запоминается это выражение при помощи того же правила, что и формула (6), и доказывается формула (7) примерно так же, как и (6).

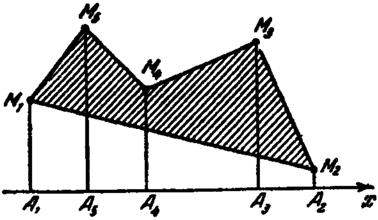


Рис. 12.

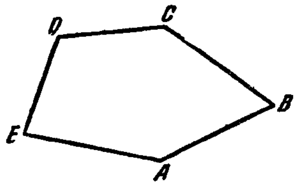


Рис. 13.

Пусть, например, речь идет о пятиугольнике, изображенном на рис. 12. Тогда его надо следующим образом составить из трапеций: $M_1M_2M_3M_4M_5M_1 = A_1M_1M_5A_5 + A_5M_5M_4A_4 + A_4M_4M_3A_3 + A_3M_3M_2A_2 - A_1M_1M_2A_2$. Дальнейшее рассуждение можно предоставить читателю.

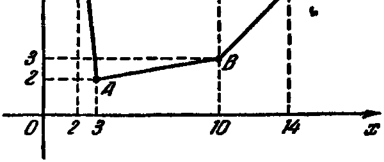


Рис. 14.

При вычислении площади многоугольника необходимо соблюдать одну предосторожность, в которой не было надобности в случае треугольника. Именно, когда мы выписываем в столбец координаты вершин многоугольника, то должны придерживаться того порядка, в котором эти вершины следуют друг за другом при обходе контура нашего многоугольника*). Так, для многоугольника, изображенного на рис. 13, можно вершины брать в порядке $ABCDEA$, но нельзя их было бы расположить в порядке $ADCBEA$. Необходимость

*) С какой вершины начинать обход, безразлично. Точно так же несущественно, оставлять ли при указанном обходе многоугольник слева или справа от себя. В первом случае мы сразу получим интересующую нас площадь, а во втором она получается со знаком „минус", который надо отбросить.

указанной предосторожности прииодит к тому, что иычисление площади многоугольника следует начинать с построения хотя бы грубого чертежа.

Пример. Найти площадь пятиугольника с иершинами $A(3, 2)$, $B(10, 3)$, $C(10, 8)$, $D(2, 12)$, $E(14, 7)$.

Решение. Начнем с построения иершин на рис. 14. Соединяя их прямолинейными отрезками, иидим, что порядок $ABCDEA$ недопустим. Возможным порядком будет, например, $ABECDA$. Выписыиая и столбец координаты иершин, изятых и этом порядке, находим

3	2
10	3
14	7
10	8
2	12
3	2

$$F=\frac{1}{2}[(9+70+112+120+4)-$$
$$-(20+42+70+16+36)]=65{,}5 \text{ кв. ед.}$$

§ 2. Линии и ураинения

n° 1. Второй принцип соотиетстиии. Чтобы сделать дальнейшие рассуждения более доходчииыми, полезно начать с примера.

Рассмотрим ураинение

$$3x+2y-6=0. \tag{1}$$

Так как оно сияаыиает диа неизиестиых, то мы можем одному из них, например x, придать произиольиое значение и по нему уже найти иначение иторого неизиестиого y. Беря хотя бы $x=1$, находим $y=\frac{3}{2}$. Аналогично

$$\begin{array}{llll} \text{при} & x=0 & \text{будет} & y=3, \\ \text{при} & x=4 & \text{будет} & y=-3, \\ \text{при} & x=2 & \text{будет} & y=0, \\ \text{при} & x=-1 & \text{будет} & y=\frac{9}{2}. \end{array}$$

Объединяя соответстиующие друг другу значения и пары, получим $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, $(0, 3)$, $(4, -3)$, $(2, 0)$, $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$. Ясно, что таких пар можно получить сколько угодно, причем исе они удоилетворяют ураинению (1). Существуют также и такие пары, которые нашему уравнению не удоилетиоряют. Такоиы, хотя бы, пары $(0, 0)$, $(7, 1)$, $(4, 0)$, $(-2, 2)$. Выпишем пары обоих типои и два столбца, поместии и перiый из них пары, удоилетиоряющие нашему ураинению, а ио второй — не удовлетворяющие:

$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$(0, 0)$
$(0, 3)$	$(7, 1)$
$(4, -3)$	$(4, 0)$
$(2, 0)$	$(-2, 2)$
$\left(-1, \frac{9}{2}\right)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$
. . . .	. . . .

Проделав все это, вспомним, что каждую пару чисел можно считать парой координат некоторой точки плоскости. Тем самым наши пары можно считать точками. Построим эти точки на рис. 15. При

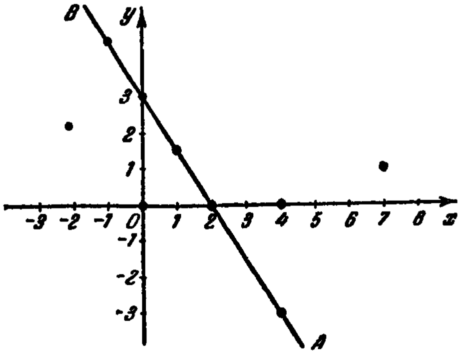


Рис. 15.

этом обнаруживается замечательное обстоятельство: точки, координаты которых записаны в первом столбце, расположены на определенной прямой AB, точки же второго столбца не попадают на эту прямую. Мы видим, что между уравнением (1) и прямой AB имеет место следующее соотношение: если точка $M(x, y)$ лежит на прямой AB, то ее координаты x и y удовлетворяют уравнению (1), а если точка не лежит на нашей прямой, то и координаты ее не удовлетворяют уравнению (1).

Аналогичную картину мы видим и на другом примере: уравнению

$$2y = x^2 \tag{2}$$

удовлетворяют числовые пары $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{8}\right)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$. Точки, для которых эти пары суть пары координат, располагаются на некоторой кривой линии *) AB (рис. 16).

Напротив, числовые пары (0, —1), (1, 0), (2, 1) уравнению (2) не удовлетворяют и соответствующие точки на линии AB не лежат.

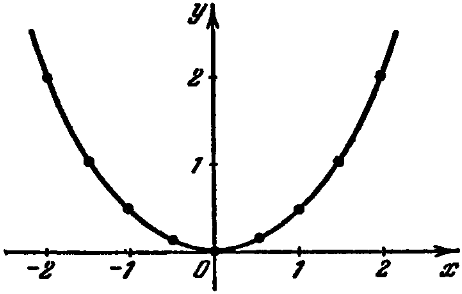


Рис. 16.

Эти примеры иллюстрируют следующий

Второй принцип соответствия. *Всякому уравнению с двумя неизвестными x и y, вообще говоря **), соответствует на плоскости некоторая линия и обратно, всякой плоской линии соответствует некоторое уравнение.*

Слово „соответствует", входящее в формулировку принципа, имеет следующий точный смысл: если какая-либо точка лежит на линии, то ее координаты удовлетворяют „соответствующему" уравнению, а если не лежит, то не удовлетворяют.

Указанный принцип лежит в основе аналитической геометрии: геометрические свойства линии — например, ее свойство быть прямой („прямизна") или симметрия и т. п. — можно обнаруживать по алгебраическим свойствам соответствующего ей уравнения (или, как говорят короче, „ее уравнения").

---

*) Эта линия называется п а р а б о л о й. Ниже она изучается более подробно.

**) Употребленное нами выражение „вообще говоря" означает, что принцип допускает исключения. Например, уравнению

$$x^2+y^2+1=0$$

не соответствует на плоскости никакой геометрический образ, ибо не существует вещественных x и y, удовлетворяющих этому уравнению. Уравнению

$$(x-5)^2+(y-1)^2=0$$

соответствует не л и н и я, а т о ч к а (5,1). Наконец, уравнению $x+y=x+y$ соответствует вся плоскость.

В дальнейшем выражения „дана линия“ и „дано уравнение линии“ мы вообще не будем различать, подобно тому как мы не различаем выражений „дана точка“ и „даны координаты точки“. Более того, мы будем говорить „линия $y = x + 2$“, вместо того чтобы сказать „линия, отвечающая уравнению $y = x + 2$“.

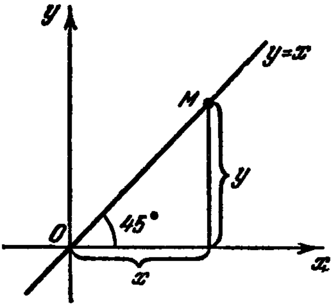


Рис. 17.

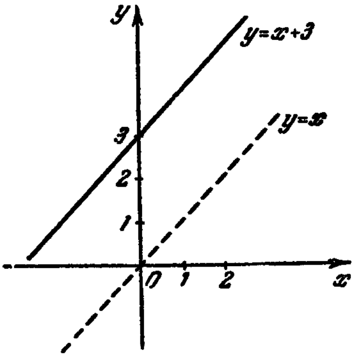


Рис. 18.

В рассмотренных нами примерах мы начинали с у р а в н е н и я и приходили к соответствующей линии. Приведем несколько примеров, в которых мы будем задавать линию и получать соответствующее уравнение.

1) Биссектрисе первого и третьего координатных углов (рис. 17) соответствует уравнение

$$y = x.$$

В самом деле, если точка $M(x, y)$ лежит на упомянутой биссектрисе, то, очевидно $y = x$. Для точек же, лежащих выше (ниже) биссектрисы, будет $y > x$ (соответственно $y < x$).

2) Если прямая параллельна упомянутой биссектрисе и лежит выше ее на 3 единицы (рис. 18), то ей соответствует уравнение

$$y = x + 3.$$

3) Прямой, параллельной оси Ox и лежащей выше ее на 2 единицы (рис. 19), отвечает уравнение *)

$$y = 2. \tag{3}$$

*) Иногда учащиеся не считают, что (3) есть уравнение. Однако это самое „настоящее“ уравнение: ведь это есть равенство, содержащее букву y и справедливое при некотором (именно, $y = 2$) значении этой буквы. При других же значениях y (например, $y = 7$) равенство (3) несправедливо. То, что в данном случае уравнение содержит только одно неизвестное, никакой роли не играет (хотя бы потому, что (3) можно записать в виде $x + y = x + 2$).

Действительно, точки $A(1, 2)$, $B(0, 2)$, $C(-7, 2)$ и т. д. лежат на нашей линии и их координаты удовлетворяют уравнению (3), в то время как точка (1, 7) на нашей прямой не лежит и ее координаты уравнению (3) не удовлетворяют.

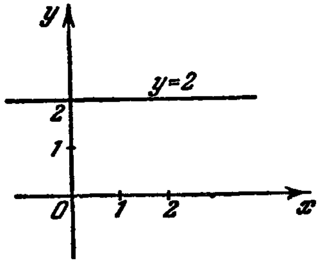


Рис. 19.

4) Уравнением оси ординат служит равенство

$$x=0.$$

Непосредственно из принципа, формулированного выше, вытекают два правила:

I. Чтобы узнать, лежит ли данная точка на данной линии, надо подставить координаты точки в уравнение линии. Если получаемое при этом равенство окажется верным (неверным), то точка лежит (не лежит) на линии.

Например, точка $M(2, 1)$ не лежит на линии $x^2+y^2=xy$, так как $2^2+1^2\neq 2\cdot 1$.

II. Чтобы найти точку (или точки) пересечения двух данных линий I и II, надо решить совместно уравнения этих линий, ибо координаты искомой точки (рис. 20) должны удовлетворять обоим этим уравнениям.

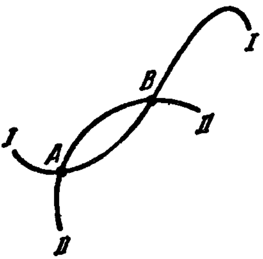


Рис. 20.

Например, пересечение биссектрисы $y=x$ и оси ординат $x=0$ находится совместным решением написанных уравнений и оказывается точкой (0, 0), что, конечно, очевидно и непосредственно.

Линии $y^2=x^2+1$ и $y=x$ не пересекаются, ибо написанные уравнения несовместны.

n° 2. Окружность. Хорошей иллюстрацией второго принципа соответствия служит окружность.

Рассмотрим, например, окружность, центр которой находится в точке $C(3, 1)$ и радиус равен 4 (рис. 21). Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x, y)$. Независимо от того, лежит ли эта точка на нашей окружности или нет, ее расстояние CM от центра C будет равно

$$CM=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}.$$

Если M лежит на окружности, то $CM=4$, в противном же случае $CM\neq 4$. Стало быть, уравнению

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=4$$

удовлетворяют координаты всех точек нашей окружности и только этих точек. Иными словами, написанное уравнение является уравнением рассматриваемой нами окружности.

Совершенно аналогично дело обстоит и в общем случае. Если окружность имеет центр $C(a, b)$ и радиус R, то ее уравнением служит равенство

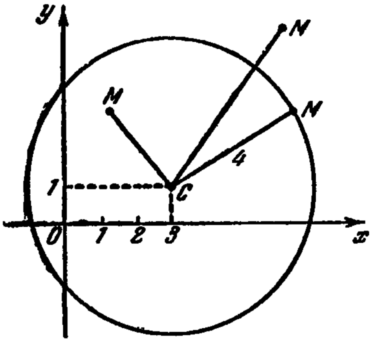


Рис. 21.

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R.$$

Обычно его записывают в более простом виде

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.} \tag{4}$$

В частности, уравнение окружности с центром в начале координат таково:

$$\boxed{x^2+y^2=R^2.} \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) надо запомнить.

Примеры. 1) Уравнению $(x-2)^2+(y-4)^2=25$ отвечает окружность с центром $C(2, 4)$ и радиусом $R=5$.

2) Уравнению $(x+1)^2+y^2=5$ отвечает окружность с центром $C(-1, 0)$ и радиусом $R=\sqrt{5}\cong 2{,}24$.

3) Чтобы выяснить, какая линия отвечает уравнению

$$x^2-6x+y^2+10y=3, \tag{6}$$

преобразуем *) его так:

$$(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)=37$$

или

$$(x-3)^2+(y+5)^2=37.$$

Теперь ясно, что (6) есть окружность с центром $C(3, -5)$ и радиусом $R=\sqrt{37}\cong 6{,}08$.

---

*) Обращаем внимание читателя на этот прием. Преобразование трехчлена x^2+px+q в выражение

$$\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

называется „выделением полного квадрата“. Оно применяется очень часто.

4) Уравнение $x^2+y^2=6x$ преобразуется к виду $(x-3)^2+y^2=9$, и потому это есть уравнение окружности с центром $C(3, 0)$ и радиусом $R=3$.

5) Найти геометрическое место точек, отстоящих от точки $A(-3, 1)$ вдвое дальше, чем от точки $B(9, 10)$.

Решение. Для любой точки $M(x, y)$ будет

$$AM=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2},\quad BM=\sqrt{(x-9)^2+(y-10)^2}.$$

Если M принадлежит нашему геометрическому месту точек, то

$$AM=2\cdot BM,$$

т. е.

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-9)^2+(y-10)^2}.$$

Это есть уравнение нашего геометрического места. Последовательно преобразуем его:

$$x^2+6x+9+y^2-2y+1=4(x^2-18x+81+y^2-20y+100),$$
$$3x^2-78x+3y^2-78y+714=0,$$
$$x^2-26x+y^2-26y+238=0,$$

и окончательно

$$(x-13)^2+(y-13)^2=100.$$

Значит, искомое место есть окружность с центром $C(13, 13)$ и радиусом $R=10$. На этом примере уже видна сила метода аналитической геометрии.

§ 3. Прямая линия

n°1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Простейшей из линий является прямая. Мы и займемся систематическим ее изучением средствами аналитической геометрии.

Теорема 1. *Всякой прямой соответствует уравнение первой степени.*

Доказательство. Переберем различные случаи положения прямой. Для каждого из них мы построим уравнение, соответствующее рассматриваемой прямой, и установим, что это уравнение имеет первую степень.

Случай 1. Пусть (рис. 22) рассматривается прямая, параллельная оси Oy. Тогда все ее точки имеют одну и ту же абсциссу. Если, в частности, точка пересечения прямой с осью Ox имеет абсциссу a, то и для всех точек (x, y) нашей прямой будет

$$\boxed{x=a.} \tag{1}$$

Равенство (1) и является уравнением нашей прямой. Замечая, что его степень первая, заканчиваем доказательство.

Случай 2. Пусть прямая параллельна оси Ox (рис. 23). Если ордината точки пересечения прямой с осью Oy будет равна b, то уравнением нашей прямой будет служить

$$\boxed{y=b.} \qquad (2)$$

И здесь степень уравнения оказалась первой!

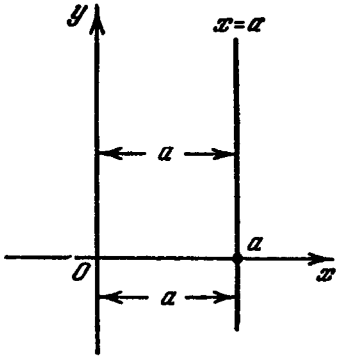


Рис. 22.

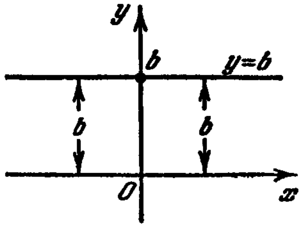


Рис. 23.

Случай 3. Пусть, наконец, наша прямая не параллельна ни одной из осей (рис. 24). Обозначим через α наименьший угол, на который надо повернуть (против часовой стрелки) положительное направление оси Ox, чтобы совместить ось Ox с нашей прямой. Пусть

$$\operatorname{tg} \alpha = m.$$

Как мы увидим, эта величина играет очень важную роль. Ее называют *угловым коэффициентом* прямой. Обозначим, далее, через b ординату пересечения N нашей прямой с осью Oy. Эта величина носит название *начальной ординаты* прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$. Если провести прямые NK и MK, параллельные осям, то образуется прямоугольный треугольник NKM. Ясно *), что

$$\frac{MK}{NK} = \operatorname{tg} \alpha, \quad NK = x, \quad MK = y - b.$$

*) Все сказанное в тексте относится к рис. 24. Если бы для той же прямой мы взяли точку $M(x, y)$ не в первом координатном угле или рассмотрели бы другую прямую, у которой угол α был бы тупым, то рассуждение, естественно, усложнилось бы. Мы не будем рассматривать всех возникающих здесь возможностей. Отметим лишь, что во всех случаях получится то же уравнение (3), что и в тексте (разумеется, при тупом α будет $m = \operatorname{tg} \alpha < 0$).

Отсюда (вспоминая, что $\operatorname{tg}\alpha = m$) получаем

$$\frac{y-b}{x} = m$$

и окончательно

$$\boxed{y = mx + b.} \tag{3}$$

Ввиду произвольности точки M на нашей прямой уравнение (3) и будет уравнением этой прямой *). Остается отметить, что (3) есть уравнение первой степени, и доказательство закончено.

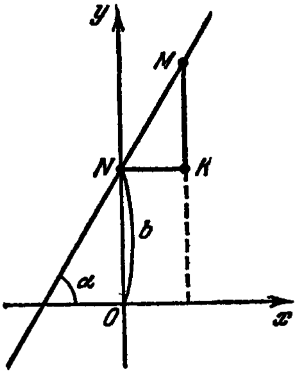


Рис. 24.

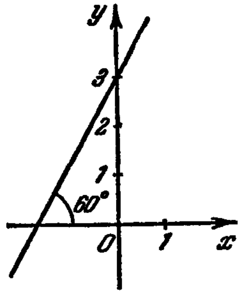


Рис. 25.

Замечания. 1) В форме (3) можно записать уравнение любой прямой, не параллельной осям.

2) Уравнение (2), отвечающее прямой, параллельной оси Ox, можно считать частным случаем уравнения (3), получающимся при $m = 0$. Это вполне согласуется с геометрическим смыслом коэффициента m. Ведь угол α для прямой, параллельной оси Ox, следует считать равным нулю, а тогда и $m = \operatorname{tg}\alpha = 0$.

3) Если прямая параллельна оси Oy, то ее уравнение $x = a$ не является частным случаем уравнения (3). Это тоже согласуется с геометрическим смыслом m. Ведь в нашем случае будет $\alpha = 90°$, а такой угол вовсе не имеет тангенса.

4) В связи с названием числа m и все уравнение (3) называют *уравнением с угловым коэффициентом*. Таким образом, прямые, не параллельные оси Oy, имеют уравнение с угловым коэффициентом, а прямые, параллельные оси Oy, имеют уравнение $x = a$ другого вида.

*) Строго говоря, надо было бы установить еще и то, что координаты точек, не лежащих на нашей прямой, не могут удовлетворять уравнению (3).

2*

Примеры. 1) Рассмотрим прямую, изображенную на рис. 25. У нее $\alpha=60°$, $b=3$ и потому ее уравнение

$$y=\sqrt{3}x+3.$$

2) У прямой, изображенной на рис. 26, будет $\alpha=60°$, $b=-2$. Значит, ее уравнение

$$y=\sqrt{3}x-2.$$

3) У прямой, изображенной на рис. 27, будет $\alpha=150°$, $b=2$, и уравнение этой прямой

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+2.$$

В рассмотренных примерах мы исходили из заданной на рисунке прямой и приходили к ее уравнению. Однако результаты,

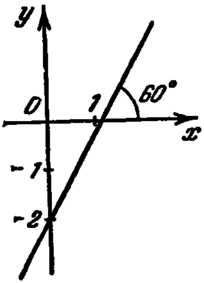


Рис. 26.

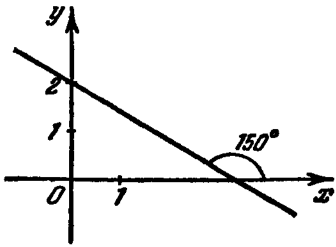


Рис. 27.

установленные при доказательстве теоремы 1, позволяют проводить рассуждение и в обратном порядке.

Например, ясно, что уравнение

$$y=\frac{2}{3}x+1 \tag{4}$$

представляет собой уравнение прямой, образующей с осью Ox угол, тангенс которого равен $\frac{2}{3}$, и пересекающей ось Oy в точке $(0, 1)$. Действительно, ведь если бы мы захотели получить уравнение этой прямой, то согласно теореме 1 пришли бы в точности к уравнению (4). Аналогично этому уравнение

$$x=3$$

представляет собой уравнение прямой, параллельной оси Oy и пересекающей ось Ox в точке $(3, 0)$.

Обобщая эти примеры, мы видим, что верна

Теорема 1*. 1) *Всякому уравнению вида*

$$x=a \tag{1}$$

соответствует прямая. Эта прямая пересекает ось Ox в точке $(a, 0)$ и параллельна оси Oy. 2) *Всякому уравнению вида*

$$y=mx+b \tag{3}$$

соответствует прямая. Она пересекает ось Oy в точке $(0, b)$ и наклонена к оси Ox под таким углом α, для которого $\operatorname{tg}\alpha=m$.

В частности, если $m=0$, т. е. уравнение (3) принимает вид $y=b$, то прямая параллельна оси Ox.

n° 2. Общее уравнение прямой. С помощью теоремы 1* легко доказывается обратная теореме 1

Теорема 2. *Всякому уравнению первой степени соответствует некоторая прямая.*

Доказательство. Общий вид уравнения первой степени (напомним, что мы не рассматриваем уравнений, содержащих какие-либо отличные от x и y неизвестные) есть

$$\boxed{Ax+By+C=0.} \tag{5}$$

Различим два типа уравнения (5) в зависимости от того, будет ли $B=0$ или $B\neq 0$. Пусть сначала $B=0$. Тогда уравнение (5) принимает $Ax+C=0$ или, что то же самое *),

$$x=-\frac{C}{A}.$$

Но ведь это уравнение вида $x=a$ и по теореме 1* ему действительно соответствует некоторая прямая.

Допустим теперь, что $B\neq 0$. Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Поскольку это уравнение вида $y=mx+b$, то и ему (по теореме 1*) соответствует некоторая прямая. Доказательство завершено.

Уравнение (5) носит название общего уравнения прямой. Полезно обратить внимание на некоторые его частные случаи:

1) *Если в уравнении (5) будет $A=0$, то соответствующая прямая параллельна оси Ox.*

---

*) Заметим, что при $B=0$ обязательно будет $A\neq 0$, ибо иначе вообще нет никакого уравнения. Поэтому деление на A законно. Это надо отметить потому, что на 0 делить нельзя.

В самом деле, при $A=0$ уравнение (5) будет иметь вид $By+$ $+C=0$, т. е. $y=-\frac{C}{B}$, а таким уравнениям отвечают прямые, параллельные оси Ox.

Точно так же

2) *Если в уравнении* (5) *будет* $B=0$, *то соответствующая прямая параллельна оси* Oy.

Наконец,

3) *Если в уравнении* (5) $C=0$, *то соответствующая прямая проходит через начало координат.*

Действительно, чтобы узнать, проходит ли прямая, отвечающая уравнению (5), через начало координат, надо подставить в это уравнение $x=0$, $y=0$. Это дает равенство

$$C=0. \tag{6}$$

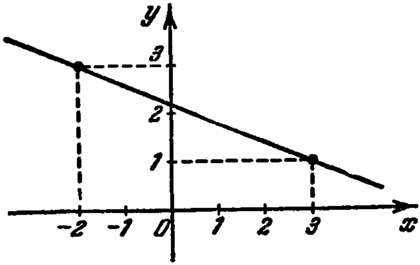


Рис. 28.

Прямая (5) пройдет или не пройдет через (0, 0), смотря по тому, будет ли верным равенство (6) или нет.

Укажем, как решать две задачи, часто возникающие в связи с уравнением прямой.

I. Чтобы общее уравнение прямой превратить в уравнение с угловым коэффициентом, надо это общее уравнение р е ш и т ь о т н о с и т е л ь н о y (разумеется, мы считаем, что y входит в уравнение, т. е. что $B\neq 0$).

Например, уравнение

$$5x+3y-7=0$$

переписывается сначала в виде

$$3y=-5x+7,$$

а затем в виде

$$y=-\frac{5}{3}x+\frac{7}{3}.$$

Стало быть, угловой коэффициент нашей прямой есть $m=-\frac{5}{3}$.

II. Пусть требуется построить на чертеже прямую по уравнению. Если в это уравнение не входит одна из координат, то интересующая нас прямая параллельна одной из осей и ее построение очевидно. Если же в уравнение входят и x и y, то для построения соответствующей прямой надо найти любые две ее точки и соединить их линейкой. Найти же точку, лежащую на нашей прямой, совсем просто: надо выбрать по своему желанию значение одной из координат (все равно какой!), подставить его в уравнение и найти значение второй координаты.

Пример. Построить прямую

$$2x+5y-11=0. \tag{7}$$

Положим $y=1$. Тогда (7) примет вид $2x-6=0$, откуда $x=3$. Значит, одна точка (3, 1) нами уже найдена. Положив, далее, хотя бы $y=3$, получим $2x+4=0$, откуда $x=-2$ и второй точкой будет $(-2, 3)$. Значит, прямая (7) расположена так, как показывает рис. 28.

n°3. Уравнение прямой в отрезках на осях. Как мы видели, построение прямой по ее уравнению очень просто. Все же для этого нужны незначительные вычисления. Между тем существует такая форма записи уравнения прямой, которая позволяет строить прямую на чертеже без всяких вычислений. Это так называемое „уравнение в отрезках на осях“. Остановимся на нем, хотя его теоретическое значение невелико.

Пусть прямая

$$Ax+By+C=0 \tag{8}$$

не параллельна ни одной из осей координат и не проходит через начало. Тогда все коэффициенты написанного уравнения отличны от нуля: $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$.

Перепишем наше уравнение в виде

$$Ax+By=-C.$$

Деля обе части на $-C$, получим

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1.$$

Это равенство можно записать в форме

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

Полагая $-\frac{C}{A}=a$, $-\frac{C}{B}=b$, придадим, наконец, нашему уравнению вид

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,.} \tag{9}$$

Это и есть уравнение прямой в отрезках на осях. Чтобы выяснить происхождение этого названия, решим следующую задачу.

Задача. Дано уравнение (9). *Найти точки M и N, в которых соответствующая прямая пересекает оси Ox и Oy* (рис. 29).

Решение. Так как точка $M(x_M, y_M)$ лежит на оси Ox, то ее ордината равна нулю: $y_M = 0$. Остается найти абсциссу x_M. Для этого учтем, что точка M лежит и на нашей прямой. Значит, ее координаты $(x_M, 0)$ удовлетворяют уравнению (9), т. е.

$$\frac{x_M}{a} + \frac{0}{b} = 1,$$

откуда $x_M = a$. Аналогично находим, что $y_N = b$. Итак, *знаменатели a и b в уравнении*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

*являются отрезками**), *которые соответствующая прямая отсекает от осей координат*

$$\boxed{a = OM, \quad b = ON.}$$

Примеры. 1) Построить прямую

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1.$$

Отложив на осях отрезки -3 и 2, решаем задачу (рис. 30).

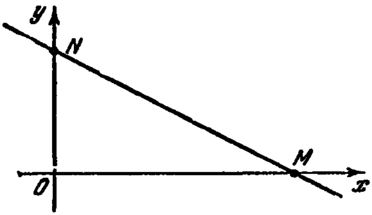


Рис. 29.

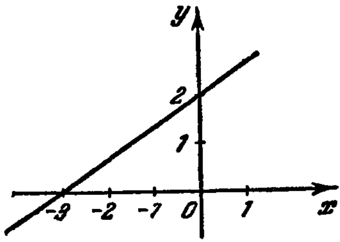


Рис. 30.

2) Построить прямую

$$2x - 5y - 16 = 0. \tag{10}$$

Для этого превратим наше уравнение в уравнение в отрезках на осях при помощи следующей цепочки преобразований:

$$2x - 5y = 16, \quad \frac{2x}{16} - \frac{5y}{16} = 1, \quad \frac{x}{8} - \frac{y}{\frac{16}{5}} = 1$$

*) Точнее, длинами (взятыми с надлежащими знаками) этих отрезков.

и окончательно *)

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{-\frac{16}{5}}=1.$$

Остальное ясно. Заметим, что отрезки a и b, отсекаемые прямой (10) на осях координат, можно найти и по-другому. Именно, чтобы найти точку пересечения прямой (10) с осью Ox, полагаем в уравнении нашей прямой $y=0$. Это дает $2x-16=0$, откуда $x=8$. Ясно, что это значение x и является величиной отрезка a, отсекаемого прямой от оси Ox. Аналогично, положив в уравнении (10) $x=0$, находим $y=-\frac{16}{5}$, т. е. $b=-\frac{16}{5}$. Пожалуй, этот прием поучительнее чисто формальных преобразований уравнения.

n°4. Угловые соотношения между прямыми. Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с взаимным расположением двух прямых, заданных уравнениями

$$y=m_1x+b_1, \qquad \text{(I)}$$
$$y=m_2x+b_2. \qquad \text{(II)}$$

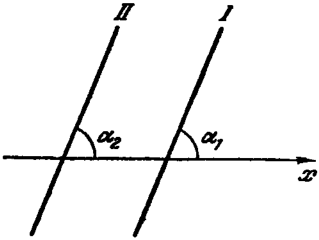


Рис. 31.

Как мы знаем, коэффициенты m_1 и m_2 суть тангенсы углов α_1 и α_2, которые наши прямые образуют с осью:

$$m_1=\operatorname{tg}\alpha_1, \qquad m_2=\operatorname{tg}\alpha_2.$$

I. **Условие параллельности прямых.** Если прямые I и II параллельны друг другу (рис. 31), то $\alpha_1=\alpha_2$. Но тогда и $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$, т. е.

$$\boxed{m_1=m_2.}$$

Итак, *для параллельности двух прямых нужно, чтобы их угловые коэффициенты были равны.*

Например, прямые $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$ и $6x+15y+10=0$ параллельны. Действительно, если эти уравнения превратить в уравнения с угловым

---

*) Читатель обратит внимание, что уравнение $\frac{x}{8}-\frac{y}{\frac{16}{5}}=1$ еще не является уравнением вида (9), ибо в последнем дроби $\frac{x}{a}$ и $\frac{y}{b}$ соединены знаком плюс.

коэффициентом, то первое из них примет вид $y=-\frac{2}{5}x+2$, а второе: $y=-\frac{2}{5}x-\frac{2}{3}$. Значит,

$$m_1=m_2=-\frac{2}{5}.$$

II. **Условие перпендикулярности прямых.** Допустим теперь, что прямые I и II взаимно перпендикулярны (рис. 32).

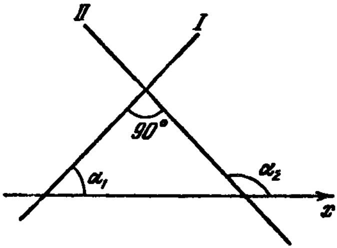


Рис. 32.

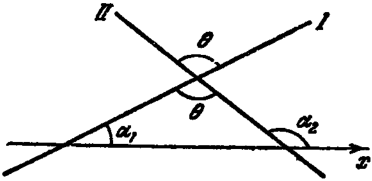


Рис. 33.

По теореме о внешнем угле треугольника будет

$$\alpha_2=\alpha_1+90^\circ.$$

Но тогда

$$m_2=\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}(\alpha_1+90^\circ)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{m_1}.$$

Итак, в нашем случае

$$\boxed{m_2=-\frac{1}{m_1},}$$

т. е. *для взаимной перпендикулярности двух прямых нужно, чтобы их угловые коэффициенты были обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Например, прямые

$$2x+5y-7=0, \qquad 15x-6y+4=0$$

взаимно перпендикулярны, ибо здесь

$$m_1=-\frac{2}{5}, \quad m_2=\frac{5}{2}.$$

III. **Угол между двумя прямыми.** Поставим теперь в общем виде вопрос о том, какой угол θ образуют между собой прямые I и II. При этом под θ мы подразумеваем (рис. 33) тот наименьший угол, на который надо повернуть (против часовой стрелки) первую прямую I, чтобы она совпала со второй прямой II. Таким образом, наши прямые н е р а в н о п р а в н ы.

Снова применяя теорему о внешнем угле треугольника, находим

$$\alpha_2=\theta+\alpha_1.$$

Отсюда $\theta=\alpha_2-\alpha_1$ и потому *)

$$\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2}$$

или, что то же самое,

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}.} \tag{11}$$

Замечание. Если θ' — угол, на который надо повернуть (против часовой стрелки) прямую II для совмещения с I, то $\theta'=180^\circ-\theta$. Значит, $\operatorname{tg}\theta'=-\operatorname{tg}\theta$ и

$$\operatorname{tg}\theta'=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}. \tag{11'}$$

Соотношения (11) и (11′) можно охватить одной формулировкой: из углового коэффициента неподвижной прямой надо вычитать угловой коэффициент подвижной.

Пример. Найти угол между прямыми

1) $5x-7y+1=0$ и 2) $2x+3y-7=0$.

Здесь

$$m_1=\frac{5}{7},\quad m_2=-\frac{2}{3}$$

и потому **)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{-\frac{2}{3}-\frac{5}{7}}{1+\frac{5}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=-\frac{29}{11},\quad \theta=\operatorname{Arctg}\left(-\frac{29}{11}\right).$$

Чтобы получить градусное выражение угла θ, найдем в первой четверти угол φ, у которого $\operatorname{tg}\varphi=\frac{29}{11}$. Учитывая, что

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{11}{29}=0{,}379,$$

по таблицам находим $\varphi\cong 69^\circ 10'$. По самому определению угла θ он лежит между 0 и 180°. Стало быть, $\theta=180^\circ-\varphi\cong 110^\circ 50'$.

---

*) Собственно, формула $\theta=\alpha_2-\alpha_1$ и решает вопрос, ибо по данным m_1 и m_2 можно найти и углы α_1, α_2. Однако для этого придется дважды обращаться к таблицам. Полученная же ниже формула для $\operatorname{tg}\theta$ позволяет обойтись однократным использованием таблиц.

**) Неравенство $\operatorname{tg}\theta<0$ показывает, что $90^\circ<\theta<180^\circ$.

n° 5. Проведение прямой через одну или две заданные точки. Следующие две задачи имеют большое значение.

Задача I. Даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и число m. Требуется провести через M_0 прямую, имеющую m своим угловым коэффициентом.

Решение. Будем искать уравнение нужной нам прямой в форме

$$y = mx + b. \tag{12}$$

Поскольку m нам известно, то дело сводится к нахождению начальной ординаты b. Для этого используем то, что точка M_0 лежит на нашей прямой и поэтому ее координаты (x_0, y_0) должны удовлетворять уравнению (12), т. е.

$$y_0 = mx_0 + b.$$

Это дает для b значение

$$b = y_0 - mx_0.$$

Подставляя это значение в (12), получаем уравнение искомой прямой

$$y = mx + y_0 - mx_0.$$

Обычно его записывают в виде

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0).} \tag{13}$$

Примеры. 1) Провести через $M_0(5, 2)$ прямую, перпендикулярную прямой

$$3x - 2y + 6 = 0. \tag{14}$$

Решение. Угловой коэффициент прямой (14) равен $\frac{3}{2}$. Поэтому (на основании условия перпендикулярности) угловой коэффициент m искомой прямой будет $m = -\frac{2}{3}$. Значит, требуемое уравнение таково:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

или, что то же самое,

$$2x + 3y - 16 = 0.$$

2) Провести через начало координат прямую, образующую с прямой (14) угол в 45°.

Решение. Поставленная задача сформулирована не вполне определенно, ибо не сказано, какую из прямых, искомую или заданную, надо поворачивать против часовой стрелки на 45° для совмещения с другой. В связи с этим, учитывая, что угловой коэффициент прямой (14) равен $\frac{3}{2}$, и обозначая угловой коэффициент искомой прямой через m, будем иметь *)

$$1=\frac{\frac{3}{2}-m}{1+\frac{3}{2}m} \text{ или } 1=\frac{m-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}m}.$$

Первое равенство надо писать, если неподвижной прямой при упомянутом вращении служит заданная прямая (14), а второе, — если искомая. Решая оба написанных уравнения относительно m, находим

$$m_1=\frac{1}{5}, \quad m_2=-5.$$

Решением служат прямые

$$y=\frac{x}{5}, \quad y=-5x$$

(рис. 34). Отметим, что искомые прямые оказались взаимно перпендикулярными; это легко было предвидеть заранее.

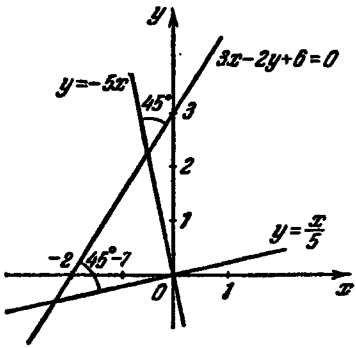


Рис. 34.

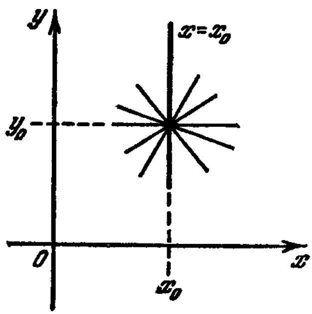


Рис. 35.

Замечание. Если в уравнении (13) менять угловой коэффициент, сохраняя точку (x_0, y_0) закрепленной, то получится бесконечное множество прямых, проходящих через точку (x_0, y_0). Этот геометрический образ называется пучком прямых, в связи с чем и уравнение (13) при переменном m называют *уравнением пучка с центром* (x_0, y_0). Это уравнение охватывает все прямые, проходящие через (x_0, y_0), за исключением прямой $x=x_0$, которая вообще не имеет углового коэффициента (рис. 35).

*) Следует еще вспомнить, что $\operatorname{tg} 45°=1$.

Задача II. Провести прямую через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2)$.

Решение. Обозначим через m (неизвестный!) угловой коэффициент искомой прямой. Так как эта прямая проведена через точку $M_1(x_1, y_1)$, то согласно (13) ее уравнение должно иметь вид

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{15}$$

Для нахождения m используем то, что наша прямая проходит и через M_2 и, стало быть, числа x_2, y_2 должны удовлетворять уравнению (15), т. е.

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1), \tag{16}$$

откуда

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{17}$$

Подставляя найденное значение m в (15), получим $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ или, что то же самое,

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.} \tag{18}$$

Задача решена.

Примеры. 1) Провести прямую через точки $A(2, 5)$ и $B(11, 8)$. Согласно (18) прямая AB такова:

$$\frac{y-5}{8-5} = \frac{x-2}{11-2}, \text{ т. е. } 9(y-5) = 3(x-2)$$

или

$$x - 3y + 13 = 0.$$

2) То же для $A(2, 6)$ и $B(2, 11)$.

Снова используя (18), получаем равенство

$$\frac{y-6}{11-6} = \frac{x-2}{2-2},$$

не имеющее смысла, поскольку знаменатель второго отношения равен нулю.

Итак, с помощью (18) задачу решить не удалось. Однако она легко решается непосредственно. Действительно, точки A и B имеют одну и ту же абсциссу $x = 2$. Но тогда прямая AB, очевидно, параллельна оси Oy и все ее точки должны иметь ту же самую абсциссу. Значит, искомое уравнение имеет вид $x = 2$. Такое же рассуждение можно провести всегда, когда один из знаменателей в уравнении (18) окажется нулем *). Отсюда следует

---

*) Оба знаменателя не могут одновременно равняться нулю, ибо это означало бы, что $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, т. е. что точки M_1 и M_2 совпадают, в то время как мы, естественно, считаем их различными.

Правило. Если при проведении прямой через две данные точки по формуле (18) один из знаменателей окажется нулем, то искомое уравнение получается приравниванием нулю и соответствующего числителя.

Пример. Провести прямую через $A(2,\ 7)$ и $B(5,\ 7)$. Уравнение (18) дает

$$\frac{y-7}{7-7}=\frac{x-2}{5-2}.$$

Значит, требуемая прямая есть $y-7=0$.

Покажем применение всего пройденного материала на следующей вадаче: даны три вершины $A(2,\ -1)$, $B(5,\ 3)$, $C(7,\ 11)$ треугольника (рис. 36). Найти уравнения и длины его медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из A.

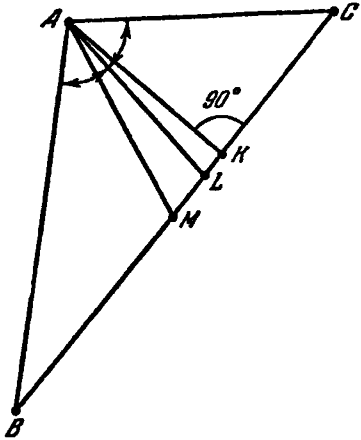


Рис. 36.

Решение. 1) Пусть M — середина стороны BC. Тогда

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{5+7}{2}=6.$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{3+11}{2}=7.$$

Уравнение медианы AM получим по формуле (18):

$$\frac{y+1}{7+1}=\frac{x-2}{6-2},$$

т. е.

$$y+1=2(x-2)$$

или

$$2x-y-5=0.$$

Длина же медианы есть расстояние между точками A и M. Значит,

$$AM=\sqrt{(6-2)^2+(7+1)^2}=\sqrt{80}\cong 8{,}9.$$

2) Чтобы найти высоту AK, составим уравиеиие стороиы BC:

$$\frac{y-3}{11-3}=\frac{x-5}{7-5},\quad \text{т. е. } y-3=4(x-5)$$

или

$$4x-y-17=0. \tag{19}$$

Угловой коэффициеит этой стороиы $m_{BC}=4$. Значит, угловой коэффициент высоты AK (вспомним условие перпендикуляриости!)

равен $m=-\frac{1}{4}$. Поэтому уравнение прямой AK согласно (13) таково:

$$y+1=-\frac{1}{4}(x-2)$$

или

$$x+4y+2=0. \tag{20}$$

Для нахождения длины AK сначала найдем точку K пересечения высоты со стороной BC. Эта точка находится совместным решением уравнений (19) и (20):

$$\begin{array}{r|l} 4x-y-17=0 & 4 \\ x+4y+2=0 & 1 \ + \\ \hline 17x-66=0 & \end{array}, \quad x=\frac{66}{17}, \quad y=4x-17=-\frac{25}{17}.$$

Итак, $K=K\left(\frac{66}{17}, -\frac{25}{17}\right)$, откуда

$$AK=\sqrt{\left(\frac{66}{17}-2\right)^2+\left(-\frac{25}{17}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{17}}{17}=\frac{8}{\sqrt{17}}.$$

3) Переходя к рассмотрению биссектрисы*) AL, вспомним, что она делит сторону BC на части, пропорциональные прилегающим сторонам, т. е. что

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}.$$

Но

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5, \quad AC=\sqrt{(7-2)^2+(11+1)^2}=13.$$

Значит,

$$\frac{BL}{LC}=\frac{5}{13}.$$

По формулам деления отрезка в данном отношении имеем

$$x_L=\frac{5\cdot 13+7\cdot 5}{18}=\frac{50}{9}, \quad y_L=\frac{3\cdot 13+11\cdot 5}{18}=\frac{47}{9}.$$

Уравнение прямой, проведенной через $A(2, -1)$ и $L\left(\frac{50}{9}, \frac{47}{9}\right)$, есть

$$\frac{y+1}{\frac{47}{9}+1}=\frac{x-2}{\frac{50}{9}-2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{y+1}{56}=\frac{x-2}{32}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y+1}{7}=\frac{x-2}{4}$$

или

$$7x-4y-18=0. \tag{21}$$

---

*) В следующем n° мы дадим другой способ нахождения этой биссектрисы.

Длина же биссектрисы AL равна

$$AL=\sqrt{\left(\frac{50}{9}-2\right)^2+\left(\frac{47}{9}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{65}}{9}.$$

n° 6. Расстояние от точки до прямой. Довольно часто бывает необходимо определить расстояние данной точки от данной прямой. Те сведения, которыми мы уже располагаем, позволяют решить эту задачу. Покажем это на примере точки $M(7, 2)$ и прямой AB, уравнение которой

$$3x-4y+12=0.$$

Расстояние d от точки M до прямой AB равно длине перпендикуляра, опущенного из M на AB (рис. 37). Обозначив (пока неизвестную!) точку пересечения этого перпендикуляра с прямой AB через N, имеем

$$d=MN.$$

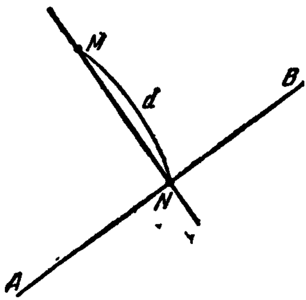


Рис. 37.

Стало быть, дело свелось к нахождению точки N. Эту точку мы легко нашли бы, если бы знали уравнение перпендикуляра MN: мы решили бы совместно это уравнение и уравнение прямой AB. Итак, дело за уравнением прямой MN. Но мы знаем точку M, через которую проходит эта прямая. Что же касается углового коэффициента прямой MN, то он находится на основании условия перпендикулярности, если предварительно найти угловой коэффициент m^* исходной прямой AB. Все сказанное приводит к следующему решению задачи:

1) Находим угловой коэффициент m^* прямой AB. Для этого приводим ее уравнение к виду уравнения с угловым коэффициентом:

$$y=\frac{3}{4}x+3.$$

Отсюда видно, что $m^*=\frac{3}{4}$.

2) Находим угловой коэффициент m перпендикуляра MN. Он равен

$$m=-\frac{1}{m^*}=-\frac{4}{3}.$$

3) Составляем уравнение перпендикуляра MN

$$y-2=-\frac{4}{3}(x-7)$$

или

$$4x+3y-34=0.$$

4) Находим точку N, решая совместно уравнения прямых AB и MN:

$$\begin{array}{r|l} 3x-4y+12=0 & 3 \\ 4x+3y-34=0 & 4 \end{array} +$$
$$\overline{\quad 25x-100=0. \quad}$$

Отсюда $x=4$. Подставляя это значение в уравнение прямой MN, получаем

$$16+3y-34=0$$

и $y=6$. Итак, $N=N(4, 6)$.

5) Находим искомое расстояние

$$d=MN=\sqrt{(4-7)^2+(6-2)^2}=5.$$

Ясно, что этот же ход рассуждений можно провести в любом численном примере. Мы, однако, решим задачу в общем виде и полученный результат запишем в виде формулы.

Задача. *Найти расстояние d точки $M(x_0, y_0)$ от прямой*

$$Ax+By+C=0. \tag{*}$$

Решение. Пусть $N(x_1, y_1)$ будет точкой пересечения перпендикуляра, опущенного из M на прямую (*), с прямой (*). Тогда

$$d=MN=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}. \tag{22}$$

Угловой коэффициент m^* прямой (*), как нетрудно видеть, равен

$$m^*=-\frac{A}{B}.$$

Стало быть, угловой коэффициент m перпендикуляра MN равен $m=\frac{B}{A}$, и уравнение этого перпендикуляра имеет вид

$$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0). \tag{23}$$

Следуя уже разработанному плану, мы должны были бы решить совместно это уравнение и уравнение (*), найти тем самым координаты (x_1, y_1) точки N и подставить их в (22). Однако этот естественный путь привел бы к очень громоздким вычислениям. Поэтому мы изберем другой путь, хотя и более искусственный, но приводящий к менее сложным выкладкам. Именно, отметим прежде всего, что точка N лежит на линии MN. Благодаря этому числа x_1, y_1 удовлетворяют уравнению (23), т. е.

$$y_1-y_0=\frac{B}{A}(x_1-x_0),$$

откуда

$$\frac{y_1-y_0}{B}=\frac{x_1-x_0}{A}.$$

Обозначим (неизвестное нам!) общее значение этих дробей через q:

$$\frac{x_1-x_0}{A}=q, \qquad \frac{y_1-y_0}{B}=q.$$

Тогда

$$x_1-x_0=Aq, \qquad y_1-y_0=Bq. \tag{24}$$

Подставляя эти разности в формулу (22), получим

$$d=\sqrt{(A^2+B^2)\,q^2}=|q|\sqrt{A^2+B^2}. \tag{25}$$

Мы поставили здесь абсолютную величину числа q потому, что р а с с т о я н и е d не может быть отрицательным, а число q может быть и отрицательным.

Остается найти q. Для этого перепишем равенства (24) в форме

$$x_1=x_0+Aq, \qquad y_1=y_0+Bq$$

и подставим эти значения x_1 и y_1 в уравнение (*) (ведь точка N лежит на этой прямой, и потому ее координаты удовлетворяют соответствующему уравнению). Это дает

$$A(x_0+Aq)+B(y_0+Bq)+C=0,$$

откуда

$$q=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

Подставляя найденное значение q в формулу (25) и сокращая на $\sqrt{A^2+B^2}$, получаем окончательно

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.} \tag{26}$$

Таким образом, *чтобы найти расстояние точки от прямой, заданной общим уравнением, надо подставить координаты точки в левую часть этого уравнения и модуль полученного числа разделить на квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при координатах.*

Например, расстояние точки (5, 1) от прямой $5x+12y-50=0$ есть

$$d=\frac{|5\cdot 5+12\cdot 1-50|}{\sqrt{25+144}}=1.$$

Остановимся на вопросе о том, какой г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л имеет з н а к левой части уравнения

$$Ax+By+C=0. \tag{27}$$

Так как из двух коэффициентов A и B хоть один отличен от нуля, то можно для определенности принять, что $A\neq 0$. Поскольку же от умножения уравнения (27) на -1 смысл уравнения не меняется, то можно считать, что

$$A>0. \tag{28}$$

Заметим, что условие $A \neq 0$ гарантирует, что прямая (27) пересекает ось Ox. Стало быть, точки плоскости, не лежащие на прямой (27), можно разбить на два класса: 1) лежащие правее этой прямой и 2) лежащие левее ее.

Теорема. 1) *Если точка $M(x, y)$ лежит правее прямой* (27), *то*

$$Ax + By + C > 0. \tag{29}$$

2) *Если точка $M(x, y)$ лежит левее прямой* (27), *то* $Ax + By + C < 0$.

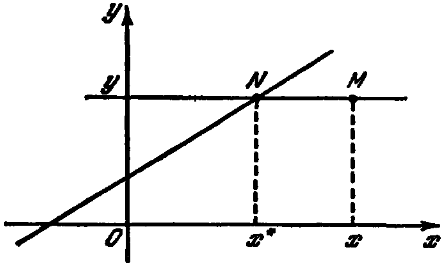


Рис. 38.

Докажем для определенности утверждение 1). С этой целью проведем (рис. 38) через нашу точку $M(x, y)$ прямую, параллельную оси Ox. Так как прямая (27) не параллельна оси Ox, то вновь проведенная прямая обязательно пересечется с (27). Пусть эти прямые пересекаются в точке $N(x^*, y^*)$.

Так как точка N лежит на прямой (27), то

$$Ax^* + By^* + C = 0.$$

Но ведь N и M имеют одну и ту же ординату. Поэтому $y^* = y$, и предыдущее равенство принимает вид

$$Ax^* + By + C = 0. \tag{30}$$

Заметим теперь, что по условию точка $M(x, y)$ лежит правее точки $N(x^*, y)$. Значит, $x > x^*$. Отсюда и из (28) вытекает, что

$$Ax + By + C > Ax^* + By + C.$$

Сопоставляя это неравенство с (30), получаем (29).

Следствие. *Если числа*

$$Ax_1 + By_1 + C \text{ и } Ax_2 + By_2 + C$$

имеют одинаковые (разные) знаки, то точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат с одной и той же (по разные) стороны прямой (27).

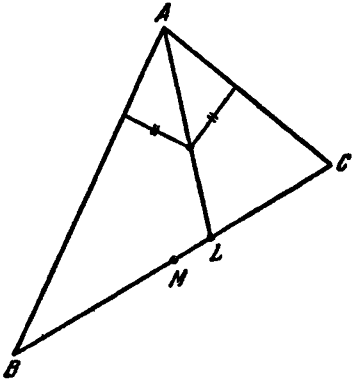


Рис. 39.

Покажем применение этого результата на следующем примере.

Задача. Даны вершины треугольника $A(2, -1)$, $B(5, 3)$, $C(7, 11)$. Найти уравнение и длину его биссектрисы, проведенной из вершины A *) (рис. 39).

*) Эту задачу мы решили другим способом в п° 5.

Решение. Напишем уравнения сторон AB и AC. Они таковы:

$$(AB)\quad \frac{y+1}{3+1}=\frac{x-2}{5-2},\ \frac{y+1}{4}=\frac{x-2}{3},\ 3(y+1)=4(x-2),\ \underline{\underline{4x-3y-11=0}};$$

$$(AC)\quad \frac{y+1}{11+1}=\frac{x-2}{7-2},\ \frac{y+1}{12}=\frac{x-2}{5},\ 5(y+1)=12(x-2),\ \underline{\underline{12x-5y-29=0}}.$$

Как известно, все точки искомой биссектрисы одинаково удалены от сторон AB и AC. Значит, для каждой точки (x, y) биссектрисы будет

$$\frac{|4x-3y-11|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|12x-5y-29|}{\sqrt{12^2+5^2}},$$

т. е.

$$\pm\frac{4x-3y-11}{5}=\pm\frac{12x-5y-29}{13}. \tag{31}$$

В каждой части надо выбрать такой знак, чтобы эта часть оказалась положительной.

Заметим теперь, что точка (x, y) лежит с той же стороны прямой AB (прямой AC), что и середина $M(6, 7)$ стороны BC. Подставляя координаты $(6, 7)$ в левую часть уравнения AB, найдем

$$4\cdot 6-3\cdot 7-11=-8<0.$$

Значит, и для точек (x, y) биссектрисы левая часть уравнения AB будет <0 и потому в первой части уравнения (31) надо выбрать знак „—". Подставляя, далее, $(6, 7)$ в левую часть уравнения AC, получаем

$$12\cdot 6-5\cdot 7-29=8>0.$$

Значит, во второй части уравнения (31) надлежит выбрать знак „+".

Таким образом, уравнение нашей биссектрисы таково:

$$-\frac{4x-3y-11}{5}=\frac{12x-5y-29}{13}$$

или, что то же самое,

$$7x-4y-18=0. \tag{32}$$

Как и следовало, получилось уже известное уравнение (21)!

Чтобы найти точку L пересечения биссектрисы со стороной BC, решим совместно уравнение (32) с найденным выше [см. (19)] уравнением BC:

$$\begin{array}{r|l} 7x-4y-18=0 & 1 \\ 4x-\ \ y-17=0 & 4 \\ \hline -9x+50=0 & \end{array}\ -,\qquad x=\frac{50}{9},\quad y=4x-17=\frac{47}{9}.$$

Мы нашли ту же точку L, что и в конце п° 5. Длина d биссектрисы находится, как и выше, по формуле

$$d=AL=\sqrt{\left(\frac{50}{9}-2\right)^2+\left(\frac{47}{9}+1\right)^2}=\frac{8\sqrt{65}}{9}.$$

Сопоставление разных способов решения одной и той же задачи весьма поучительно!

§ 4. Эллипс

При изучении линий по их уравнениям естественно располагать их по сложности этих уравнений. Самой простой линией и с этой точки зрения следует считать прямую, ибо ее уравнение имеет первую степень. Следующими же по своей сложности за прямой должны считаться линии, уравнения которых имеют вторую степень. Таких линий (они называются *кривыми второго порядка*) три*): *эллипс*, *парабола* и *гипербола*. Они играют большую роль в математике, естествознании и технике. В этом параграфе мы займемся изучением эллипса.

n° 1. Определение эллипса. Его каноническое уравнение. Вообразим себе два гвоздика, вбитые в стол, и привязанную к ним своими концами бечевку, длина которой больше расстояния между гвоздиками. Если эту бечевку натянуть куском мела и вести этот мел по столу, то он вычертит на столе некоторую замкнутую овальную линию. Эта линия и называется эллипсом. Ясно, что расстояния точки, движущейся вдоль эллипса, до гвоздиков будут меняться, но сумма их все время будет оставаться равной длине бечевки. Перейдем теперь к точному изложению вопроса.

Определение. *Эллипсом* называется линия, представляющая геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Обозначим фокусы эллипса через F и F', а сумму расстояний точек эллипса от фокусов через $2a$. Тогда для любой точки M, лежащей на эллипсе (рис. 40), будет

$$\boxed{MF + MF' = 2a.} \tag{1}$$

Расстояние между фокусами эллипса обычно обозначается через $2c$:

$$\boxed{FF' = 2c.}$$

Поскольку одна сторона треугольника всегда короче суммы двух других его сторон, то $2c < 2a$, откуда и

$$\boxed{c < a.} \tag{2}$$

*) Окружность также является кривой второго порядка, ибо ее уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ имеет вторую степень. Однако ниже мы увидим, что окружность есть частный вид эллипса. Заметим еще, что и прямую можно задать уравнением второй степени. Например, уравнение $y-x=0$ можно записать в равносильном виде $y^2-2yx+x^2=0$. В тексте, говоря о линиях второго порядка, мы имеем в виду кривые линии.

Чтобы вывести уравнение эллипса, надо прежде всего выбрать какую-нибудь систему координат. Мы проведем ось Ox через фокусы F и F', а начало координат поместим в середину отрезка FF'.

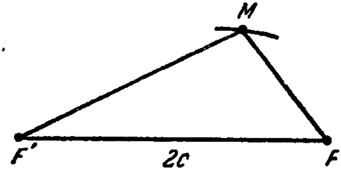


Рис. 40.

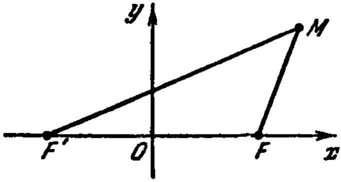


Рис. 41.

Этим определится и положение оси Oy (рис. 41). Ясно, что в этой системе фокусы будут иметь координаты $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$.

Дли любой точки $M(x, y)$ будет

$$MF = \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad MF' = \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Отсюда и из (1) видно, что точка M лежит или не лежит на нашем эллипсе, смотри по тому, верно или неверно равенство

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \tag{3}$$

Таким образом, равенство (3) и есть уравнение рассматриваемого эллипса. Это уравнение очень громоздко, но его можно упростить. Для этого перепишем (3), „уединив" один из радикалов:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возводя в квадрат и раскрывая скобки, получим

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

откуда

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Снова возведя в квадрат, находим

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

т. е.

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \tag{4}$$

Заметим теперь, что в силу (2) будет $a^2-c^2>0$. Значит, эту разность можно *) обозначить через b^2.

$$a^2-c^2=b^2. \tag{5}$$

*) Если не рассматривать мнимых чисел, то отрицательное число нельзя обозначить через b^2.

Тогда (4) примет вид

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Деля на a^2b^2, получаем окончательно

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \tag{6}$$

Это есть простейшее (или каноническое) уравнение эллипса. Полезно запомнить также соотношение

$$\boxed{a^2=b^2+c^2,}$$

равносильное (5).

п°2. Исследование формы эллипса. Изучим форму эллипса, опираясь только на его уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6}$$

Решение этой задачи начнем с установлении следующей теоремы.

Теорема. *Эллипс симметричен относительно оси Oy.*

Доказательство. Возьмем две точки M и N, симметрично расположенные относительно оси Oy (рис. 42). Теорема будет доказана, если мы покажем, что из принадлежности одной из точек M, N эллипсу (6) обязательно будет вытекать принадлежность и другой точки этому эллипсу.

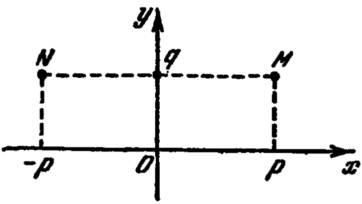


Рис. 42.

Пусть для определенности эллипсу принадлежит точка M. Обозначим ее координаты через (p, q). Тогда ясно, что координаты симметричной точки N будут $(-p, q)$. То, что точка $M(p, q)$ лежит на линии (6), можно записать в виде равенства

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

Подлежащий же доказательству факт принадлежности точки $N(-p, q)$ линии (6) записывается в виде равенства

$$\frac{(-p)^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1. \tag{8}$$

Итак, надо, зная, что верно (7), показать, что верно (8). А это вполне очевидно, ибо

$$(-p)^2=p^2. \tag{9}$$

Этим и доказана теорема.

Замечание. Вдумываясь в приведенное доказательство, мы видим, что оно основано на том, что равенства (7) и (8) одновременно верны или неверны. Последнее же обстоятельство обусловлено равенством (9) и тем, что равенство (8) получаетси из (7) заменой p^2 на $(-p)^2$. Но ведь и $(-p)^4=p^4$. Поэтому, буквально повторив приведенное доказательство, мы установим, что линии

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

также симметрична относительно оси Oy. То же относится и к линии

$$5x^6-9x^2y+3x^4y^2=42$$

и т. п. Вообще справедлив важный.

Принцип симметрии. *Если в уравнение какой-либо линии координата x входит только в четных степенях, то эта линия симметрична относительно оси Oy.*

Ввиду полного равноправия координат x и y исно, что кривая, уравнение которой содержит ординату y только в четных степенях, симметрична относительно оси абсцисс.

В частности, уравнение эллипса (6) как раз и содержит y только в квадрате. Поэтому *эллипс симметричен и относительно оси Ox.*

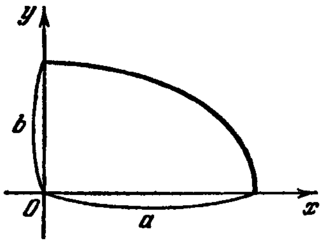


Рис. 43.

В силу сказанного, мы будем знать форму всего эллипса, если установим вид той его части, котораи лежит в 1-м координатном угле. Для этого разрешим уравнение (6) относительно y *):

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{10}$$

Отсюда вытекают 4 утверждении:

1) Если $x=0$, то $y=b$.

2) Если x увеличивается, то y уменьшается.

3) Если $x=a$, то $y=0$.

4) Если $x>a$, то y оказываетси мнимым, т. е. на эллипсе (6) вовсе нет точек, у которых $x>a$.

Коротко говори, при возрастании x от нули до a ордината y убывает от b до нуля.

Таким образом, та часть эллипса, котораи находитси в первом координатном угле, имеет вид, изображенный на рис. 43, а весь эллипс таков, как показано на рис. 44.

---

*) Поскольку у точек (x, y), лежащих в первой четверти, будет $y<0$, то мы берем перед радикалом знак „+".

Точки A, A', B, B', в которых эллипс пересекается с осями координат (конечно, важно то, что это оси симметрии эллипса), называются его *вершинами*. Отрезки AA' и BB' (равные, очевидно, $2a$ и $2b$) называются соответственно *большой* и *малой осями* эллипса, а их половины a и b — большой и малой *полуосями*. Наконец, точку O, являющуюся центром симметрии эллипса, называют его *центром*.

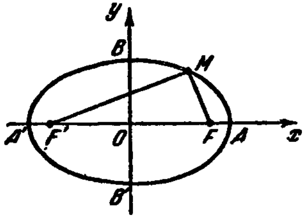


Рис. 44.

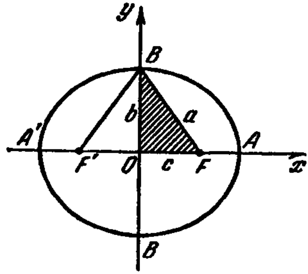


Рис. 45.

Замечания. 1) Для любой точки M, лежащей на эллипсе, будет $MF+MF'=2a$. В частности, и для вершины B оказывается

$$BF+BF'=2a.$$

Но по соображениям симметрии (рис. 45) будет $BF'=BF$. Стало быть, $2\cdot BF=2a$, т. е.

$$BF=a.$$

Замечая, что BF — гипотенуза прямоугольного треугольника OBF, катеты которого равны b и c, получаем уже знакомое соотношение

$$a^2=b^2+c^2.$$

2) Окружность можно считать таким эллипсом, у которого фокусы совпадают. В этом случае будет $c=0$, а значит, $b=a$ и уравнение (6) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

т. е. превращается в хорошо известное уравнение окружности с центром в начале координат:

$$x^2+y^2=a^2.$$

Примеры. 1) Найти эллипс, у которого расстояние между концами большой и малой оси равно 6, а междуфокусное расстояние равно малой оси.

Условия задачи означают, что

$$\sqrt{a^2+b^2}=6, \quad 2c=2b.$$

Второе соотношение дает $c=b$, а так как $a^2=b^2+c^2$, то $a^2=2b^2$. Значит, $\sqrt{3b^2}=6$ и $b^2=12$. Тогда $a^2=24$, и наш эллипс есть

$$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{12}=1.$$

2) Найти длину хорды эллипса (6), проходящей через фокус перпендикулярно большой оси.

Обозначим через M (x_0, y_0) верхний конец интересующей нас хорды. Тогда длина хорды равна $2y_0$. С другой стороны, $x_0=c$. Так как

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

(почему?), то

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1, \text{ т. е. } \frac{a^2-b^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

откуда

$$2y_0=2\frac{b^2}{a}.$$

n°3. Эллипс как сжатая окружность. Форму эллипса легко представить, сопоставляя его уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{11}$$

с уравнением окружности

$$x^2+y^2=a^2, \tag{12}$$

имеющей своим диаметром большую ось эллипса (рис. 46). Пусть M и N — точки эллипса и окружности, имеющие одну и ту же абсциссу x. Ординаты их обозначим соответственно через y_M и y_N. Для определенности примем, что обе точки M и N расположены выше оси Ox. Из (11) и (12) вытекает, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1, \quad x^2+y_N^2=a^2.$$

Отсюда

$$y_M=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

$$y_N=\sqrt{a^2-x^2}$$

и, стало быть,

$$\boxed{y_M=\frac{b}{a}y_N.}$$

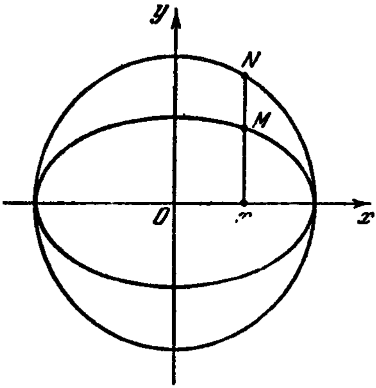


Рис. 46.

Мы видим, что ордината каждой точки эллипса получается из ординаты соответствующей (т. е. имеющей ту же абсциссу) точки окружности умножением на некоторое число. Это число (одно и то же для всех точек эллипса) меньше 1 (ибо $b<a$).

Полученный результат выражают, говоря, что эллипс (11) получен из окружности (12) с помощью **сжатия** в $\frac{a}{b}$ раз $\left(\text{внимание! Сжатие именно в } \frac{a}{b}, \text{ а не в } \frac{b}{a} \text{ раз}\right)$ или, короче, что эллипс есть сжатая окружность. Например, эллипс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ получен из окружности $x^2+y^2=36$ с помощью сжатия в два раза (ведь здесь $a=6$, $b=3$).

n° 4. Эксцентриситет эллипса.

Определение. *Эксцентриситетом* эллипса называется отношение междуфокусного расстояния к большой оси, т. е. число

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}.}$$

Так как $c<a$, то для любого эллипса будет

$$0\leqslant\varepsilon<1$$

(случай $\varepsilon=0$ соответствует окружности). Нетрудно разобраться, как влияет значение ε на форму эллипса. Действительно, деля соотношение $b^2+c^2=a^2$ на a^2, находим

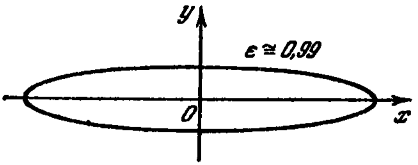


Рис. 47.

$$\frac{b^2}{a^2}+\varepsilon^2=1.$$

Значит,

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Отсюда видно, что при очень малом ε числа a и b почти равны, т. е. эллипс очень напоминает окружность. Если же ε близко к 1, то b весьма мало по сравнению с a и, стало быть, эллипс весьма вытянут (рис. 47).

Как известно, планеты и кометы движутся по эллипсам. В одном из фокусов каждого такого эллипса находится Солнце (в другом фокусе нет ничего!). Оказывается, что эксцентриситеты планетных орбит весьма малы, а кометных — велики (т. е. близки к 1). Таким образом, планеты движутся почти по окружностям, а кометы то приближаются к Солнцу, то весьма удаляются от него *).

n° 5. Взаимно сопряженные диаметры эллипса. Всякая хорда эллипса, проходящая через его центр, называется *диаметром* этого эллипса.

В теории упругости полезно уметь решать следующую задачу.

*) Эксцентриситеты орбит Меркурия, Венеры, Земли и Марса равны соответственно $\varepsilon=0{,}21$, $\varepsilon=0{,}01$, $\varepsilon=0{,}02$, $\varepsilon=0{,}09$. Эксцентриситеты же орбит комет Галлея и Энке равны соответственно $\varepsilon=0{,}97$ и $\varepsilon=0{,}87$.

Задача. Выбирается (*рис.* 48) *некоторый диаметр* $I-I$ *эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{13}$$

и рассматривается семейство хорд, параллельных этому диаметру. Найти геометрическое место их середин.

Решение. Пусть угловой коэффициент диаметра $I-I$ равен m. Выберем какую-нибудь хорду, параллельную нашему диаметру. Ясно, что уравнение этой хорды будет

$$y=mx+h. \tag{14}$$

Чтобы найти точки M и N, в которых выбранная хорда пересекает эллипс, надо, как известно, решить совместно уравнения (13) и (14).

Подставляя y из (14) в (13), находим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+h)^2}{b^2}=1. \tag{15}$$

Абсциссы x_M и x_N точек M и N суть корни этого квадратного уравнения. Нас интересует середина $C(x_C;\ y_C)$ хорды MN. Согласно известной формуле будет

$$x_C=\frac{x_M+x_N}{2}.$$

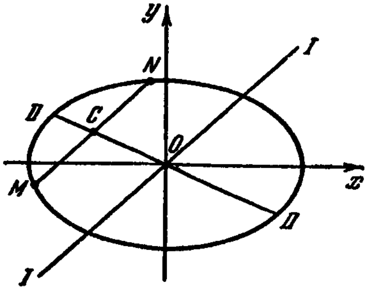


Рис. 48.

Таким образом, нам нужны не взятые по отдельности корни уравнения (15), а сумма этих корней. Но ведь сумма корней квадратного уравнения

$$Ax^2+Bx+C=0$$

равна $-\frac{B}{A}$. Переписав уравнение (15) в форме

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+2\frac{mh}{b^2}x+\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)=0,$$

видим, что

$$x_M+x_N=-\frac{2\frac{mh}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}=-\frac{2a^2mh}{b^2+a^2m^2},$$

откуда

$$x_C=-\frac{a^2mh}{b^2+a^2m^2}. \tag{16}$$

Для нахождения ординаты y_C подставим x_C в уравнение (14). Это дает

$$y_C=mx_C+h=\frac{-a^2m^2h}{b^2+a^2m^2}+h=\frac{b^2h}{b^2+a^2m^2}. \tag{17}$$

Сопоставляя (16) и (17), получаем

$$\frac{y_C}{x_C}=-\frac{b^2}{a^2m}.$$

Это показывает, что точка C лежит на прямой

$$\boxed{y=-\frac{b^2}{a^2m}x.} \tag{18}$$

Очень важно, что в уравнение (18) не входит число h, отличающее выбранную нами хорду от остальных хорд семейства. Значит, *середины всех хорд семейства лежат на прямой* (18). Сама же эта прямая проходит через центр эллипса. Стало быть, искомое геометрическое место есть отрезок прямой (18), содержащийся внутри нашего эллипса. Иными словами, это геометрическое место является диаметром эллипса, причем угловой коэффициент m^* этого нового диаметра $II-II$ есть

$$\boxed{m^*=-\frac{b^2}{a^2m}.} \tag{19}$$

Диаметр $II-II$ называется сопряженным диаметру $I-I$.

Теорема. Если диаметр $II-II$ сопряжен диаметру $I-I$, то и обратно диаметр $I-I$ сопряжен диаметру $II-II$. Иначе говоря, эти два диаметра взаимно сопряжены.

Доказательство. Пусть угловые коэффициенты диаметров $I-I$ и $II-II$ равны соответственно m и m^*. Обозначим через m^{**} угловой коэффициент того диаметра, который сопряжен диаметру $II-II$. Согласно (19) имеем

$$m^{**}=-\frac{b^2}{a^2m^*}.$$

Но ведь и m^* выражается через m по той же формуле (19). Стало быть,

$$m^{**}=-\frac{b^2}{a^2\left(-\frac{b^2}{a^2m}\right)}=m.$$

Итак, $m^{**}=m$, что и доказывает теорему.

Замечание. Если за один из диаметров принять малую ось эллипса, то сопряженным ему диаметром будет большая ось того же эллипса. Значит, оси эллипса суть такие взаимно сопряженные его диаметры, которые в то же время и взаимно перпендикулярны. Если наш эллипс является окружностью, то диаметр $II-II$, сопряженный диаметру $I-I$, всегда будет перпендикулярен этому последнему. Для эллипса же, отличного от окружности, никакие два взаимно сопряженных диаметра, кроме его осей, уже не будут взаимно перпендикулярны. В самом деле, ведь согласно (19)

$$m\cdot m^*=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{20}$$

Для того же, чтобы наши диаметры были взаимно перпендикулярны, надо, чтобы было

$$m\cdot m^*=-1. \tag{21}$$

Совместное выполнение соотношений (20) и (21) возможно только в том частном случае, когда $b=a$, т. е. когда наш эллипс является окружностью.

Примеры. 1) Найти диаметр эллипса

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

сопряженный диаметру $y=7x$ *).

У нас $m=7$, $a=5$, $b=4$. Значит,

$$m^*=-\frac{b^2}{a^2m}=-\frac{16}{175}$$

и искомый диаметр есть $y=-\frac{16}{175}x$.

2) Через точку C (2, 1) провести ту хорду эллипса

$$\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{11}=1,$$

которая в этой точке делится пополам.

Прежде всего проведем (рис. 49) через C диаметр $I-I$ нашего эллипса. Поскольку он проходит через точки O и C, то его уравнение будет $y=\frac{x}{2}$. У сопряженного ему диаметра $II-II$ угловой коэффициент [согласно (19)] будет

$$m^*=-\frac{11}{80\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{11}{40}.$$

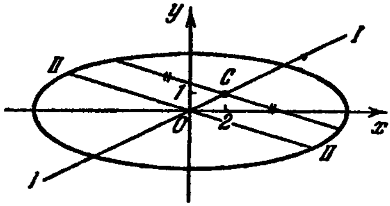


Рис. 49.

Таков же будет и угловой коэффициент интересующей нас хорды. Значит, уравнение ее

$$y-1=-\frac{11}{40}(x-2)$$

или

$$11x+40y-62=0.$$

§ 5. Парабола

n° 1. Определение параболы. Ее каноническое уравнение.

Определение. *Параболой* называется линия, представляющая геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки, называемой *фокусом*, и от данной прямой, называемой *директрисой*.

---

*) Этот оборот речи не вполне точен. Ведь $y=7x$ — бесконечная прямая, а диаметром эллипса является лишь конечный ее отрезок. Подобные словесные вольности допускаются очень часто (когда они не могут привести к недоразумениям).

Если директриса параболы (рис. 50) есть DD', а фокус — F, то парабола состоит из таких точек M, для которых

$$\boxed{MN = MF.}$$

Чтобы найти уравнение параболы, надо выбрать прежде всего какую-либо систему координат. Мы проведем ось Ox через фокус перпендикулярно директрисе (направив ее от директрисы к фокусу). Начало координат O поместим на равных расстояниях от директрисы и фокуса. Этим определится

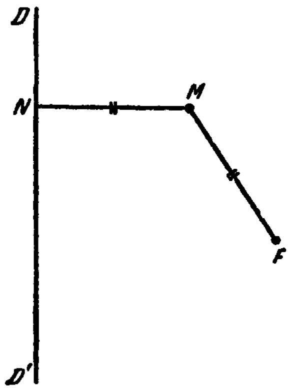


Рис. 50.

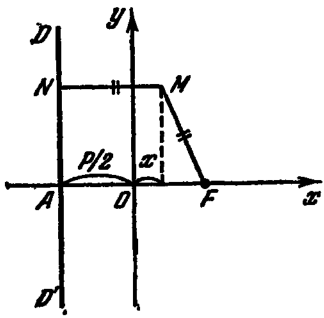


Рис. 51.

и положение оси Oy (рис. 51). Пусть A — точка пересечения оси Ox и директрисы и пусть

$$\boxed{AF = p.}$$

Тогда фокус F будет иметь координаты $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y)$. Ясно, что

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

С другой стороны, из рисунка видно, что

$$MN = x + \frac{p}{2}\ ^{*)}.$$

---

*) Точнее, $MN = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, что легко установить по формуле расстояния от точки до прямой. Действительно, ведь уравнение директрисы имеет

Точка M лежит на параболе тогда и только тогда, когда $MF=MN$, т. е. когда

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Это равенство и представляет собой уравнение параболы. Оно несколько громоздко. Для упрощения возведем это уравнение в квадрат. Раскрывая скобки, получим

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

или

$$\boxed{y^2=2px.} \tag{1}$$

Это простейшее (или каноническое) уравнение параболы. Ясно, что в нем $p>0$.

n° 2. Исследование формы параболы. Исследуем форму параболы, используя только ее уравнение

$$y^2=2px, \tag{1}$$

в котором $p>0$.

Уравнение (1) содержит y только в квадрате. Значит, наша парабола симметрична относительно оси Ox, и чтобы установить вид всей параболы, достаточно установить вид той ее части, которая расположена выше оси Ox. Для точек (x, y) этой части будет $y>0$ и потому, находя y из (1), надо перед радикалом брать знак „+". Стало быть,

$$y=\sqrt{2px}.$$

Отсюда видно, что

1) x не может быть отрицательным, ибо иначе y оказался бы мнимым, что нелепо. Значит, на параболе нет точек, лежащих слева от оси Oy.

2) Если $x=0$, то и $y=0$.

3) Если же x увеличивается, то увеличивается и y, причем безграничное увеличение x вызывает безграничное же увеличение y, однако не столь быстрое (например, при увеличении x в 4 раза y увеличится только вдвое).

вид $x+\frac{p}{2}=0$. Значит,

$$MN=\frac{\left|x+\frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Однако неточность, допущенная в тексте, не может привести к ошибке, поскольку, написав равенство $MF=MN$, мы сразу же возводим его в квадрат!

Таким образом, часть параболы, расположенная выше оси Ox, имеет вид, изображенный на рис. 52, а вся парабола выглядит так, как показано на рис. 53.

Парабола оказалась бесконечной незамкнутой кривой, у которой ось Ox служит осью симметрии, начало координат *вершиной*, а ось Oy — *касательной* *) (в вершине).

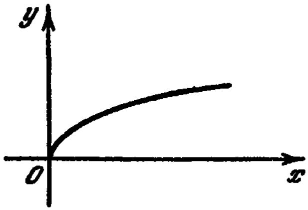


Рис. 52.

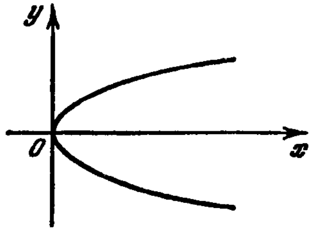


Рис. 53.

З а м е ч а н и е. Нетрудно понять, что каждому из уравнений

$$x^2 = 2py, \quad y^2 = -2px, \quad x^2 = -2py \quad (p > 0)$$

соответствует парабола, по форме тождественная с параболой (1), но только иначе расположенная. На рис. 54, 55, 56 изображены эти параболы.

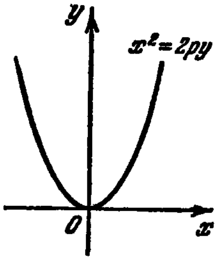


Рис. 54.

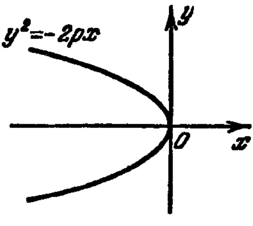


Рис. 55.

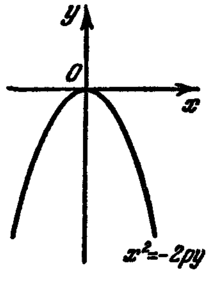


Рис. 56.

П р и м е р ы. 1) Найти директрису и фокус параболы $y^2 = 6x$. Здесь $6 = 2p$. Стало быть, $p = 3$ и фокусом служит $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, а директрисой прямая $x = -\frac{3}{2}$.

2) Аналогично у параболы $x^2 = -8y$ директриса есть $y = 2$, а фокус $F(0, -2)$.

*) Точное определение касательной будет дано в гл. III.

п° 3. Парабола $y=ax^2$.

Теорема. *Уравнению*

$$\boxed{y=ax^2,} \tag{2}$$

где $a \neq 0$, соответствует парабола. Она имеет вершину в начале координат и симметрична относительно оси Oy. При $a>0$ парабола (2) лежит выше оси абсцисс, а при $a<0$ ниже ее.

Доказательство. Уравнение (2) можно записать в виде

$$x^2=\frac{1}{a}y,$$

а это уравнение вида $x^2=2py$ или $x^2=-2py$ (причем $p>0$), смотря по тому, будет ли $a>0$ или $a<0$. Последним же уравнениям соответствуют параболы, изображенные в первом случае на рис. 54, а во втором на рис. 56, что и требовалось доказать.

Чтобы отдать себе отчет в том, как влияет на форму параболы (2) модуль коэффициента a, изобразим на одном чертеже (рис. 57) параболы

$$y=\frac{1}{2}x^2, \quad y=x^2,$$

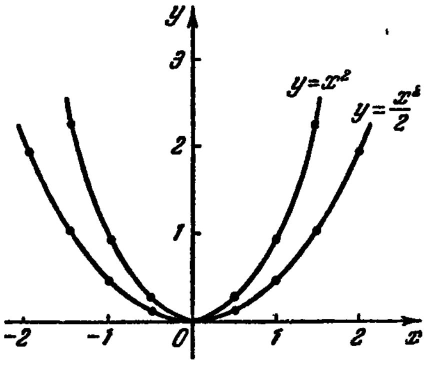


Рис. 57.

построив для той и другой точки с абсциссами $x=0$, $x=\pm\frac{1}{2}$, $x=\pm 1$, $x=\pm\frac{3}{2}$, $x=\pm 2$. Этот чертеж показывает, что чем больше абсолютная величина a, тем ближе к оси Oy лежат стороны параболы. Можно сказать (при $a>0$), что *чем больше a, тем круче подымается парабола.*

Парабола имеет много применений в механике. Например, камень, брошенный под углом к горизонту, будет описывать параболу *).

*) Если пренебречь сопротивлением воздуха. Такое допущение возможно потому, что скорость камня невелика. В случае артиллерийских снарядов, летящих с большой скоростью, сопротивление воздуха существенно влияет на форму траектории.

§ 6. Гипербола

n° 1. Определение гиперболы. Ее каноническое уравнение. Определение гиперболы очень напоминает определение эллипса, надо только в последнем заменить слово „сумма“ словом „разность“.

Определение. *Гиперболой* называется линия, представляющая геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Обозначая фокусы через F и F', а упомянутую разность через $2a$, будем для любой точки M гиперболы иметь одно из равенств

$$\boxed{MF' - MF = \pm 2a.} \tag{1}$$

При этом знак „$+$“ или „$-$“ нужно выбрать в зависимости от того, к которому из фокусов F или F' ближе точка M. Например, для

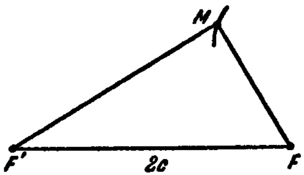


Рис. 58.

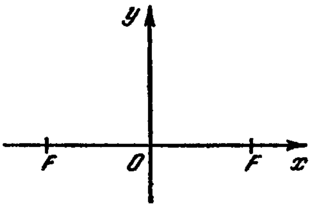


Рис. 59.

точки M, изображенной на рис. 58, в равенстве (1) должен быть выбран знак „$+$“. Если обозначить, как это делают обычно, междуфокусное расстояние FF' через $2c$

$$FF' = 2c,$$

то необходимо должно быть $2c > 2a$, ибо в треугольнике MFF' сторона FF' должна быть больше разности сторон MF и MF'. Таким образом*),

$$\boxed{c > a.} \tag{2}$$

Чтобы найти уравнение гиперболы, надо прежде всего выбрать систему координат. Как и в случае эллипса, мы проведем ось Ox через фокусы и поместим начало координат в середине отрезка FF' (рис. 59). Ясно, что тогда фокусы F и F' получат координаты: $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$.

---

*) Вспомним, что у эллипса было $c < a$.

Для любой точки $M(x, y)$ будет

$$MF = \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad MF' = \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Согласно (1) точка M будет лежать на гиперболе тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a. \tag{3}$$

Это равенство и служит уравнением гиперболы, но оно может быть сильно упрощено. Для этого перепишем (3) в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a.$$

Возведя это равенство в квадрат, получим

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = x^2-2cx+c^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2,$$

откуда

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Сокращая на 4 и снова возводя в квадрат, находим

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

или

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2). \tag{4}$$

Положим

$$\boxed{c^2 - a^2 = b^2.} \tag{5}$$

Это обозначение законно, так как благодаря (2) разность c^2-a^2 положительна*). Тогда (4) примет вид

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Разделив на a^2b^2, получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,} \tag{6}$$

похожее на уравнение эллипса.

п°2. Исследование формы гиперболы. Установим вид гиперболы, опираясь на ее уравнение (6). Так как это уравнение содержит и x и y только в четных степенях, то *гипербола* (6) *симметрична относительно обеих осей координат*. Поэтому достаточно исследовать форму только той части гиперболы, которая лежит в первом координатном угле. Для этого решим уравнение (6) относительно y.

---

*) Обозначение (5) допустимо и при $c^2-a^2<0$, но тогда b было бы мнимым.

Учитывая, что для точек первой четверти $y>0$, находим

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{7}$$

Отсюда видно, что при $0 \leqslant x < a$ для y получаются м н и м ы е значения. Это показывает, что на интересующей нас части гиперболы нет точек, лежащих левее прямой $x=a$. Если $x=a$, то $y=0$, а при $x>a$ для y получаются положительные значения и при том тем бóльшие, чем больше x. При безграничном возрастании x будет безгранично возрастать и y. Из всего этого следует, что интересующая нас часть гиперболы имеет вид, изображенный на рис. 60.

Вся же гипербола выглядит так, как это показано на рис. 61,

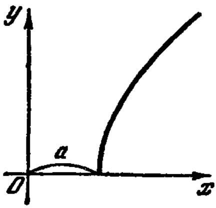


Рис. 60.

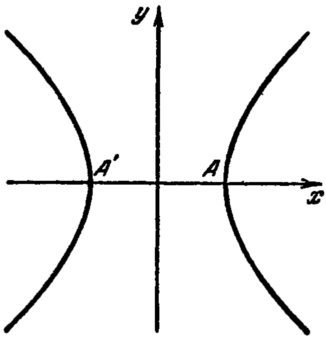


Рис. 61.

т. е. она состоит из двух отдельных „кусков", каждый из которых представляет собою бесконечную незамкнутую кривую.

Упомянутые куски гиперболы называются ее *ветвями*. Точки A и A' суть вершины гиперболы. Отрезок $AA'=2a$ называется *вещественной осью* гиперболы (6). Число a называют *вещественной полуосью* гиперболы, а входящее в уравнение (6) число b — *мнимой полуосью* ее. Каково геометрическое значение b — выяснится в n° 3.

n° 3. Асимптоты гиперболы. Более точное представление о форме гиперболы мы получим, введя важное понятие об асимптотах.

Чтобы легче разобраться в этом тонком понятии, начнем с примера. Рассмотрим линию

$$y=\frac{1}{1+x^2}\ ^{*)}.$$

Поскольку абсцисса x входит сюда только в квадрате, то наша кривая симметрична относительно оси Oy. Нетрудно видеть также,

*) Данное уравнение можно переписать в виде $x^2y+y-1=0$. Значит, оно имеет третью степень, и соответствующая линия является кривой т р е т ь е г о п о р я д к а. Впрочем, это замечание нам не понадобится.

что она расположена выше оси Ox, ибо для всех ее точек будет $y>0$. Чтобы яснее представить себе эту линию, построим несколько ее точек.

Если $x=0$, то $y=1$; если $x=0{,}5$ то $y=0{,}8$; если $x=1$, то $y=0{,}5$; если $x=2$, то $y=0{,}2$; если $x=3$, то $y=0{,}1$ и т. д. Кривая имеет вид, изображенный на рис. 62. Если x увеличивается, то y уменьшается. Более того, при безграничном увеличении x (например, когда x станет больше 100, больше 1000, больше 10 000

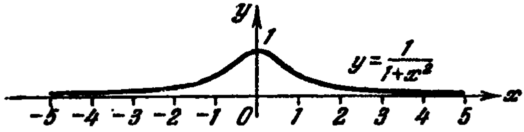


Рис. 62.

и т. д.) ордината y будет делаться все меньшей и меньшей, неограниченно приближаясь к нулю. Однако **равной** нулю ордината не сделается никогда, потому что при всех x будет $y>0$. Значит, по мере неограниченного удаления точки вдоль нашей кривой вправо (или влево) эта точка будет все ближе и ближе подходить к оси Ox. Кривая будет как бы „расстилаться" по оси Ox, делаясь почти неотличимой от нее.

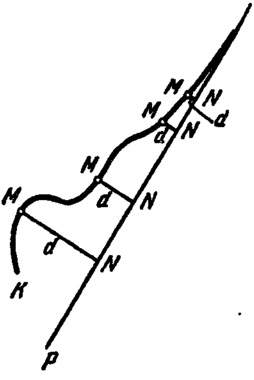


Рис. 63.

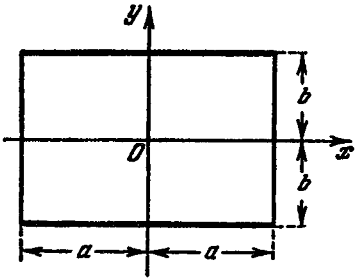


Рис. 64.

Всю эту картину характеризуют, говоря, что ось абсцисс служит **асимптотой** рассматриваемой кривой.

Точное определение этого понятия таково.

Определение. Прямая P называется *асимптотой* бесконечной кривой K, если (рис. 63) расстояние $d=MN$ от точки M, находящейся на кривой K, до прямой P стремится к нулю при безграничном удалении точки M вдоль кривой K.

Установив это общее понятие, вернемся к гиперболе (6).

Определение. Прямоугольник (рис. 64), центром которого является начало координат, а стороны параллельны осям и равны соответственно $2a$ и $2b$, называется *характеристическим прямоугольником гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6}$$

Теорема. *Диагонали*) характеристического прямоугольника гиперболы являются ее асимптотами.*

Доказательство. По соображениям симметрии достаточно рассмотреть только ту часть гиперболы (6), которая лежит в первом координатном угле. Мы видели, что для точек этой части будет

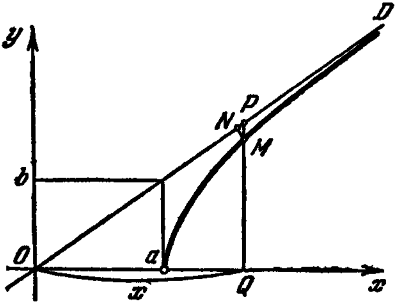


Рис. 65.

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{7}$$

С другой стороны, уравнение диагонали OD (рис. 65) как прямой, проходящей через начало и имеющей угловой коэффициент $\frac{b}{a}$, таково:

$$y=\frac{b}{a}x. \tag{8}$$

Пусть M и P — соответственно точки, лежащие на гиперболе (7) и на прямой (8) и имеющие одну и ту же абсциссу x. Тогда (в обозначениях рис. 65) окажется

$$MQ=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad PQ=\frac{b}{a}x.$$

Ввиду того, что $\sqrt{x^2-a^2}<\sqrt{x^2}=x$, ясно, что $MQ<PQ$ и потому гипербола лежит ниже диагонали OD. Далее, имеем

$$MP=PQ-MQ,$$

т. е.

$$MP=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right). \tag{9}$$

Если x неограниченно увеличивается, то неограниченно увеличивается и корень $\sqrt{x^2-a^2}$. Поэтому без более подробного рассмотрения довольно трудно сказать, как ведет себя разность (9)**). Чтобы разобраться в этом, умножим и разделим разность (9) на сумму

$$x+\sqrt{x^2-a^2}.$$

---

*) Разумеется, речь идет о бесконечно продолженных диагоналях.

**) Ведь если о какой-либо величине r известно только, что она является разностью двух весьма больших величин A и B, $r=A-B$, то мы ничего о ней сказать не можем. Например, если $A=3\,000\,000$, а $B=2\,000\,000$, то $r=1\,000\,000$. Если же $A=3\,000\,000$, а $B=2\,999\,999{,}98$, то $r=0{,}02$.

В результате мы получим

$$MP=\frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})\,(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

т. е.

$$MP=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Вспомним теперь, что дробь увеличивается при уменьшении ее знаменателя. Поэтому

$$MP<\frac{ab}{x}. \tag{10}$$

Если точка M будет безгранично удаляться по гиперболе, то ее абсцисса x будет неограниченно расти. При этом дробь $\frac{ab}{x}$ будет неограниченно приближаться к нулю. Тем более будет неограниченно приближаться к нулю длина отрезка MP, которая согласно (10) меньше этой дроби. Введем, наконец, в рассмотрение **расстояние** $MN=d$ от точки M до диагонали OD. Так как MN — перпендикуляр к прямой OD, а MP — наклонная к той же прямой, то $MN<MP$. Но тогда и подавно расстояние MN будет стремиться к нулю по мере удаления точки M вдоль по гиперболе. Теорема доказана.

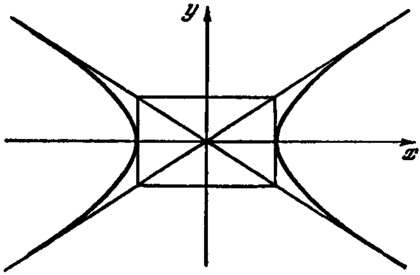


Рис. 66.

Мы видели, что уравнение одной из асимптот гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{6}$$

имеет вид (8). Нетрудно сообразить, что угловой коэффициент второй асимптоты равен $-\frac{b}{a}$. Поэтому *уравнения асимптот гиперболы* (6) *таковы*:

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x.}$$

Это следует запомнить.

При изображении гиперболы на чертеже рекомендуется на этом же чертеже строить и ее асимптоты (рис. 66). Этим достигается бо́льшая точность. Попутно выясняется и геометрическое значение мнимой полуоси гиперболы, определяющей высоту характеристического прямоугольника.

Замечание. Наличие асимптот у гиперболы позволяет ответить на вопрос: чем отличается ветвь гиперболы от параболы? Вообразим себе, что на безграничном поле начерчена парабола $y^2=2px$, на которой построен высокий забор. Пусть наблюдатель стоит на вершине параболы, прислонясь спиной к забору. Если он направит свой взор по любому лучу $y=mx$, отличному от оси Ox, то обязательно упрется взглядом в забор, ибо луч $y=mx$ и парабола $y^2=2px$ пересекутся не только в начале координат, но и в точке, у которой $x=\frac{2p}{m^2}$. Поскольку держать взгляд направленным точно по одной прямой физиологически невозможно (из-за дрожания мускулов, управляющих глазным яблоком), то практически куда бы наблюдатель ни смотрел, он будет видеть перед собой забор. Таким образом, ему будет казаться, что перед ним расстилается поле, ограниченное гигантским эллипсом *).

Совсем другая картина представляется наблюдателю, прислонившемуся спиной к забору, построенному на гиперболе, и стоящему на вершине этой гиперболы. Пусть θ — угол наклона асимптот гиперболы к оси Ox. Если луч зрения наблюдателя составит с осью Ox угол, больший угла θ (а практически и равный ему), то он упрется в забор. Если же этот угол будет меньше θ, то наблюдатель увидит чистое поле. Значит, наблюдателю будет казаться, что поле ограничено двумя прямыми вертикальными стенами, образующими угол 2θ.

n° 4. Эксцентриситет гиперболы.

Определение. *Эксцентриситетом* гиперболы называется отношение ε междуфокусного расстояния к вещественной оси, т. е.

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{a}.}$$

Поскольку $c>a$, то у любой гиперболы будет $\varepsilon>1$. Чтобы установить,

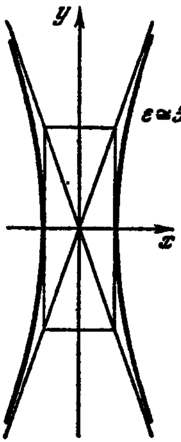


Рис. 67.

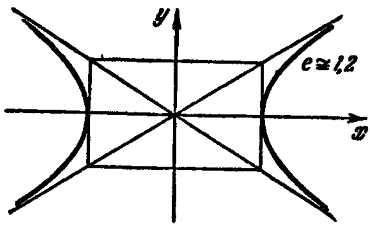


Рис. 68.

какое влияние оказывает эксцентриситет на форму гиперболы, заметим, что в силу соотношения (5) будет

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\varepsilon^2-1,$$

*) Описанный оптический эффект сходен с тем, что мы наблюдаем на железной дороге: параллельные на самом деле рельсы кажутся нам сходящимися.

откуда

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}.$$

Значит, чем больше ε, тем больше угол раствора между асимптотами. На рис. 67 и 68 изображены гиперболы, у которых соответственно $\varepsilon \cong 3$ и $\varepsilon \cong 1,2$.

n° 5. Равнобочная гипербола.

Определение. Если характеристическим прямоугольником гиперболы является квадрат (рис. 69), то гипербола называется *равнобочной*.

Отметим пять свойств такой гиперболы. Они непосредственно вытекают из ее определения, и каждое из них само могло бы быть принято за определение равнобочной гиперболы.

1. У равнобочной гиперболы полуоси равны

$$\boxed{a=b.}$$

2. Уравнение равнобочной гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ или

$$\boxed{x^2-y^2=a^2.}$$

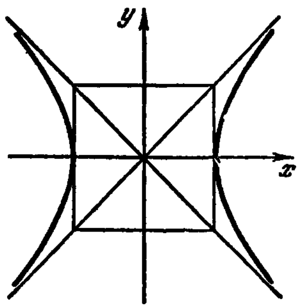


Рис. 69.

3. Асимптоты равнобочной гиперболы взаимно перпендикулярны.

4. Асимптоты равнобочной гиперболы имеют уравнения

$$\boxed{y=x, \quad y=-x,}$$

т. е. они делят пополам углы между осями симметрии гиперболы.

5. Эксцентриситет равнобочной гиперболы $\varepsilon=\sqrt{2}$. В самом деле, если $a=b$, то формула $c^2=a^2+b^2$ принимает вид $c^2=2a^2$, откуда и следует сказанное.

n° 6. Сопряженная гипербола. Если учесть полную равноправность осей Ox и Oy, то нетрудно понять, что уравнению

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1} \qquad (11)$$

соответствует гипербола. Ее фокусы лежат на оси Oy, вещественная ось равна $2b$, а мнимая $2a$. Стало быть, характеристический прямоугольник гиперболы (11) совпадает с характеристическим прямоугольником гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Каждая из этих двух гипербол называется *сопряженной* с другой. Поскольку у взаимно сопряженных гипербол общий характеристический прямоугольник, то (рис. 70) и асимптоты у них общие. Если, в частности, из двух взаимно сопряженных гипербол одна будет равнобочной, то и вторая такова же.

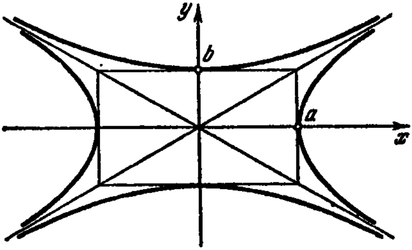


Рис. 70.

n° 7. Некоторые применения гиперболы. Покажем два применения гиперболы: одно из области военного дела, а другое, относящееся к экономике.

А. *Звукометрический способ нахождения орудия.* Как известно, звук проходит 300 *м* в секунду. Допустим, что два наблюдателя („слухачи"), находящиеся в точках F и F', засекают моменты, в которые они услышали один и тот же выстрел. Если наблюдатель F услышал этот выстрел на t секунд раньше, чем F', то орудие, из которого произведен выстрел, должно находиться в точке M, отстоящей от F' на $300t$ *м* дальше, чем от F,

$$MF'-MF=300t.$$

Но тогда M является точкой гиперболы, у которой F и F' суть фокусы, а вещественная ось $2a=300t$. Более того, ясно, что M лежит именно на той ветви этой гиперболы, которая прилежит к фокусу F. Поскольку обычно слухачи располагаются вдали от вражеского орудия, то точка M находится от F и F' на довольно значительном расстоянии, т. е. там, где гипербола уже весьма близка к своей асимптоте. Таким образом, практически можно считать, что точка M расположения вражеского орудия находится на асимптоте упомянутой гиперболы. Если еще известен общий характер расположения фронта, т. е. грубо говоря, та сторона, в которой находится противник, то нетрудно указать, на которой из двух асимптот помещается M.

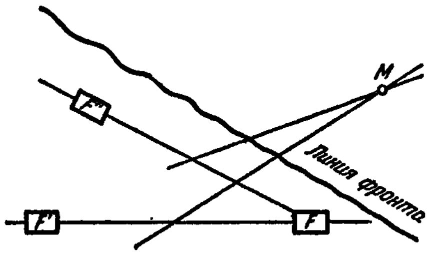


Рис. 71.

Итак, работа слухачей F и F' позволяет почти сразу определить прямую (и даже полупрямую), на которой должно стоять вражеское орудие. Достаточно присоединить к F и F' еще одного слухача F'', чтобы найти вторую (и даже третью) полупрямую, на которой располагается искомое орудие M (рис. 71). Значит, для поражения его надо обстрелять точку пересечения указанных полупрямых.

Б. *Область влияния железнодорожной станции.* Пусть на железной дороге расположены две станции A и B (рис. 72). Пусть, далее, из различных пунктов местности, по которой проходит железная дорога, нужно отправлять грузы в конечный пункт дороги C. Станцию B мы считаем находящейся к пункту C ближе, чем станция A. Перед грузоотправителем, находящимся в некотором пункте M, естественно возникает задача: на какую из станций A или B ему выгоднее подвезти груз автотранспортом для дальнейшей отправки по железной дороге.

Пусть стоимость провоза груза равна p рублей за 1 *км* при перевозке автотранспортом и q рублей за 1 *км* при перевозке по железной дороге.

Тогда грузоотправитель производит следующий расчет:

1) Стоимость перевозки при доставке груза в A равна

$$(p \cdot MA + q \cdot AB + q \cdot BC) \text{ рублей.}$$

2) Стоимость перевозки при доставке груза в B равна

$$(p \cdot MB + q \cdot BC) \text{ рублей.}$$

Отсюда следует, что в B выгоднее возить грузы, находящиеся в точках M, для которых

$$p \cdot MA + q \cdot AB > p \cdot MB$$

или, что то же самое,

$$MA - MB > -\frac{q}{p} \cdot AB. \qquad (12)$$

Те точки M (для них безразлично, куда возить груз), для которых

$$MA - MB = -\frac{q}{p} \cdot AB, \qquad (13)$$

лежат на гиперболе с фокусами A и B и с вещественной осью

$$2a = \frac{q}{p} AB.$$

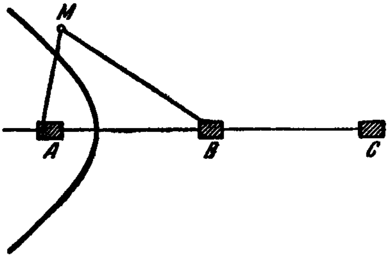


Рис. 72.

Точнее говоря, точки M, удовлетворяющие соотношению (13), расположены на той ветви упомянутой гиперболы, которая прилежит к фокусу A *). Стало быть, точки M, для которых справедливо (12), лежат „вне" этой ветви (т. е. в той части плоскости, которая отделена этой ветвью от точки A).

§ 7. Преобразование координат

n° 1. Постановка вопроса. Чтобы написать уравнение какой-нибудь линии, надо прежде всего выбрать определенную систему координат. При изменении этой системы изменится и уравнение линии. Например, если на плоскости начерчена окружность радиуса R, то ее уравнение при всяком выборе системы координат имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Особенно простым это уравнение окажется тогда, когда начало координат будет помещено в центр окружности, ибо тогда $a = b = 0$ и уравнение (1) превращается в

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

*) Именно эта ветвь изображена на рис. 72.

Мы видим, что удачный выбор координатной системы позволяет для одной и той же линии получить более простое уравнение, чем неудачный. Вот еще более яркий пример влияния выбора координатной системы на уравнение линии. Если на плоскости начерчена некоторая прямая, то при всяком выборе системы координат ее уравнение будет иметь вид

$$Ax+By+C=0. \qquad (2)$$

Если, однако, система такова, что осью абсцисс служит именно наша прямая, то уравнение этой прямой будет таким:

$$y=0. \qquad (3)$$

Ясно, что (3) проще, чем (2).

Все это приводит к вопросу о том, как, имея уравнение некоторой линии в определенной системе координат, упростить это уравнение за счет более удачного выбора координатной системы.

Чтобы решить этот вопрос, надо предварительно изучить, как изменяются координаты отдельных точек при перемене системы координат.

Здесь мы и займемся именно этой предварительной задачей. Сначала мы решим ее для двух частных видов преобразования координат, а затем и для общего случая.

n° 2. Параллельный перенос системы. Пусть на плоскости начерчены две прямоугольные системы координат: „старая" система Oxy и „новая" система $O_1x_1y_1$, причем оси новой системы параллельны соответствующим осям старой системы *). Более того, мы будем считать, что и направления осей совпадают. Иными словами, новая система $O_1x_1y_1$ получена из старой с помощью *параллельного переноса*, при котором начало координат O передвигается в точку $O_1(p, q)$. Здесь p и q — координаты точки O_1 в с т а р о й системе (в новой системе координаты точки O_1 естественно равны нулю). Все сказанное изображено на рис. 73, где для определенности принято $p>0$, $q>0$.

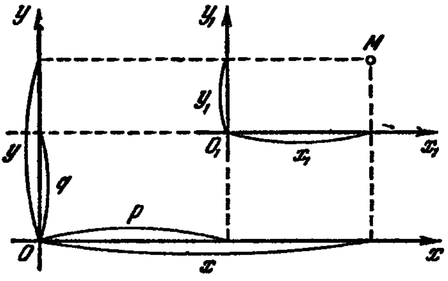


Рис. 73.

Возьмем на плоскости произвольную точку M, и пусть ее координаты в старой системе суть (x, y), а в новой — (x_1, y_1).

---

*) Т. е. новая ось абсцисс параллельна старой оси абсцисс и новая ось ординат — старой оси ординат.

Непосредственно из рис. 73 мы усматриваем соотношения

$$\boxed{x = x_1 + p, \quad y = y_1 + q.} \tag{4}$$

Это значит, что *при параллельном переносе системы старая координата точки равна ее новой координате, сложенной с одноименной (старой) координатой нового начала.*

На первый взгляд полезнее были бы формулы, выражающие новые координаты через старые, т. е. формулы

$$x_1 = x - p, \quad y_1 = y - q, \tag{5}$$

ибо „ведь старые координаты нам и так уже известны, а новые надо найти". Однако дело обстоит не так, и формулы (4) важнее, чем (5). На практике редко приходится находить новые координаты точек по их старым координатам. Гораздо чаще приходится, исходя из „старого" уравнения линии, составлять ее „новое" уравнение. А для этого надо в „старом" уравнении заменять старые координаты их выражениями через новые, т. е. пользоваться именно формулами (4), а не (5).

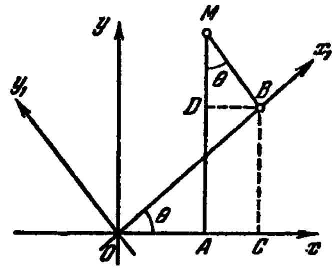


Рис. 74.

n° 3. Поворот системы. Рассмотрим теперь случай, когда новая система координат Ox_1y_1 получена из старой Oxy с помощью поворота на некоторый угол θ (как всегда, углы считаются положительными, если они отложены против часовой стрелки). Обе системы имеют, таким образом, общее начало O. Пусть, как и выше, точка M имеет в старой системе координаты (x, y), а в новой — (x_1, y_1).

Из рис. 74 мы видим*), что $\angle AMB = \theta$, ибо стороны этого угла перпендикулярны сторонам угла, образованного осями Ox и Ox_1. Далее, в обозначениях этого же чертежа

$$x = OA, \quad x_1 = OB, \quad y = AM, \quad y_1 = BM.$$

Но

$$OA = OC - AC = OC - DB.$$

Отрезки же OC и DB суть катеты прямоугольных треугольников OCB и MDB, причем первый из этих катетов прилежит к углу θ, а второй противолежит этому углу. Значит,

$$OC = OB \cdot \cos\theta = x_1 \cos\theta, \qquad DB = BM \cdot \sin\theta = y_1 \sin\theta.$$

*) Для простоты дела мы рассмотрим только тот случай, когда θ — острый угол. Полученные формулы будут верны, однако, всегда.

Таким образом,

$$x = OA = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta. \tag{6}$$

Аналогично имеем

$$AM = AD + DM = CB + DM,$$

причем

$$CB = OB \cdot \sin\theta = x_1 \sin\theta, \quad DM = BM \cdot \cos\theta = y_1 \cos\theta,$$

откуда

$$y = AM = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta. \tag{7}$$

Собирая вместе формулы (6) и (7), получаем окончательно

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta, \\ y &= x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta. \end{aligned}} \tag{8}$$

Для запоминания этих формул рекомендуется заметить, что в выражении для x налицо „полный беспорядок" (косинус раньше синуса, знак минус!), а в выражении для y — „полный порядок" (синус раньше косинуса, знак плюс).

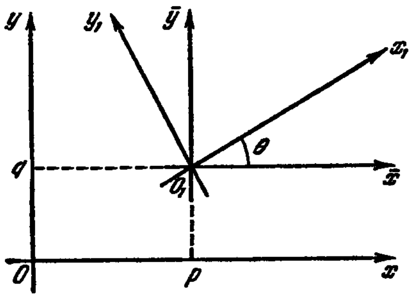


Рис. 75.

Формулы (8) дают выражение старых координат через новые. Мы уже знаем, что именно такие формулы бывают нужны на практике. Если все же захотеть выразить новые координаты точки через ее старые координаты, то для этого надо найти x_1 и y_1 из уравнений (8). Умножив первое из них на $\cos\theta$, второе на $\sin\theta$ и сложив, найдем

$$x_1 = x \cos\theta + y \sin\theta. \tag{9а}$$

Аналогично, умножив первое уравнение (8) на $\sin\theta$ и вычтя результат из второго уравнения (8), умноженного на $\cos\theta$, получим

$$y_1 = -x \sin\theta + y \cos\theta. \tag{9б}$$

Формулы (9) запоминать не обязательно. Формулы же (8) будут играть важную роль в дальнейшем изложении и их следует запомнить.

n° 4. Общий случай преобразования координат. Рассмотрим, наконец, общий случай преобразования координат, когда у систем Oxy („старой") и $O_1x_1y_1$ не совпадают ни начала, ни направления осей. Пусть новое начало координат O_1 имеет (в старой системе!) координаты (p, q), а ось O_1x_1 образует с осью Ox угол θ (рис. 75).

Оказывается, что этот общий случай легко сводится к уже рассмотренным. Для этого введем ещу одну — „промежуточную“ координатную систему $O_1\bar{x}\bar{y}$, имеющую то же начало O_1, что и новая система $O_1x_1y_1$, но оси $O_1\bar{x}$ и $O_1\bar{y}$ которой параллельны старым осям Ox и Oy.

Ясно, что переход от старой системы Oxy к новой $O_1x_1y_1$ можно произвести в два шага: 1) перейти при помощи параллельного переноса от старой системы Oxy к промежуточной системе $O_1\bar{x}\bar{y}$ и 2) перейти при помощи поворота системы на угол θ от промежуточной системы $O_1\bar{x}\bar{y}$ к новой $O_1x_1y_1$.

Если точка M имеет в системах Oxy, $O_1\bar{x}\bar{y}$ и $O_1x_1y_1$ соответственно координаты (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$, (x_1, y_1), то по формулам (4)

$$x=\bar{x}+p, \qquad y=\bar{y}+q,$$

а по формулам (8)

$$\bar{x}=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta, \qquad \bar{y}=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta,$$

откуда окончательно

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta+p,\\ y&=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta+q.\end{aligned}} \tag{10}$$

При $p=q=0$ эти формулы превращаются в формулы (8), а при $\theta=0$ в формулы (4).

n°5. Алгебраическая кривая и ее порядок. Выше было доказано, что всякой прямой соответствует уравнение первой степени. Это справедливо при любом выборе системы координат. Таким образом, хотя само уравнение прямой будет меняться при изменении координатной системы, но степень его остается все время одной и той же — первой!

Точно так же, как бы ни выбирать координатную систему, степень уравнения окружности будет оставаться второй.

Обобщим эти наблюдения.

Определение. Кривая называется *алгебраической*, если в какой-нибудь системе координат*) ей соответствует уравнение вида

$$Ax^my^n+Bx^ly^k+Cx^ry^s+\ldots=0, \tag{11}$$

где коэффициенты A, B, C, ... — некоторые (произвольные) вещественные числа, а показатели m, n, l, k, r, s, ... — целые и неотрицательные числа.

Примерами алгебраических кривых служат прямая, эллипс, парабола и гипербола. Алгебраическими будут также хотя бы кривые

$$7x^2y^3+2xy+y^5-10=0 \tag{12}$$

или

$$x^3+2xy^6-3=0. \tag{13}$$

*) Напомним, что мы знаем пока только декартовы координаты. Ниже мы познакомимся с полярными координатами, но к ним содержание этого n° не относится.

Теорема 1. Если кривая имеет уравнение вида (11) *в какой-нибудь системе координат Oxy, то и в любой другой системе $O_1x_1y_1$ она будет иметь уравнение такого же вида.*

Доказательство. Координаты (x, y) любой точки M в системе Oxy выражаются через ее координаты (x_1, y_1) в системе $O_1x_1y_1$ по формулам (10). Полагая для краткости $\cos\theta = u$, $\sin\theta = v$, перепишем эти формулы так:

$$x = ux_1 - vy_1 + p, \quad y = vx_1 + uy_1 + q.$$

Если точка M лежит на нашей линии, то для ее координат (x, y) верно равенство (11), которое можно переписать и так:

$$A\,(ux_1 - vy_1 + p)^m\,(vx_1 + uy_1 + q)^n + \\ + B\,(ux_1 - vy_1 + p)^l\,(vx_1 + uy_1 + q)^k + \ldots = 0. \quad (14)$$

Раскрыв здесь все скобки и сделав приведение подобных членов, преобразуем уравнение (14) к виду

$$A_1x_1^{m_1}y_1^{n_1} + B_1x_1^{l_1}y_1^{k_1} + \ldots = 0, \quad (15)$$

где только численные значения коэффициентов A_1, B_1, ... и показателей m_1, n_1, l_1, k_1, ... будут другими, чем в (11). Однако *тип уравнения* (15) *будет тем же, что и уравнения* (11). Теорема доказана, ибо (15) и будет служить уравнением нашей линии в новой системе.

Смысл теоремы, грубо говоря, в том, что свойство кривой быть или не быть алгебраической есть внутреннее свойство самой кривой, а не результат взаимного расположения этой кривой и выбранной нами системы координат.

Заметим, что неалгебраические кривые называются *трансцендентными*. Таковы, например, известные еще из курса средней школы *синусоида*

$$y = \sin x$$

или *логарифмика*

$$y = \lg x.$$

Введем важное понятие *порядка* алгебраической кривой. Обращаясь к уравнению (11), различим в нем слагаемые

$$Ax^my^n, \quad Bx^ly^k, \quad Cx^ry^s, \ldots$$

Каждое из этих слагаемых имеет определенную степень: сумму показателей при x и при y. Например, степень слагаемого Ax^my^n равна $m+n$. Наибольшая из степеней различных слагаемых уравнения (11) называется *степенью этого уравнения*. Например, степени уравнений (12) и (13) равны соответственно 5 и 7.

Теорема 2. Степень уравнения алгебраической кривой одна и та же во всех системах координат.

Доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы 1, но мы не будем на нем останавливаться. Смысл этой теоремы состоит в том, что степень уравнения алгебраической кривой полностью определяется геометрическими свойствами этой кривой, а никак не положением ее относительно системы координат. Благодаря этому мы можем классифицировать алгебраические кривые по степеням их уравнений, не заботясь о том, к каким системам координат отнесены эти уравнения. Собственно, только эта теорема и оправдывает название „кривая n-го порядка", которое приписывается кривой, имеющей уравнение n-й степени. Например, по теореме 2 во всякой системе координат *) эллипс имеет уравнение второй степени, и потому эллипс есть кривая второго порядка.

---

*) См. предыдущую сноску.

§ 8. Упрощение уравнений кривых 2-го порядка

n° 1. Уравнение $y=ax^2+bx+c$. В этом параграфе мы займемся применением преобразования координат для упрощения уравнений линий второго порядка. Начнем с примера. Пусть требуется исследовать линию, соответствующую уравнению

$$y=3x^2-12x+9. \tag{1}$$

Перепишем это уравнение, объединяя члены, содержащие x,

$$y=3(x^2-4x)+9.$$

Дополняя выражение в скобках до полного квадрата, получим

$$y=3(x^2-4x+4)+9-12$$

или, что то же самое,

$$y+3=3(x-2)^2. \tag{2}$$

Это есть наше же исходное уравнение (1), но только с иной группировкой членов. Допустим теперь, что произведен параллельный перенос системы координат, при котором начало перемещено в точку $O_1(p, q)$. Тогда старые координаты (x, y) всех точек плоскости выразятся через их новые координаты (x_1, y_1) по формулам

$$x=x_1+p, \quad y=y_1+q.$$

Значит, в новых координатах уравнение нашей линии будет иметь вид

$$y_1+q+3=3(x_1+p-2)^2. \tag{3}$$

Выбор точки O_1 в нашем распоряжении. Положим же

$$p=2, \quad q=-3.$$

При этом выборе p и q уравнение (3) не только примет весьма простую форму *)

$$y_1=3x_1^2, \tag{4}$$

но, что еще более важно, окажется уже известным нам видом уравнения параболы.

Так как оба уравнения (1) и (4) суть уравнения одной и той же линии, то, стало быть, и уравнение (1) есть уравнение параболы. Эта парабола имеет вершину в точке $O_1(2, -3)$, симметрична

---

*) Именно в этом и заключается идея принятого нами выбора значений p и q. Читатель легко проверит, что при других p и q получится более сложное (чем (4)) уравнение!

относительно прямой O_1y_1 и расположена выше оси O_1x_1. Полезно сопоставить эту параболу с параболой

$$y=3x^2. \tag{5}$$

Ясно, что эта новая парабола совершенно тождественна по форме и размерам с параболой (4), но только вершина ее лежит не в новом, а в старом начале координат и осью симметрии ее служит не новая, а старая ось ординат. Иными словами, парабола (4) есть результат такого параллельного переноса параболы (5), при котором вершина ее передвигается в точку $O_1(2, -3)$. Но ведь, как мы уже сказали, парабола (4) — не что иное как парабола (1) (читатель должен отчетливо понять, что (1) и (4) — это уравнения одной и той же линии, но только в разных системах координат!). Значит, уравнение (1) является уравнением параболы, полученной из параболы (5) при помощи параллельного переноса ее. Все изложенное показано*) на рис. 76.

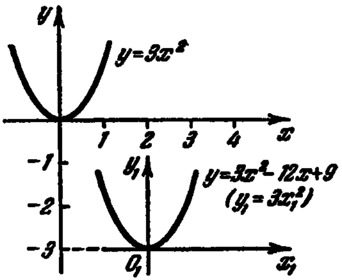


Рис. 76.

Разобрав этот пример, уже легко понять следующую теорему.

Теорема 1. *Уравнению*

$$\boxed{y=ax^2+bx+c,} \tag{6}$$

где $a\neq 0$, соответствует парабола, получающаяся из параболы

$$y=ax^2 \tag{7}$$

при помощи некоторого параллельного переноса.

Доказательство. Подражая тому, что было сделано при разборе предшествующего примера, перепишем уравнение (6) сначала в виде

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c,$$

а затем в виде

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$

или, что то же самое,

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Перенося второе слагаемое влево и положив для краткости

$$\frac{b}{2a}=-p, \qquad c-\frac{b^2}{4a}=q,$$

*) Впрочем, формы парабол (1) и (3) на чертеже искажены.

придадим окончательно уравнению (6) вид

$$y-q=a(x-p)^2. \tag{8}$$

Если теперь произвести параллельный перенос системы координат, передвинув начало в точку $O_1(p, q)$, то придется положить $x=x_1+p$, $y=y_1+q$. Эта подстановка преобразует уравнение (8) в уравнение

$$y_1=ax_1^2. \tag{9}$$

Итак, уравнению (6) соответствует (в старой системе координат!) та линия, которая в новой системе координат соответствует уравнению (9). А эта последняя линия и по форме и по размерам тождественна с параболой (7).

Остается заметить, что для совмещения параболы (7) с параболой (6) надо лишь подвергнуть первую из них параллельному переносу, при котором вершина ее переместится в точку $O_1(p, q)$. Теорема доказана.

Замечания. 1) Форма параболы $y=ax^2$ полностью определяется значением коэффициента a. Поскольку же парабола $y=ax^2+bx+c$ имеет ту же самую форму, то из трех коэффициентов a, b, c *на форму параболы* $y=ax^2+bx+c$ *влияет только коэффициент* a. Коэффициенты же b и c (а также и a!) влияют лишь на положение вершины параболы.

2) Аналогично теореме 1 устанавливается, что уравнению

$$x=ay^2+by+c \qquad (a\neq 0)$$

соответствует парабола, ось симметрии которой параллельна оси Ox.

n° 2. Уравнение $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Нашей главной задачей является исследование самого общего уравнения второй степени

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{10}$$

Эта задача существенно упрощается в том частном случае, когда $B=0$, т. е. когда в уравнении (10) отсутствует произведение координат xy.

Теорема 2. *Если уравнению*

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \tag{11}$$

соответствует какая-нибудь кривая, то это или эллипс, или парабола, или гипербола.

Перед тем как доказывать теорему, разъясним, почему ее формулировка начинается с условного оборота „если“. Дело в том, что уравнению (11) может вообще не соответствовать на плоскости никакого геометрического образа. Таково, например, уравнение

$$5x^2+7y^2=-8. \tag{12}$$

Возможен также случай, когда уравнению (11) соответствует не линия, а точка. Так обстоит дело хотя бы в случае уравнения

$$5x^2+7y^2=0, \tag{13}$$

которому соответствует начало координат. Однако указанными случаями не исчерпываются возможные „неприятности". Ведь под „кривой" в обычном понимании этого слова мы разумеем некоторую изогнутую линию, а например, уравнению

$$9x^2-4y^2=0 \tag{14}$$

соответствует не изогнутая линия, а пара прямых:

$$3x-2y=0, \qquad 3x+2y=0,$$

ибо уравнение (14) можно переписать в виде

$$(3x-2y)(3x+2y)=0,$$

и ясно, что обращение написанного произведения в нуль возможно лишь за счет одного из сомножителей. Аналогично уравнению

$$x^2=0 \tag{15}$$

соответствует прямая $x=0$, а уравнению

$$x^2-3x+2=0 \tag{16}$$

пара прямых $x=1$ и $x=2$. Вот подобные случаи мы и желаем исключить той условной формой, в которой высказана теорема. Таким образом, под термином „кривая" понимается „изогнутая линия".

Переходя к доказательству, предположим сначала, что один из коэффициентов A или C равен нулю. Одновременное обращение этих коэффициентов в нуль невозможно, так как в этом случае уравнение (11) превратилось бы в уравнение первой степени и ему соответствовала бы не кривая, а прямая. Пусть для определенности

$$C=0, \qquad A\neq 0.$$

Тогда уравнение (11) имеет вид

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0,$$

и его можно *) переписать в форме

$$y=-\frac{A}{E}x^2-\frac{D}{E}x-\frac{F}{E},$$

а это есть уравнение рассмотренного выше типа

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0),$$

и мы уже знаем, что ему соответствует парабола.

Точно так же и при $A=0$, $C\neq 0$ уравнению (11) соответствует парабола, только ось симметрии ее будет параллельна не оси Oy, как в рассмотренном случае, а оси Ox.

Перейдем теперь к случаю, когда $A\neq 0$ и $C\neq 0$. В этом случае уравнение (11) можно переписать в виде

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F$$

или, короче,

$$A(x-p)^2+C(y-q)^2=M,$$

где положено **)

$$p=-\frac{D}{2A},\quad q=-\frac{E}{2C},\quad M=\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}-F.$$

Если сделать параллельный перенос системы координат, передвинув начало в точку $O_1(p, q)$, то в новой системе наша кривая (11) получит уравнение

$$Ax_1^2+Cy_1^2=M. \tag{17}$$

Различим две возможности: 1) коэффициенты A и C имеют одинаковые знаки и 2) они имеют разные знаки.

Остановимся сначала на первом случае. Пусть для определенности ***) $A>0$ и $C>0$. Тогда ясно, что и $M>0$. Действительно, если бы было $M=0$, то уравнению (17) соответствовала бы не кривая, а точка, как в примере (13), а неравенство $M<0$ привело бы к тому, что уравнению (17) вообще не отвечало бы ничего, как в примере (12). Стало быть, остается только возможность $M>0$.

Перепишем уравнение (17) в виде

$$\frac{Ax_1^2}{M}+\frac{Cy_1^2}{M}=1 \tag{18}$$

---

*) Ясно, что $E\neq 0$. Иначе уравнение (11) имело бы вид Ax^2+Dx+ $+F=0$ и ему отвечала бы пара прямых [наподобие уравнения (16)] или одна прямая [как в случае (15)] или даже вообще не отвечало бы ничего (например, $x^2+3=0$).

**) Читатель должен внимательно следить за ходом рассуждения, но мы предостерегаем от желания запомнить выражения p, q, M. Не следует загружать память ненужными деталями.

***) Иначе мы переменили бы знаки обеих частей уравнения (17).

или, полагая $\frac{M}{A}=a^2$, $\frac{M}{C}=b^2$ (что законно, так как написанные дроби положительны), в виде

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1.$$

Это уравнение эллипса.

Остается рассмотреть случай, когда A и C — числа разных знаков. Можно принять, что $A>0$, $C<0$, ибо иначе мы переменили бы знаки обеих частей уравнения (17). Как и выше, нетрудно усмотреть, что $M\neq 0$. Действительно, в случае $A>0$, $C<0$, $M=0$ уравнение (17) представило бы собой не кривую, а пару прямых, как это мы видели на примере (14). Итак, $M\neq 0$. Допустим для определенности, что $M>0$. Переписав уравнение (17) в виде (18) и положив $\frac{M}{A}=a^2$, $\frac{M}{C}=-b^2$, придем к уравнению

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

т. е. к уравнению гиперболы. Теорема доказана.

Замечания. 1) Способ доказательства теоремы, будучи применен к конкретному уравнению, фактически приведет это уравнение к каноническому виду.

2) Из доказательства теоремы видно, что *кривая* *), *соответствующая уравнению*

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

является

а) *параболой при* $AC=0$,
б) *эллипсом при* $AC>0$,
в) *гиперболой при* $AC<0$.

Например **),

$5x^2+7x-11y+6=0$ — парабола,
$4x^2+5y^2+20x-30y+8=0$ — эллипс,
$2x^2-3y^2+4x+12y-7=0$ — гипербола.

---

*) Предполагается, что уравнению (11) действительно соответствует кривая, а не точка или пара прямых и т. п. В том, что это так, проще всего убедиться, фактически преобразуя уравнение (11) к каноническому виду.

**) Впрочем, чтобы убедиться, что в этих примерах мы действительно имеем дело с указанными кривыми, надо было бы преобразовать написанные уравнения к простейшему виду. Мы предоставляем читателю эту простую операцию.

п° 3. Общее уравнение второй степени. Вернемся теперь к уравнению (10).

Теорема 3. *Если уравнению*

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \tag{10}$$

соответствует кривая, то это или эллипс, или парабола, или гипербола.

Доказательство. Эта теорема нами уже доказана для того случая, когда $B=0$, т. е. когда в уравнение не входит произведение xy.

Будем теперь считать, что $B\neq 0$. Если мы повернем систему координат на любой угол θ, то уравнение (10) преобразуется в некоторое новое уравнение. Покажем, что упомянутый угол θ всегда можно выбрать так, чтобы в этом новом уравнении уже не было члена с произведением координат.

Действительно, в результате поворота системы координат старые координаты (x, y) выразятся через новые по формулам

$$x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta;\qquad y=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta.$$

Заменяя x и y в уравнении (10) этими выражениями, получим уравнение нашей кривой в новых осях

$$A(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)^2+B(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)+\\+C(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)^2+L=0, \tag{19}$$

где через L обозначена совокупность всех остальных членов. Ясно, что L не содержит членов второй степени относительно x_1 и y_1. В частности, в L не входит и произведение x_1y_1.

Выпишем отдельно все члены уравнения (19), содержащие x_1y_1, а именно

$$[-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta]\,x_1y_1.$$

Так как

$$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta,\qquad \cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,$$

то указанную группу членов можно записать в виде

$$[B\cos 2\theta-(A-C)\sin 2\theta]\,x_1y_1.$$

Нашей целью является выбор такого угла θ, чтобы в уравнении (19) не было члена, содержащего произведение x_1y_1. Ясно, что мы достигнем того, чего хотим, взяв θ таким, чтобы было

$$B\cos 2\theta-(A-C)\sin 2\theta=0$$

или, что то же самое,

$$(A-C)\sin 2\theta = B\cos 2\theta, \tag{20}$$

или, наконец,

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C}.} \tag{21}$$

Так как любое вещественное число служит тангенсом какого-нибудь угла, то всегда (т. е. при любых A, B, C) существует угол θ, удовлетворяющий соотношению (21). Но это и значит, что при помощи надлежащего поворота координатной системы уравнение (10) всегда можно превратить в уравнение, не содержащее произведения координат, т. е. свести дело к уже доказанной теореме 2.

Замечания. 1) Если $A=C$, то равенство (21) теряет смысл. В этом случае надо обратиться к равенству (20), которое примет вид

$$B\cos 2\theta = 0,$$

т. е. $\cos 2\theta = 0$ (ведь мы считаем $B \neq 0$). Но тогда $2\theta = 90°$, т. е. $\theta = 45°$. Итак, *при $A=C$ систему координат надо поворачивать на* $45°$ *).

2) Способ доказательства теоремы, будучи применен к конкретному уравнению, позволяет привести это уравнение к каноническому виду. Однако для этой цели существуют более удобные методы. Мы их не рассматриваем.

3) Как и для уравнения (10), имеет место следующий признак: *кривая* **), *соответствующая уравнению*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

является

а) *параболой при* $4AC = B^2$,

б) *эллипсом при* $4AC > B^2$,

в) *гиперболой при* $4AC < B^2$.

Мы не будем доказывать это утверждение.

n° 4. Примеры. Гипербола, отнесенная к асимптотам.

1) Рассмотрим уравнение

$$8x^2 - 16x + 3y^2 + 12y - 4 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$8(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) = 4$$

---

*) Равенству $\cos 2\theta = 0$ в пределах первой окружности удовлетворяют два угла: $\theta = 45°$ и $\theta = 135°$. Поэтому вместо поворота системы на $45°$ можно было бы применять и поворот на $135°$.

**) См. первую сноску на стр. 88.

или, дополняя выражения в скобках до полных квадратов,

$$8(x^2-2x+1)+3(y^2+4y+4)=24.$$

Отсюда

$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{8}=1.$$

Сделаем параллельный перенос системы, передвинув начало в точку $O_1(1, -2)$. В новых осях уравнение нашей линии таково:

$$\frac{x_1^2}{3}+\frac{y_1^2}{3}=1.$$

Это эллипс с полуосями $\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}$. Полезно обратить внимание, что его фокусы лежат на (новой!) оси ординат.

2) Разберем более сложный пример

$$4x^2+24xy+11y^2-24x-82y+15=0. \tag{22}$$

Начнем с нахождения угла θ, поворот осей на который обеспечивает исчезновение произведения координат. Согласно (21) должно быть

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{B}{A-C}.$$

У нас $A=4$, $B=24$, $C=11$ и потому

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{24}{4-11}=-\frac{24}{7}. \tag{23}$$

Но

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\theta$ удовлетворяет квадратному уравнению $\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}=-\frac{24}{7}$ или

$$12\operatorname{tg}^2\theta-7\operatorname{tg}\theta-12=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют $\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg}\theta=-\frac{3}{4}$. Какой из этих углов θ взять, безразлично, ибо любой из них удовлетворяет соотношению (23), а только это нам и нужно. Возьмем за требуемый угол θ тот, для которого $\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}$. Как известно,

$$\cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}.$$

Значит, в нашем случае

$$\cos\theta=\pm\frac{3}{5}, \tag{24}$$

а тогда

$$\sin\theta=\operatorname{tg}\theta\cos\theta=\pm\frac{4}{5}. \tag{25}$$

Выбор знака в равенстве (24), а значит и в (25), опять-таки находится в нашем распоряжении. Действительно, ведь при любом его выборе получится $\operatorname{tg}\theta=\frac{4}{3}$, а мы уже отметили, что это обеспечивает выполнение соотношения (23). Выберем в (24) знак „+". Тогда

$$\cos\theta=\frac{3}{5},\quad \sin\theta=\frac{4}{5},$$

и формулы преобразования координат при повороте системы на этот угол θ будут иметь вид

$$x=\frac{3x_1-4y_1}{5},\quad y=\frac{4x_1+3y_1}{5}. \tag{26}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (22), придадим ему вид

$$4x_1^2-y_1^2-16x_1-6y_1+3=0. \tag{27}$$

Как и должно было оказаться, новое уравнение не содержит произведения x_1y_1. Дальнейшие преобразования ведем, как в предшествующем примере. Именно, записываем (27) в виде

$$4(x_1^2-4x_1+4)-(y_1^2+6y_1+9)=4$$

или

$$\frac{(x_1-2)^2}{1}-\frac{(y_1+3)^2}{4}=1$$

и совершаем параллельный перенос системы, сдвигая начало в точку $O_1(2,\ -3)$. Если вновь полученные оси обозначить через O_1x_2 и O_1y_2, то $x_1=x_2+2$, $y_1=y_2-3$, и в осях $O_1x_2y_2$ уравнение нашей линии будет иметь вид

$$\frac{x_2^2}{1}-\frac{y_2^2}{4}=1.$$

Стало быть, наша линия — гипербола с полуосями 1 и 2. Ее асимптоты в осях $O_1x_2y_2$ имеют уравнения $y_2=\pm 2x_2$. Центром симметрии гиперболы служит точка O_1. В системе Ox_1y_1 ее координаты суть $x_1=2$, $y_1=-3$. Значит, согласно (26) в системе Oxy координаты точки O_1 таковы: $x=3{,}6$ и $y=-0{,}2$.

Чтобы изобразить нашу гиперболу на чертеже, прежде всего поворачиваем систему на угол θ, у которого $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$. Этот угол лежит между 0 и 90° и легко строится способом, известным из тригонометрии. Получив таким образом систему Ox_1y_1, мы находим в ней точку $O_1(2, -3)$ и строим систему $O_1x_2y_2$. На рис. 77 изображен характеристический прямоугольник и асимптоты гиперболы (22), а также сама эта гипербола.

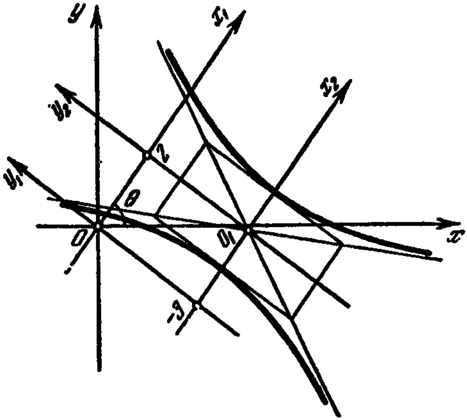


Рис. 77.

3) Рассмотрим еще один пример, имеющий теоретическое значение. Пусть требуется исследовать кривую

$$xy = a. \tag{28}$$

Так как в этом уравнении $A = C (= 0)$, то по замечанию 1) надо повернуть систему на 45°. Для этого значения угла θ формулы преобразования координат имеют вид

$$x = (x_1 - y_1)\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y = (x_1 + y_1)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в (28), получим

$$x_1^2 - y_1^2 = 2a, \tag{29}$$

а это (при $a \neq 0$) равнобочная гипербола. Ее асимптоты делят пополам углы между осями симметрии. Но ведь осями симметрии гиперболы (29) служат (новые!) оси координат. Значит, асимптотами являются старые координатные оси. Итак, доказана

Теорема 4. *Уравнению*

$$\boxed{xy = a,} \tag{28}$$

где $a \neq 0$, *соответствует равнобочная гипербола, имеющая своими асимптотами оси координат.*

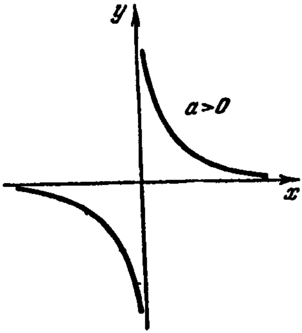


Рис. 78.

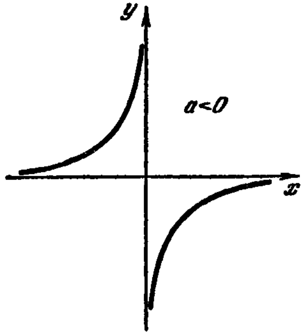


Рис. 79.

Легко понять, что при $a > 0$ эта гипербола лежит в первом и третьем, а при $a < 0$ во втором и четвертом координатных углах (рис. 78 и 79).

§ 9. Полярные координаты

n° 1. Полярная система координат. До сих пор для определения положения точки на плоскости мы пользовались ее прямоугольными координатами. Теперь мы рассмотрим другую важную систему координат — полярную.

Эта система состоит из некоторой точки O (*полюса*) и проходящей через нее оси *) Ox (*полярной оси*). С помощью указанных объектов можно определить положение любой точки M. Для этого соединим точку M с полюсом O и найдем угол θ, который луч OM образует с положительным направлением полярной оси Ox, и длину r этого луча **) OM (рис. 80).

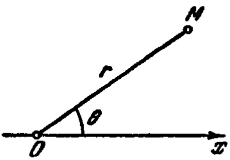


Рис. 80.

Числа θ и r называются соответственно *аргументом* и *радиусом-вектором* точки M. Общее их название — *полярные координаты* этой точки. Тот факт, что точка M имеет полярные координаты r и θ, обычно записывают в виде $M(r, \theta)$. Эта запись мало удачна,

---

*) *Осью* называется прямая, на которой выбрано положительное направление. Поэтому мы и раньше говорили об осях Ox и Oy.

**) Разумеется, мы имеем в виду длину отрезка OM, ибо луч есть бесконечная полупрямая.

так как неясно, что означает символ M (3, 2): точку, у которой абсцисса и ордината равны соответственно 3 и 2, или же точку, у которой эти числа являются радиусом-вектором и аргументом. В дальнейших частях книги эта неясность будет устраняться сопровождающими пояснениями, а в данном параграфе мы введем обозначение $M\langle r, \theta\rangle$, хотя оно и не является общепринятым.

Полярная система координат имеет некоторые недостатки по сравнению с прямоугольной. Прежде всего, аргументом полюса может считаться любое число. Так *), $A\langle 0, 1\rangle$, $B\langle 0, -10\rangle$, $C\langle 0, 42^\circ\rangle$ суть различные обозначения одной и той же точки — полюса. Далее, и у любой другой точки плоскости имеется бесконечное множество аргументов, потому что прибавление к аргументу точки угла $2\pi = 360^\circ$ **) не меняет этой точки. Поэтому $M\langle 5, 73^\circ\rangle$, $N\langle 5, 443^\circ\rangle$, $P\langle 5, 803^\circ\rangle$, $Q\langle 5, -287^\circ\rangle$ представляют собой одну и ту же точку.

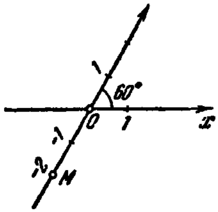


Рис. 81.

Иногда рассматривают и **отрицательные** значения радиуса-вектора. Например, под $M\langle -2, 60^\circ\rangle$ понимают точку (рис. 81), которая получается в результате следующих построений: сначала поворачивают полярную ось на 60° (как всегда против часовой стрелки). После этого на оси (в ее **новом** положении!) откладывают в **отрицательном** направлении отрезок 2. Полученная точка и будет точкой $M\langle -2, 60^\circ\rangle$. Нетрудно, однако, понять, что ту же точку M можно записать и так: $M\langle 2, 240^\circ\rangle$. Иными словами, ту же точку можно задать, пользуясь **положительным** значением радиуса-вектора. Аналогичным образом, прибавив к аргументу 180°, мы всегда можем превратить отрицательный радиус-вектор в положительный. Имея это в виду, мы раз навсегда условимся считать радиус-вектор r любой точки неотрицательным, $r \geqslant 0$.

n°2. Расстояние между двумя точками.

Задача. *Найти расстояние d между точками $M_1\langle r_1, \theta_1\rangle$ и $M_2\langle r_2, \theta_2\rangle$.*

---

*) У точки $M\langle 2, 3\rangle$ аргумент равен трем **радианам**, а у точки $N\langle 2, 3^\circ\rangle$ — трем **градусам**.

) Разумеется, равенство $\boxed{2\pi = 360^\circ}$ означает **только, что „угол 2π радианов" равен „углу 360°". Таким образом, в указанном равенстве нельзя левую часть считать отвлеченным числом (так же, как равенство 1 *м* = 100 *см* нельзя заменить равенством 1 = 100 *см*). Равенства вроде $\boxed{\pi = 180^\circ}$ появляются потому, что, задавая угол его величиной в радианах в соответствующем обозначении наименование „радиан" обычно опускают.

Решение. По теореме косинусов из треугольника OM_1M_2 (рис. 82) находим

$$\boxed{d=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}\,.} \tag{1}$$

n°3. Связь между полярными и прямоугольными координатами. Пусть на плоскости построены две системы координат: полярная и прямоугольная, причем полюс и полярная ось первой совпадают с началом координат и осью абсцисс второй. Возьмем на

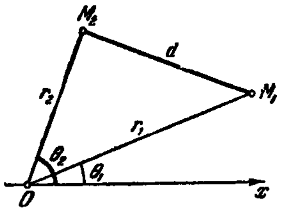


Рис. 82.

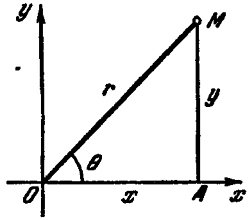


Рис. 83.

плоскости любую точку M (рис. 83), и пусть ее полярные и прямоугольные координаты соответственно будут (x, y) и $\langle r, \theta\rangle$. Как видно из треугольника OMA, справедливы формулы

$$\boxed{x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,} \tag{2}$$

выражающие прямоугольные координаты через полярные. Можно доказать, что формулы (2) верны не только для простейшего положения точки M, изображенного на рис. 83, но и при любом ее положении. Мы, однако, на этом не будем останавливаться.

Из формул (2) (или непосредственно из треугольника OMA) следует, что

$$\boxed{r=\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

причем согласно сделанному выше замечанию перед радикалом мы всегда будем брать знак „+".

Наконец, из (2) следует, что

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}.} \tag{4}$$

Формула (4) не позволяет находить угол θ по x и y, ибо по тангенсу угла нельзя однозначно определить угол. Но, зная x и y, мы знаем и четверть, в которой лежит угол θ, что в соединении с формулой (4) уже позволяет найти θ с точностью до 360°.

n° 4. Спираль Архимеда. Мы знаем, что различные линии на плоскости определяются с помощью уравнений, которым должны удовлетворять прямоугольные координаты точек линии. Но совершенно то же будет справедливо, если говорить не о прямоугольных, а о полярных координатах точек. Прямую, эллипс, параболу, гиперболу удобнее изучать по их уравнениям в прямоугольных координатах. Однако для некоторых линий более удобным средством изучения служат их уравнения именно в полярных координатах. Такой линией является, например, спираль Архимеда.

Определение. *Спиралью Архимеда* называется линия, описываемая точкой, равномерно двигающейся по лучу, который сам равномерно вращается вокруг своего начала.

Мы будем предполагать, что в начальный момент точка M, описывающая спираль, находится в начале луча, упомянутого в определении.

Выведем уравнение спирали Архимеда. Для этого надо прежде всего выбрать определенную систему координат. Мы возьмем за полюс начало луча, по которому движется точка M, а за положительное направление полярной оси — начальное положение этого луча.

Обозначим соответственно через ω и v скорость вращения луча и скорость движения точки M вдоль по лучу. Поскольку оба движения равномерны, то ω есть угол, на который поворачивается луч за единицу времени, а v — расстояние, которое за единицу времени точка M, описывающая спираль, проходит вдоль по лучу.

Положение точки M мы будем определять ее полярными координатами r и θ. В начальный момент $r=\theta=0$. В момент же $t>0$ (т. е. в момент, отделенный от начального промежутком времени*) в t единиц)

$$\theta=\omega t, \quad r=vt.$$

Стало быть, для любого момента t

$$\frac{r}{\theta}=\frac{v}{\omega}.$$

Обозначая (постоянное!) число $\frac{v}{\omega}$ через k, находим, что уравнение спирали Архимеда имеет вид

$$\boxed{r=k\theta.}$$

*) И наступающий после начального.

Таким образом, при движении точки по спирали Архимеда ее радиус-вектор изменяется прямо пропорционально аргументу. Это позволяет построить спираль Архимеда. На рис. 84 отмечены точки A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L спирали, аргументы которых равны соответственно 45°, 90°, 135°, ..., 495°. Ясно, что

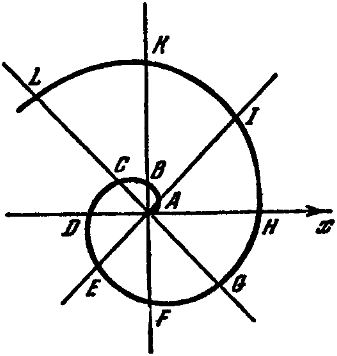


Рис. 84.

$$OB = 2 \cdot OA, \quad OC = 3 \cdot OA,$$
$$OD = 4 \cdot OA, \ldots, OL = 11 \cdot OA.$$

n° 5. Гиперболическая спираль.

Определение. *Гиперболическая спираль* есть такая линия, что полярные координаты точки, движущейся по ней, изменяются обратно пропорционально друг другу.

Иными словами, гиперболическая спираль есть линия, соответствующая уравнению

$$\boxed{r = \frac{k}{\theta}.} \tag{5}$$

Применяя построения, сходные с теми, какие мы употребляли для спирали Архимеда, нетрудно построить ряд точек гиперболической спирали. Она имеет вид, изображенный на рис. 85. Легко понять,

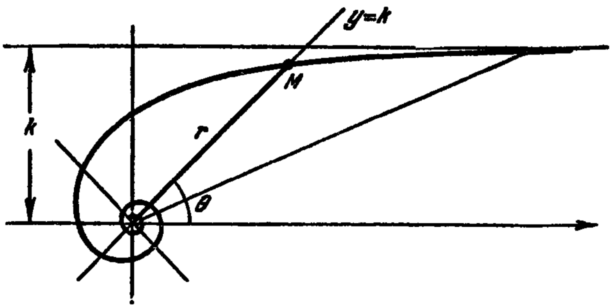


Рис. 85.

что с безграничным увеличением аргумента θ точки M радиус-вектор r этой точки будет приближаться неограниченно к нулю. Это показывает, что гиперболическая спираль, совершая бесконечное множество оборотов вокруг полюса, неограниченно приближается к нему, хотя никогда его и не достигает. Указанное обстоятельство выражают, говоря, что *полюс служит асимптотической точкой гиперболической спирали.*

Чтобы установить еще одно свойство гиперболической спирали, введем также прямоугольную систему координат, начало которой совпадает с полюсом, а ось абсцисс с полярной осью. Как мы знаем, для любой точки $M\langle r, \theta\rangle = M(x, y)$ будет

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Значит, для точек, лежащих на спирали (5), окажется

$$y = k\frac{\sin\theta}{\theta}. \tag{6}$$

В следующей главе будет доказано, что по мере приближения θ к нулю отношение $\frac{\sin\theta}{\theta}$ стремится к 1. Но если θ приближается к нулю, то согласно (5) точка $M\langle r, \theta\rangle$ будет уходить по спирали в бесконечность (так как r будет безгранично возрастать). Таким образом, из (6) следует, что ордината y точки M, уходящей в бесконечность по гиперболической спирали, стремится к числу k. Стало быть, прямая $y = k$ служит асимптотой спирали (5).

п° 6. Лемниската. Как было показано в п° 5, для изучения гиперболической спирали оказалось полезным привлечь две системы координат: полярную и прямоугольную. Так же обстоит дело и при рассмотрении еще одной интересной кривой — л е м н и с к а т ы.

О п р е д е л е н и е. *Лемнискатой* называется линия, представляющая геометрическое место точек, произведение расстояний которых от двух данных точек — фокусов — есть величина постоянная и равная квадрату половины междуфокусного расстояния.

Выведем уравнение лемнискаты в прямоугольной системе координат, ось абсцисс которой проходит через фокусы, а начало делит пополам отрезок между фокусами. Если обозначить фокусы лемнискаты через F и F' и положить $FF' = 2c$, то в указанной системе координат будет $F(c, 0)$ и $F'(-c, 0)$. Значит, для любой точки $M(x, y)$ окажется

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

и уравнение лемнискаты будет

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = c^2.$$

Упростим это уравнение, возведя его в квадрат:

$$[(x-c)^2 + y^2]\,[(x+c)^2 + y^2] = c^4$$

или, что то же самое,

$$[(x^2 + y^2 + c^2) - 2cx]\,[(x^2 + y^2 + c^2) + 2cx] = c^4.$$

Отсюда

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = c^4$$

или

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(x^2 + y^2) + c^4 - 4c^2x^2 = c^4.$$

4*

Положив для краткости $2c^2 = a^2$, находим окончательное уравнение лемнискаты

$$\boxed{(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).} \tag{7}$$

Таким образом, это кривая четвертого порядка. Поскольку уравнение (7) содержит x и y только в четных степенях, соответствующая кривая симметрична относительно обеих осей. Значит, для установления формы лемнискаты достаточно выяснить форму той ее части, которая лежит в первом координатном угле.

Для решения последней задачи введем полярную систему координат, приняв ось Ox за полярную ось и начало координат O за полюс. Тогда

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

и уравнение (7) принимает вид

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

или *)

$$\boxed{r^2 = a^2\cos 2\theta.} \tag{8}$$

Из этого уравнения видно, что при $\theta = 0$ получается $r = a$. Если же θ станет увеличиваться от $\theta = 0$ до $\theta = \frac{\pi}{4}$, то r будет уменьшаться от $r = a$ до $r = 0$. Значениям же θ, заключенным между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$, отвечают мнимые значения r, т. е. на лемнискате нет точек с указанными θ **). Значит, часть лемнискаты, лежащая в первом координатном угле, имеет вид, изображенный на рис. 86, а вся лемниската такова, как это показано на рис. 87.

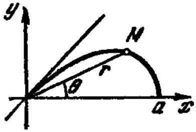


Рис. 86.

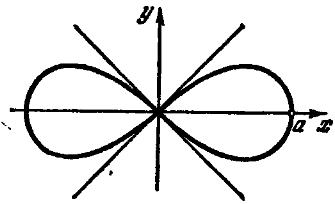


Рис. 87.

---

*) Сократить уравнение на r^2 можно. Действительно, такое сокращение могло бы привести к потере точки $r = 0$, но этого не происходит, ибо эта точка лежит на кривой (8) $\left(\text{она отвечает значению } \theta = \frac{\pi}{4}\right)$.

**) Пусть $\theta \to \frac{\pi}{4}$. Тогда $r \to 0$, т. е. точка $M\langle r, \theta\rangle$ приближается к полюсу, который и сам лежит на лемнискате. Луч OM (образующий с полярной осью угол θ) оказывается секущим лемнискату. Когда $\theta \to \frac{\pi}{4}$, этот секущий луч стремится совпасть с биссектрисой $y = x$ первого угла. Стало быть, лемниската в начале координат касается упомянутой биссектрисы.

ГЛАВА II

ПЕРЕМЕННАЯ. ПРЕДЕЛ. ФУНКЦИЯ

§ 1. Переменные и их пределы

n° 1. Нумерованная переменная. Еще во Введении мы указали, что предметом высшей математики является изучение переменных величин.

Что же такое иеременная величина?

Определение. *Переменной величиной* называется всякая величина x, способная принимать различные числовые значения.

Например, температура воздуха в комнате может принять значение 15 (градусов Цельсия) или 17 и т. п. Точно так же, давление пара в котле может равняться 30 (атмосфер) или 31 и т. п. Значит, это переменные величины *).

Постоянную величину удобно считать частным случаем переменной. Именно, *постоянная — это такая переменная, все значения которой равны между собой.*

Удобство этого соглашения видно хотя бы из такого примера: если точка M движется по некоторой кривой K, то ее расстояние $OM = x$ от неподвижной точки O есть величина переменная (рис. 88). Но если, в частности, K есть окружность с центром в O, то x будет постоянной.

Рис. 88.

Очень важен один специальный вид переменных — так называемые нумерованные переменные.

Изучение более сложных типов переменных можно свести к рассмотрению указанного их вида.

*) Переменной величиной является также абсцисса произвольной точки оси Ox. Продолжительность человеческой жизни представляет собой еще один пример переменной величины.

Переменная x называется *нумерованной*, если все ее значения можно перенумеровать при помощи целых положительных чисел, причем она принимает эти значения в порядке возрастания их номеров. Таким образом, множество значений нумерованной переменной можно расположить в последовательность

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots$$

Примеры.

1) x: 3, 6, 9, 12, 16, 18, ...

В этом примере

$$x_1 = 3,\ x_2 = 6,\ x_3 = 9,\ x_4 = 12,\ \ldots,\ x_{100} = 300$$

и, вообще,

$$\boxed{x_n = 3n.}$$

2) y: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Здесь $y_1 = 2$, $y_2 = 4$, $y_3 = 8$, ..., $y_{10} = 1024$ и, вообще,

$$\boxed{y_n = 2^n.}$$

3) z: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots$

Здесь $z_1 = 1$, $z_5 = \frac{1}{5}$, $z_{47} = \frac{1}{47}$, $z_{100} = \frac{1}{100}$ и, вообще,

$$\boxed{z_n = \frac{1}{n}.}$$

Собственно, пока мы указывали только несколько значений переменной x_1, x_2, x_3 и остальные значения ее скрывали под многоточием, мы не могли считать эту переменную заданной, ибо ничто, кроме догадки, не давало нам ее невыписанных значений. Лишь написав формулу

$$x_n = 3n,$$

или

$$y_n = 2^n,$$

или

$$z_n = \frac{1}{n},$$

мы делаем наши переменные объектами математического изучения.

Таким образом, *нумерованная переменная x_n является заданной, если указано правило, позволяющее по номеру n значения переменной находить само это значение x_n.*

Например, задав x_n формулой

$$x_n = n^3 - 2,$$

мы легко получаем $x_3 = 25$, $x_7 = 341$ и т. п.

Если значения переменной откладывать на числовой оси, то полученный рисунок называется *графическим изображением* переменной.

Разумеется, на таком рисунке мы можем изобразить лишь несколько отдельных значений переменной, но часто этого оказывается

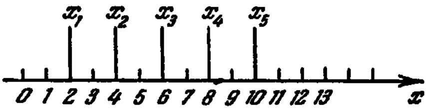


Рис. 89.

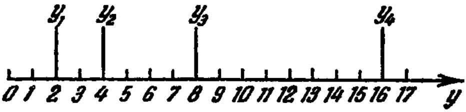


Рис. 90.

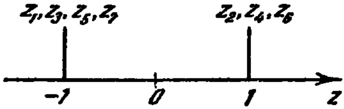


Рис. 91.

достаточно для н а г л я д н о г о п р е д с т а в л е н и я хода изменения переменной.

П р и м е р ы.

1) $\boxed{x_n = 2n}$, графическое изображение на рис. 89;

2) $\boxed{y_n = 2^n}$, графическое изображение на рис. 90;

3) $\boxed{z_n = (-1)^n}$, графическое изображение на рис. 91.

n° 2. Предел. Рассмотрим переменную

$$x_n = 3 + \frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

Ее графическое изображение показано на рис. 92. По этому рисунку видно, что, уже начиная с x_6, значения нашей переменной очень близки к постоянному числу 3. Постараемся охарактеризовать это наблюдение точнее. Возьмем какое-либо постоянное положительное малое число ε. Пусть, например, $\varepsilon=\frac{1}{100}$. Тогда постоянные числа $3-\frac{1}{100}=2,99$ и $3+\frac{1}{100}=3,01$ будут расположены очень

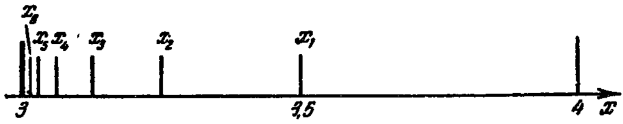


Рис. 92.

близко к 3, первое левее, а второе правее, чем 3, образуя узкую „щель", серединой которой служит число 3. Легко понять, что все значения нашей переменной x_n, у которых номер n достаточно велик, попадут в указанную „щель", т. е. будут удовлетворять неравенству

$$3-\frac{1}{100}<x_n<3+\frac{1}{100}. \tag{2}$$

Именно, так как при всех n будет $x_n>3$, то для достижения неравенства (2) достаточно, чтобы было

$$x_n<3+\frac{1}{100},$$

т. е.

$$3+\frac{1}{2^n}<3+\frac{1}{100}.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$2^n>100,$$

а последнее заведомо справедливо, если $n\geqslant 7$.

Таким образом, неравенство (2) выполняется для x_7, x_8, x_9, ... Аналогично этому и для других постоянных $\varepsilon>0$ неравенство

$$3-\varepsilon<x_n'<3+\varepsilon$$

будет выполняться для всех достаточно больших значений n. Подобное положение вещей характеризуют, говоря, что 3 *есть предел переменной* x_n или что x_n *стремится к* 3. Точное определение понятия предела таково.

Определение. Постоянное число l называется *пределом* переменной x_n, если оно обладает следующим свойством: какое бы малое постоянное положительное число ε ни взять, все значения переменной x_n, начиная с некоторого из них, будут удовлетворять неравенству:

$$\boxed{l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon.} \tag{3}$$

Рис. 93.

Графическим изображением неравенства (3) служит рис. 93. Тот факт, что постоянное число l является пределом переменной x_n, записывают обычно так:

$$\boxed{l=\lim x_n.}$$

Вместо того чтобы сказать, что l есть предел x_n, часто говорят, что x_n *стремится к* l и пишут

$$\boxed{x_n \to l.}$$

n° 3. Величины бесконечно малые и бесконечно большие. Остановимся на двух важных типах переменных величин: на величинах бесконечно малых и бесконечно больших.

Определение. Переменная величина, имеющая своим пределом число 0, называется *бесконечно малой*.

Так, если $x_n \to 0$ (или $\lim x_n = 0$), то x_n будет бесконечно малой величиной. Вот несколько примеров бесконечно малых величин:

$$x_n=\frac{1}{n}, \quad y_n=\frac{1}{n^2}, \quad z_n=\frac{3}{2^n}, \quad u_n=\frac{1}{n!}.$$

Замечание. Термин „бесконечно малая величина" безусловно неудачен, ибо он создает впечатление, что величина, о которой идет речь, имеет очень малые значения, в то время как на самом деле существо вопроса в характере изменения этой величины (впрочем, достаточно далекие значения бесконечно малой величины действительно становятся очень малыми). Были попытки изменения установившейся терминологии (например, московский математик И. И. Жегалкин предлагал термин „бесконечно умаляющаяся величина"), но они не привились.

Полезным примером бесконечно малой величины является величина

$$x_n=\frac{10\,000\,000}{10^n}.$$

Начальные ее значения очень велики; например $x_1 = 1\,000\,000$, $x_2 = 100\,000$, но величина эта, как легко видеть, все же стремится к нулю и потому является бесконечно малой. Другой поучительный пример доставляет величина

$$y_n = 0{,}00000000001.$$

Она очень мала, но не является бесконечно малой, так как эта величина постоянная, отличная от нуля и не приближающаяся к нулю.

Перейдем к величинам бесконечно большим, причем начнем с примера. Рассмотрим переменную

$$x_n = n^2.$$

Возьмем какое-нибудь большое постоянное число A, например $A = 300$. Так как $18^2 = 324$, то уже 18-е значение нашей переменной x_{18} будет больше, чем 300. А так как с увеличением номера n значение x_n тоже увеличивается, то дальнейшие значения x_n и подавно будут удовлетворять неравенству

$$x_n > 300.$$

Можно сказать, что наша переменная x_n перерастает число 300. Точно так же она перерастает и число $A = 1000$, ибо $x_{32} = 32^2 = 1024 > 1000$, а дальнейшие значения x_n будут еще больше. Вообще, какое бы большое постоянное положительное число A ни взять, наша переменная его перерастет. Именно, как только номер n станет больше, чем $\sqrt{A}$, так сейчас же окажется

$$x_n = n^2 > A.$$

Такое поведение переменной x_n характеризуют, говоря, что x_n *стремится к плюс бесконечности* или что *пределом переменной x_n является плюс бесконечность*. Точное определение этого термина таково.

Определение. Если переменная x_n обладает следующим свойством: какое бы большое постоянное положительное число A ни взять, все достаточно далекие значения оказываются бóльшими, чем A

$$\boxed{x_n > A,}$$

то говорят, что x_n *стремится к плюс бесконечности* или *имеет своим пределом плюс бесконечность*, и пишут

$$\boxed{x_n \to +\infty} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim x_n = +\infty.}$$

Замечание. Читатель должен обратить внимание на то, что фраза „x_n стремится к плюс бесконечности" имеет существенный недостаток: она способна внушить неправильное представление, что x_n стремится к какому-то числу, в то время как на самом деле x_n никуда не стремится, а лишь изменяется так, что перерастает любое большое постоянное число A.

Такое же предупреждение надо сделать и по поводу фразы „пределом x_n является плюс бесконечность". На самом деле у x_n никакого предела нет.

Аналогично понятию переменной, стремящейся к $+\infty$, определяется понятие переменной x_n, стремящейся к минус бесконечности ($x_n \to -\infty$). Именно, если переменная x_n такова, что для всякого постоянного положительного числа A все достаточно далекие значения x_n удовлетворяют неравенству

$$x_n < -A,$$

то говорят, что x_n стремится к $-\infty$ и записывают это так:

$$x_n \to -\infty \quad \text{или} \quad \lim x_n = -\infty.$$

Кроме переменных, стремящихся к бесконечности определенного знака, рассматривают и такие переменные, у которых неограниченно

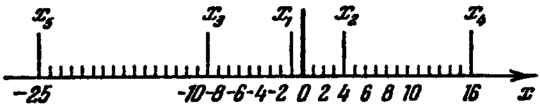


Рис. 94.

растет лишь их модуль (т. е. абсолютная величина). Именно, если переменная x_n такова, что для всякого постоянного положительного числа A все достаточно далекие значения x_n удовлетворяют неравенству $|x_n| > A$, то говорят, что x_n *стремится к бесконечности* и пишут

$$x_n \to \infty \quad \text{или} \quad \lim x_n = \infty,$$

уже не ставя перед символом ∞ никакого знака.

Легко понять, что если $x_n \to +\infty$, или $x_n \to -\infty$, то тем самым $x_n \to \infty$. Однако возможно, что $x_n \to \infty$, хотя x_n не стремится ни к $+\infty$, ни к $-\infty$. Такова, например, переменная $x_n = (-1)^n n^2$ (см. рис. 94, где изображены x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

Действительно, x_n принимает значения

$$-1,\ 4,\ -9,\ 16,\ -25,\ 36,\ \ldots$$

Ясно, что ни к $+\infty$, ни к $-\infty$ переменная x_n не стремится. Но так как $|x_n| = n^2$, то $x_n \to \infty$.

Если $x_n \to \infty$, то x_n называется *бесконечно большой величиной*.

По поводу этого термина следует сказать то же, что мы говорили выше по поводу термина „бесконечно малая величина". Именно, термин „величина бесконечно большая" крайне неудачен, так как создает иллюзию, будто речь идет о величине очень большой, в то время как на самом деле, говоря о бесконечно большой величине, имеют в виду величину безгранично растущую. Иными словами, сущность бесконечно большой величины вовсе не в ее размерах, а в характере ее изменения.

Например, величина

$$x_n = 10^{10^{10}}$$

есть величина колоссальная, превосходящая всякое воображение, но эта величина — число постоянное и совершенно не стремящееся к бесконечности. Напротив, как мы уже видели, переменная $x_n = n^2$ как раз стремится к $+\infty$, хотя $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$, т. е. первые ее значения имеют весьма скромные размеры.

Важным примером бесконечно большой величины является тангенс угла, стремящегося к 90°. Именно, из курса тригонометрии известно, что для угла 90° нельзя построить линию тангенса, и, следовательно, $\operatorname{tg} 90^\circ$ не существует. Но если α_n — такой переменный угол, что $\alpha_n \to 90^\circ$ и притом $\alpha_n < 90^\circ$, то $\operatorname{tg}\alpha_n \to +\infty$. Если же $\alpha_n \to 90^\circ$ и $\alpha_n > 90^\circ$, то $\operatorname{tg}\alpha_n \to -\infty$.

Понятия величины бесконечно большой и величины бесконечно малой тесно связаны между собой. Именно, имеет место

Теорема. a) *Величина, обратная бесконечно большой, есть бесконечно малая величина, т. е. если $x_n \to \infty$, то*

$$\frac{1}{x_n} \to 0.$$

b) *Величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая величина, т. е. если $x \to 0$, то*

$$\frac{1}{x_n} \to \infty.$$

Справедливость этой теоремы почти очевидна. Действительно, пусть, например, $x_n \to +\infty$. Это значит, что x_n станет больше 1000. Но тогда положительная дробь $\frac{1}{x_n}$ станет меньше $\frac{1}{1000}$. В процессе своего изменения x_n станет и больше 1 000 000, а тогда $\frac{1}{x_n}$ станет меньше 0,000 001. Подобным образом мы и убеждаемся, что $\frac{1}{x_n}$ стремится к нулю, являясь, стало быть, величиной бесконечно малой, чем и доказано первое утверждение теоремы. Второе устанавливается аналогично.

n° 4. Основные свойства переменных величин. Перейдем к изучению основных свойств переменных величин.

I. *Постоянная величина (если ее рассматривать как частный случай переменной) сама себе служит пределом.* Действительно, если при всех n будет

$$x_n = c,$$

то при любом постоянном $\varepsilon > 0$ неравенство

$$c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$$

будет выполняться, уже начиная с $n = 1$, а из этого вытекает, что

$$x_n \to c.$$

II. **Единственность предела.** *Переменная величина не может стремиться к двум различным пределам.*

В самом деле, если бы оказалось, что $x_n \to a$ и $x_n \to b$ $(a \neq b)$, то взяв около a и b два непересекающихся промежутка *) числовой

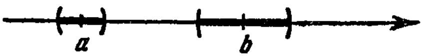


Рис. 95.

оси (рис. 95), мы должны были бы обнаружить, что далекие значения x_n оказываются лежащими сразу в обоих этих промежутках, что, очевидно, нелепо, так как промежутки не пересекаются. Следовательно, *переменная может иметь только один предел.*

Замечание. Это свойство не следует понимать так, что всякая переменная обязательно имеет предел.

Например, $x_n = (-1)^n$ предела не имеет.

III. **Теорема о сжатой переменной.** *Если две переменные стремятся к одному и тому же пределу, а третья переменная заключена между ними, то и она стремится к этому же пределу.* Если $x_n < y_n < z_n$, причем $x_n \to l$ и $z_n \to l$, то $y_n \to l$.

В самом деле, если взять около точки l любой узкий промежуток (с серединой в l), то далекие значения „сжимающих" переменных x_n и z_n обязательно попадут в него. Но тогда соответствующие (т. е. имеющие тот же номер) значения „сжатой" переменной y_n и подавно окажутся лежащими в том же промежутке.

Установленную теорему иногда шутливо называют „принципом двух милиционеров" **).

---

*) Мы имеем в виду промежутки, середины которых находятся соответственно в a и в b.

**) Разумеется, „милиционерами" здесь являются x_n и z_n.

IV. **Предел суммы.** *Если каждая из двух переменных имеет предел, то и сумма их имеет предел, равный сумме пределов слагаемых.*

Пусть $x_n \to a$ и $y_n \to b$, тогда $x_n + y_n \to a + b$.

Действительно, если n велико, то x_n почти равно a, а y_n почти равно b, но тогда ясно, что $x_n + y_n$ почти равно $a + b$. Точность приближенного равенства

$$x_n + y_n \cong a + b$$

будет сколь угодно высока, если только x_n и y_n достаточно близки к a и b, а это и означает, что

$$x_n + y_n \to a + b.$$

Иногда установленное свойство коротко формулируют так: *предел суммы двух переменных равен сумме пределов слагаемых.* Эта формулировка не очень хороша, ибо ведь слагаемые не обязательно стремятся к определенным пределам. Поэтому лучше держаться формулировки, приведенной выше.

V. *Сумма двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая, т. е. если $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, то $x_n + y_n \to 0$.* Это свойство есть прямое следствие предыдущего.

VI. **Предел разности.** *Если $x_n \to a$ и $y_n \to b$, то $x_n - y_n \to a - b$, т. е. предел разности двух переменных величин (имеющих пределы) равен разности пределов этих величин.*

Справедливость этого свойства обосновывается таким же рассуждением, как и для случая суммы. Если, в частности, $a = b = 0$, то мы приходим к следующему свойству:

VII. *Разность двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

VIII. *Разность между переменной, имеющей предел, и этим пределом есть величина бесконечно малая.*

В самом деле, пусть $x_n \to l$, тогда по сказанному в VI будет $x_n - l \to l - l = 0$, т. е.

$$x_n - l \to 0,$$

а это и значит, что величина $x_n - l$ бесконечно мала.

Справедливо и обратное предложение. Именно:

IX. *Если разность между переменной x_n и некоторой постоянной l есть величина бесконечно малая, то l является пределом x_n, т. е. $x_n \to l$.* Действительно, пусть $x_n - l = \alpha_n$, причем $\alpha_n \to 0$. Тогда $x_n = l + \alpha_n$ и поэтому $x_n \to l + 0$, т. е. $x_n \to l$.

Такие же рассуждения, как и для суммы и для разности, приводят к справедливости и следующего предложения:

X. **Предел произведения.** *Если каждая из двух переменных имеет предел, то и произведение их имеет предел, равный произведению их пределов.*

Иначе говоря, если $x_n \to a$ и $y_n \to b$, то $x_n y_n \to ab$. В частности,

XI. *Произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.*

Справедливо и утверждение

XII. **Предел частного.** *Если каждая из двух переменных имеет предел, то и частное их имеет предел, равный частному их пределов, если только предел делителя отличен от нуля.*

Иначе говоря, если $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $b \neq 0$, то

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

Замечание. Случай $a = 0$ здесь не исключен. Например, если $x_n \to 0$, $y_n \to 3$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{0}{3} = 0$.

Что же касается оговорки $b \neq 0$, то она, конечно, существенна. Действительно, при $b = 0$ вся формулировка теряла бы всякий смысл, так как „дробь"

$$\frac{a}{0}$$

не имеет никакого числового значения. В самом деле, символом $\frac{a}{b}$ обозначается такое число x, произведение которого на b равно a:

$$bx = a.$$

Если $b = 0$, то при всяком x будет $bx = 0$. Значит, если $a \neq 0$ (например, $a = 12$), то не существует ни одного x, для которого было бы $0 \cdot x = a$ (например, $0 \cdot x = 12$). Если же $a = 0$, то при всяком x будет $0 \cdot x = a$, и снова никакого однозначно определенного числа x дробь $\frac{a}{0}$ не представляет.

Поэтому надо раз навсегда твердо условиться **никогда на нуль не делить.** Забвение этого правила может привести к грубым ошибкам. Вот пример одной из них: пусть $a = 1$. Тогда $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$. Разлагая первую часть этого равенства на множители как разность квадратов и вынося из второй части a за скобки, получим

$$(a + a)(a - a) = a(a - a).$$

Сокращая на $a - a$ находим $a + a = a$ или $2a = a$. Но $a = 1$. Значит, $2 = 1$.

Причина этого нелепого вывода в казалось бы невинной операции: сокращения на $a - a$. На самом деле $a - a = 0$ и сокращение на $a - a$ есть деление на нуль. Проделывая эту нелепую операцию, мы и пришли к нелепому выводу.

В связи со сказанным отметим, что, рассматривая частное $\frac{x_n}{y_n}$, мы тем самым заранее предполагаем, что переменная y_n не принимает значений, равных нулю, ибо иначе это частное не имело бы смысла.

Рассмотрим теперь исключенный нами случай дроби $\frac{x_n}{y_n}$, в которой

$$x_n \to a, \quad y_n \to 0.$$

Для того чтобы такую дробь можно было рассматривать, мы, как и раньше, предположим, что y_n не принимает значений, равных нулю. Чтобы иметь возможность получить определенный результат, мы теперь допустим, что $a \neq 0$. Пусть, например, $a = 3$. Тогда при больших значениях n числитель x_n дроби $\frac{x_n}{y_n}$ будет почти равен 3, а знаменатель y_n будет очень близок к нулю (но не равен нулю!). Ясно, что тогда дробь будет очень большим числом, так как числитель ее будет во много раз больше знаменателя. Исходя из таких соображений, мы приходим к следующему результату:

XIII. *Если числитель некоторой дроби стремится к пределу, отличному от нуля, а знаменатель ее стремится к нулю, то сама дробь стремится к бесконечности.*

Иными словами, если $x_n \to a \, (a \neq 0)$ и $y_n \to 0$, то

$$\frac{x_n}{y_n} \to \infty.$$

n° 5. Неопределенные выражения. Продолжим изучение дроби $\frac{x_n}{y_n}$, у которой и числитель x_n и знаменатель y_n стремятся к определенным пределам

$$x_n \to a, \quad y_n \to b.$$

Нами уже рассмотрен случай, когда $b \neq 0$ (причем тогда безразлично, будет ли $a \neq 0$, или $a = 0$), а также случай, когда $b = 0$, но $a \neq 0$. Остается случай, когда $a = 0$, $b = 0$. На первый взгляд не стоит заниматься подробным изучением этого очень специального случая. Это, однако, не так, ибо, как мы увидим позже, основная в дифференциальном исчислении операция „дифференцирования функции" сводится к нахождению предела дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, в которой $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Начнем с рассмотрения некоторых примеров.

1. Если $x_n=\frac{1}{n}$ и $y_n=\frac{2n+1}{n^2}$, то $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$, а $\frac{y_n}{x_n}=$ $=\frac{2n+1}{n^2}n=2+\frac{1}{n}\to 2$.

2. Если $x_n=\frac{1}{n}$ и $y_n=\frac{1}{n^2}$, то $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$, а $\frac{x_n}{y_n}=$ $=\frac{1}{n}\cdot n^2=n\to\infty$.

3. Если $x_n=\frac{1}{n^2}$, $y_n=\frac{1}{n}$, то $x_n\to 0$, $y_n\to 0$, а $\frac{x_n}{y_n}=\frac{1}{n}\to 0$.

4. Если $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$ и $y_n=\frac{1}{n}$, то $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$, а $\frac{x_n}{y_n}=$ $=(-1)^n$ ни к чему не стремится.

Мы видим, что в случае, когда $x_n\to 0$ и $y_n\to 0$, дробь $\frac{x_n}{y_n}$ может стремиться к самым разнообразным пределам, а также и вовсе не иметь предела. В связи с этим дадим следующее

Определение. Дробь, у которой и числитель и знаменатель — переменные величины, стремящиеся к нулю, называется *неопределенностью вида* $\frac{0}{0}$. Нахождение предела такой дроби (или установление его отсутствия) называется раскрытием этой неопределенности.

Замечание. Кроме неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ существуют еще неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

Например, неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ называется выражение $\frac{x_n}{y_n}$, где x_n и y_n — переменные, причем $x_n\to\infty$ и $y_n\to\infty$. Точно так же 1^∞ есть выражение $x_n^{y_n}$, где x_n и y_n — переменные, причем $x_n\to 1$, а $y_n\to\infty$.

n° 6. Раскрытие некоторых типов неопределенностей. I. *Неопределенности вида* $\frac{\infty}{\infty}$, *заданные отношением двух многочленов.*

Пример. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2-9x+11}{x^4+x^3-5x^2+x+2}.$$

Прежде чем решать поставленную задачу, вкратце остановимся на самом ее смысле. Выше мы говорили, что будем заниматься изучением нумерованных переменных, сводя к ним остальные типы переменных величин. Вот и в поставленной задаче мы считаем, что x пробегает какую-то последовательность значений x_1, x_2, x_3, x_4, ..., стремящуюся к бесконечности. Какую именно последовательность пробегает x, т. е. будет ли $x_n=2^n$, или $x_n=10^n$, или

$x_n = 2n+1$, нам безразлично *). Поэтому мы не только не задаем этой последовательности, но даже не пишем $x_n \to \infty$, а ограничиваемся записью $x \to \infty$ **).

Переходя к решению задачи, разделим и числитель и знаменатель нашей дроби на x^4. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x^2-9x+11}{x^4+x^3-5x^2+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{9}{x^3}+\frac{11}{x^4}}{1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Примененный нами прием имеет общий характер. Именно рекомендуется запомнить

Правило. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\frac{\infty}{\infty}$, *заданную отношением двух многочленов, надо и числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень* x. Действительно, после этой операции наше отношение преобразуется в выражение, уже не являющееся неопределенностью. Так,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+5x^2+2x+7}{4x^2+9x+11} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{\frac{4}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{11}{x^3}} = \infty,$$

ибо знаменатель последней дроби стремится к нулю, а числитель к пределу, отличному от нуля. Аналогично

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-13x+7}{3x^2+4x+12} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{13}{x}+\frac{7}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{12}{x^2}} = \frac{5}{3}$$

и, вообще, при $A \neq 0$ и $L \neq 0$ будет

$$\lim \frac{Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+Nx^{m-2}+\ldots+R} = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m, \\ 0, & \text{если } n < m, \\ \frac{A}{L}, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

---

*) Впрочем, среди значений x_n не должно быть корней знаменателя. Например, не должно встретиться значения $x_n = 1$, ибо для такого x знаменатель $x^4+x^3-5x^2+x+2$ обратится в нуль и дробь потеряет смысл. Такую же оговорку надо иметь в виду во всех аналогичных примерах.

**) Разумеется, сказанное здесь надо понимать только как методический прием, позволяющий использовать ту теорию, которую мы развили для нумерованных переменных. Было бы ошибочно считать, что в действительности не существует других переменных, кроме нумерованных. Время, путь, пройденный непрерывно движущейся точкой, угол поворота тела, непрерывно вращающегося вокруг оси, и т. п. — все это примеры ненумерованных переменных.

II. *Неопределенности вида $\frac{0}{0}$, заданные отношением двух многочленов.*

Пример. Найти

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+6x-16}{x^2-4}.$$

Как и выше, мы считаем, что x пробегает какую-то последовательность значений x_n, причем $x_n \to 2$. Какая именно эта последовательность, в задаче не указано, ибо это безразлично. Можно лишь ручаться, что x не принимает значения, равного двум *), так как если $x=2$, то $x^2-4=0$, и наша дробь теряет смысл.

Решать пример следует так:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+6x-16}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+8)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+8}{x+2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

По поводу приведенного решения полезно заметить следующее: переписав дробь

$$\frac{x^2+6x-16}{x^2-4} \tag{*}$$

в виде

$$\frac{(x+8)(x-2)}{(x+2)(x-2)},$$

мы не изменим ни ее числителя, ни знаменателя. Дальнейшая же переписка нашей дроби в виде

$$\frac{x+8}{x+2}$$

существенно меняет и ее числитель и знаменатель. Ведь до сокращения дроби на $x-2$ и числитель и знаменатель ее стремились к нулю и дробь представляла собой неопределенность. После же этого „оздоровляющего“ сокращения (которое вполне законно, так как мы уже оговорили, что $x \neq 2$ и поэтому $x-2 \neq 0$), мы уже не имеем дела с неопределенностью. В то же время величина дроби не изменилась и поэтому предел дроби $\frac{x+8}{x+2}$ служит и пределом равной ей (и лишь иначе записанной) дроби (*). Множитель $x-2$, который создает стремление к нулю и числителя и знаменателя дроби (*), часто называют „критическим множителем“.

Приведем уже без пояснений еще два примера применения того же приема:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^3-27} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x^2+3x+9} = \frac{1}{27}.$$

Здесь критическим являлся множитель $x-3$.

---

*) Точно так же $x \neq -2$.

Аналогично

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x^4+x-18}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x^3+2x^2+4x+9)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+7}{x^3+2x^2+4x+9}=\frac{9}{33}=\frac{3}{11}.$$

Правило. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\frac{0}{0}$, *заданную в форме*

$$\lim_{x\to a}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\ldots+R},$$

надо и в числителе и в знаменателе выделить критический множитель $x-a$ *и сократить дробь на него.*

Замечания. 1) Критический множитель $x-a$ обязательно выделяется и в числителе и в знаменателе, так как $x=a$ является корнем обоих этих многочленов, а потому эти многочлены на основании следствия теоремы Безу делятся на $x-a$ без остатка.

2) Возможно, что операцию сокращения на критический множитель придется проделать несколько раз.

Во всех вышеприведенных примерах мы разлагали числитель и знаменатель на множители „по догадке". Если такое разложение окажется затруднительным, то надо просто разделить числитель и знаменатель на $x-a$ по обычным правилам алгебры. Предыдущее замечание обеспечивает выполнимость деления без остатка.

Пример. Найти

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}.$$

Здесь сразу видно, что

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

Числитель же разложить на множители трудно и потому мы делим его на (заранее известный!) критический множитель $x+1$:

$$\begin{array}{r|l}
3x^4+2x^3-x^2+5x+5 & x+1 \\
\underline{3x^4+3x^3} & \overline{3x^3-x^2+5} \\
-x^3-x^2+5x+5 & \\
\underline{-x^3-x^2} & \\
5x+5 & \\
\underline{5x+5} & \\
0 &
\end{array}$$

Таким образом,

$$3x^4+2x^3-x^2+5x+5=(x+1)(3x^3-x^2+5)$$

и

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^4+2x^3-x^2+5x+5}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{3x^3-x^2+5}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}.$$

III. *Неопределенности вида* $\frac{0}{0}$, *заданные иррациональными выражениями.* Успешное выделение „критического множителя" в примерах рассмотренного типа основывалось на теореме Безу о делимости целого многочлена

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+K \tag{4}$$

на двучлен

$$x-a,$$

где a — корень многочлена (4).

К иррациональным выражениям теорема Безу неприменима. Например, хотя при $x=2$ выражение

$$\sqrt{x^2+5}-3$$

и равно нулю, но оно не делится *) на $x-2$.

Поэтому для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, заданной в форме

$$\lim_{x\to a}\frac{M}{N},$$

где M и N — некоторые иррациональные выражения, обращающиеся в 0 при $x=a$, непосредственно прием сокращения на $x-a$ неприменим. Однако с помощью некоторых преобразований (сходных с известным из алгебры примером „уничтожение иррациональности в знаменателе") можно свести дело к уже рассмотренному случаю.

Пример. Пусть $x\to3$ (т. е., как и раньше, x пробегает какую-то нумерованную последовательность значений x_1, x_2, x_3, ..., для которой $x_n\to3$). Найти

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$$

(поскольку знаменатель аннулируется **) при $x=3$, среди значений x_n нет равных 3). Подлежащая изучению дробь не изменится,

---

*) Понятие делимости A на B (где A и B зависят от x) установлено только для случая, когда A и B — многочлены. Фраза же вроде „$\sin x$ делится (или не делится) на $\sqrt{x}$" лишена смысла.

**) Т. е. обращается в 0.

если ее записать в виде

$$\frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{x+1}-2}. \tag{5}$$

Таким образом, в числителе мы выделили критический множитель $x-3$. Чтобы сделать это и в знаменателе, избавимся от иррациональности в нем, умножив числитель и знаменатель дроби (5) на сумму $\sqrt{x+1}+2$, т. е. записав эту дробь в виде

$$\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}.$$

Теперь дробь сокращается на $x-3$ и принимает вид

$$(x+3)(\sqrt{x+1}+2),$$

откуда ясно *), что ее предел при $x \to 3$ равен 24.

Вот еще один пример того же характера.

Пример. Найти

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{5x^2+3}-2}.$$

Чтобы превратить числитель в целый рациональный многочлен, надо его умножить на сумму $\sqrt{x}+1$, а чтобы дробь не изменилась, надо и знаменатель умножить на эту сумму. Чтобы знаменатель превратить в целый многочлен, надо вспомнить формулу

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

и положить в ней

$$a=\sqrt[3]{5x^2+3}, \quad b=2.$$

Поэтому решение нашего примера таково:

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{5x^2+3}-2}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\left[(\sqrt[3]{5x^2+3})^2+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4\right]}{(\sqrt[3]{5x^2+3}-2)\left[(\sqrt[3]{5x^2+3})^2+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4\right](\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\frac{x-1}{5x^2-5}\cdot\frac{(\sqrt[3]{5x^2+3})^2+2\sqrt[3]{5x^2+3}+4}{\sqrt{x}+1}.$$

Второй множитель здесь не является неопределенностью (при $x \to 1$), а имеет предел $\frac{12}{2}=6$.

---

*) Мы пользуемся тем, что $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$. Вообще, из соотношения $x \to l$ следует, что $\sqrt[k]{x} \to \sqrt[k]{l}$: „предел корня равен корню из предела".

Первый же множитель

$$\frac{x-1}{5x^2-5}$$

переписывается в виде

$$\frac{1}{5(x+1)}$$

и стремится к $\frac{1}{10}$. Значит, окончательно, интересующий нас предел равен

$$\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Таким образом, можно формулировать

Правило. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\frac{0}{0}$, *в которой числитель или знаменатель иррациональны, следует надлежащим образом избавиться от иррациональности.*

Приведем еще два примера, иллюстрирующие указанное правило:

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt[3]{8x}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3-4)\left(\sqrt[3]{64x^2}+2\sqrt[3]{8x}+4\right)}{(8x-8)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{64x^2}+2\sqrt[3]{8x}+4\right)}{8(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\left(\sqrt[3]{64x^2}+2\sqrt[3]{8x}+4\right)}{8\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2\cdot(4+4+4)}{8\cdot(2+2)}=\frac{3}{4}.$$

2) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2x^3-8}-2}{\left(\sqrt{3x^2-3}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+1\right)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{2x^3-8}-2}{\sqrt{3x^2-3}-3}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{2x^3-8}-2\right)\left[\sqrt[3]{(2x^3-8)^2}+2\sqrt[3]{2x^3-8}+4\right]\left(\sqrt{3x^2-3}+3\right)}{\left(\sqrt{3x^2-3}-3\right)\left(\sqrt{3x^2-3}+3\right)\left[\sqrt[3]{(2x^3-8)^2}+2\sqrt[3]{2x^3-8}+4\right]}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 2}\frac{(2x^3-8-8)\left(\sqrt{3x^2-3}+3\right)}{(3x^2-3-9)\left[\sqrt[3]{(2x^3-8)^2}+2\sqrt[3]{2x^3-8}+4\right]}=$$

$$=\frac{6}{4\cdot 12}\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-16}{3x^2-12}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{1}{12}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{1}{12}\cdot\frac{12}{4}=\frac{1}{4}.$$

IV. *Тригонометрические неопределенности вида* $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$, содержащих тригонометрические функции, необходимо установить справедливость важной формулы

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,}$$

для чего предварительно докажем лемму.

Лемма. *Если* $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, *то справедливо неравенство* *)

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha>\sin\alpha.$$

Доказательство. Из рис. 96 видно, что площадь $\triangle AOB$ больше площади сектора AOC, которая, в свою очередь, больше площади $\triangle AOC$. Так как площади эти таковы:

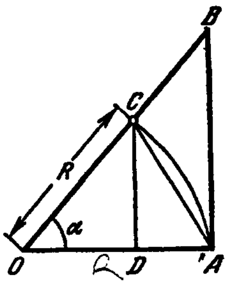


Рис. 96.

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot AB,$$

$$S_{\text{сект}\,AOC}=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}\cdot R,$$

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}OA\cdot CD,$$

то можно написать

$$\frac{1}{2}OA\cdot AB>\frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}\cdot R>\frac{1}{2}OA\cdot CD,$$

или **)

$$\frac{1}{2}R\cdot R\operatorname{tg}\alpha>\frac{1}{2}\alpha R\cdot R>\frac{1}{2}R\cdot R\sin\alpha.$$

Разделив все члены этого двойного неравенства на $\frac{1}{2}R^2$, получим

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha>\sin\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. *Справедлива формула*

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,}$$

т. е. предел отношения синуса бесконечно малого угла к величине этого угла в радианах равен единице.

---

*) Здесь α — величина рассматриваемого угла в радианах. Напомним, что радианом называется угол, который, будучи расположен как центральный, опирается на дугу, равную радиусу.

**) Равенство $\overset{\smile}{AC}=R\alpha$ верно именно потому, что α — величина рассматриваемого угла в радианах.

Доказательство. Дробь $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ не меняется от изменения знака α. Поэтому можно допустить, что переменный угол α положителен*), $\alpha>0$. Так как по условию теоремы $\alpha\to 0$, то, начиная с некоторого значения, окажется $\alpha<\frac{\pi}{2}$, но тогда, применяя предыдущую лемму, будем иметь, что

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha>\sin\alpha$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>\alpha>\sin\alpha.$$

Разделив все члены неравенства на $\sin\alpha$ (эта величина положительна), получим $\frac{1}{\cos\alpha}>\frac{\alpha}{\sin\alpha}>1$. Переходя к обратным величинам, будем иметь

$$\cos\alpha<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<1.$$

Так как равенство $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$ очевидно из рис. 96 **), то мы можем применить теорему о сжатой переменной (см. n° 4, свойство III) и получить, что

$$\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1,$$

что и требовалось доказать.

Примеры: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)=3.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)^2\cdot 25\right]=25.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right]=\frac{1}{2}.$

Этот пример можно решить и иначе. Именно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\left[\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

---

*) Рассматривая дробь $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, мы, естественно, считаем $\alpha\neq 0$.

**) Более общим образом из рисунка легко усмотреть, что $\lim\limits_{\alpha\to a}\cos\alpha=\cos a$, т. е. что „предел косинуса равен косинусу предела“. То же относится и к синусу.

$$4)\ \lim_{x\to a}\frac{\cos a-\cos x}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{(x+a)(x-a)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a}\right)\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\right)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{x+a}=\frac{\sin a}{2a}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $x\to a$ будет $\frac{x-a}{2}\to 0$, а потому

$$\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\to 1.$$

Следует помнить, что равенство $\lim\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ верно только при $\alpha\to 0$. Если же $\alpha\to a$ $(a\neq 0)$, то

$$\lim_{\alpha\to a}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=\frac{\sin a}{a}.$$

Например,

$$5)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\pi}.$$

Отметим еще очевидное соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

n°7. Число e.

Определение. Переменная x_n называется *возрастающей*, если каждое ее значение меньше последующего, т. е.

$$x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n<$$
$$<x_{n+1}<\ldots$$

Рис. 97.

Графическое изображение такой переменной приведено на рис. 97.

Определение. Переменная x_n называется *ограниченной сверху*, если все ее значения меньше одного и того же постоянного числа A

$$\boxed{x_n<A.}$$

На рис. 98 приведено изображение такой переменной.

***Теорема 1.** Если переменная x_n возрастает и не ограничена сверху, то $x_n \to +\infty$.*

Доказательство. Возьмем какое-нибудь большое постоянное положительное число A. Если бы все значения x_n оказались меньшими A, то это означало бы, что x_n ограничена сверху, что противоречит условию теоремы. Значит, найдется хотя бы одно значе-

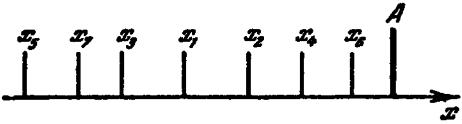


Рис. 98.

ние x_n, большее A. Но тогда все последующие значения и подавно будут больше A, так как переменная x_n по условию возрастающая.

Итак, x_n „перерастает“ любое число A, а это и означает, что $x_n \to +\infty$.

***Теорема 2.** Если переменная x_n возрастает и ограничена сверху, то эта переменная стремится к некоторому конечному пределу.*

Эту теорему принимаем без доказательства. Строгое ее доказательство затруднительно, наглядный же ее смысл сравнительно прост. Именно, если 1) $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ и 2) $x_n < A$ ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$), то точка x_n с увеличением n движется по оси слева направо, оставаясь все время левее постоянной точки A (рис. 99).

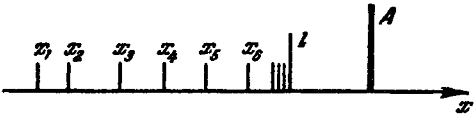


Рис. 99.

Нетрудно понять, что в этих условиях x_n будет стремиться к некоторому пределу l

$$\boxed{x_n \to l}$$

причем ясно, что

$$l \leqslant A.$$

Сопоставляя теоремы 1 и 2, видим, что *возрастающая переменная всегда имеет конечный или бесконечный**) *предел.*

*) Может быть, будет нелишним напомнить, что „наличие предела $+\infty$“ на самом деле означает, что $x_n \to +\infty$, так что фразу в кавычках нельзя понимать как утверждение, что x_n стремится к какому-либо числу.

Отметим еще, что все значения возрастающей переменной меньше ее предела

$$\boxed{x_n < \lim x_n.}$$

Важный пример. Пусть

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Легко проверить, что

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2{,}25, \quad x_3 = 2{,}370, \quad x_4 = 2{,}441, \quad x_5 = 2{,}488.$$

Мы видим, что $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$.

Можно доказать, что x_n и дальше продолжает возрастать. Кроме того, мы видим, что для $n \leqslant 5$ оказывается $x_n < 3$. Можно доказать, что это неравенство остается верным и для всех дальнейших значений n *).

Таким образом, переменная $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху, а потому она имеет конечный предел, т. е. существует

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Определение. Предел переменной $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называется *числом e*.

Итак,

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.} \tag{6}$$

Число e — иррациональное. Можно показать, что

$$e = 2{,}718281828459 \ldots$$

Мы рекомендуем запомнить следующее (избыточное!) значение числа e:

$$\boxed{e = 2{,}72.}$$

---

*) Чтобы понять причину отмеченного явления, положим $x_{n+1} - x_n = z_n$. Тогда $z_1 = 0{,}25$, $z_2 = 0{,}12$, $z_3 = 0{,}071$, $z_4 = 0{,}047$, т. е. последовательные **приращения** переменной x_n становятся все меньше и меньше. Таким образом и оказывается, что даже безграничное накопление этих приращений (а ведь в этом все дело: например, для перехода от x_1 к x_{1000} приходится сложить 999 упомянутых приращений: $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{999}$) не приводит к числу, большему (и даже равному) 3.

Замечание. Если в формуле (6) положить $\frac{1}{n}=z$, то она примет вид

$$\boxed{e=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}.} \tag{7}$$

Оказывается, что формула (7) верна не только тогда, когда переменная z пробегает последовательность значений $z_n=\frac{1}{n}$, но и при любом другом законе стремления z к нулю. Таким образом, формула (7) является обобщением формулы (6), и ее надо запомнить.

Основное назначение числа e в математике то, что e является основанием наиболее употребительной системы логарифмов, так называемых „натуральных". Кроме того, число e бывает часто полезным при раскрытии неопределенностей вида 1^∞.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^5=e^5.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}\right]^{\frac{4x}{3x+1}}=e^{\frac{4}{3}}.$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+7}\right)^{6x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x-4}{x^2+3x+7}\right)^{\frac{x^2+3x+7}{2x-4}}\right]^{\frac{(2x-4)(6x+1)}{x^2+3x+7}}=e^{12}.$$

n° 8. Натуральные логарифмы.

Определение. Логарифм какого-нибудь числа N, вычисленный по основанию e, называется *натуральным* логарифмом этого числа и обозначается через $\ln N$. Итак,

$$\boxed{\ln N=\log_e N.}$$

Иными словами, натуральный логарифм числа N есть показатель степени, в которую надо возвысить e, чтобы получить N:

$$\boxed{e^{\ln N}=N.}$$

Примеры. 1) $\ln e^3=3$, 2) $\ln\sqrt[4]{e^5}=\frac{5}{4}$, 3) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{1}{2}$.

Вероятно, читателя удивит, что в математике, кроме привычных из средней школы десятичных логарифмов, рассматриваются еще и другие логарифмы, да еще по столь „неудобному" основанию, как иррациональное число

$$e = 2{,}7182818\ \ldots$$

По этому поводу следует заметить, что число 10, очень удобное в качестве основания системы логарифмов, когда приходится производить численные расчеты, никаких теоретических достоинств не имеет. В тех случаях, когда приходится вести расчет не численный, а буквенный, многие формулы существенно упрощаются при применении не десятичных, а именно натуральных логарифмов.

Это обстоятельство, конечно, не понижает вычислительных удобств десятичных логарифмов, которыми всегда пользуются в численных расчетах.

Связь натуральных логарифмов с десятичными. Как уже было отмечено, из самого определения логарифма вытекает равенство

$$N = e^{\ln N}.$$

Прологарифмируем это равенство по основанию 10:

$$\lg N = \lg (e^{\ln N}).$$

Отсюда

$$\lg N = \ln N \cdot \lg e.$$

Но $e = 2{,}71828$. Пользуясь десятичными таблицами, находим

$$\lg e = 0{,}43429.$$

Значит,

$$\boxed{\lg N = 0{,}43429 \ln N.} \tag{8}$$

Формула (8) позволяет находить десятичный логарифм числа N, если известен его натуральный логарифм.

Число 0,43429 называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным.

Равенство (8) можно переписать в виде

$$\ln N = \frac{\lg N}{0{,}43429}.$$

Но $\frac{1}{0{,}43429} = 2{,}302$. Значит,

$$\boxed{\ln N = 2{,}302 \lg N.} \tag{9}$$

По формуле (9) вычисляется натуральный логарифм числа N, если известен его десятичный логарифм.

Число $\frac{1}{\lg e}=2{,}302$ называется модулем перехода от десятичных логарифмов к натуральным.

Пример. Так как $\lg 2=0{,}30103$, то

$$\ln 2=\frac{0{,}30103}{0{,}43429}=0{,}69302.$$

n° 9. Эквивалентные бесконечно малые. Для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ часто бывает полезным понятие эквивалентных бесконечно малых.

Определение. Две бесконечно малые α и α^* называются *эквивалентными*, если предел их отношения равен 1

$$\boxed{\lim\frac{\alpha^*}{\alpha}=1\,.}$$

Эквивалентность двух бесконечно малых обозначается обычно так:

$$\alpha\sim\alpha^*.$$

Теорема. (Принцип замены бесконечно малых). При раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ можно и числитель и знаменатель этой неопределенности заменять величинами, им эквивалентными.

Иначе говоря, если требуется найти предел отношения двух бесконечно малых α и β

$$\lim\frac{\alpha}{\beta},\tag{10}$$

а мы вместо этого найдем предел отношения двух других бесконечно малых α^* и β^*

$$\lim\frac{\alpha^*}{\beta^*},$$

где $\alpha^*\sim\alpha$ и $\beta^*\sim\beta$, то можно ручаться, что нами найден именно тот предел (10), который нас интересовал с самого начала.

Доказательство. Пусть

$$\lim\frac{\alpha^*}{\beta^*}=l.$$

Представив исходное отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ в форме

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\alpha^*}\cdot\frac{\alpha^*}{\beta^*}\cdot\frac{\beta^*}{\beta},$$

применим сюда предложение о том, что предел произведения равен произведению пределов сомножителей. При этом надо учесть, что

$$\lim \frac{\alpha}{\alpha^*} = 1 \text{ и } \lim \frac{\beta^*}{\beta} = 1.$$

Поэтому

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\alpha^*} \cdot \frac{\alpha^*}{\beta^*} \cdot \frac{\beta^*}{\beta}\right) = \left(\lim \frac{\alpha}{\alpha^*}\right)\left(\lim \frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)\left(\lim \frac{\beta^*}{\beta}\right) = 1 \cdot l \cdot 1 = l.$$

Итак,

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = l.$$

Теорема доказана.

Пример. Так как

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

то *синус бесконечно малого угла эквивалентен самому этому углу* (точнее, его величине в радианах). Поэтому, например,

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sin (x^2 - 9)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}.$$

Последний же предел найти легко, так как

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x+3}{x-1} \to 3.$$

Приведем один важный пример эквивалентных бесконечно малых, который будет нам полезен значительно позже при изучении кривых линий.

Рис. 100.

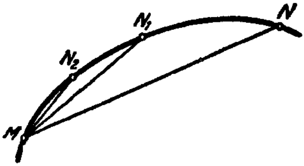


Рис. 101.

Рассмотрим какую-либо гладкую *) непрерывную кривую (рис. 101). Возьмем на ней две точки M и N и составим отношение длин

*) Точное определение такой кривой будет приведено позже (гл. IV, § 3, п° 5). Пока же мы воспользуемся наглядным представлением: гладкая кривая — это кривая без „точек перелома“, вроде изображенных на рис. 100.

дуги $\smile{MN}$ и хорды $\overline{MN}$. Так как дуга длиннее хорды, то это отношение больше единицы. На нашем рисунке примерно

$$\frac{\overset{\frown}{MN}}{\overline{MN}}=1{,}2.$$

Однако если заставить точку N приблизиться к M, переведя ее в положение N_1, и снова найти отношение дуги к хорде, то мы обнаружим, что приблизительно

$$\frac{\overset{\frown}{MN_1}}{\overline{MN_1}}=1{,}1,$$

т. е. упомянутое отношение оказывается более близким к 1. Точно так же приблизительно

$$\frac{\overset{\frown}{MN_2}}{\overline{MN_2}}=1{,}01.$$

Таким образом, непосредственно из рисунка мы усматриваем, что при безграничном приближении N к M интересующее нас отношение стремится к 1

$$\boxed{\lim_{N\to M}\frac{\overset{\frown}{MN}}{\overline{MN}}=1,}$$

т. е. *бесконечно малая дуга гладкой кривой эквивалентна своей хорде.*

n° 10. Три замечательных предела. Установим справедливость трех важных формул, которые будут нам полезны в дальнейшем.

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1.}$$

Доказательство. Вспоминая, что согласно формуле (7) переменная $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ при $z\to 0$ стремится к числу e, будем иметь*), что при $z\to 0$

$$\frac{\ln(1+z)}{z}=\ln\left[(1+z)^{\frac{1}{z}}\right]\to\ln e=1,$$

а это и требовалось доказать.

---

*) Мы пользуемся тем, что $\lim\limits_{x\to a}(\ln x)=\ln a$: „предел логарифма равен логарифму предела".

Доказанная формула означает, что при бесконечно малом z величины z и $\ln(1+z)$ эквивалентны:

$$z \sim \ln(1+z).$$

Поэтому при раскрытии неопределенности $\frac{0}{0}$, числителем которой является бесконечно малая $\ln(1+z)$ (где $z \to 0$), мы имеем право заменить эту бесконечно малую на z.

Пример. Найти

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x^2 - 7x + 11)}{x - 2}. \tag{11}$$

Если $x \to 2$, то $x^2 - 7x + 11 \to 1$. Значит, величина $x^2 - 7x + 11$ отличается от 1 на бесконечно малую. Действительно, записав ее так:

$$x^2 - 7x + 11 = 1 + (x^2 - 7x + 10),$$

мы непосредственно видим, что $x^2 - 7x + 10$ — бесконечно малая (при $x \to 2$). По сказанному выше

$$\ln(x^2 - 7x + 11) \sim x^2 - 7x + 10,$$

и потому вместо нашего предела (11) можно искать

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-5)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x - 5) = -3.$$

Интересно отметить, что иногда бывает полезна замена бесконечно малой z на эквивалентную ей бесконечно малую $\ln(1+z)$. Следующие две теоремы хорошо иллюстрируют сказанное.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$\boxed{\lim_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a.}$$

Доказательство. Если $u \to 0$, то*) и $a^u - 1 \to 0$. Иначе говоря, числитель интересующей нас дроби есть величина бесконечно малая. Обозначая на мгновение этот числитель через z, т. е. полагая $a^u - 1 = z$, мы на основании сказанного выше будем иметь

$$z \sim \ln(1+z),$$

т. е.

$$a^u - 1 \sim \ln[1 + (a^u - 1)] = \ln a^u = u \ln a,$$

*) Вообще из $x \to l$ следует, что $a^x \to a^l$.

и потому

$$\lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{u\ln a}{u}=\ln a,$$

что и требовалось доказать *).

Теорема 3. *Справедлива формула*

$$\boxed{\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^a-1}{u}=a.}$$

Доказательство. Числитель $(1+u)^a-1$ нашей дроби есть величина бесконечно малая (при $u\to 0$). Как и при доказательстве предыдущей теоремы, обозначим этот числитель через z, т. е. положим

$$(1+u)^a-1=z.$$

Как и выше,

$$z\sim\ln(1+z),$$

т. е.

$$(1+u)^a-1\sim\ln\{1+[(1+u)^a-1]\}=\ln(1+u)^a=a\ln(1+u),$$

и потому

$$\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^a-1}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{a\ln(1+u)}{u}=a,$$

что и требовалось доказать.

Приведем несколько примеров применения доказанных формул.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{4}}-1}{x}=\dfrac{1}{4}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-1}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6^x-1}{x}-\dfrac{2^x-1}{x}\right)=\ln 6-\ln 2=\ln 3$ **).

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$.

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x^2+3x-26)}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+3x-27}{x^2-7x+12}=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+9)}{(x-3)(x-4)}=-15.$$

---

*) Изложенный способ доказательства теорем 2 и 3 рекомендован Я. Т. Кузнецовым.

**) Этот пример можно решить и так:

$$\frac{6^x-2^x}{x}=2^x\cdot\frac{3^x-1}{x}\to 2^0\ln 3=\ln 3.$$

n° 11. Сравнение бесконечно малых величин. Рассмотрим следующие три бесконечно малые величины:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n^2}, \quad z_n = \frac{1}{n!}.$$

Первые значения этих бесконечно малых равны друг другу:

$$x_1 = y_1 = z_1.$$

Однако если мы сравним друг с другом более далекие значения наших бесконечно малых, то заметим, что они приближаются к нулю с различными скоростями. Например:

$$x_5 = \frac{1}{5}, \quad y_5 = \frac{1}{25}, \quad z_5 = \frac{1}{120},$$

$$x_6 = \frac{1}{6}, \quad y_6 = \frac{1}{36}, \quad z_6 = \frac{1}{720},$$

$$x_8 = \frac{1}{8}, \quad y_8 = \frac{1}{64}, \quad z_8 = \frac{1}{40320}.$$

Ясно, что y_n стремится к нулю б ы с т р е е, чем x_n, а z_n б ы с т р е е, чем y_n. Постараемся дать точное определение смысла выражения: „одна бесконечно малая стремится к нулю быстрее, чем другая". Ясно, что бесконечно малая α_n стремится к нулю быстрее, чем β_n, если далекие значения α_n ближе к нулю, чем соответствующие (т. е. одинаковые по номеру) значения β_n. Иными словами, α_n стремится к нулю быстрее, чем β_n, если далекие значения дроби

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n}$$

становятся весьма малыми. Поэтому мы и условимся говорить, что α_n стремится к нулю быстрее, чем β_n, если

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0.$$

Впрочем, вместо того чтобы сказать, что α_n стремится к нулю быстрее, чем β_n, обычно говорят, что α_n *имеет высший порядок малости*, чем β_n. Напротив, если

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty,$$

то далекие значения дроби $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ очень велики, т. е. α_n гораздо больше, чем β_n. Это значит, что β_n (при больших n) ближе к нулю, чем α_n, так что α_n стремится к нулю медленнее, чем β_n. В этом случае говорят, что α_n *низшего порядка малости*, чем β_n.

Если у дроби $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim \frac{\alpha_n}{\beta_n} = l \qquad (l \neq 0,\ l \neq \infty),$$

то говорят, что α_n *одного порядка малости* с β_n *).

В частности, если α_n и β_n эквивалентны, то они одного порядка малости.

Таким образом, желая сравнить скорости стремления к нулю двух бесконечно малых α_n и β_n, мы должны составить их отношение $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ и заняться отысканием его предела. Может оказаться, что такого предела вовсе нет (ни конечного, ни бесконечного). Тогда бесконечно малые α_n и β_n несравнимы. Если, например,

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \beta_n = \frac{1}{n},$$

то

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = (-1)^n.$$

Эта величина предела не имеет, и α_n несравнима с β_n.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Пусть $x \to 0$ (это значит, как мы уже отмечали, что x пробегает какую-то последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$, стремящуюся к 0). Положим $y = x \sin \frac{1}{x}$. Тогда

$$\frac{y}{x} = \sin \frac{1}{x},$$

а эта величина предела при $x \to 0$ не имеет **). Следовательно, x и $y = x \sin \frac{1}{x}$ несравнимы.

---

*) Грубо говоря, далекие значения α_n и β_n почти пропорциональны $\frac{\alpha_n}{\beta_n} \cong \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}}$.

**) При некоторых частных способах стремления x к 0 у $\sin \frac{1}{x}$ может быть предел. Например, если $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, то $\sin \frac{1}{x_n} = 0 \to 0$. Но мы не можем утверждать, что

$$\lim \sin \frac{1}{x} = 0,$$

ибо при других законах изменения x это равенство неверно. Действительно, при $x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ будет $\sin \frac{1}{x_n} = 1$.

2) Бесконечно малая $1-\cos x$ при $x \to 0$ будет высшего порядка, чем x, так как отношение $\frac{1-\cos x}{x}$ стремится к нулю при $x \to 0$. Действительно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{x^2}{4}}{x} = 0.$$

3) $\operatorname{tg} 3x$ и x при $x \to 0$ будут бесконечно малыми одного порядка малости, так как $\frac{\operatorname{tg} 3x}{x} \to 3$.

Теорема. *Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая порядка высшего, чем каждый из сомножителей.*

Доказательство. Пусть $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ и пусть

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Тогда $\frac{\gamma}{\alpha} = \beta$ и потому $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, а это и значит, что γ высшего порядка, чем α. Аналогично $\frac{\gamma}{\beta} = \alpha$, так что $\frac{\gamma}{\beta} \to 0$.

Замечание. Иногда порядок малости одной бесконечно малой по отношению к другой характеризуется числом. Пусть $x \to 0$, тогда x, x^2, x^3, ... — бесконечно малые, порядок которых увеличивается с возрастанием степени. Если y — какая-нибудь новая бесконечно малая, которая имеет порядок высший, чем порядок x, то естественно сравнить y с x^2; если же порядок y окажется выше, чем порядок x^2, то следует сравнить y с x^3 и т. д.

Если окажется, что y одного порядка с x^k, то говорят, что y имеет по отношению к x порядок k. Так, например, если y — седьмого порядка малости по отношению к x, то это значит, что y одного порядка с x^7.

Говоря, что y есть бесконечно малая k-го порядка малости относительно x, мы можем и не предполагать, что k — обязательно число целое.

Так, например, бесконечно малая $y = 2x\sqrt{x^3 - 2x^6}$ имеет относительно x порядок $\frac{5}{2}$. Чтобы это показать, надо установить, что y одного порядка с $x^{\frac{5}{2}}$. Для этого составляем отношение

$$\frac{y}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{2x\sqrt{x^3 - 2x^6}}{x^{\frac{5}{2}}} = 2\sqrt{1 - 2x^3}.$$

Ясно, что при $x \to 0$ это отношение стремится к 2.

Вообще, если y имеет относительно x порядок k и k больше 1, то y высшего порядка, чем x, а если k меньше 1, то низшего. При $k = 1$ бесконечно малые x и y будут одного порядка.

§ 2. Функция

n° 1. Понятие функции. Во Введении мы уже отметили, что основным понятием математического анализа, выражающим идею взаимной связи переменных величин, является понятие функции. Перейдем к его изучению.

Определение. Если две переменные x и y связаны между собой так, что каждому значению переменной x отвечает одно и только одно совершенно определенное значение переменной y, то говорят, что y есть *функция аргумента* x.

Для указания того факта, что y есть функция от x, пишут: $y=f(x)$, или $y=\varphi(x)$, или $y=F(x)$ и т. п. Произносится эта запись следующим образом: „игрек равно эф от икс", „игрек равно фи от икс" и т. п.

Если $y=f(x)$, то через $f(a)$ обозначают то значение y, которое отвечает значению $x=a$.

Например, если

$$f(x)=2x^2+3,$$

то

$$f(5)=53, \quad f(0)=3, \quad f(1)=5.$$

Если $f(x)=x^2+1$ и $\varphi(x)=\operatorname{tg} x$, то

$$f(3)=10, \quad \varphi(0)=0, \quad f(2)=5, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, \quad f(a)=a^2+1,$$

$$\varphi(b)=\operatorname{tg} b, \quad f(x)+\varphi(x)=x^2+1+\operatorname{tg} x, \quad f[\varphi(x)]=\operatorname{tg}^2 x+1,$$

$$\varphi[f(x)]=\operatorname{tg}(x^2+1).$$

n° 2. Различные способы задания функции. Чтобы задать функцию $y=f(x)$, нужно указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y. Это правило может выражаться разными способами.

1. *Явный аналитический способ.* Говорят, что $y=f(x)$ задана явным аналитическим способом, если дана формула, указывающая, какие вычислительные операции *) надо произвести над x, чтобы найти y.

Например,

$$y=3x^3+1, \quad y=\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}, \quad y=\sin x, \quad y=\frac{5\operatorname{tg}^3 x}{\sqrt{\arcsin x}}.$$

---

*) Под „вычислительными операциями" мы понимаем (конечную!) последовательность арифметических действий, позволяющую найти интересующее нас число с любой заранее заданной точностью.

Замечание 1. По поводу формулы $y=\sin x$ учащийся мог бы возразить, что ему неизвестно, „какие вычислительные операции надо произвести над x, чтобы найти $y=\sin x$", и потому он не согласен с тем, что задание функции равенством $y=\sin x$ есть явное аналитическое задание. Это возражение, однако, неправильное. Дело в том, что в дальнейших частях курса будет изложено, какие именно вычислительные операции надо произвести над x, чтобы получить $y=\sin x$ с любой желаемой степенью точности. То же обстоятельство, что на первых ступенях изучения анализа эти операции еще неизвестны, столь же мало мешает формуле $y=\sin x$ быть аналитической, как то обстоятельство, что школьники младших классов не знают способа извлечения квадратных корней (хотя самое понятие этого корня им может быть и известно!), не мешает быть аналитической формуле $y=\sqrt{x}$.

Это замечание следует иметь в виду и по отношению к формулам $y=\operatorname{tg} x$, $y=\arcsin(\ln x)$ и т. п.

Замечание 2. Иногда рассматривают функции, которые на различных участках изменения x задаются разными аналитическими формулами.

Пусть, например,

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2+2, & \text{если } x<7, \\ 3x+1, & \text{если } x\geqslant 7. \end{cases}$$

При таком задании функции имеем

$$f(4)=18, \quad f(0)=2, \quad f(10)=31, \quad f(7)=22.$$

Мы видим, что каждому x отвечает одно единственное, вполне определенное значение y, и потому $y=f(x)$ есть определенная функция от x. Не следует думать, что раз здесь две формулы, то и функций две. Ведь каждое значение x „обслуживается" только одной формулой. Если $x=6$, то $x<7$ и потому $f(6)$ вычисляется по верхней формуле: $f(6)=6^2+2=38$. Если же $x=8$, то $x>7$, и потому надо применять нижнюю формулу: $f(8)=3\cdot 8+1=25$. Стало быть, у нас не две, а одна функция.

Может показаться, что функции, подобные рассмотренной, представляют собой нечто искусственное и не встречающееся на практике. Это неверно. Например, в строительной механике рассматриваются случаи, когда нагрузка, приложенная к балке, задается разными формулами для разных участков балки.

Вот еще один пример такого задания функции:

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant 2, \\ 2x+1, & \text{если } 2<x<7, \\ 0, & \text{если } x\geqslant 7, \end{cases}$$

тогда $f(5)=11$, $f(10)=0$, $f(1)=1$.

2. *Неявный аналитический способ.* Говорят, что функция $y=f(x)$ задана неявным аналитическим способом, если дано уравнение, связывающее функцию y и аргумент x.

Если такое уравнение решить относительно y, то получится явное задание той же функции.

Пусть, например, $y(x^2+3)-2x=0$. Это уравнение можно рассматривать как неявно задающее функцию. Решив его относительно y, мы получаем ту же функцию, но уже в явном виде:

$$y=\frac{2x}{x^2+3}.$$

Иногда, решая уравнение относительно y, мы получаем для y несколько значений. Например, если $y^2-8x=0$, то

$$y=\pm\sqrt{8x}.$$

В этих случаях говорят, что y есть многозначная функция от x. Впредь мы не будем рассматривать многозначных функций, стараясь заменять их несколькими однозначными. Так, вместо двузначной функции $y=\pm\sqrt{8x}$ будем рассматривать две однозначные $y=+\sqrt{8x}$ и $y=-\sqrt{8x}$.

3. *Табличный способ.* Говорят, что функция $y=f(x)$ задана таблично, если дана таблица, сопоставляющая значения аргумента x с соответствующими им значениями функции $y=f(x)$.

Пусть, например, дана таблица

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	4	7	$3\frac{1}{2}$	$-\sqrt{2}$	e	0	$\frac{1}{7}$	0,32	11	6

Тогда $f(2)=7$, $f(5)=e$, $f(6)=0$ и т. д.

Табличный способ задания функции имеет существенный недостаток. Именно, при этом способе мы не можем получить значения функции для значений аргумента, не указанных в таблице. Зато, с другой стороны, если значение x приведено в таблице, то соответствующее значение y находится из таблицы без всяких вычислений. Это является важным достоинством табличного задания функции.

Для функций, часто встречающихся на практике, составлены подробные таблицы. В инженерных справочниках приводятся обширные таблицы функций $y=x^2$ („таблица квадратов"), $y=x^3$ („таблица кубов"), $y=\sqrt{x}$ („таблица квадратных корней") и т. п. Хотя для всех этих функций и имеются аналитические формулы ($y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$), но, конечно, гораздо удобнее прочесть в таблице, что $27^3 = 19683$, чем фактически производить возведение в степень. В то же время наличие формулы позволяет находить функцию и для нетабличных значений x. Так, если $y = x^3$, то фактическое возведение в степень дает, что при $x = \frac{3}{2}$ будет $y = \frac{27}{8} = 3{,}375$, хотя $x = \frac{3}{2}$ может и отсутствовать в таблице.

Таким образом, очень удобно иметь для одной и той же функции и аналитическое и табличное задания.

4. *Графический способ.*

Определение. Пусть $y = f(x)$ — некоторая функция. Ее *графиком* называется геометрическое место точек плоскости (x, y), координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Само равенство $y = f(x)$ называется *уравнением* этого графика.

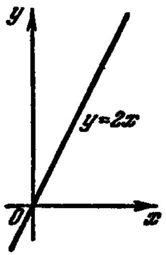


Рис. 102.

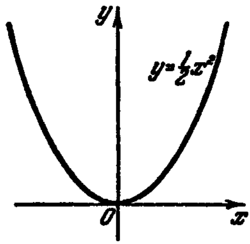


Рис. 103.

Примеры. 1) Графиком функции $y = 2x$ является множество точек $(0, 0)$, $(1, 2)$, $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, $(-1, -2)$, ... Как мы знаем из аналитической геометрии, эти точки заполняют прямую (см. рис. 102). Эта прямая и является графиком функции $y = 2x$.

2) Рассмотрим функцию

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Ее графиком служит множество точек, которые заполняют кривую (параболу) (см. рис. 103). Стало быть, эта парабола и служит графиком функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

Определение. Функция называется заданной *графически*, если начерчен ее график.

Пусть, например, функция $y = f(x)$ задана графиком, изображенным на рис. 104. По этому графику легко находить значения функции y по заданным значениям аргумента x. Так, например,

$$f(3) = 2, \quad f(5) = 0, \quad f(0) = 3{,}7, \quad f(-2) = 2{,}9.$$

Замечание. Если график функции начерчен, то, чтобы найти значение $y=f(x)$, отвечающее какому-нибудь заданному значению x, надо отложить это значение x по оси абсцисс и из полученной точки восставить перпендикуляр до пересечения с графиком. Длина этого

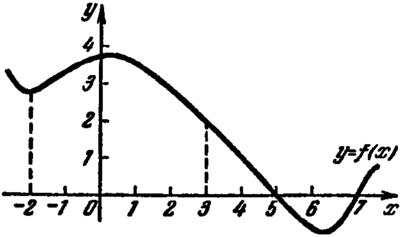


Рис. 104.

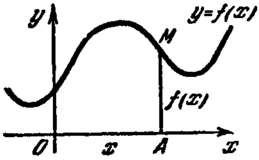


Рис. 105.

перпендикуляра (взятая с надлежащим знаком) и равна $f(x)$. Например, на рис. 105 имеем

$$OA=x, \quad AM=f(x).$$

Графический способ задания функции, так же как и табличный, имеет свои положительные и отрицательные стороны. К достоинствам этого способа можно отнести его наглядность, к недостаткам — его неточность.

n°3. Графики некоторых функций. Рассмотрим графики некоторых наиболее употребительных функций.

1. $y=c$ (постоянная). Из аналитической геометрии известно, что уравнению $y=c$ отвечает на плоскости прямая линия, параллельная оси абсцисс (рис. 106). Эта прямая и служит графиком функции $y=c$.

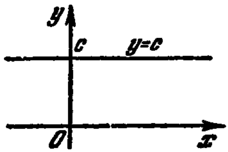


Рис. 106.

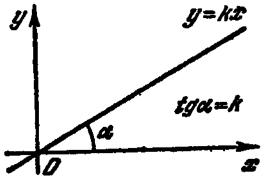


Рис. 107.

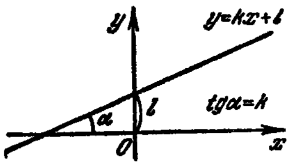


Рис. 108.

2. $y=kx$ (прямая пропорциональность). И здесь графиком служит прямая, проходящая через начало координат и имеющая число k своим угловым коэффициентом (рис. 107).

3. $y=kx+l$ (общая линейная функция). Графиком этой функции служит (рис. 108) прямая, имеющая число k своим угловым коэффициентом и отсекающая от оси Oy отрезок, равный l.

4. $y=ax^2$ (простейшая квадратичная функция). Уравнению $y=ax^2$ ($a\neq 0$) отвечает парабола, имеющая вершину в начале координат, симметричная относительно оси Oy и лежащая выше оси Ox при $a>0$ и ниже ее при $a<0$ (рис. 109 и 110).

5. $y=ax^2+bx+c$ (общая квадратичная функция). Уравнению $y=ax^2+bx+c$ отвечает парабола, тождественная с параболой $y=ax^2$ и полученная из последней при помощи параллельного переноса (рис. 111).

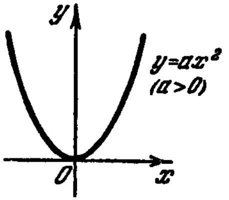


Рис. 109.

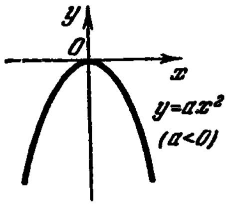


Рис. 110.

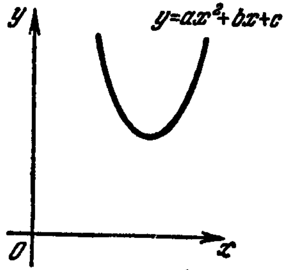


Рис. 111.

6. $y=\frac{k}{x}$ (обратная пропорциональность). Функцию $y=\frac{k}{x}$ можно задать неявным образом с помощью уравнения

$$xy=k.$$

Еще в гл. I мы установили, что этому уравнению отвечает равнобочная гипербола, имеющая оси координат своими асимптотами и

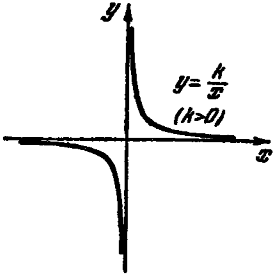


Рис. 112.

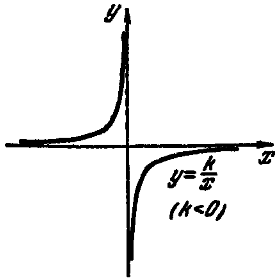


Рис. 113.

расположенная в 1-м и 3-м координатных углах при $k>0$ и во 2-м и 4-м при $k<0$ (рис. 112 и 113).

7. $y=\sin x$. Графиком этой функции служит волнообразная линия, называемая *синусоидой* (рис. 114). Чтобы найти значение функции $y=\sin x$, где x — какое-либо отвлеченное число, надо построить угол, равный x радианов, и вычислить синус этого угла. Например, $\sin 2$ есть

$$\sin(2\times 57^\circ 17' 45'')=\sin(114^\circ 35' 30'').$$

Для построения синусоиды можно рекомендовать следующий прием. Строим окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Через центр ее проводим лучи, образующие с положительным направлением оси Ox углы $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$, 2π, $2\pi+\frac{\pi}{4}$, ... Ординаты точек пересечения этих лучей с упомянутой окружностью и будут равны значениям $\sin x$ для указанных значений x. Сами эти значения x откладываем на оси абсцисс, учитывая, что $\pi = 3{,}14$.

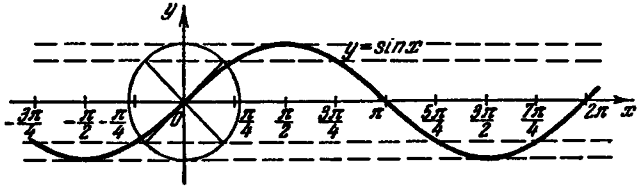


Рис. 114.

Если точки с координатами $(x, \sin x)$ для указанных значений x нанести на чертеж и соединить, хотя бы грубо, плавной кривой, то

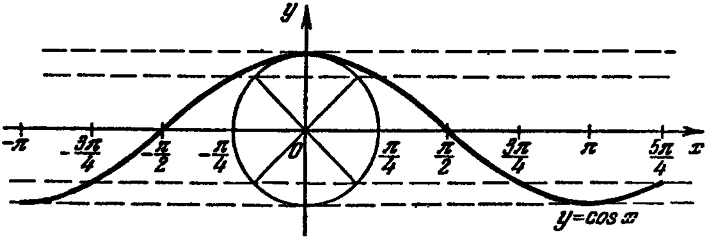


Рис. 115.

получится более или менее удовлетворительное представление о синусоиде. Небесполезно отдать себе отчет в том, как свойство периодичности функции $\sin x$, выражаемое тождеством

$$\sin(x+2\pi) = \sin x,$$

отражается на синусоиде. Именно, точки синусоиды, абсциссы которых отличаются на 2π, имеют одинаковые ординаты.

8. $y = \cos x$. Если вспомнить тождество

$$\cos a = \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right),$$

то станет ясным, что ордината той точки графика функции $y = \cos x$, которая имеет абсциссу a, равна ординате той точки синусоиды $y = \sin x$, абсцисса которой равна $a + \frac{\pi}{2}$, т. е. точки, лежащей на $\frac{\pi}{2}$ единиц правее. Отсюда ясно, что графиком функции

$y = \cos x$ служит та же синусоида, что и изображенная на рис. 114, но сдвинутая на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево (рис. 115).

n°4. Понятие о непрерывности функции. Важное значение имеет понятие *непрерывности* функции. Чтобы разобраться в этом понятии, рассмотрим сначала два примера.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leqslant 3, \\ x+2, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

График нашей функции изображен на рис. 116. Из этого рисунка мы видим, что при $x \to 1$ будет $f(x) \to f(1) = 1$, а при $x \to 4$ будет $f(x) \to f(4) = 6$.

Однако если $x \to 3$, то нельзя указать, к чему стремится $f(x)$.

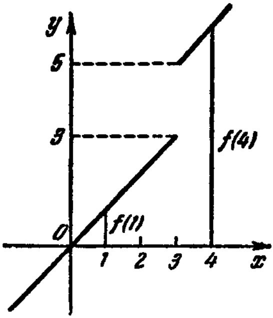


Рис. 116.

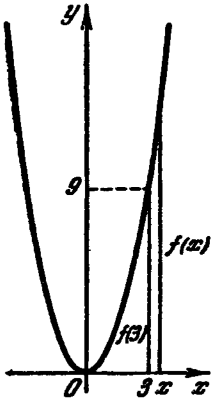


Рис. 117.

Действительно, если $x \to 3$, оставаясь при своем изменении все время меньше трех, то $f(x)$ стремится к 3. Если же $x \to 3$, оставаясь все время больше трех, то $f(x)$ стремится к пяти. Мы видим, что наша функция (а также и ее график) при $x = 3$, как говорят, „претерпевает разрыв". Ничего подобного мы не наблюдаем, рассматривая, например, функцию $y = x^2$.

Пример 2. Пусть

$$y = x^2.$$

График этой функции изображен на рис. 117. Здесь при $x \to 3$ будет $f(x) \to f(3) = 9$ или $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ в точке $x = 3$ *непрерывна*.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).} \tag{1}$$

Иными словами, *функция непрерывна в точке x_0, если предел функции (при $x \to x_0$) равен значению функции от предела аргумента.*

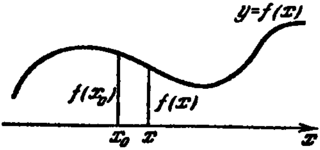


Рис. 118.

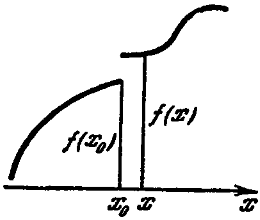


Рис. 119.

Если соотношение (1) не выполняется, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ *разрывна*. На рис. 118 и 119 показаны графики непрерывной и разрывной функций.

Следует заметить, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

при $x = 0$ разрывна. Действительно, здесь

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty,$$

а $f(0)$ — выражение, вовсе лишенное смысла, и потому равенство

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

не имеет места. Подобно этому функция

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 4}$$

разрывна при $x = 4$.

Функция $f(x) = \frac{x - 3}{x - 3}$, равная 1 при $x \neq 3$ и не имеющая смысла при $x = 3$, строго говоря, разрывна при $x = 3$. Однако если дополнительно положить для этой функции $f(3) = 1$, то она станет непрерывной и при $x = 3$. Естественно, что так всегда и поступают. Аналогично этому мы будем считать, например, что функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

при $x=0$ принимает значение 1, функция

$$f(z)=(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

при $z=0$ равна e и т. п.

Чтобы дать непрерывности функции другое часто встречающееся определение, введем следующие понятия и обозначения.

Если какая-либо величина α, изменяясь, переходит от некоторого исходного значения α_0 к новому значению α^*, то разность $\alpha^*-\alpha_0$ (из нового значения вычитается старое!) называется *приращением* величины α и обозначается через $\Delta\alpha$ *):

$$\boxed{\Delta\alpha=\alpha^*-\alpha_0.}$$

В частности, разность $x-x_0$ является приращением аргумента, а разность $f(x)-f(x_0)$ — приращением функции:

$$x-x_0=\Delta x, \quad f(x)-f(x_0)=\Delta f(x).$$

Пользуясь понятием приращения, определение непрерывности функции можно сформулировать так:

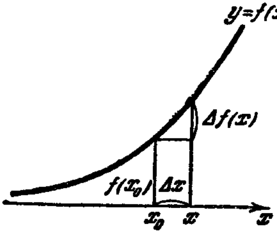


Рис. 120.

Определение. Функция называется *непрерывной*, если бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0.}$$

Равносильность этой формулировки той, которая была дана выше, ясна из рис. 120. Вторая формулировка хороша своей краткостью, но не вполне точна, так как в ней не указано, при каком значении аргумента непрерывна функция **). Тем не менее мы будем часто пользоваться этой формулировкой.

n° 5. Элементарные функции. Отметим некоторые, наиболее часто встречающиеся на практике, типы функций:

1) Целые алгебраические многочлены (или полиномы), т. е. функции вида

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L.$$

*) Таким образом, $\Delta\alpha$ — это не произведение, а цельный символ. (Знак Δ есть прописная греческая буква дельта.)

**) Впрочем, когда говорят, что функция непрерывна и при этом не указывают, какое значение аргумента имеют в виду, то подразумевают непрерывность при всех значениях аргумента (естественно, при которых функция определена).

2) Дробные алгебраические функции, называемые также рациональными дробями. Это функции вида

$$\frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + L}{Mx^m + Nx^{m-1} + \ldots + Tx + U}.$$

3) Степенная функция x^a.
4) Показательная функция a^x.
5) Логарифмическая функция $\log_a x$.
6) Тригонометрические функции

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \sec x,\ \operatorname{cosec} x.$$

7) Обратные тригонометрические функции

$$\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ \operatorname{arcsec} x,\ \operatorname{arccosec} x.$$

Нахождение значения каждой из этих функций будем называть **вычислительной операцией** *).

Определение. Функция $f(x)$ называется *элементарной*, если ее значения могут быть найдены при помощи некоторой **) последовательности вычислительных операций.

Таковы, например, функции

$$\sin^3 x,\quad \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{e^x + 7\ln x},\quad \frac{2x^3 + \arcsin x}{5x^2 + 3},\quad 2^{\arccos \ln x}$$

и т. п.

В частности, сами функции видов 1—7 называют **основными** элементарными функциями.

Теорема. *Каждая из основных элементарных функций непрерывна во всякой точке, где она определена.*

Доказывать эту теорему мы не будем, а только проиллюстрируем на ряде примеров.

Так, функции

$$3x^3 + 5x^2 + 8x - 11,\quad \frac{x}{x^2+1},\quad e^x,\quad \sin x,\quad \cos x$$

непрерывны при всех вещественных x.

Функция

$$y = \frac{1}{x}$$

непрерывна всюду, кроме точки $x = 0$, но в этой точке она и не определена.

---

*) Можно доказать, что это понимание вычислительной операции не расходится с тем, какое было в п° 2.

) Разумеется, **конечной.

Точно так же функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна всюду, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в которых она и не определена.

Функция $y = \ln x$ непрерывна при каждом $x > 0$.

Выше (см. сноски на стр. 120, 123, 131, 132) использовалась непрерывность корня (т. е. степенной функции), косинуса, логарифма, показательной функции.

n° 6. Область задания функции. Различные типы промежутков. До сих пор мы не уточняли вопрос об области задания (или определения) функции. Говорят, что функция $y = f(x)$ задана на множестве S (которое и называется областью задания функции), если каждому значению x, взятому из множества S, соответствует определенное значение функции. Тем же значениям x, которые не входят во множество S, никаких значений $f(x)$ не соответствует.

Для явных аналитических функций область задания состоит (если не оговорено противное) из всех значений x, для которых имеет смысл формула, определяющая функцию. Например, функция x^2 задана для всех вещественных*) x, функция $\ln x$ для $x > 0$, функция $\arcsin x$ для x, удовлетворяющих двойному неравенству $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Чаще всего областью задания функции служит замкнутый промежуток**) $[a, b]$, состоящий из всех x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x \leqslant b$, или же открытый промежуток (a, b), состоящий из всех x, для которых $a < x < b$. Частным случаем открытого промежутка является вся числовая ось***) $(-\infty, +\infty)$. Иногда рассматривают также промежутки $[a, b)$ и $(a, b]$. Первый из них состоит из точек x, удовлетворяющих неравенству $a \leqslant x < b$, а для второго определением служит неравенство $a < x \leqslant b$.

n° 7. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и непрерывна во всех его точках (тогда просто говорят, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$). Такие функции обладают важным свойством, которое выражается следующей теоремой.

Теорема о промежуточном значении. *Если p есть наименьшее, а q — наибольшее значение $f(x)$, то для всякого числа c, лежащего между p и q, $p < c < q$, найдется такое значение аргумента, $\bar{x}$, что*

$$\boxed{f(\bar{x}) = c.} \tag{2}$$

---

*) Она, конечно, задана и для комплексных x, но сейчас мы их не рассматриваем.

**) Называемый также отрезком.

***) Так как значений $x = \pm\infty$ мы не рассматриваем, то промежутки вида $[0, +\infty]$ нам не встретятся.

Мы приведем наглядное геометрическое рассуждение, разъясняющее теорему. Строгое чисто аналитическое доказательство было бы слишком длинным.

Обозначим через α и β те значения аргумента, которым соответствуют наименьшее и наибольшее значения нашей функции:

$$f(\alpha)=p, \quad f(\beta)=q.$$

Построим (рис. 121) график нашей функции и проведем на том же рисунке прямую $y=c$.

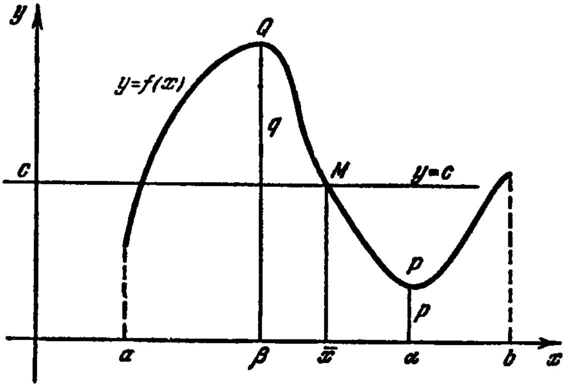


Рис. 121.

Рассмотрим лежащие на линии $y=f(x)$ точки $P(\alpha, p)$ и $Q(\beta, q)$. Первая из них находится ниже прямой $y=c$, а вторая выше ее. Стало быть, непрерывная линия $y=f(x)$ где-то пересечет эту прямую. Пусть M — точка пересечения линий $y=f(x)$ и $y=c$. Если абсциссу этой точки обозначить через $\bar{x}$, то будет верно равенство (2).

n°8. Понятие о функциях нескольких переменных. До сих пор мы рассматривали только функции одного аргумента. Однако на практике очень часто приходится иметь дело с функциями нескольких переменных. Так, например, закон Ома гласит, что

$$I=\frac{E}{R}, \tag{3}$$

где I — сила тока (в амперах), E — электродвижущая сила (в вольтах) и R — сопротивление (в омах). Стало быть, для задания I надо задать значения двух аргументов E и R, которые сами друг от друга не зависят.

Аналогично, если x и y меняются совершенно независимо друг от друга, а

$$z=2x+3y,$$

то каждой системе значений x и y отвечает одно и только одно, совершенно определенное значение z. Например, если $x=1$, $y=5$, то $z=17$.

Такое положение вещей и характеризуют, говоря, что z есть функция двух аргументов x и y. В этом случае употребляют запись

$$z=f(x, y) \text{ или } z=F(x, y) \text{ и т. п.}$$

Возвращаясь к формуле (3), можем сказать, что I есть функция от E и R.

Без дальнейших разъяснений должно быть понятно, что означают записи

$$u=f(x, y, z), \quad u=F(x, y, z, t)$$

и т. п.

Позже (в гл. X) мы займемся более обстоятельным рассмотрением функций нескольких переменных, а пока ограничимся данным здесь общим представлением о них.

ГЛАВА III

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

§ 1. Производная

Здесь мы познакомимся еще с одним фундаментальным понятием математического анализа — производной. В отличие от совершенно простых и естественных понятий предела и функции, понятие производной довольно сложно, и мы предпошлем ему некоторые предварительные соображения, которые постепенно подведут нас к этому понятию.

п° 1. Касательная. В элементарной геометрии, где изучается лишь одна кривая — окружность, касательная к окружности определяется как прямая, имеющая с этой окружностью лишь одну общую точку. Для произвольных кривых это определение представляется мало естественным; вряд ли кто-либо согласится называть прямую $x=0$ касательной к параболе $y=x^2$ (рис. 122), хотя у них всего одна общая точка. Поэтому в высшей математике принято другое определение касательной.

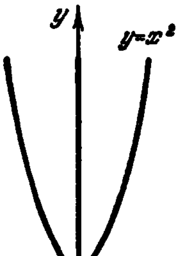


Рис. 122.

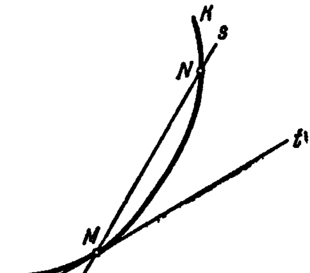


Рис. 123.

Определение. Прямая Mt (рис. 123) называется *касательной* к кривой K в точке M, если эта прямая является предельным положением секущей*) Ms, проведенной через M и другую точку N, которая движется по кривой K, стремясь совпасть с M.

Точка M называется *точкой касания.*

Пример. Пусть кривой K будет парабола $y=3x^2$, а точка M на ней имеет координаты (5,75). Провести касательную Mt (т. е. написать ее уравнение).

Решение. Уравнение касательной как уравнение прямой, проходящей через точку M(5,75), будет

$$y-75=m_t(x-5),$$

где угловой коэффициент m_t подлежит определению. Возьмем на параболе еще одну точку $N(5+\Delta x,\ 75+\Delta y)$ и проведем через M и N секущую Ms. Из рис. 124**) ясно, что угловой коэффициент секущей Ms есть $m_s=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Очевидно, если N стремится к M, то m_s стремится к m_t, т. е.

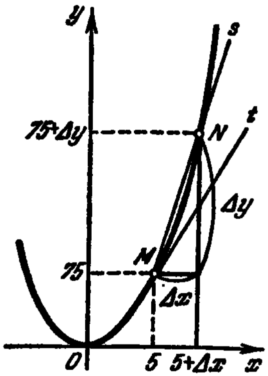


Рис. 124.

$$m_t=\lim_{N\to M} m_s$$

или, что то же самое,

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Поскольку точка N лежит на параболе, ее координаты $(5+\Delta x,\ 75+\Delta y)$ удовлетворяют уравнению параболы. Поэтому имеем

$$75+\Delta y=3(5+\Delta x)^2,$$

или

$$75+\Delta y=75+30\Delta x+3(\Delta x)^2,$$

и

$$\Delta y=30\Delta x+3(\Delta x)^2.$$

Разделив обе части этого равенства на Δx, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=30+3\Delta x.$$

Стало быть,

$$m_t=\lim_{\Delta x\to 0}(30+3\Delta x)=30,$$

и потому уравнение касательной будет

$$y-75=30(x-5).$$

---

*) Это значит, что угол между этими прямыми стремится к нулю.

**) В целях большей наглядности размеры на этом чертеже искажены.

Решим еще одну подобную задачу, ограничиваясь лишь краткими пояснениями.

Пусть $y = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 3$ — уравнение кривой K и $M(1,1)$ — лежащая на ней точка. Провести через точку M касательную к кривой K.

Решение. Уравнение искомой касательной

$$y - 1 = m_t(x - 1).$$

Пусть $N(1 + \Delta x,\ 1 + \Delta y)$ — другая точка кривой K. Тогда $1 + \Delta y = 2\cdot(1 + \Delta x)^3 - 4(1 + \Delta x)^2 + 6(1 + \Delta x) - 3$ или $1 + \Delta y = 2 + 6\Delta x + 6(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 4 - 8\Delta x - 4(\Delta x)^2 + 6 + 6\Delta x - 3$. Отсюда

$$\Delta y = 4\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3.$$

Если Ms — секущая, проведенная через M и N, то ее угловой коэффициент

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е.

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4 + 2\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Но ведь $m_t = \lim m_s$. Стало быть,

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4,$$

и уравнение касательной таково:

$$y - 1 = 4(x - 1).$$

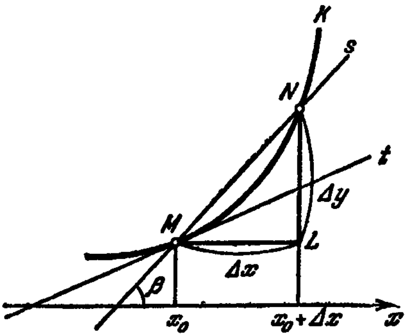


Рис. 125.

Рассмотрим теперь следующую общую задачу: провести касательную Mt к кривой K, заданной уравнением

$$y = f(x), \tag{1}$$

в данной точке $M(x_0, y_0)$, лежащей на кривой K.

Так как искомая касательная проходит через заданную нам точку $M(x_0, y_0)$, то решение сводится к нахождению ее углового коэффициента m_t.

Возьмем на кривой K точку $N(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ и проведем через M и N секущую Ms. Из. рис. 125 видно, что угловой коэффициент секущей Ms таков:

$$m_s = \operatorname{tg}\beta = \frac{LN}{ML} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Но

$$m_t = \lim_{N \to M} m_s,$$

откуда

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Так как точка N лежит на кривой K, то ее координаты удовлетворяют уравнению кривой (1), а потому

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x),$$

и, так как $y_0 = f(x_0)$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

откуда окончательно

$$\boxed{m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.} \tag{2}$$

Итак, геометрическая задача о проведении касательной свелась к вычислению предела (2).

n° 2. Скорость. Рассмотрим еще один вопрос, в котором нам придется встретиться с таким же пределом. Это вопрос о скорости точки.

Определение. Если точка движется по прямой *), то *средней скоростью* ее за некоторый промежуток времени называется отношение пути, пройденного за этот промежуток времени, к его длительности.

Иными словами, средняя скорость за некоторый промежуток времени есть величина, исчисляемая по формуле

$$v_{ср} = \frac{S}{T},$$

где T — продолжительность упомянутого промежутка времени, а S — путь, пройденный за это время.

Средняя скорость не характеризует состояние движения в определенные моменты времени, и потому в механике вводится важное понятие истинной скорости точки в данный момент.

Определение. *Истинной скоростью* точки в данный момент называется предел средней скорости этой точки за бесконечно малый промежуток времени, стягивающийся в данный момент.

Пример. Пусть точка M движется по прямой по закону

$$s = 4t^2 + 3t + 1. \tag{3}$$

*) Если движение не прямолинейно, то скорость имеет векторный характер и ее рассмотрение более сложно.

Здесь t — время, отсчитанное от некоторого начального момента, а s — расстояние точки M от некоторой начальной точки O, $s = OM$ (рис. 126). Найти скорость v точки M в момент $t = 5$.

Решение. На основании уравнения (3) находим, что при $t = 5$ будет $s = 116$.

Рассмотрим, кроме момента $t = 5$, еще другой момент $t + \Delta t = 5 + \Delta t$. Если $s + \Delta s$ — значение расстояния OM для этого нового момента, то на основании того же уравнения (3) будет

$$s + \Delta s = 4(5 + \Delta t)^2 + 3(5 + \Delta t) + 1 = 116 + 43\Delta t + 4(\Delta t)^2.$$

Рис. 126.

Нетрудно понять, что за промежуток времени от момента $t = 5$ до момента $t + \Delta t = 5 + \Delta t$ точка прошла путь

$$\Delta s = 43\,\Delta t + 4(\Delta t)^2.$$

Поэтому средняя скорость за этот промежуток времени есть

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 43 + 4\Delta t.$$

Истинная же скорость точки в момент $t = 5$ есть предел найденного выражения при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 43.$$

Заметим, что скорость измеряется в единицах, зависящих от единиц длины и времени. Например, если считать, что в рассмотренном примере s означает расстояние в сантиметрах, а t — время в секундах, то полученный ответ означает, что $v = 43$ *см/сек.*

Рассмотрим вопрос о нахождении скорости точки в общем виде.

Задача. *Точка движется по прямой по закону*

$$s = f(t). \tag{4}$$

Найти скорость v движения точки в момент t_0.

Как и выше, s означает то расстояние OM, на котором движущаяся точка M находится от неподвижной точки O в момент t (т. е. в момент, отделенный от начального момента промежутком времени в t единиц). Равенство (4) называется *уравнением движения.* Чтобы движение было задано, надо фактически указать функцию $f(t)$.

Решение. В интересующий нас момент t_0 расстояние OM (рис. 126) согласно уравнению движения (4) будет равно

$$s_0 = f(t_0).$$

Рассмотрим наряду с моментом t_0 другой момент времени $t_0 + \Delta t$. В этот момент точка M находится на расстоянии

$$s_0 + \Delta s = f(t_0 + \Delta t)$$

от начала отсчета O. Поэтому расстояние Δs, пройденное за промежуток времени Δt, равно

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0),$$

а средняя скорость за тот же промежуток времени

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Так как интересующая нас истинная скорость v есть предел найденной средней скорости

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}},$$

то

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.} \tag{5}$$

Таким образом, задача нахождения скорости приводит к нахождению предела (5), который лишь обозначениями отличается от того предела (2), к которому мы пришли, решая вопрос о проведении касательной.

n° 3. Плотность стержня. Рассмотрим еще один вопрос, приводящий к отысканию того же предела.

Определение. *Средней плотностью* стержня называется отношение его массы к его длине *).

Обозначая массу стержня через m, длину его через l, а среднюю плотность через $\rho_{\text{ср}}$, будем иметь:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{l}.$$

---

*) Обычно в физике средней плотностью тела называют отношение его массы к объему. Иногда рассматривают тела, поперечными размерами которых можно пренебречь (стержень, проволока, трос). Тогда и появляется такое понятие о плотности (ее называют также линейной плотностью), о котором говорится в тексте.

Средняя плотность стержня не дает представления о том, как распределена его масса на различных участках. Поэтому важное значение имеет так называемая истинная плотность стержня в различных его точках.

Определение. *Истинной плотностью* стержня в данной точке называется предел средней плотности бесконечно малого участка стержня, стягивающегося в данную точку

$$p = \lim p_{\text{ср}}.$$

Представим себе горизонтальный стержень (рис. 127). Если отложить от его левого конца O отрезок OM длины l, то масса m этого отрезка, очевидно, будет зависеть от l, т. е. окажется функцией аргумента l

$$m = f(l).$$

Допустим, что эта функция нам известна, и поставим задачу о нахождении истинной плотности p стержня в точке M, для которой $OM = l_0$.

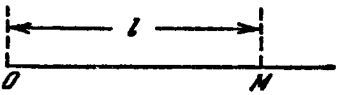


Рис. 127.

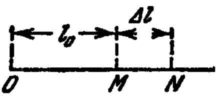


Рис. 128.

Для решения задачи мы рассмотрим, кроме M, другую точку N стержня, для которой $ON = l_0 + \Delta l$ (рис. 128). Тогда масса участка ON будет

$$m_0 + \Delta m = f(l_0 + \Delta l),$$

откуда следует, что масса участка MN равна

$$\Delta m = f(l_0 + \Delta l) - f(l_0).$$

Поэтому средняя плотность этого участка

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{f(l_0 + \Delta l) - f(l_0)}{\Delta l}.$$

Истинная плотность p стержня в точке M есть предел этого отношения, когда N стремится к M, т. е. когда $\Delta l \to 0$. Таким образом,

$$\boxed{p = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(l_0 + \Delta l) - f(l_0)}{\Delta l}.} \qquad (6)$$

И в этой задаче мы пришли к необходимости рассмотрения того же предела, что и в задачах о касательной и скорости. Предел этот и называется **производной**, к точному определению которой мы переходим.

n° 4. Определение производной. Пусть $y=f(x)$ — некоторая функция. Проделаем следующие 5 операций:

1) Придадим аргументу некоторое постоянное значение x и вычислим соответствующее значение функции $y=f(x)$.

2) Придадим аргументу приращение Δx, получим новое значение вргумента $x+\Delta x$ и вычислим новое значение функции

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

3) Вычислим приращение функции

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

4) Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

5) Устремим Δx к нулю и будем искать предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Этот предел*) называется *производной* функции $f(x)$ в точке x и обозначается так: y', или y'_x, или $f'(x)$, или, наконец, $(f(x))'$. Таким образом, точное определение производной таково:

Определение. *Производная* есть предел отношения приращения функции к вызвавшему его бесконечно малому приращению аргумента.

С помощью формулы это определение записывается так:

$$\boxed{y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

или, подробнее,

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.}$$

Замечания. 1) Действие нахождения производной какой-нибудь функции называется *дифференцированием* этой функции.

---

*) Когда Δx будет изменяться, дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ окажется **функцией** от Δx (напомним, что x закреплен). Предел может и не существовать. Заметим, что здесь имеется в виду **конечный** предел.

2) То значение аргумента x, которое закрепляется на первом шаге при нахождении производной, называется *точкой дифференцирования*.

3) Так как не всякая переменная имеет предел, то и не всякая функция обязана иметь производную. Если функция при некотором x имеет производную, то говорят, что функция при этом x *дифференцируема*.

С помощью понятия производной полученные в предыдущих пп° результаты можно коротко формулировать так:

а) Угловой коэффициент касательной есть производная ординаты по абсциссе*):

$$m_t = y'_x.$$

б) Скорость есть производная пути по времени**):

$$v = s'_t.$$

в) Плотность есть производная массы по длине***):

$$p = m'_l.$$

Иллюстрируем определение производной примерами.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2$ в точке $x = 3$.

Здесь $y = 9$, $y + \Delta y = (3 + \Delta x)^2 = 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2$. Значит,

$$\Delta y = 6\Delta x + (\Delta x)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6 + \Delta x.$$

Устремляя Δx к нулю и находя соответствующий предел, получаем

$$y' = 6.$$

Пример 2. Найти производную той же функции $y = x^2$ в точках $x = 4$, $x = 1$, $x = 0$, $x = 7$.

Чтобы не повторять рассуждения для каждой из этих точек, рассмотрим этот пример в общем виде, обозначив точку дифференцирования буквой x. Тогда мы получим

$$y = x^2, \; y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

откуда

$$\Delta y = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2,$$

и, стало быть,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

---

*) Точкой дифференцирования является абсцисса x_0 точки касания.

**) Точка дифференцирования — момент, в который определяется скорость.

***) Точка дифференцирования — та точка, где ищется плотность.

Окончательно
$$y' = 2x.$$
Полагая, в частности, $x=4$, $x=1$, $x=0$, $x=7$, находим
$$y'=8,\ y'=2,\ y'=0,\ y'=14.$$

Из рассмотренного примера видно преимущество дифференцирования функции в общем виде, т. е. при буквенном обозначении точки дифференцирования.

Пример 3. Продифференцировать функцию $y=\sqrt{x}$ в точке x $(x>0)$. Опуская пояснения, получаем
$$y=\sqrt{x},\quad y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x},$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x},$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$
$$x'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

В связи с тем, что не всякая функция обязана иметь производную, докажем следующее предложение.

Теорема 1. *Если функция при некотором значении аргумента имеет производную, то она непрерывна при этом значении аргумента.*

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда y получит соответствующее приращение Δy.

Запишем приращение Δy в виде
$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x.$$
Если $\Delta x\to 0$, то отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ согласно условию теоремы стремится к конечному пределу y', а потому*)
$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,}$$
т. е. *бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции*, а это и означает, что функция непрерывна, что и требовалось доказать.

*) Так как предел произведения равен произведению пределов, то
$$\lim\Delta y=\lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x\right)=\left(\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)(\lim\Delta x)=y'\cdot 0=0.$$

Можно показать, что условие непрерывности функции не является достаточным для того, чтобы эта функция имела производную.

Теорема 2. (Геометрический смысл производной). *Производная $y' = f'(x)$ геометрически представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции, проведенной в точке, абсцисса которой есть точка дифференцирования.*

Если (рис. 129) угол наклона упомянутой касательной к оси Ox обозначить через α, то

$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.}$$

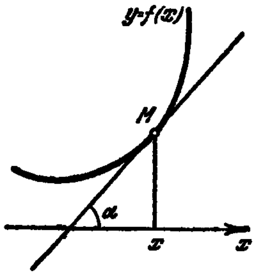


Рис. 129.

Доказательство. Пусть графиком нашей функции $y = f(x)$ служит некоторая кривая K и пусть $M(x, y)$ — та точка этой кривой, абсцисса x которой есть точка дифференцирования. Поставим вопрос о проведении касательной к кривой в точке M. Тогда нам придется дословно повторить все рассуждения, которые мы подробно провели в п°1. В результате мы снова придем к формуле *)

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{2}$$

которую можно переписать и так:

$$m_t = f'(x),$$

что равносильно доказываемой теореме.

В заключение укажем, что понятие производной можно осмыслить с весьма общей точки зрения. Пусть в каком-либо процессе рассматриваются две величины: аргумент x и его функция y. Если приращению Δx аргумента x соответствует приращение Δy функции, то частное $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ естественно считать *средней скоростью* изменения y по отношению к x. Но тогда предел этого частного при $\Delta x \to 0$, т. е. *производная*

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

есть (истинная) скорость изменения y относительно x.

---

*) В п°1 мы обозначали абсциссу точки касания через x_0, а здесь просто через x, но это, конечно, несущественно.

§ 2. Техника дифференцирования элементарных функций

Для того чтобы дифференцировать функции, обычно встречающиеся на практике, пользуются рядом простых и важных формул, которые обязательно надо знать наизусть. К выводу этих формул мы и переходим.

n° 1. Производная постоянной. Пусть $y=C$ (постоянную величину можно считать функцией аргумента x). Проделаем те 5 операций, о которых шла речь в определении производной.

Если аргумент имеет значение x, то $y=C$. Если рассмотреть новое значение аргумента $x+\Delta x$ и обозначить через $y+\Delta y$ соответствующее значение функции, то по-прежнему $y+\Delta y=C$.

Но тогда $\Delta y=0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$. Отсюда

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

т. е.

$$\boxed{(C)'=0.} \tag{1}$$

Производная постоянной величины равна нулю.

n° 2. Производная независимой переменной. Пусть $y=x$. Найдем y'. Для этого закрепим аргумент x. Тогда закрепится и $y=x$. Придадим x приращение Δx и найдем новое значение функции $y+\Delta y=x+\Delta x$. Отсюда $\Delta y=\Delta x$ и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

а потому и $y'=1$, или

$$\boxed{(x)'=1.} \tag{2}$$

Итак, *производная независимой переменной равна единице.*

n° 3. Производная степенной функции. Пусть $y=x^a$. Найти y'. Закрепим x и найдем соответствующее значение функции $y=x^a$. Придадим аргументу x приращение Δx и найдем новое значение функции

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^a=\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]^a=x^a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a.$$

Тогда

$$\Delta y=x^a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-x^a=x^a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1\right]$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^a\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1}{\Delta x}=x^{a-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Положив $\frac{\Delta x}{x}=u$ и вспомнив (гл. II, § 1, n° 10) „замечательный предел"

$$\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^a-1}{u}=a,$$

имеем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{a-1}a$$

или

$$\boxed{(x^a)'=ax^{a-1}.} \tag{3}$$

Примеры.

1) Если $y=x^7$, то $y'=7x^6$.

2) Если $y=\sqrt[5]{x^7}$, то $y'=\frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$.

3) Если $y=\frac{1}{x^8}$, то $y'=-8x^{-9}$.

Рекомендуется отдельно запомнить производную квадратного корня. Именно, пусть $y=\sqrt{x}$. Тогда по общей формуле

$$y'=(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

или

$$\boxed{(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},} \tag{4}$$

т. е. *производная квадратного корня равна единице, деленной на два таких же корня.*

n° 4. Производные синуса и косинуса. Пусть $y=\sin x$. Найти y'. Закрепляем аргумент x. Тогда $y=\sin x$. Придаем x приращение Δx и находим значение $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$. Отсюда $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$, и на основании известной формулы

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

получаем

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}.$$

Значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

и *)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \cos x.$$

Итак,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.} \tag{5}$$

Совершенно аналогично, используя известную формулу для разности косинусов

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2},$$

устанавливаем формулу

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.} \tag{6}$$

n° 5. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного. После рассмотрения производных синуса и косинуса естественно обратиться к выводу формулы для производной тангенса. Но так как

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

то мы стоим перед такой более общей задачей: пусть u и v — две функции аргумента x, производные которых u' и v' существуют и нам известны. Требуется найти производную частного

$$y = \frac{u}{v}.$$

Такую же задачу можно поставить не только для частного, но и для произведения

$$y = u \cdot v$$

этих функций или для суммы $y = u + v$ и т. п. Иными словами, мы ставим задачу, как, зная производные u' и v' двух функций u и v аргумента x, найти производную их суммы, разности, произведения и частного. Решив эту задачу, мы получим ряд правил, которые тоже

---

*) Поскольку

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

надо знать наизусть. Для отличия их от уже выведенных формул будем нумеровать эти правила римскими цифрами.

Итак, пусть u и v — две функции аргумента x, имеющие производные u' и v'.

I. Производная суммы. Пусть $y=u+v$. Найти y'.

Закрепим x. Тогда закрепятся и функции u и v, а стало быть, и y, причем

$$y=u+v.$$

Рассмотрим теперь новое значение аргумента $x+\Delta x$. Тогда и функции наши примут новые значения $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ и

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v).$$

Вычитая, находим

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Устремим теперь Δx к нулю. По самому определению производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u', \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',$$

откуда (на основании правила о пределе суммы)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u'+v'.$$

Таким образом, $y'=u'+v'$ или

$$\boxed{(u+v)'=u'+v',} \tag{I}$$

т. е. *производная суммы равна сумме производных слагаемых.*

II. Производная разности. Аналогично устанавливается, что

$$\boxed{(u-v)'=u'-v',} \tag{II}$$

т. е. *производная разности равна разности производных.*

III. Производная произведения. Повторяя те же рассуждения для функции

$$y=u\cdot v,$$

мы получим сначала

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v,$$

откуда

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v.$$

Устремив $\Delta x \to 0$ и перейдя к пределу, будем иметь

$$y' = u'v + uv' + u' \cdot 0.$$

Мы воспользовались здесь тем, что при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta v \to 0$. Это верно потому, что v имеет производную v', а следовательно, v — непрерывная функция от x.

Итак,

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv',} \qquad \text{(III)}$$

т. е. *производная произведения равна сумме произведений производной первого сомножителя на второй и производной второго сомножителя на первый.*

Пример. Если

$$y = \sqrt{x} \sin x,$$

то

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x.$$

IV. Вынесение постоянного множителя за знак производной. Рассмотрим важный частный случай дифференцирования произведения, когда один из сомножителей постоянен. Пусть $y = Cu$, где C — постоянная величина. Воспользовавшись предыдущей формулой, будем иметь

$$y' = C'u + Cu'.$$

Но так как $C' = 0$, то $y' = Cu'$, или

$$\boxed{(Cu)' = Cu'.} \qquad \text{(IV)}$$

Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

V. Дифференцирование произведения трех сомножителей. Пусть

$$y = uvw,$$

где w — также функция аргумента x, имеющая производную w'. Постараемся найти y'.

Для этого функцию $y=uvw$ записываем так: $y=(uv)w$ и применяем к ней правило III. Тогда

$$y'=(uv)'w+(uv)w',$$

или

$$y'=(u'v+uv')w+(uv)w',$$

откуда

$$y'=u'vw+uv'w+uvw',$$

т. е.

$$\boxed{(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.} \qquad \text{(V)}$$

Аналогично

$$(uvwz)'=u'vwz+uv'wz+uvw'z+uvwz'.$$

Таким образом, чтобы получить производную произведения любого числа функций, нужно производную первого сомножителя умножить на произведение всех остальных функций, затем производную второго сомножителя на произведение всех остальных и т. д. до последней функции и полученные произведения сложить.

VI. Производная частного. Пусть $y=\frac{u}{v}$, где по-прежнему u и v — функции аргумента x, имеющие производные u' и v'. Закрепим точку дифференцирования x, тогда u, v и $y=\frac{u}{v}$ будут также закреплены. Придадим x приращение Δx, в силу чего u, v и y получат соответственно приращения Δu, Δv и Δy. Так как

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

то

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(u+\Delta u)v-u(v+\Delta v)}{(v+\Delta v)v}=\frac{\Delta u\cdot v-u\,\Delta v}{(v+\Delta v)v}.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$$

и устремим Δx к 0. Тогда (пользуясь тем, что $\Delta v\to 0$) получим

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Итак,

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.} \qquad \text{(VI)}$$

Производная дроби сама есть дробь, знаменатель которой равен квадрату исходного знаменателя. Ее числитель есть производная исходного числителя, умноженная на исходный знаменатель без исходного числителя, умноженного на производную исходного знаменателя.

Вернемся теперь к выводу дальнейших формул дифференцирования.

n° 6. Производные тангенса и котангенса. Пусть $y = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$y = \frac{\sin x}{\cos x},$$

и на основании правила дифференцирования дроби (правило VI)

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.} \qquad (7)$$

Так же получаем производную от функции $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$:

$$y' = \left(\frac{\cos x}{\cos x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.} \qquad (8)$$

З а м е ч а н и е. На функциях $\sec x$ и $\operatorname{cosec} x$ мы не останавливаемся, так как они встречаются редко (как известно, они сводятся к уже рассмотренным функциям, ибо $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$).

n° 7. Производная показательной функции. Пусть $y = a^x$ (эта функция, как уже говорилось, называется п о к а з а т е л ь н о й; не следует путать ее со с т е п е н н о й функцией x^a). Чтобы найти производную этой функции, проводим обычные преобразования

$$y = a^x, \quad y + \Delta y = a^{x+\Delta x} = a^x a^{\Delta x},$$

откуда

$$\Delta y = a^x a^{\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Устремим Δx к нулю. Тогда, вспоминая „замечательный предел" (гл. II, § 1, п° 10)

$$\lim_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a,$$

мы получаем

$$y' = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Следовательно,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.} \tag{9}$$

Интересен частный случай выведенной формулы, когда $a = e$. Именно, $(e^x)' = e^x \ln e$, а так как $\ln e = 1$, то

$$\boxed{(e^x)' = e^x.} \tag{10}$$

п° 8. Производная логарифма. Пусть $y = \ln x$. Закрепляя x и придавая ему приращение Δx, будем иметь

$$y + \Delta y = \ln (x + \Delta x),$$

откуда

$$\Delta y = \ln (x + \Delta x) - \ln x,$$

или

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Тогда, пользуясь „замечательным пределом" (гл. II, § 1, п° 10)

$$\lim_{z \to 0} \frac{\ln (1 + z)}{z} = 1,$$

мы будем иметь

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \frac{1}{x}.$$

Итак,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.} \tag{11}$$

Производная натурального логарифма равна единице, деленной на его аргумент.

Найдем теперь производную логарифма, вычисленного при произвольном основании a.

Пусть $y=\log_a x$. Тогда по определению логарифма будет $a^y=x$. Прологарифмируем последнее равенство по основанию e. Это дает нам

$$y\ln a=\ln x,$$

или

$$y=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x.$$

Дифференцируя это равенство и вынося постоянный множитель $\frac{1}{\ln a}$, находим

$$y'=\frac{1}{\ln a}(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}.$$

Итак,

$$\boxed{(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.} \tag{12}$$

В частности,

$$(\lg x)'=(\log_{10} x)'=\frac{1}{x\ln 10}=\frac{0,43429}{x}.$$

Мы видим, что производная десятичного логарифма выражается более сложной формулой, чем производная логарифма натурального. Более того, при любом $a\neq e$ формула

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

выглядит сложнее, чем формула

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Этим и оправдано сделанное выше (гл. II, § 1, n° 8) замечание, что буквенные формулы упрощаются при применении натуральных логарифмов.

Проиллюстрируем теперь выведенные формулы и правила несколькими примерами.

1) $y=7x^4+2x^3-9x^2+6x-13.$

Здесь, пользуясь правилами дифференцирования суммы и разности и правилом вынесения постоянного множителя за знак производной, последовательно находим

$$y'=(7x^4)'+(2x^3)'-(9x^2)'+(6x)'-(13)',$$

$$y'=7(x^4)'+2(x^3)'-9(x^2)'+6(x)'-(13)'.$$

На основании формул (1), (2), (3) получаем

$$y'=28x^3+6x^2-18x+6.$$

На практике все промежуточные преобразования производят в уме и сразу пишут результат.

2) $y=\sqrt{x}-\frac{6}{x^8}+9\sqrt[5]{x^3}-3x+2.$

Опуская пояснения, получаем

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+48x^{-9}+\frac{27}{5}x^{-\frac{2}{5}}-3.$$

3) $y=5\operatorname{ctg} x+2\sqrt{x}\sin x+\frac{x^5}{\ln x}.$

Здесь

$$y'=\frac{-5}{\sin^2 x}+2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x+\sqrt{x}\cos x\right)+\frac{5x^4\ln x-x^4}{\ln^2 x}.$$

4) $y=7\ln x\operatorname{tg} x\sin x+3^x,$

$$y'=\frac{7}{x}\operatorname{tg} x\sin x+7\ln x\frac{1}{\cos^2 x}\sin x+7\ln x\operatorname{tg} x\cos x+3^x\ln 3.$$

5) $y=\dfrac{15x^8\cos x-3^x\cdot\dfrac{5}{\sqrt{x}}+1}{\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\cos x}},$

$$y'=\frac{\left(120x^7\cos x-15x^8\sin x-3^x\ln 3\cdot\dfrac{5}{\sqrt{x}}+3^x\cdot\dfrac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\cos x}\right)}{\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2}-$$

$$-\frac{\left(15x^8\cos x-3^x\cdot\dfrac{5}{\sqrt{x}}+1\right)\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}\right)}{\left(\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\cos x}\right)^2}.$$

Теперь мы переходим к изложению наиболее важного из всех правил дифференцирования — *правила дифференцирования сложной функции*, называемого также „правилом цепочки".

n° 9. **Правило цепочки.** Пусть $y=f(z)$, причем $z=\varphi(x)$. Ясно, что в этом случае y является функцией от x. Например, если

$$y=\sin z,\qquad z=2x+5,$$

то

$$y=\sin(2x+5).$$

В тех случаях, когда зависимость y от x задана в форме, подобной „цепи", т. е. в форме двух функциональных зависимостей

$$y=f(z),\qquad z=\varphi(x),$$

говорят, что y есть *сложная функция* от x, причем z называют *промежуточной* переменной.

Задача. *Пусть* $y=f(z)$ *и* $z=\varphi(x)$. *Предположим, что существуют производные* $y'_z=f'(z)$ *и* $z'_x=\varphi'(x)$, *которые нам известны. Найти производную* y'_x.

Решение. Закрепим аргумент x, тогда z и y соответственно будут иметь значения $z=\varphi(x)$ и $y=f(z)$. Придадим аргументу x приращение Δx, тогда z получит приращение Δz, а это, в свою очередь, вызывает появление приращения Δy.

Интересующая нас производная y'_x есть предел отношения

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

при $\Delta x\to 0$. Но это отношение можно переписать и так:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Что касается второго множителя $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, то по самому определению производной ясно, что при $\Delta x\to 0$ он стремится к z'_x,

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}\to z'_x.$$

Что касается первого сомножителя $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, то хочется думать, что по аналогичным соображениям он будет стремиться к y'_z. Однако это непосредственно не очевидно. В самом деле, ведь

$$y'_z=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z},$$

а у нас дано не $\Delta z\to 0$, а $\Delta x\to 0$. Тем не менее небольшое рассуждение позволяет преодолеть возникшее затруднение. Именно, ведь z — функция аргумента x, имеющая производную z'_x. Значит, эта функция непрерывна. Но тогда бесконечно малому приращению аргумента Δx отвечает бесконечно малое же приращение Δz. Стало быть, при $\Delta x\to 0$ будет и $\Delta z\to 0$, а тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta z}=y'_z.$$

Поскольку предел произведения равен произведению пределов, имеем при $\Delta x\to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x}\to y'_z\cdot z'_x,$$

откуда окончательно

$$\boxed{y'_x=y'_z\cdot z'_x.} \qquad \text{(VII)}$$

Таким образом, *производная сложной функции по независимой переменной равна ее производной по промежуточной переменной, умноженной на производную промежуточной переменной по независимой.*

Замечание. Правило цепочки станет совершенно наглядным, если мы вспомним, что y'_x есть скорость изменения y относительно x. Действительно, если y меняется вдвое быстрее z, а z меняется втрое быстрее x, то

$$y'_z = 2, \quad z'_x = 3.$$

В то же время ясно, что y меняется в шесть раз быстрее x т. е. $y'_x = 6$. Стало быть,

$$y'_x = 6 = 2 \cdot 3 = y'_z \cdot z'_x.$$

Примеры.

1) Пусть $y = \sin z$, а $z = \sqrt{x}$. Тогда $y'_x = \cos z \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) Если $y = \ln z$, $z = \operatorname{tg} x$, то $y'_x = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

3) Если $y = z^8$, $z = \frac{x}{\sin x}$, то $y'_x = 8z^7 \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$.

В приведенных примерах промежуточная переменная была указана с самого начала. В следующих примерах мы сами будем вводить промежуточную переменную в процессе решения.

4) $y = 3^{\operatorname{tg} x}$. Найти *) y'.

Положим $z = \operatorname{tg} x$, тогда $y = 3^z$ и

$$y'_x = 3^z \ln 3 \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Заменяя здесь z через $\operatorname{tg} x$ **), получим окончательно

$$y' = 3^{\operatorname{tg} x} \ln 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

---

*) Так как в условии никаких переменных, кроме x и y, не дано, то мы и пишем не y'_x, а просто y'.

**) В примерах 1—3 мы этой замены не делали, ибо там и в условии фигурировала переменная z.

5) $y=\sqrt{5x^3+3x^2+8x-2}$. Найти y'.

Положим $z=5x^3+3x^2+8x-2$, тогда $y=\sqrt{z}$ и

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{z}}(15x^2+6x+8),$$

или

$$y'=\frac{15x^2+6x+8}{2\sqrt{5x^3+3x^2+8x-2}}.$$

6) $y=\cos^5 x$. Найти y'.

Положим $z=\cos x$, тогда $y=z^5$ и $y'_x=5z^4\cdot(-\sin x)$, или $y'=-5\cos^4 x\sin x$.

В следующих примерах введение промежуточной переменной производится в уме.

7) $y=\sin e^x$, $y'=\cos e^x\cdot e^x$.

8) $y=\ln\operatorname{tg}x$, $y'=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

9) $y=\operatorname{tg}^8 x$, $y'=8\operatorname{tg}^7 x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Обычно так и поступают, т. е. промежуточной переменной не выписывают.

До сих пор мы рассматривали случаи, когда y зависел от x через посредство одного промежуточного аргумента z. На практике встречаются случаи, когда число промежуточных аргументов больше одного. Пусть, например,

$$y=\sqrt{\sin(\ln x)}.$$

Если положить $\sin(\ln x)=z$, то окажется $y=\sqrt{z}$ и

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{z}}z'_x=\frac{1}{2\sqrt{\sin(\ln x)}}z'_x.$$

Остается найти z'_x. Но здесь z — сложная функция от x и для нахождения z'_x снова понадобится применить правило цепочки. Именно, полагая $\ln x=u$, мы получим $z=\sin u$ и

$$z'_x=z'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot\frac{1}{x}=\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

Окончательно

$$y'_x=\frac{1}{2\sqrt{\sin(\ln x)}}\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}.$$

Как уже указывалось, обычно промежуточный аргумент не выписывается, а его введение производится в уме. Это позволяет избежать введения большого числа различных букв. Именно, буквой z следует обозначать последовательно разные вещи.

Пример. Пусть $y=\operatorname{tg} e^{\sqrt{x}}$.

Найти y'. Следует (мысленно!) обозначить $e^{\sqrt{x}}$ через z и представить себе y записанным в виде $\operatorname{tg} z$, откуда сразу получится, что

$$y'=\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt{x}}}\,z'_x=\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt{x}}}(e^{\sqrt{x}})'.$$

Чтобы найти $(e^{\sqrt{x}})'$, надо снова ввести z, обозначив теперь через z уже **новую** величину $\sqrt{x}$. Тогда

$$(e^{\sqrt{x}})'=(e^z)'_x=e^z\cdot z'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

и

$$y'=\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt{x}}}e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

При некоторой тренировке применение этого приема не представляет никаких трудностей и результат дифференцирования записывается сразу. Например, если

$$y=\ln[\cos(x^2+x+1)],$$

то

$$y'=\frac{1}{\cos(x^2+x+1)}[-\sin(x^2+x+1)](2x+1),$$

или, если

$$y=4^{\operatorname{tg}(x^3)},$$

то

$$y'=4^{\operatorname{tg}(x^3)}\ln 4\,\frac{1}{\cos^2(x^3)}\,3x^2.$$

Учащийся должен привыкнуть производить дифференцирование так, как это было здесь объяснено.

Чтобы не путаться в сложных случаях, рекомендуется следующее

Правило. *Если подлежащая дифференцированию функция является результатом целого ряда действий над аргументом x, то за промежуточный аргумент z следует принять результат всех этих действий, кроме последнего.*

Например, если

$$y=\operatorname{tg}^3\sqrt[5]{\ln\sin x},$$

то *)

$$z=\operatorname{tg}\sqrt[5]{\ln\sin x}$$

---

*) Поскольку при вычислении y последним действием является возведение в куб.

и тогда

$$y=z^3,$$

а если

$$y=e^{\operatorname{ctg}^3\frac{x}{\sqrt{x+2}}},$$

то

$$z=\operatorname{ctg}^3\frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

и

$$y=e^z.$$

Решим несколько более сложных примеров, пользуясь сделанными указаниями.

1) Если $y=\operatorname{tg}\sqrt[3]{\ln x}$, то $y'=\dfrac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{3}(\ln x)^{-\frac{2}{3}}\dfrac{1}{x}$.

2) Если $y=\ln^6\sin x$, то $y'=6\ln^5\sin x\dfrac{1}{\sin x}\cos x$.

3) Если $y=e^{\operatorname{ctg}^4 x}$, то $y'=e^{\operatorname{ctg}^4 x}\cdot 4\operatorname{ctg}^3 x\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

4) Если $y=2^{\sqrt{\operatorname{ctg}\ln\sin x}}$, то

$$y'=2^{\sqrt{\operatorname{ctg}\ln\sin x}}\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg}\ln\sin x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2\ln\sin x}\,\frac{1}{\sin x}\cos x.$$

5) Если $y=\cos^8\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}$, то

$$y'=8\cos^7\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left(-\sin\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right)3\operatorname{tg}^2 e^{\sqrt[4]{x}}\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}}\cdot e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}.$$

n° 10. Обратные тригонометрические функции и их дифференцирование. Чтобы закончить изучение вопроса о дифференцировании элементарных функций, нам остается рассмотреть так называемые обратные тригонометрические функции. Напомним вкратце их определение.

I. Арксинус.

Определение. Угол, синус которого равен заданному числу m, называется *арксинусом* этого числа m и обозначается $\operatorname{Arc}\sin m$.

Таким образом, равенство

$$\operatorname{Arc}\sin m = \alpha$$

совершенно равносильно равенству

$$\sin \alpha = m.$$

Пример. Чему равен $\operatorname{Arc}\sin \frac{1}{2}$? Согласно определению, $\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, а также $\operatorname{Arc}\sin \frac{1}{2} = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$, или $\operatorname{Arc}\sin \frac{1}{2} = 390^\circ$, или $\operatorname{Arc}\sin \frac{1}{2} = 510^\circ$, так как

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Так при любом m, удовлетворяющем неравенству

$$-1 \leqslant m \leqslant 1,$$

существует бесконечное множество углов α, для которых

$$m = \sin\alpha,$$

то символ

$$\operatorname{Arc}\sin m$$

имеет бесконечное множество значений. Тот из углов α, имеющих заданный синус m, который удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(такой угол единственный!), называется *главным значением* $\operatorname{Arc}\sin m$ и обозначается $\arcsin m$. Этот последний символ уже однозначен. Итак, равенство

$$\alpha = \operatorname{Arc}\sin m$$

равносильно равенству

$$\sin\alpha = m,$$

а равенство

$$\alpha = \arcsin m$$

равносильно системе, состоящей из равенства

$$\sin \alpha = m$$

и неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin 0 = 0, \quad \arcsin 1 = 90^\circ = \frac{\pi}{2},$$

тогда как

$$\text{Arcsin}\, 0 = 0,\ \text{Arcsin}\, 0 = \pi,\ \text{Arcsin}\, 0 = -3\pi \text{ и т. п.;}$$

$$\text{Arcsin}\, 1 = 90^\circ,\ \text{Arcsin}\, 1 = -270^\circ,\ \text{Arcsin}\, 1 = 450^\circ \text{ и т. д.}$$

II. Арккосинус. Символом $\text{Arccos}\, m$ обозначается любой из бесчисленного множества углов, имеющих заданный косинус m. Тот из этих углов, который удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,$$

называется *главным значением* $\text{Arccos}\, m$ и обозначается $\arccos m$. Таким образом, равенство

$$\alpha = \text{Arccos}\, m$$

равносильно равенству

$$\cos \alpha = m,$$

а равенство

$$\alpha = \arccos m$$

равносильно системе, состоящей из равенства

$$\cos \alpha = m$$

и неравенства $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

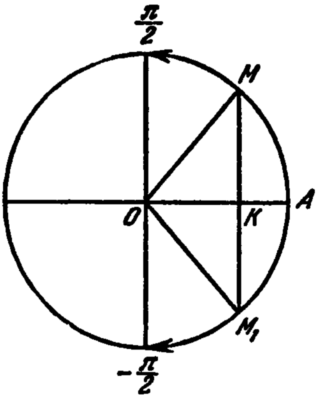


Рис. 130.

Замечание. Читателя может удивить, почему для выделения главного значения арккосинуса используется не то же неравенство, что для арксинуса. Дело в том, что (как это видно из рис. 130) углы AOM и AOM_1 оба лежат между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ и имеют один и тот же косинус (равный отношению отрезка OK к радиусу). Таким образом, система, состоящая из равенства

$$\cos \alpha = m$$

и неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

не дает однозначного определения угла α (не говоря уже о том, что в пределах между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$ мы вообще не находим углов, имеющих отрицательный косинус). Напротив, система соотношений

$$\cos \alpha = m, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$$

(при $-1 \leqslant m \leqslant 1$) дает такое определение.

Пример.
$\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}=30^\circ=\frac{\pi}{6}$ и $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}=-30^\circ=-\frac{\pi}{6}$ (оба угла лежат между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$!) и $\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}=330^\circ=\frac{11\pi}{6}$ и т. д.

В то же время

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=30^\circ=\frac{\pi}{6},$$

т. е. символ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$ обозначает один-единственный угол. Точно так же $\arccos(-1)=180^\circ=\pi$.

Аналогично сказанному, через $\operatorname{Arctg} m$ обозначается любой из углов α, удовлетворяющих соотношению

$$\operatorname{tg}\alpha=m,$$

а тот из них, который удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

обозначается через $\operatorname{arctg} m$ *).

Наконец, $\operatorname{arcctg} m$ есть такой (единственный!) угол α, который удовлетворяет обоим соотношениям

$$\operatorname{ctg}\alpha=m,\quad 0<\alpha<\pi,$$

а $\operatorname{Arcctg} m$ есть любой из углов, удовлетворяющих только первому из этих соотношений.

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании обратных тригонометрических функций. В результате мы получим еще 4 формулы дифференцирования, которые вместе с выведенными выше 12 формулами необходимо знать наизусть.

Производная функции $\arcsin x$. Пусть

$$y=\arcsin x,$$

тогда

$$\sin y=x.$$

Это последнее равенство является тождеством относительно x, так как оно верно при любом x (удовлетворяющем неравенству $-1\leqslant x\leqslant 1$), если под y разуметь именно $\arcsin x$.

---

*) Мы видим, что для выделения главного значения арктангенса используется неравенство $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, сходное с неравенством $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, которое использовалось выше для арксинуса. Однако теперь мы не пишем знаков равенства. Это объясняется тем, что углы $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ не имеют тангенса.

Но тождества можно дифференцировать, так как их левые и правые части представляют одну и ту же величину, только по-разному написанную.

Итак, продифференцируем тождество $\sin y = x$ по аргументу x. При этом следует помнить, что левая часть равенства представляет сложную функцию от x (причем y играет роль промежуточного аргумента). Применяя правило цепочки *), имеем

$$\cos y \cdot y' = 1.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Выразим полученный результат через x. Так как $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ и $\sin^2 y = x^2$, то

$$\cos^2 y = 1 - x^2$$

и

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Перед радикалом надо удержать знак „$+$“, потому что y, будучи главным значением $\arcsin x$, удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а косинус таких углов неотрицателен, $\cos y \geqslant 0$.

Итак,

$$y' = \frac{1}{\cos y}, \quad \cos y = \sqrt{1 - x^2}$$

и окончательно

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

или

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.} \tag{13}$$

Производная $\arccos x$. Пусть $y = \arccos x$, тогда $\cos y = x$. Продифференцируем это тождество по аргументу x:

$$-\sin y \cdot y' = 1.$$

Отсюда

$$y' = \frac{-1}{\sin y}.$$

*) Этот вывод (как и три последующих) не вполне строг: заранее предполагается существование y'.

Выразим этот результат через x. Так как $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ и $\cos^2 y = x^2$, то

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Перед радикалом поставлен знак „+“, потому что y, будучи главным значением $\arccos x$, удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant y \leqslant \pi,$$

а синус таких углов неотрицателен, $\sin y \geqslant 0$.

Итак, $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, или

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.} \tag{14}$$

Производная $\operatorname{arctg} x$. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Тогда $\operatorname{tg} y = x$.

Продифференцируем это тождество по x:

$$\frac{1}{\cos^2 y} y' = 1,$$

или

$$y' = \cos^2 y.$$

Выразим y' через x:

$$y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Итак,

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.} \tag{15}$$

Производная $\operatorname{arcctg} x$. Пусть $y = \operatorname{arcctg} x$. Тогда

$$\operatorname{ctg} y = x.$$

Продифференцируем это тождество по x:

$$\frac{-1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1.$$

Отсюда

$$y' = -\sin^2 y.$$

Выразим y' через x:

$$y' = \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Следовательно,

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.} \tag{16}$$

Примеры.

1) Если $y=\frac{\ln^2 x}{\arcsin x}$, то

$$y' = \frac{2\ln x \frac{1}{x} \arcsin x - \ln^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

2) Если $y=e^{\operatorname{arctg}^5 \sqrt{x}}$, то

$$y' = e^{\operatorname{arctg}^5 \sqrt{x}} \cdot 5 \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3) Если $y=\arccos^6 \ln(3x+2)$, то

$$y' = 6\arccos^5 \ln(3x+2) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\ln^2(3x+2)}} \cdot \frac{1}{3x+2} \cdot 3.$$

n° 11. Особые случаи дифференцирования.

I. Найти производную функции

$$y = \log_{\sin x} \operatorname{tg} x.$$

Так как ни одна из выведенных формул дифференцирования здесь непосредственно неприменима, мы преобразуем наше равенство, пользуясь определением логарифма. Тогда получим

$$(\sin x)^y = \operatorname{tg} x.$$

Это равенство прологарифмируем по основанию e:

$$y \ln \sin x = \ln \operatorname{tg} x.$$

Отсюда

$$y = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \sin x}.$$

Теперь уже все ясно. Именно, применяя правило дифференцирования дроби, имеем

$$y' = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \ln \sin x - \ln \operatorname{tg} x \frac{1}{\sin x} \cos x}{\ln^2 \sin x}.$$

Аналогично дифференцируется любая функция вида

$$y = \log_v u,$$

где u и v — заданные функции от x.

II. $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$. Найти y'.

Прологарифмируем наше равенство. Тогда получим

$$\ln y = \operatorname{arctg} x \ln \sin x.$$

Последнее равенство дифференцируем по x. Применяя правило цепочки, находим

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{1+x^2} \ln \sin x + \operatorname{arctg} x \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

Отсюда

$$y' = \left(\frac{\ln \sin x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x\right)(\sin x)^{\operatorname{arctg} x}.$$

Этот способ позволяет дифференцировать любую функцию вида

$$y = u^v,$$

где u и v — заданные функции от x.

Примеры.

1) Если $y = \log_x \cos x$, то $x^y = \cos x$. Отсюда $y \ln x = \ln \cos x$ и $y = \frac{\ln \cos x}{\ln x}$.

Дифференцируя полученную дробь, находим

$$y' = \frac{\frac{-\sin x}{\cos x} \ln x - \frac{\ln \cos x}{x}}{\ln^2 x}.$$

2) Если $y = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$, то $\ln y = \sqrt{x} \ln \operatorname{arctg} x$, откуда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \operatorname{arctg} x + \sqrt{x} \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

и окончательно

$$y' = \left(\frac{\ln \operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}\right)(\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}.$$

В заключение приводим таблицу всех выведенных нами формул и правил дифференцирования:

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$	10. $(e^x)' = e^x$
2. $(x)' = 1$	11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
3. $(x^a)' = ax^{a-1}$	12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(\sin x)' = \cos x$	14. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(\cos x)' = -\sin x$	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	16. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	
9. $(a^x)' = a^x \ln a$	

Правила дифференцирования

I. $(u+v)' = u'+v'$	V. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
II. $(u-v)' = u'-v'$	VI. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$
III. $(uv)' = u'v+uv'$	VII. $y'_x = y'_z \cdot z'_x$
IV. $(cu)' = cu'$	

§ 3. Дифференциал

n° 1. Определение дифференциала. С понятием производной тесно связано важное понятие дифференциала *), к которому мы и переходим.

Пусть $y=f(x)$ — некоторая функция, имеющая в определенной точке x производную $f'(x)$.

Придадим аргументу (исходя из упомянутого значения x) приращение Δx, и пусть Δy — соответствующее приращение функции.

По определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Так как разность между переменной, имеющей предел, и этим пределом есть величина бесконечно малая, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} - y'$ есть величина

*) От слова „дифференциал“ (латинское *differentia* означает „разность“) происходит и самое название дифференциального исчисления. Однако основным в этом исчислении является все же понятие производной.

бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Положим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - y' = \alpha.$$

Тогда $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, откуда

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\,\Delta x.$$

Величина $\alpha\,\Delta x = \rho$ как произведение двух бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем сомножители, и в частности, чем Δx. Итак,

$$\boxed{\Delta y = y'\,\Delta x + \rho.}$$

Если $y' \neq 0$, то первое слагаемое правой части имеет тот же порядок малости, что и Δx, а второе — более высокий. Значит, при малых Δx второе слагаемое менее важно, чем первое. Это первое слагаемое (уже независимо от того, будет ли $y' \neq 0$) и называют **дифференциалом**. Более точно это понятие имеет следующее

Определение. ***Дифференциалом*** функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение производной $y' = f'(x)$, вычисленной в этой точке x, на произвольное приращение аргумента Δx.

Дифференциал обозначается символом dy или $df(x)$,

$$\boxed{dy = y'\,\Delta x.}$$

Таким образом, дифференциал dy зависит от двух величин: приращения Δx и точки дифференцирования x.

Так как

$$\Delta y = dy + \rho,$$

то дифференциал функции и приращение этой функции отличаются друг от друга на бесконечно малую ρ, имеющую порядок малости, высший чем Δx. Если пренебречь этой малой высшего порядка, то получим приближенное равенство

$$\boxed{\Delta y \cong dy,}$$

т. е. *при малых Δx приращение функции с большой степенью точности можно заменить ее дифференциалом.*

Примеры. 1) Пусть $y = x^2 + 2x + 5$. Вычислим приращение Δy и дифференциал dy, если $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

Если $x=2$, то $y=13$. Если же аргумент принимает значение $x+\Delta x=2{,}001$, то

$$y+\Delta y=(2{,}001)^2+4{,}002+5=13{,}006001.$$

Отсюда

$$\Delta y=0{,}006001.$$

Вычисляем dy:

$$dy=y'\Delta x=(2x+2)\Delta x=(2\cdot 2+2)\cdot 0{,}001=0{,}006.$$

Таким образом, $\rho=0{,}000001$ и, следовательно, абсолютная ошибка, допускаемая в данном случае при замене Δy через dy, равна 0,000001. Но абсолютная ошибка не дает достаточно полной характеристики точности подсчета. Поэтому вычислим еще и относительную ошибку:

$$\delta=\frac{\rho}{\Delta y}=\frac{0{,}000001}{0{,}006001}<0{,}02\%.$$

Таким образом, относительная ошибка, получаемая от замены Δy на dy, меньше $0{,}02\%$. Эта точность обычно оказывается вполне достаточной для расчетов, производимых в технике.

2) В качестве второго примера рассмотрим ту же функцию $y=x^2+2x+5$ с тем же исходным значением аргумента $x=2$, но возьмем $\Delta x=3$.

В этом случае старое значение функции по-прежнему равно 13, а новое значение равно

$$y+\Delta y=5^2+10+5=40,$$

так что

$$\Delta y=27.$$

С другой стороны,

$$dy=(2x+2)\Delta x=(2\cdot 2+2)\,3=18$$

и потому

$$\rho=27-18=9.$$

Значит, относительная ошибка при замене Δy на dy равна $\frac{9}{27}>30\%$. Мы наглядно видим, что замена Δy на dy законна лишь тогда, когда Δx достаточно мало.

n° 2. **Геометрический смысл дифференциала.** Пусть $y=f(x)$ есть некоторая функция, имеющая в точке x производную $y'=f'(x)$. Ее график изображен на рис. 131. Из рисунка видно, что $KN=\Delta y$, а $KL=MK\cdot\operatorname{tg}\alpha$, или $KL=y'\Delta x$, откуда

$$dy=KL$$

и $\rho = LN$. Итак, *геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты точки, движущейся по касательной к графику функции.*

Поэтому замена Δy на dy геометрически означает замену участка кривой участком ее касательной.

Из чертежа видно, что dy прямо пропорционален Δx. Это же видно из формулы $dy = y'\Delta x$, где y' служит коэффициентом пропорциональности.

Таким образом, если мы заменяем Δy на dy, то это означает, что мы приближенно считаем малые изменения функции пропорциональными вызвавшим их изменениям аргумента. Читатель вспомнит, что с этой идеей он сталкивался еще в средней школе в практике использования логарифмических таблиц.

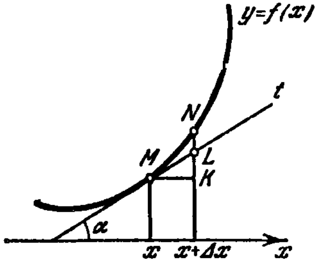


Рис. 131.

Еще иначе можно сказать, что „в малом всякая функция ведет себя как линейная". На языке механики это означает, что любое движение за короткие промежутки времени можно приближенно считать равномерным.

n° 3. Примеры нахождения дифференциала.

1) Пусть $y = x^2 + x + 1$. Найти dy при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Вычисляем по формуле $dy = y'\Delta x$. Так как $y' = 2x + 1$, то при $x = 2$ будет $y' = 5$ и $dy = 0{,}5$.

2) Пусть $y = x^3$. Найти dy при $x = 4$.

$$y' = 3x^2 = 48, \quad dy = 48\,\Delta x.$$

В этом примере dy не имеет определенного значения, так как Δx не задано.

3) Пусть $y = \sqrt{x}$. Найти dy при $\Delta x = 0{,}01$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dy = \frac{0{,}005}{\sqrt{x}}.$$

Здесь также dy не имеет определенного значения, так как не задан x.

4) Пусть $y = 8x^2$. Найти dy.

$$y' = 16x, \quad dy = 16x\,\Delta x.$$

5) $d \operatorname{arctg} x = \dfrac{\Delta x}{1 + x^2}$.

6) $d \ln x = \dfrac{\Delta x}{x}$.

7) $de^{\sqrt{\operatorname{arctg} \ln x}} = e^{\sqrt{\operatorname{arctg} \ln x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} \ln x}} \cdot \dfrac{1}{1 + \ln^2 x} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot \Delta x$.

8) $dx = 1 \cdot \Delta x$, т. е. *дифференциал независимого переменного совпадает с его приращением:*

$$\boxed{dx = \Delta x.}$$

Этот факт весьма важен. Из него следует, что формулу $dy = y' \Delta x$ можно записать и так:

$$\boxed{dy = y'\,dx.}$$

Например,

$$d\cos x = -\sin x\,dx, \quad de^x = e^x\,dx.$$

Из формулы $dy = y'\,dx$ вытекает, что $y' = \frac{dy}{dx}$, т. е. производную можио обозиачить и так:

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}.}$$

В книгах технического характера обозначение $\frac{dy}{dx}$ встречается чаще, чем y'.

n°4. Об инвариантности записи дифференциала. Формула $dy = y'_x\,dx$, установлеиная нами для случая, когда x является независимой переменной, остается верной и тогда, когда x является функцией какой-нибудь переменной t.

Действительно, пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$. Тогда y зависит от t и dy надо вычислять по формуле

$$dy = y'_t\,\Delta t.$$

Но по правилу цепочки

$$y'_t = y'_x x'_t$$

и, следовательно,

$$dy = y'_x x'_t\,\Delta t.$$

Замечая, что x есть функция от t и потому $x'_t\,\Delta t = dx$, окончательно получаем

$$dy = y'_x dx,$$

т. е. форма записи dy сохраняется независимо от того, будет ли x независимой или зависимой переменной. Это свойство называют *инвариантностью* *) указанной формы записи дифференциала.

*) „Инвариантность" значит „неизменность".

Замечание. Формула $dy = y'_x \Delta x$, верная, когда x — независимая переменная, перестает быть верной, когда $x = \varphi(t)$, так как в этом последнем случае Δx и dx не совпадают.

n° 5. Примеры применения дифференциала в приближенных подсчетах. Мы уже говорили, что при достаточно малом Δx приближенное равенство

$$\boxed{\Delta y \cong dy}$$

обладает хорошей степенью точности. Это обстоятельство позволяет применять дифференциал, когда требуется найти приращение функции, вызванное достаточно малым приращением аргумента.

Примеры. 1) Вычислить $\sqrt{16{,}06}$.

Пусть $y = \sqrt{x}$; если $x = 16$, то $y = 4$. Нам же надо найти значение этой функции, когда аргумент ее равен 16,06. Для этого достаточно узнать, какое приращение Δy получает функция $y = \sqrt{x}$, когда аргумент, исходя из значения $x = 16$, получает приращение $\Delta x = 0{,}06$. Так как 0,06 — число малое, то мы вместо Δy вычислим dy. Эту величину найти легко:

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{0{,}06}{2\sqrt{16}} = \frac{0{,}06}{8} = 0{,}0075.$$

Если принять $\Delta y = dy$ и учесть, что $y = 4$, то мы получаем приближенное равенство

$$\sqrt{16{,}06} \cong y + dy = 4{,}0075.$$

В действительности $\sqrt{16{,}06} = 4{,}00749\ldots$

2) Пусть требуется вычислить $\sqrt[n]{1+\sigma}$, где σ весьма мало.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[n]{x}$. Тогда для $x = 1$ будет $y = 1$, а нас интересует значение функции $\sqrt[n]{x}$ для $x = 1 + \sigma$. Для нахождения этого значения достаточно найти приращение Δy, которое получает функция $y = \sqrt[n]{x}$, когда аргумент, исходя из значения $x = 1$, получает малое приращение $\Delta x = \sigma$. Вместо Δy находим dy:

$$dy = y' \Delta x = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} \Delta x = \frac{\sigma}{n}.$$

Положив (это не точно, но ошибка весьма мала)

$$\Delta y = \frac{\sigma}{n},$$

находим полезную приближенную формулу

$$\boxed{\sqrt[n]{1+\sigma}\cong 1+\frac{\sigma}{n},}$$

которая обладает тем лучшей точностью, чем меньше σ.

3) Пусть b весьма мало по сравнению с a^n. Тогда на основании предыдущего примера имеем

$$\sqrt[n]{a^n+b}=\sqrt[n]{a^n\left(1+\frac{b}{a^n}\right)}=a\sqrt[n]{1+\frac{b}{a^n}}\cong a\left(1+\frac{b}{na^n}\right),$$

и мы приходим к приближенной формуле

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n+b}\cong a+\frac{b}{na^{n-1}}.}$$

Особенно простой вид она получает при $n=2$:

$$\boxed{\sqrt{a^2+b}\cong a+\frac{b}{2a}}$$

и при $n=3$:

$$\boxed{\sqrt[3]{a^3+b}\cong a+\frac{b}{3a^2}.}$$

Так, например,

$$\sqrt{67}=\sqrt{8^2+3}\cong 8+\frac{3}{2\cdot 8}=8\frac{3}{16}.$$

Абсолютная ошибка полученного результата равна 0,0021... Относительная ошибка $\delta<0{,}03\%$.

4) Радиус шара R увеличился на малую величину dR. Найти приращение объема шара.

Решение. Так как объем шара вычисляется по формуле

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

то $dV=4\pi R^2\,dR$. Эту величину и можно принять за искомое приращение ΔV, ибо по условию dR мало.

Разделив приращение dV на V, получим

$$\frac{dV}{V}=3\frac{dR}{R}.$$

Если приращения радиуса и объема шара выразить в процентах, то последнее равенство устанавливает следующее: при увеличении радиуса шара на $p\%$ его объем увеличивается на $3p\%$.

5) Вычислить $\operatorname{tg} 46^\circ$.

Пусть $y = \operatorname{tg} x$. Если $x = 45^\circ$, то $y = 1$. Нас же интересует значение функции $\operatorname{tg} x$ для близкого значения аргумента 46°. Ясно, что для решения задачи достаточно найти приращение, получаемое функцией $\operatorname{tg} x$, когда аргумент, исходя из значения $x = 45^\circ$, получает (малое!) приращение $\Delta x = 1^\circ$. Чтобы иметь возможность применять формулы дифференциального исчисления, надо все углы выразить в радианах *):

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}.$$

Если заменить приращение $\operatorname{tg} x$ на дифференциал этой функции, равный

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90} = \frac{3{,}14}{90} = 0{,}035,$$

то мы найдем

$$\operatorname{tg} 46^\circ = 1{,}035.$$

Абсолютная ошибка этого равенства меньше 0,0006. Относительная ошибка $\delta < 0{,}06\%$.

6) Вычислить $\sin 29^\circ$.

Пусть $y = \sin x$. Как и в предыдущих примерах, полагаем $x = \frac{\pi}{6}$ (при этом $y = 0{,}5$), $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$. Тогда $dy = \cos x \, \Delta x = \cos \frac{\pi}{6} \times \left(-\frac{\pi}{180}\right) = -\frac{\pi \sqrt{3}}{360} = -0{,}015$. Следовательно, принимая $\Delta y = dy$, находим

$$\sin 29^\circ = 0{,}485.$$

В гл. X, посвященной функциям нескольких переменных, мы еще вернемся к вопросу о применении дифференциала в приближенных вычислениях и более подробно покажем, как дифференциал используется для оценки погрешностей.

В заключение отметим следующее. Применение приближенных формул представляет собой надежную операцию только тогда, когда мы имеем возможность как-то оценить допускаемую ошибку.

В рассмотренных выше примерах мы или не оценивали ошибки, или оценивали ее, найдя другим путем **точное** значение интересо-

---

*) Ведь в основе вывода формул дифференцирования тригонометрических функций лежит формула

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

верная тогда, когда α означает величину рассматриваемого угла **в радианах**.

вавшей нас величины. На практике, однако, точное значение величины бывает неизвестно. Поэтому изложенное выше не дает возможности оценивать качество приближения, получаемого при замене Δy на dy. Ниже, в n° 6 § 6 этой же главы, будет дана возможность такой оценки. Пока же отметим только, что справедливо неравенство

$$|\Delta y - dy| \leqslant M(\Delta x)^2,$$

где M — некоторая постоянная, точное значение которой и будет установлено в указанном месте.

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков

n° 1. Производные высших порядков. Пусть $y=f(x)$ — некоторая функция, рассматриваемая для всех x из отрезка $a \leqslant x \leqslant b$. Допустим, что при каждом x из этого отрезка существует производная $y'=f'(x)$ нашей функции. Тогда эта производная сама зависит от точки дифференцирования x, т. е. является функцией от x. Поэтому можно поставить вопрос о производной этой функции $f'(x)$. Эта последняя, т. е. производная от производной, называется *второй производной* (или производной *второго порядка*) исходной функции $y=f(x)$ и обозначается через y'' или $f''(x)$.

Например, если

$$y=f(x)=2x^4+3x^3-5x^2+6x-8 \text{ *)},$$

то

$$y'=f'(x)=8x^3+9x^2-10x+6$$

и

$$y''=f''(x)=24x^2+18x-10,$$

а если

$$z=g(x)=\sin x,$$

то

$$z'=g'(x)=\cos x$$

и

$$z''=g''(x)=-\sin x.$$

Точно так же производная от второй производной $y''=f''(x)$ называется *третьей производной* (или производной третьего порядка) исходной функции $y=f(x)$ и обозначается через y''' или $f'''(x)$.

В приведенных двух примерах будет

$$y'''=f'''(x)=48x+18, \quad z'''=g'''(x)=-\cos x.$$

---

*) Эта функция задана не на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, а на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$. Разумеется, это ничего не меняет в постановке вопроса.

Вообще, производной порядка $n+1$ называется производная от производной порядка n.

Начиная с четвертой производной, применяются обозначения

$$y^{(4)}=f^{(4)}(x), \quad y^{(5)}=f^{(5)}(x), \quad y^{(n)}=f^{(n)}(x).$$

Скобочки ставятся для того, чтобы не принять производную $y^{(n)}$ за степень y^n.

На конкретном смысле производных высшего порядка мы останавливаться не будем *).

n° 2. Дифференциалы высших порядков. Если $y=f(x)$ и $\Delta x=dx$ — приращение аргумента x, то произведение

$$y^{(n)}(dx)^n$$

называется *дифференциалом n-го порядка функции* $y=f(x)$ и обозначается через $d^n y$ (или $d^n f(x)$):

$$d^n y=y^{(n)}(dx)^n.$$

Впрочем, степень $(dx)^n$ обычно записывают без скобок, т. е. в виде dx^n, так что определение $d^n y$ получает вид

$$\boxed{d^n y=y^{(n)}\,dx^n.}$$

Отсюда следует часто применяемое обозначение для n-й производной

$$\boxed{y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}.}$$

Например,

$$y''=\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Поскольку в дальнейшем изложении мы не используем дифференциалов высших порядков, то относительно этого понятия ограничимся сказанным.

§ 5. Исследование функций

n° 1. Возрастание и убывание функций.

Определение. Функция называется *возрастающей* (*убывающей*), если при увеличении аргумента значения функции увеличиваются (уменьшаются).

---

*) Отметим лишь следующее. Если точка движется по прямой по закону $s=f(t)$, то вторая производная $s''=f''(t)$ представляет собой ускорение этой точки.

На рис. 132 и 133 показаны графики возрастающей и убывающей функций.

Мы видим, что для первой из них при $x_1 < x_2$ оказывается $f(x_1) < f(x_2)$, в то время как для второй $f(x_1) > f(x_2)$.

Весьма важен вопрос о том, как по аналитической формуле, задающей функцию, судить, не является ли эта функция возрастающей или убывающей. Для решения этого вопроса следует вспомнить,

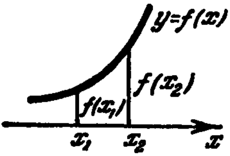


Рис. 132.

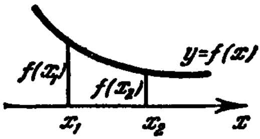


Рис. 133.

каков геометрический смысл производной. Именно, как было показано еще в § 1 (n° 4), производная $y' = f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке, абсцисса которой есть точка дифференцирования:

$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg} \alpha}$$

Вспомнив этот факт, обратимся к рассмотрению графика возрастающей функции (рис. 134).

Если на этом графике взять произвольную точку M и провести в ней касательную, то мы непосредственно из рисунка усматриваем, что угол α, образованный этой касательной с положительным направлением оси Ox, есть угол острый и потому тангенс его положителен:

$$\operatorname{tg} \alpha > 0.$$

Так как $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$, то для любого x оказывается

$$f'(x) > 0.$$

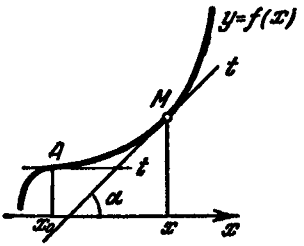


Рис. 134.

Исключение составляют отдельные точки x, вроде абсциссы x_0 точки A, в которой касательная At параллельна оси Ox и потому ее угловой коэффициент равен нулю, т. е.

$$f'(x_0) = 0.$$

Таким образом, *производная возрастающей функции никогда не отрицательна.*

Аналогично, рассматривая график убывающей функции (рис. 135), мы видим, что угол α тупой, так что его тангенс отрицателен:

$$\operatorname{tg}\alpha < 0,$$

или, что то же самое,

$$f'(x) < 0.$$

Исключение и здесь могут составить отдельные точки x (вроде x_0), в которых $f'(x) = 0$.

Итак, *производная убывающей функции никогда не положительна.*

Полученные результаты можно доказать и без ссылки на рисунок, а чисто аналитически. Установим, например, что для возрастающей $f(x)$ при всех*) x будет $f'(x) \geqslant 0$. Если бы это было не так, то нашлась бы точка x_0, для которой

$$y' = f'(x_0) < 0.$$

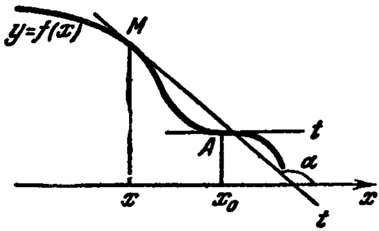


Рис. 135.

Но ведь

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

а далекие значения переменной, стремящейся к пределу, почти равны ему. Значит, для весьма малых Δx будет

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$$

или, подробнее,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0.$$

Стало быть, для малого и положительного Δx будет

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0,$$

т. е.

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0),$$

а это противоречит условию возрастания $f(x)$, ибо при $\Delta x > 0$, очевидно, будет $x_0 + \Delta x > x_0$.

---

*) Естественно, что существование $f'(x)$ при всех x предполагается заранее.

Если не забывать о возможности обращения производной возрастающей (и убывающей) функции в нуль, то полученные результаты можно сформулировать в следующем кратком виде.

Аналитический признак поведения функции. *Если функция возрастает (убывает), то ее производная положительна (отрицательна).*

Этот признак можно изобразить и такой схемой:

$f(x)$	знак $f'(x)$
возрастает	$+$
убывает	$-$

Из тех же рисунков читатель усмотрит справедливость и обратного предложения: *если производная какой-либо функции положительна (отрицательна), то сама эта функция возрастает (убывает).*

Пример. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Так как $y' = \frac{1}{1+x^2} > 0$, то y — возрастающая функция от x.

Следует предостеречь читателя от часто встречающегося заблуждения. Именно, не надо думать, что производная положительной функции сама также обязательно положительна. Например, функция, график которой изображен на рис. 133, положительна (ибо график ее расположен выше оси Ox, так что ординаты точек графика положительны), хотя эта функция убывает и производная ее отрицательна.

Таким образом, знак производной какой-либо функции связан не со знаком самой этой функции, а с тем, возрастает или убывает эта функция *).

n° 2. Экстремум функции. Функции, обычно встречающиеся на практике, не являются возрастающими или убывающими во всей области своего задания. Чаще дело обстоит так, что промежуток, где задана функция, распадается на несколько участков, на одной части которых функция возрастает, а на другой убывает.

Рассмотрим, например, функцию, изображенную на рис. 136.

---

*) Вот еще пример. Пусть изучается температура какого-либо горячего, но остывающего тела. Так как тело горячее, то его температура положительна, но эта температура убывает, значит, ее производная (по времени) отрицательна.

Весь промежуток $a \leqslant x \leqslant h$, на котором задана эта функция, распадается на следующие участки:

$[a, b]$, где функция возрастает,
$[b, c]$, где функция убывает,
$[c, e]$, где функция возрастает,
$[e, f]$, где функция убывает,
$[f, g]$, где функция возрастает,
$[g, h]$, где функция убывает.

Представляют особый интерес точки b, c, e, f, g, отделяющие друг от друга участки с различным поведением функции. Эти точки

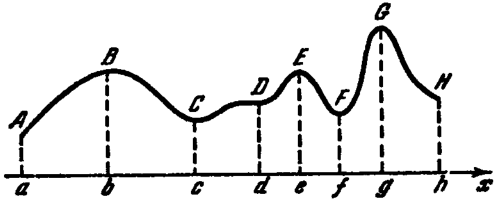


Рис. 136.

называются точками *экстремума функции* (говорят также, что в этих точках функция имеет экстремум). Если к точке экстремума примыкает слева участок, где функция возрастает, а справа — участок, где она убывает, то эта точка называется точкой *максимума функции* (говорят также, что функция имеет в этой точке максимум). У функции, изображенной на рис. 136, точками максимума являются точки b, e и g. Если же левее точки экстремума расположен участок убывания, а справа участок возрастания функции, то точка называется точкой *минимума функции* (на рис. 136 таковы точки c и f).

Итак, мы можем дать следующее

Определение. Если при переходе аргумента (слева направо) через некоторое значение x_0 функция переходит от возрастания к убыванию, то говорят, что в точке $x=x_0$ функция имеет *максимум*, если же функция переходит от убывания к возрастанию, то она имеет в этой точке *минимум*.

Общее название этих точек — *точки экстремума.*

Обратим внимание на то, что каждая точка максимума есть абсцисса такой точки графика функции, которая расположена выше всех других близких к ней точек этого графика. Например, точка e есть абсцисса точки E, лежащей выше всех точек дуги CF. Аналогичное наблюдение можно сделать и относительно точек минимума. Отсюда вытекает возможность определить точки максимума и минимума по-другому:

Определение. Точка x_0 есть точка *максимума функции* $f(x)$, если эта точка лежит внутри такого участка $p < x < q$, что для всех x из этого участка, отличных от x_0, будет

$$f(x) < f(x_0).$$

Для минимума определение аналогичное, лишь вместо неравенства $f(x) < f(x_0)$ надо написать $f(x) > f(x_0)$.

Замечания. 1) Самые названия „максимум“, „минимум“, „экстремум“ находятся в связи с этим определением. Именно, „максимум“ означает по-латыни „большее“, „минимум“ — „меньшее“, а „экстремум“ — „крайнее“ (подразумевается — значение функции).

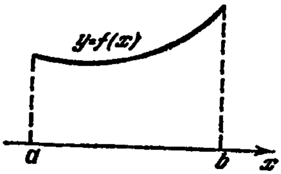


Рис. 137.

2) В определении точки максимума существенно, чтобы функция была определена как левее, так и правее этой точки, т. е. чтобы эта точка была внутренней, а не граничной точкой промежутка задания функции. В случае, изображенном на рис. 137, точка b не служит точкой максимума.

3) Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, то это вовсе не означает, что $f(x_0)$ есть наибольшее значение функции. Например, на рис. 136 в точке e есть максимум, но $f(e)$ меньше, чем значения $f(x)$, отвечающие абсциссам x, близким к g.

n° 3. Принцип Ферма.

Определение. Функцию $f(x)$, заданную на каком-нибудь промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, назовем *гладкой*, если она сама непрерывна на этом промежутке и имеет во всех точках этого промежутка производную, также являющуюся непрерывной функцией. График такой функции называется *гладкой кривой* *).

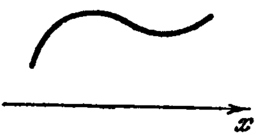


Рис. 138.

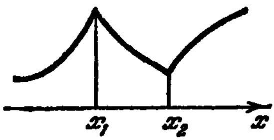


Рис. 139.

На рис. 138 и 139 показаны графики гладкой и негладкой функций. На рис. 139 точки x_1 и x_2 будут точками разрыва производной **) (касательная скачком меняет свое направление).

---

*) Ниже (гл. IV, § 3, n° 5) понятие гладкой кривой будет обобщено.

**) Впрочем, у негладкой (даже непрерывной!) функции производная вообще может не существовать. Как раз так и обстоит дело в точках x_1 и x_2 (на рис. 139).

По отношению к гладким функциям справедлива следующая важная теорема, открытая французским математиком 17-го века П. Ферма.

Теорема Ферма. *Если гладкая функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная в этой точке обращается в нуль*

$$\boxed{f'(x_0)=0}$$

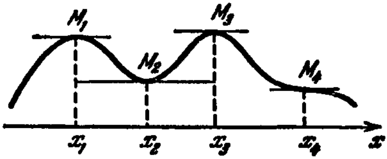


Рис. 140.

Доказательство. Из рис. 140 видно, что касательные к графику функции, проведенные в точках M_1, M_2, M_3, параллельны оси Ox. Стало быть, угловые коэффициенты этих касательных равны нулю:

$$f'(x_1)=0, \quad f'(x_2)=0, \quad f'(x_3)=0.$$

Ввиду большого значения этой теоремы мы дадим и другое ее доказательство.

Рассмотрим какую-либо из точек экстремума функции, изображенной на рис. 140, например точку максимума x_1. Мы видим, что слева к этой точке примыкает участок, на котором функция возрастает, а справа — участок, на котором она убывает. Значит, левее точки x_1 производная положительна, а правее — отрицательна. Но производная $f'(x)$ (ввиду гладкости функции) изменяется непрерывно и потому, переходя от положительных значений к отрицательным, должна стать равной нулю.

Замечание. Необходимо обратить внимание на то, что доказанная теорема необратима, т. е. из того, что при каком-нибудь x_0 будет

$$f'(x_0)=0,$$

вовсе не вытекает, что x_0 — точка экстремума. Например (рис. 140), касательная в точке M_4 параллельна оси Ox и потому

$$f'(x_4)=0,$$

но и левее и правее точки x_4 функция убывает.

Такую точку x_0, в которой $f'(x_0)=0$, но слева и справа от которой функция убывает (возрастает), мы будем называть *точкой остановки* убывания (возрастания). Точка x_4 на рис. 140 является точкой остановки убывания, а точка d на рис. 136 является точкой остановки возрастания.

Наконец, условимся называть *стационарной точкой* функции $f(x)$ всякую точку x_0, в которой производная этой функции обращается в нуль

$$\boxed{f'(x_0)=0.}$$

Пример. Рассмотрим функцию $y=2x^3-12x^2+18x$.

Спрашивается, есть ли у нее точки экстремума и если да, то как их найти. Согласно теореме Ферма точками экстремума могут быть лишь те точки, в которых производная y' нашей функции обращается в нуль (т. е. стационарные точки). Поэтому мы прежде всего находим эту производную

$$y'=6x^2-24x+18.$$

Чтобы найти стационарные точки, надо положить

$$y'=0$$

и решить это уравнение:

$$6x^2-24x+18=0,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=3$.

Теперь надо выяснить характер поведения функции в этих двух точках. Для этого заметим, что точки $x_1=1$ и $x_2=3$ разбивают всю числовую ось на участки (рис. 141) $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, +\infty)$. На этих участках точек экстремума нет (ибо они могут находиться только в корнях производной, т. е. в точках $x_1=1$ и $x_2=3$). Значит, это участки возрастания или убывания функции. Чтобы выяснить, как ведет себя функция на участке $(-\infty, 1)$, возьмем из этого участка какую-нибудь точку (какую — все равно!), например, точку $x=0$. Подставляя это значение $x=0$ в производную y', находим $y'=18$, т. е. $y'>0$. Значит, на участке $(-\infty, 1)$ наша функция возрастает. Аналогично, взяв хотя бы $x=2$ из участка $(1, 3)$ и подставив это x в производную y', находим $y'=-6$, т. е. $y'<0$. Стало быть, на участке $(1, 3)$ функция убывает. Наконец, взяв из участка $(3, +\infty)$ какое-либо x (хотя бы $x=1000$), сразу видим, что для него будет $y'>0$, т. е. участок $(3, +\infty)$ есть участок возрастания нашей функции*). На рис. 141 схематически показаны знаки y' на упомянутых участках.

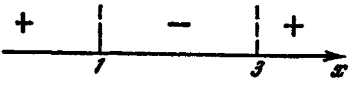


Рис. 141.

Из сказанного ясно, что в точке $x_1=1$ наша функция имеет максимум, а в точке $x_2=3$ минимум.

---

*) Гораздо поучительнее определить знак y' на участках $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$ при помощи следующего соображения. Ведь $y'=6x^2-24x+18$. Когда x очень велико по абсолютной величине, из написанных трех слагаемых первое, $6x^2$, значительно превосходит все остальные. Поскольку это слагаемое положительно, то такова же и вся сумма. Стало быть, на упомянутых участках и будет $y'>0$.

Результаты произведенного исследования полезно свести в следующую табличку:

x	y	Характеристика
1	8	максимум
3	0	минимум

Чтобы иметь более полное представление об исследованной функции, построим ее график. Если учесть, что при $x=0$ будет $y=0$, т. е., что этот график проходит через начало координат, то без дальнейших пояснений понятно, что график таков, как на рис. 142*).

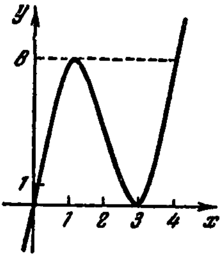


Рис. 142.

Из соображений, подробно изложенных в разобранном примере, вытекает следующее

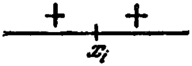
Рис. 143.

Правило. *Чтобы исследовать поведение какой-нибудь функции* $y=f(x)$, *нужно:*

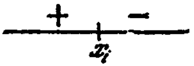
1. *Найти ее производную* $y'=f'(x)$.

2. *Приравнять эту производную нулю и решить полученное уравнение* $f'(x)=0$. *Его корни* $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$ *являются стационарными точками.*

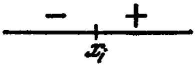
3. *Подвергнуть стационарные точки дополнительному исследованию, для чего нанести их на числовую ось и определить знаки* $f'(x)$ *на отдельных участках оси (рис. 143). Зная эти знаки, можно определить характер каждой стационарной точки* x_i *по схеме:*



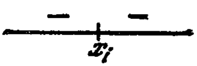
x_i — точка остановки возрастания,



x_i — точка максимума,



x_i — точка минимума,



x_i — точка остановки убывания.

*) Для сокращения размеров рисунка на осях Ox и Oy выбраны разные масштабы.

4. *Найденные результаты следует свести в таблицу вида*

x	y	Характеристика
x_1	$f(x_1)$	максимум
x_2	$f(x_2)$	минимум
x_3	$f(x_3)$	остановка возрастания

Произведенное исследование функции рекомендуется сопровождать построением ее графика, на котором помимо стационарных точек следует указать точки пересечения с осями координат, а также характер поведения функции при безграничном возрастании и убывании аргумента, для чего следует найти пределы

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Рассмотрим еще три примера, ограничиваясь самыми краткими пояснениями.

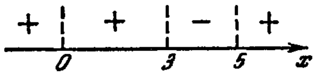


Рис. 144.

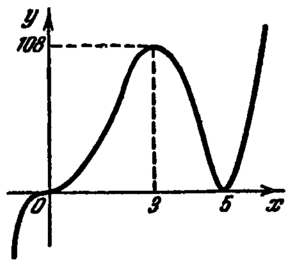


Рис. 145.

Пример 1. Исследовать функцию $y=x^3(x-5)^2$.

1. $y'=3x^2(x-5)^2+x^3\cdot 2(x-5)=x^2(x-5)(5x-15)=$
$=5x^2(x-3)(x-5)$.

2. $y'=0$ или $5x^2(x-3)(x-5)=0$, $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=5$.

3. Исследуем поведение функции между полученными точками. Знаки y' на участках $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 5)$ и $(5, +\infty)$ показаны на рис. 144.

4. Результаты заносим в таблицу

x	y	Характеристика
0	0	остановка возрастания
3	108	максимум
5	0	минимум

и строим график *) функции (рис. 145).

*) Масштабы на осях разные!

Следует отметить, что построенный график дает лишь качественную картину функции: на нем указаны поворотные точки (т. е. точки экстремума) и точки остановки функции, точки обращения ее в нуль (это абсциссы пересечений графика с осью Ox) и т. п. Однако количественная сторона дела передается нашим графиком плохо, и снимать с рисунка значения функции либо вовсе не удается, либо же удается очень грубо. Чтобы улучшить количественную характеристику функции, даваемую ее графиком, надо нанести на рисунок достаточное число контрольных точек. Мы оставим эту сторону дела без внимания.

Пример 2. Исследовать функцию $y=\frac{x}{x^2+4}$.

1. $y'=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$.
2. $y'=0$, $x_1=-2$, $x_2=2$.
3. Строим схему, изображенную на рис. 146.
4.

x	y	Характеристика
-2	$-{}^1/_4$	минимум
$+2$	$+{}^1/_4$	максимум

5. Находим $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} y=0$.

Замечая, наконец, что при $x=0$ будет $y=0$, видим, что график нашей функции *) выглядит так, как показано на рис. 147. Ясно, что ось Ox служит асимптотой построенной кривой.

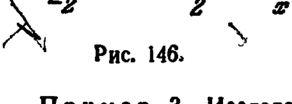


Рис. 146.

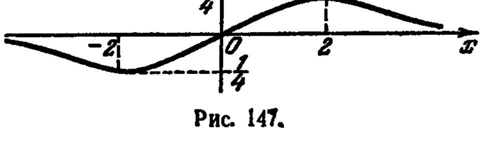


Рис. 147.

Пример 3. Исследовать функцию

$$y=\frac{\sin x}{2+\cos x}. \tag{1}$$

Здесь появляется некоторый новый момент, которого не было в предыдущих примерах. Именно, функция $y=f(x)$, которую нам

*) Масштабы на осях разные!

надо исследовать, **имеет период** 2π, т. е. удовлетворяет соотношению $f(x+2\pi)=f(x)$.

В связи с этим нам достаточно изучить нашу функцию на каком-либо отрезке длины 2π, чтобы получить полное представление о ней. Исследовать же поведение $f(x)$ при $x\to\pm\infty$ нам не надо. Изучим нашу функцию (1), например, на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

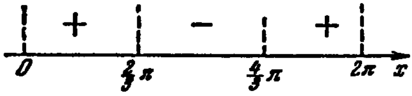


Рис. 148.

Из (1) вытекает, что

$$y'=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}.$$

Полагая $y'=0$, получим

$$\cos x=-\frac{1}{2}.$$

При $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ имеется два значения x, удовлетворяющие этому уравнению:

$$x_1=\frac{2\pi}{3},\quad x_2=\frac{4\pi}{3}.$$

Вычисляя y' при $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$, $x=\frac{3\pi}{2}$, определяем знаки y' на участках $\left(0,\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3},\ 2\pi\right)$ (рис. 148). Мы видим,

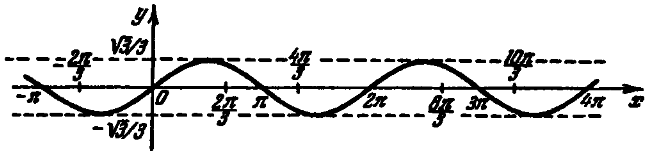


Рис. 149.

что это участки возрастания, убывания и возрастания функции (1). Таким образом, можно составить табличку:

x	y	Характеристика
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\cong 0{,}58$	максимум
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}\cong -0{,}58$	минимум

Отметим еще, что при $x=0$ (а значит, и при $x=2\pi$) будет $y=0$. Кроме того, значение $y=0$ достигается еще в точке $x=\pi$. Все это показывает, что график нашей функции имеет вид, изображенный на рис. 149.

n° 4. Второй способ исследования стационарных точек. Будем предполагать, что исследуемая функция $f(x)$ не только гладкая, но что у нее существует и непрерывная вторая производная $f''(x)$. Тогда справедлива

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ имеет стационарную точку x_0, лежащую строго внутри промежутка задания $f(x)$, причем $f''(x_0) \neq 0$. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум, а если $f''(x_0) < 0$, то $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум.*

Доказательство. Пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ точку x_0 можно заключить в столь малый участок $a < x_0 < b$, что во всех точках этого участка также будет $f''(x) > 0$ *). Тогда на всем этом участке (a, b) первая производная $f'(x)$ возрастает. Но здесь $f'(x_0) = 0$. Значит, на участке (a, x_0) будет $f'(x_0) < 0$, а на участке (x_0, b) будет $f'(x) > 0$.

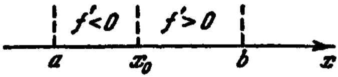


Рис. 150.

Эта комбинация знаков производной (рис. 150) и обеспечивает наличие в точке x_0 минимума. В случае максимума доказательство аналогично.

Пример. Исследовать функцию $y = 2x^3 + 3x^2$.

Решение. $y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $y'' = 12x + 6$. Полагая $y' = 0$, находим $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Так как $y''(-1) = -6 < 0$, то при $x = -1$ максимум, а поскольку $y''(0) = +6 > 0$, то при $x = 0$ минимум:

x	y	Характеристика
-1	$+1$	максимум
0	0	минимум

Чтобы построить график нашей функции (рис. 151), надо отметить еще, что он пересекает ось Ox в точках $x = \frac{-3}{2}$ и $x = 0$.

Замечание 1. Если окажется $f''(x_0) = 0$, то второй способ неприменим. Тогда нужно использовать способ, изложенный в n° 3, так как в этом случае x_0 может оказаться точкой экстремума.

Пример. Пусть $y = x^4$. Тогда $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$. Полагая $y' = 0$, получаем $x = 0$. Так как $y''(0) = 0$, то второй способ неприменим.

---

*) Ибо для x, близких к x_0, значения $f''(x)$ будут близки к положительному числу $f''(x_0)$, а стало быть, и сами будут положительны.

Исследуя нашу функцию способом n° 3, устанавливаем, что в точке $x=0$ имеется минимум, так что график функции имеет вид, изображенный на рис. 152.

Замечание 2. Если точка x_0 — точка остановки, то $f''(x_0)=0$. Это непосредственно вытекает из доказанной теоремы.

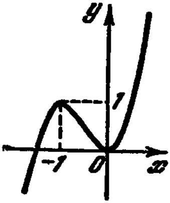


Рис. 151.

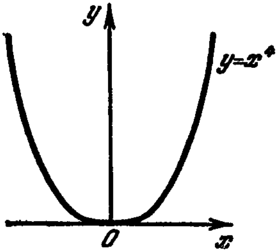


Рис. 152.

Однако предыдущий пример показывает, что последнее утверждение необратимо, т. е. из того факта, что в стационарной точке x_0 оказывается $f''(x_0)=0$, еще не следует, что здесь налицо точка остановки (в предыдущем примере в стационарной точке $x=0$ оказалось $y''(0)=0$ и все же там был минимум, а не остановка!).

n° 5. Нахождение наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции. Пусть $y=f(x)$ — функция, заданная и непрерывная *) на некотором отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Как уже упоминалось, такой отрезок принято обозначать символом $[a, b]$. Во многих прикладных вопросах бывает важно найти те значения аргумента x, которым отвечают наибольшее и наименьшее значения нашей функции. Так как обе эти задачи решаются одинаково, то мы ограничимся рассмотрением того, как находится наибольшее значение функции.

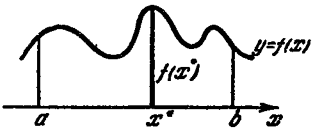


Рис. 153.

Пусть из всех значений, принимаемых нашей функцией на отрезке $[a, b]$, наибольшим оказывается $f(x^*)$, т. е. значение, которое соответствует значению аргумента $x=x^*$. Если x^* лежит внутри отрезка $[a, b]$, т. е. справедливы строгие неравенства

$$a < x^* < b,$$

то (см. рис. 153) x^* будет точкой максимума $f(x)$. Однако может оказаться, что x^* совпадает с одним из концов a или b

*) В действительности, в этом n° мы рассматриваем только гладкие функции.

отрезка $[a, b]$ (см. рис. 154, где $x^* = b$). В этом случае точка x^* может и не быть точкой максимума функции $f(x)$ *). На рис. 154 как раз и показан такой случай.

В силу сказанного можно формулировать следующее

Правило. *Чтобы найти наибольшее значение непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, надо найти все ее точки максимума $x_1, x_2, \ldots, x_n$, лежащие строго внутри $[a, b]$, и выбрать наибольшее из чисел*

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(a),\ f(b).$$

Замечания. 1) Если внутри $[a, b]$ есть только одна точка экстремума $f(x)$ и это точка максимума, то (см. рис. 155) именно здесь и достигается наибольшее значение $f(x)$.

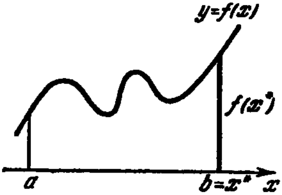


Рис. 154.

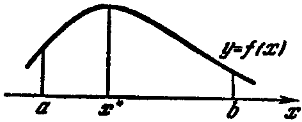


Рис. 155.

2) Еще более простым (и в то же время чрезвычайно часто встречающимся на практике) оказывается случай, когда требуется найти наибольшее значение гладкой **) функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющей следующим трем условиям:

А. Если $a < x < b$, то $f(x) > 0$. Б. $f(a) = f(b) = 0$. В. Между a и b имеется единственная стационарная точка $x = x^*$ функции $f(x)$.	(*)

Тогда без всякого дополнительного исследования можно гарантировать, что $f(x^*)$ и будет искомым наибольшим значением $f(x)$. В самом деле, искомое значение обязательно положительно, и

---

*) Если $f(x)$ задана только на $[a, b]$, то (по самому определению точки максимума) концевые точки $x = a$ и $x = b$ не могут быть точками максимума. Однако даже и тогда, когда $f(x)$ определена в более широкой области, чем $[a, b]$, ее наибольшее (на $[a, b]$!) значение может достигаться в точке $x = b$, не являющейся точкой максимума. Именно такой случай и изображен на рис. 154.

**) Мы уже сказали, что в этом п° рассматриваем только гладкие функции.

потому оно достигается в точке, лежащей строго внутри $[a, b]$, т. е. в точке максимума функции $f(x)$, а кроме как в x^* точек максимума у $f(x)$ быть не может, ибо эти точки по теореме Ферма обязаны быть стационарными.

Примеры.

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^3 + 6x^2$$

на отрезке $[-3, 1]$.

В нашем случае $y' = 3x^2 + 12x$, $y'' = 6x + 12$.

Полагая $y' = 0$, находим стационарные точки $x_1 = -4$, $x_2 = 0$. Первая из них лежит вне интересующего нас отрезка, и мы оставляем ее без внимания. Для второй точки имеем

$$y''(0) = 12 > 0,$$

и потому здесь налицо минимум. На основании замечания 1) можно утверждать, что значение $y(0) = 0$ будет наименьшим на отрезке $[-3, 1]$ значением нашей функции. Чтобы найти ее наибольшее значение, вычисляем величины

$$y(-3) = 27, \quad y(1) = 7.$$

Отсюда ясно, что

$$y_{\text{наиб}} = y(-3) = 27.$$

2) Найти наибольшее значение функции

$$y = x^2 e^{-x}$$

на отрезке $[-1, 3]$.

Здесь $y' = (2x - x^2)e^{-x}$, $y'' = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$.

Полагая $y' = 0$, находим $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Обе эти точки лежат внутри нашего отрезка. Так как

$$y''(0) = 2, \quad y''(2) = -2e^{-2},$$

то максимум достигается при $x = 2$. Вычисляем величины *)

$$y(-1) = e, \quad y(2) = 4e^{-2}, \quad y(3) = 9e^{-3}.$$

Учитывая, что $e \cong 2{,}72$, находим, что

$$y_{\text{наиб}} = y(-1) = e.$$

---

*) Так как правее точки максимума функция убывает, то без вычислений ясно, что при $x = 3$ наибольшего значения быть не может. Поэтому мы могли бы и не находить $y(3)$.

n° 6. **Задачи конкретного характера.** Покажем применение изложенной теории для решения разнообразных задач конкретного характера.

Задача 1. Из имеющихся досок можно построить забор длиной 200 *м*. Требуется огородить прямоугольный двор наибольшей площади, используя для одной стороны двора стену близлежащего здания.

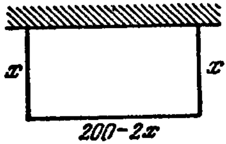


Рис. 156.

Решение. Обозначим (рис. 156) через x длину тех сторон забора, которые перпендикулярны стене здания. Тогда длина стороны, параллельной стене, будет равна $200-2x$, а площадь двора будет

$$F=x(200-2x)=200x-2x^2.$$

Это функция аргумента x. По смыслу задачи x изменяется на отрезке *) $[0, 100]$. Дело сводится к нахождению наибольшего значения этой функции на указанном отрезке. Применяя изложенную теорию, находим

$$F'=200-4x, \quad F''=-4.$$

Полагая $F'=0$, находим стационарную точку $x=50$. Так как $F''<0$, то здесь максимум. Поскольку этот максимум есть единственный экстремум, лежащий внутри $[0, 100]$, то ему и соответствует $F_{\text{наиб}}$.

Итак, размеры двора таковы 50 *м* $\times 100$ *м*, а площадь его 5000 *м*^{2}. Если взять другие размеры, например 45 *м* $\times 110$ *м* или 55 *м* $\times 90$ *м*, то получаются дворы с меньшими площадями.

Замечание. Если применить замечание 2) из n° 5, то задачу можно решить быстрее. Действительно, без всяких вычислений ясно, что при $x=0$ и при $x=100$ будет $F=0$, а при $0<x<100$ будет $F>0$. Таким образом, исследуемая функция удовлетворяет первым двум (А и Б) из условий (*) n° 5. Кроме того, как мы видели, внутри интересующего нас отрезка $[0, 100]$ у этой функции оказалась только одна стационарная точка $x=50$. Стало быть, на основании упомянутого замечания при $x=50$ и достигается $F_{\text{наиб}}$.

Задача 2. Прямоугольный жестяной лист имеет размеры 8 *дм* $\times 5$ *дм*. Требуется вырезать по его углам такие квадратики, чтобы после загибания остающихся кромок (рис. 157) получилась коробка наибольшей вместимости.

Решение. Обозначим через x сторону вырезаемого квадрата. По смыслу задачи ясно, что $0 \leqslant x \leqslant 2{,}5$. Так как стороны

*) Случаи $x=0$ и $x=100$ являются случаями вырождения. Для полноты исследования мы их не исключаем.

остающегося прямоугольника будут $8-2x$ и $5-2x$, то объем коробки оказывается равным

$$V=x(8-2x)(5-2x)=4x^3-26x^2+40x.$$

Требуется найти $V_{\text{наиб}}$ на отрезке $\left[0, \frac{5}{2}\right]$.

Так как

$$V'=12x^2-52x+40,$$

то корнями уравнения $V'=0$ будут $x_1=1$ и $x_2=\frac{10}{3}$. Второй лежит вне интересующего нас отрезка и отбрасывается. Так как при $x=0$

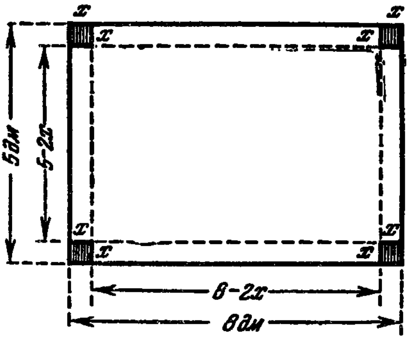


Рис. 157.

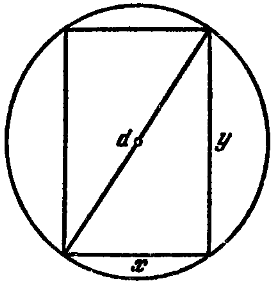


Рис. 158.

и $x=\frac{5}{2}$ будет $V=0$, а при $0<x<\frac{5}{2}$ будет $V>0$, то на основании замечания 2) из п° 5 ясно, что $V_{\text{наиб}}$ достигается при $x=1$.

Задача 3. Из круглого бревна надо вырезать брус прямоугольного сечения так, чтобы получилось наименьшее количество отходов.

Непосредственно ясно, что эта практическая задача совершенно равносильна чисто геометрической задаче: в данный круг вписать прямоугольник наибольшей площади (рис. 158).

Решение. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x, а другую через y. Тогда площадь прямоугольника выражается формулой $F=xy$.

Таким образом, F выражается в виде функции двух аргументов, в то время как вся изученная нами теория относится к функциям одного аргумента. Однако в нашей задаче это обстоятельство представляет собой только кажущееся препятствие, ибо величины x и y независимы друг от друга. Действительно, если d — диаметр круга, то по теореме Пифагора

$$y=\sqrt{d^2-x^2}$$

и F оказывается функцией одного x:

$$F=x\sqrt{d^2-x^2}.$$

Вопрос свелся к нахождению наибольшего значения этой функции на отрезке $[0, d]$.

Задачу, к которой мы пришли, можно решить обычными приемами. Мы, однако, пойдем немного другим путем, чтобы упростить выкладки. Именно, вместо F мы рассмотрим функцию

$$z=F^2.$$

Очевидно, что z достигает наибольшего значения при том же самом x что и F. В то же время z выражается формулой

$$z=d^2x^2-x^4,$$

не содержащей никаких иррациональностей.

Так как

$$z'=2d^2x-4x^3,$$

то $z'=0$ при

$$x_1=-\frac{d}{\sqrt{2}},\quad x_2=0,\quad x_3=\frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Точка x_1 лежит вне отрезка $[0, d]$ и отбрасывается. Точка x лежит хотя и на отрезке, но не является **внутренней** и потому тоже отбрасывается (напомним, что при нахождении наибольшего на $[a, b]$ значения $f(x)$ мы приводим вопрос к выборке наибольшего из совокупности двух групп чисел: 1) $f(x_i)$, где x_i — лежащие на $[a, b]$ точки максимума и 2) $f(a)$ и $f(b)$. Так как числа $f(a)$ и $f(b)$ заведомо входят во вторую группу, то в первую их включать не надо, даже если при $x=a$ или $x=b$ есть максимум. Иными словами, нас должны интересовать лишь те точки максимума, которые лежат **строго внутри** $[a, b]$).

Остается точка $x_3=\frac{d}{\sqrt{2}}$. На основании замечания 2) из n° 5 мы можем без дополнительных исследований утверждать, что здесь и достигается $z_{\text{наиб}}$ (ибо при $x=0$ и $x=d$ будет $z=0$), а значит, и $F_{\text{наиб}}$.

Так как $y=\sqrt{d^2-x^2}$, то при $x=\frac{d}{\sqrt{2}}$ будет и $y=\frac{d}{\sqrt{2}}$, т. е. $y=x$. Значит, нами попутно доказана

Теорема. *Из всех прямоугольников, вписанных в один и тот же круг, наибольшую площадь имеет квадрат.*

Чтобы в условиях производства вырезать из круглого бревна брус квадратного сечения, надо через центр торца провести два взаимно перпендикулярных диаметра. В свою очередь, чтобы найти центр торца, надо к любой точке его контура приложить вершину прямого угла (предполагается наличие угольника). Так как вписанный прямой угол опирается на диаметр, то указанное построение позволяет найти один из диаметров торца. Повторив это построение (при измененном положении вершины угольника), найдем второй диаметр. Это даст центр торца. Проведя через центр перпендикуляр (при помощи того же угольника!) к одному из диаметров, закончим построение. Обычно эти операции производятся при помощи цветных мелков.

Задача 4. В строительном деле брусья квадратного сечения применяются сравнительно редко, так как желание уменьшить отходы древесины корректируется соображениями конструктивного характера *).

Остановимся на некоторых из этих соображений. Важными механическими характеристиками балки являются ее *прочность* и *жесткость*. Прочность балки — это ее способность выдерживать нагрузки, не разрушаясь, а жесткость — это способность мало изгибаться под нагрузками.

В теории сопротивления материалов доказывается, что наибольшая вертикальная нагрузка, допускаемая горизонтальной балкой прямоугольного сечения с основанием x и высотой y, пропорциональна величине

$$\alpha = xy^2,$$

а жесткость той же балки, измеряемая величиной прогиба **), пропорциональна величине

$$\beta = xy^3.$$

Найдем размеры прямоугольной балки наибольшей прочности, которую можно вырезать из данного круглого бревна. В обозначениях рис. 158 дело сводится к нахождению x и y, при которых будет наибольшей величина

$$\alpha = xy^2.$$

Так как $y^2 = d^2 - x^2$, то

$$\alpha = d^2x - x^3,$$

причем $0 \leqslant x \leqslant d$.

Дифференцируя, находим

$$\alpha' = d^2 - 3x^2.$$

---

*) Впрочем, если брус используется в качестве вертикальной стойки, то и по конструктивным соображениям его сечению полезно придать квадратную форму.

**) Чем меньше прогиб, тем больше жесткость.

Из двух корней α' мы должны рассмотреть лишь положительный

$$x=\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Так как при $x=0$ и $x=d$ будет $\alpha=0$, а для промежуточных x величина α положительна, то при $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$ и достигается $\alpha_{\text{наиб}}$. Для этого x будет

$$y=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

Значит, отношение

$$\frac{y}{x}$$

у балки наибольшей прочности равно $\sqrt{2}$, т. е. примерно 1,4.

На практике пользуются следующим простым приемом. Диаметр AB (рис. 159) точками P и Q делится на 3 равные части. Из этих точек восставляются перпендикуляры PC и QD. Прямоугольник $ACBD$ требуемый. В самом деле, если из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника опущен перпендикуляр, то каждый катет есть средняя пропорциональная между всей гипотенузой и своей проекцией на нее. Поэтому

$$d:AC=AC:\frac{d}{3},$$

откуда и вытекает, что

$$AC=\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

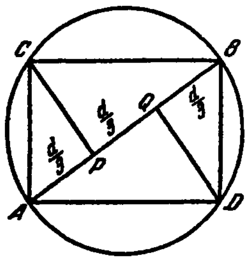


Рис. 159.

Желая найти размеры балки наибольшей жесткости, которую можно вырезать из того же бревна, рассмотрим величину

$$\beta=xy^3=y^3\sqrt{d^2-y^2}.$$

Чтобы избежать иррациональностей, положим $\beta^2=z$ и будем искать y, при котором наибольшей окажется величина

$$z=d^2y^6-y^8\qquad(0\leqslant y\leqslant d).$$

Здесь

$$z'=6d^2y^5-8y^7.$$

Корень $y=0$, лежащий на конце отрезка $[0, d]$, отбрасывается, так же как и отрицательный корень $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}d$. Остается корень

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}d.$$

По тем же соображениям, что и выше, этому значению y и отвечает $\beta_{наиб}$. Соответствующее значение $x=\frac{d}{2}$. Построение требуемого прямоугольника видно из рис. 160, где

$$AP=BQ=\frac{1}{4}d.$$

Задача 5. В данный конус вписать цилиндр наибольшего объема.

Решение. Обозначая через r и h радиус и высоту цилиндра, имеем $V=\pi r^2 h$.

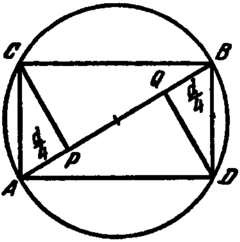


Рис. 160.

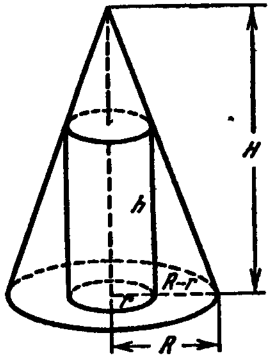


Рис. 161.

Здесь V выступает как функция двух аргументов. Однако, как показывает рис. 161, справедливо соотношение

$$\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R},$$

где R и H — радиус основания и высота конуса. Отсюда

$$V=\frac{\pi H}{R}(R-r)\,r^2,$$

т. е. V — функция одного r. Очевидно, $0\leqslant r\leqslant R$.

Так как

$$V'=\frac{\pi H}{R}(2Rr-3r^2),$$

то имеются две стационарные точки $r=0$ и $r=\frac{2}{3}R$. Первая отбрасывается как лежащая на конце отрезка $[0, R]$, а вторая дает искомое наибольшее значение V. Само это значение равно

$$V_{наиб}=\frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

Вспоминая, что объем конуса равен $\frac{1}{3}\pi R^2 H$, видим, что объем искомого цилиндра составляет 4/9, т. е. примерно 44% объема конуса.

Задача 6 Над центром круглого стола надо повесить лампу. Найти, при какой высоте подвески на краях стола получится наибольшая освещенность.

Решение. Введем обозначения рис. 162. Из физики известно, что освещенность I в точке A выражается формулой

$$I=k\frac{\sin\varphi}{l^2},$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности. Замечая, что

$$\cos\varphi=\frac{r}{l},$$

получаем, что

$$I=\frac{k}{r^2}\sin\varphi\cos^2\varphi.$$

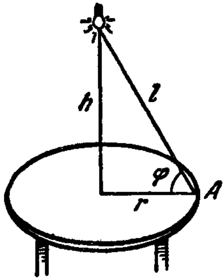


Рис. 162.

Надо найти наибольшее значение этой функции на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Так как

$$I'=\frac{k}{r^2}(\cos^3\varphi-2\sin^2\varphi\cos\varphi),$$

то внутри отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ есть только один корень I'. Этим корнем является угол φ_0, для которого

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ввиду того, что при $\varphi=0$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$ будет $I=0$, а при $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ будет $I>0$, ясно, что углу φ_0 и отвечает $I_{наиб}$.

Требуемая высота подвеса равна

$$h=r\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{r\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}7r.$$

n° 7. Графики разрывных функций. До сих пор в этой главе мы изучали, как исследуются непрерывные функции. Однако на практике встречаются и разрывные функции.

Чаще всего такими оказываются дробные функции, которые имеют разрывы в точках обращения знаменателя в нуль.

Исследование такой функции и следует начинать с нахождения корней ее знаменателя. Найдя эти корни, т. е. точки разрыва исследуемой функции, их надо нанести на ось абсцисс и выяснить, как ведет себя функция при приближении x к этим точкам (справа и слева), причем результаты эти тоже сразу наносятся на график. После этого исследование функции ведется так же, как для непрерывной функции, с тем лишь отличием, что для определения знаков производной на участках числовой оси на эту ось наносятся не только стационарные точки, но и точки разрыва.

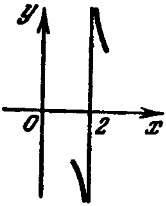


Рис. 163.

Примеры. 1) Исследовать функцию

$$y=\frac{x^2}{x-2}$$

и построить ее график.

Решение. Ищем точки разрыва, для чего приравниваем знаменатель нулю: $x-2=0$. Отсюда следует, что точка разрыва есть $x=2$. Исследуем поведение функции справа и слева от $x=2$. При $x\to 2+0$ *) будет $y\to+\infty$, а при $x\to 2-0$ оказывается $y\to-\infty$. Эти результаты мы сразу же наносим на рисунок (см. рис. 163). Прямая $x=2$ оказывается асимптотой графика нашей функции.

Находим стационарные точки. Так как $y'=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$, то, полагая $y'=0$, получим последовательно $\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=0$, $x^2-4x=0$, откуда следует, что стационарными являются точки $x_1=0$ и $x_2=4$. Для исследования этих точек разбиваем числовую ось на участки точками $x=0$, $x=2$ и $x=4$ (т. е. включаем в число точек деления и точку разрыва $x=2$). Знаки производной на участках оси видны из рис. 164, так что результаты исследования можно изобразить следующей таблицей:

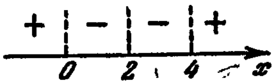


Рис. 164.

x	y	Характеристика
0	0	максимум
2	—	точка разрыва
4	8	минимум

*) Символом $x\to 2+0$ обозначается такое стремление x к 2, при котором x остается больше 2. Аналогичный смысл имеет $x\to 2-0$.

Далее мы находим пределы

$$\lim_{x\to+\infty} y=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$$

и, наконец, отмечаем, что с осями координат график исследуемой функции пересекается только в начале координат.

Все сказанное позволяет закончить построение графика *) (рис. 165).

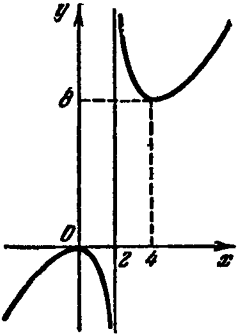


Рис. 165.

2) Исследовать функцию

$$y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

и построить ее график.

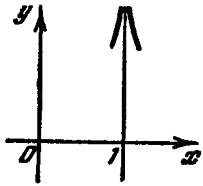


Рис. 166.

Решение. Приравнивая нулю знаменатель $(x-1)^2$ нашей функции, находим точку разрыва $x=1$. При $x\to1+0$ и $x\to1-0$ будет $y\to+\infty$. Этот факт наносим на график (рис. 166), после чего ведем исследование обычным образом.

Дифференцируя нашу функцию, получаем

$$y'=-\frac{x+1}{(x-1)^3}.$$

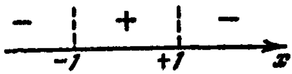


Рис. 167.

Стационарной будет точка $x=-1$. Нанося на ось точки $x=-1$ и $x=+1$, получаем следующее распределение знаков y' (рис. 167) **). Это позволяет составить таблицу:

x	y	Характеристика
-1	$-1/8$	минимум
$+1$	—	разрыв

*) Переписав задание нашей функции в виде $y(x-2)-x^2=0$, замечаем, что ее график есть кривая 2-го порядка. Методами гл. I мы можем построить эту линию точнее (например, найти ее вторую асимптоту).

**) Мы могли бы исследовать точку $x=-1$ и при помощи 2-й производной, так как около этой точки нет никаких точек разрыва и применимо все сказанное в п° 4.

Остается заметить, что график пересекается с осями лишь в начале координат, а также что при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ будет $y \to 0$. Окончательный вид графика показан на рис. 168.

Замечание. На этом примере видно, что при разбиении оси на участки обязателен учет точки разрыва.

Действительно, если бы мы эту точку не приняли во внимание, то могли бы рассуждать так: „чтобы определить знаки y' левее и правее точки $x = -1$, найдем $y'(-2)$ и $y'(+2)$. Так как

$$y'(-2) = -\frac{1}{27}, \quad y'(+2) = -3,$$

то при $x = -1$ остановка убывания". Значит, пренебрежение сделанным выше указанием может привести к ошибке (ведь на самом-то деле при $x = -1$ не остановка убывания, а минимум!).

n° 8. Острый экстремум. Рассмотрим теперь функцию,

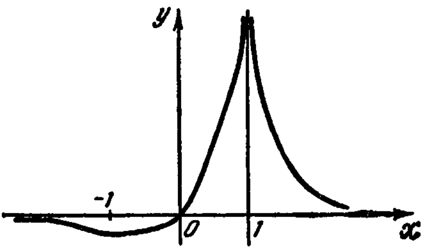


Рис. 168.

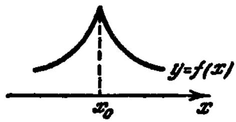


Рис. 169.

которая сама является непрерывной, но производная которой разрывна. Если у такой функции экстремум находится в точке разрыва производной, то этот экстремум называется *острым*.

Напротив, экстремум изученного выше типа, т. е. находящийся в точке, где производная непрерывна, называется *гладким*. На рис. 169 изображен острый максимум.

Учитывая возможность и острых экстремумов, исследование функции надо производить так:

1. Найти y'.

2. Найти как точки, где $y' = 0$ (в них возможен гладкий экстремум), так и точки разрыва y' (в них возможен острый экстремум).

3. Все найденные точки нанести на числовую ось и определить знаки y' на участках оси.

Пример. Пусть $y = (x - 5)\sqrt[3]{x^2}$.

Эта функция непрерывная. Ее производная такова:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Полагая $y' = 0$, находим $x_1 = 2$, а полагая $\sqrt[3]{x} = 0$, находим $x_2 = 0$.

В точке $x_1=0$ производная y' имеет разрыв. Таким образом, исследованию подлежат точки $x=0$ и $x=2$. Распределение знаков производной на участках $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$, изображенное на рис. 170, показывает, что в точке $x=2$ имеется гладкий

Рис. 170.

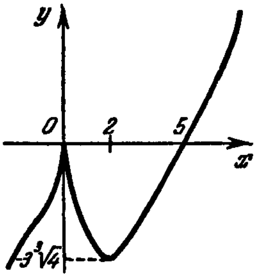


Рис. 171.

минимум, а в точке $x=0$ острый максимум. Эти результаты сведены в следующую таблицу:

x	y	Характеристика
0	0	острый максимум
2	$-3\sqrt[3]{4} \cong 4{,}76$	минимум

Заметим, далее, что $y=0$ при $x=0$ и при $x=5$. Наконец,

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} y=+\infty.$$

Итак, график нашей функции имеет вид, изображенный на рис. 171.

§ 6. Основные теоремы дифференциального исчислении

n° 1. Теорема Ролля. В этом параграфе мы установим ряд важных теорем. Начнем с теоремы, принадлежащей французскому математику Роллю [M. Rolle, 1652—1719].

Теорема. *Пусть $f(x)$ — гладкая*) на отрезке $[a, b]$ функция. Если*

$$f(a)=0, \quad f(b)=0,$$

то между a и b обязательно найдется хотя бы одна такая точка c $(a<c<b)$, что

$$\boxed{f'(c)=0.}$$

---

*) Напомним, что функция называется гладкой, если она сама непрерывна и имеет непрерывную же производную.

Иными словами, *между двумя корнями гладкой функции обязательно имеется корень ее производной.*

Доказательство. Пусть m и M — наименьшее и наибольшее из значений $f(x)$ на $[a, b]$. Может оказаться, что $m = M$. Это будет означать, что $f(x) = \text{const}$ и тогда $f'(x) \equiv 0$, т. е. искомой точкой c оказывается любая точка, лежащая между a и b.

Пусть теперь $m \neq M$. Тогда из чисел m и M хотя бы одно не равно 0. Пусть для определенности $m \neq 0$ и пусть x^* — то значение аргумента x, при котором $f(x)$ принимает значение m:

Рис. 172.

$$f(x^*) = m.$$

Ясно, что x^* не может совпасть ни с a, ни с b, так как $f(a) = f(b) = 0$, а $f(x^*) = m \neq 0$, и поэтому x^* (рис. 172) расположена между точками a и b:

$$a < x^* < b.$$

Итак, гладкая функция $f(x)$ принимает наименьшее значение m во внутренней точке отрезка $[a, b]$, т. е. в точке x^* функция имеет (гладкий!) минимум и по принципу Ферма $f'(x^*) = 0$, а потому x^* и является требуемой точкой c.

Теорема доказана.

n° 2. Формула конечных приращений.

Теорема Лагранжа. Если на отрезке $[a, b]$ дана гладкая функция $f(x)$, то между a и b обязательно найдется хотя бы одна такая точка c $(a < c < b)$, что верна формула

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},}$$

которая называется формулой конечных приращений или формулой Лагранжа *).

Доказательство. Составим, исходя из $f(x)$, новую функцию $\varphi(x)$, определив ее формулой

$$\varphi(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - [f(b) - f(a)](x - a).$$

Ясно, что функция $\varphi(x)$ непрерывна и имеет непрерывную же производную

$$\varphi'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)].$$

*) J. L. Lagrange (1736—1813) — французский математик.

Поэтому $\varphi(x)$ — гладкая функция. Кроме того, непосредственно из формулы, определяющей $\varphi(x)$, видно, что

$$\varphi(a)=0, \qquad \varphi(b)=0.$$

Таким образом, $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, и потому между a и b найдется такое c, что $\varphi'(c)=0$, или, что то же самое,

$$f'(c)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0,$$

а тогда

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

т. е. c — требуемое. Теорема доказана.

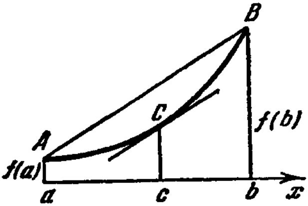


Рис. 173.

Замечание. Из рис. 173 видно, что дробь $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ будет угловым коэффициентом хорды AB. С другой стороны, $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной в точке $C[c, f(c)]$. Отсюда вытекает

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. *На любой дуге гладкой кривой найдется точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей дугу.*

n° 3. Обобщенная формула конечных приращений. Теорема Лагранжа допускает следующее обобщение.

Теорема Коши *). *Если на отрезке $[a, b]$ даны две гладкие функции $f(x)$ и $g(x)$, то между a и b обязательно найдется хотя бы одна такая точка c, что верна формула*

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},}$$

которая называется обобщенной формулой конечных приращений или формулой Коши.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$\psi(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)].$$

Эта функция, так же как и ее производная

$$\psi'(x)=f'(x)[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]g'(x),$$

непрерывна. Непосредственно из выражения $\psi(x)$ видно, что $\psi(a)=0$ и $\psi(b)=0$. Значит, для $\psi(x)$ выполнены условия теоремы Ролля, и потому между a и b найдется такое c, что $\psi'(c)=0$, или, что то же

*) A. L. Cauchy (1789—1857) — знаменитый французский математик.

самое,

$$f'(c)[g(b)-g(a)]-[f(b)-f(a)]g'(c)=0.$$

Отсюда

$$f'(c)[g(b)-g(a)]=[f(b)-f(a)]g'(c)$$

и *)

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

что и доказывает теорему.

Замечание. Если написать обобщенную формулу конечных приращений для частного случая $g(x)=x$, то она примет вид

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1},$$

т. е. превратится в обыкновенную формулу конечных приращений.

n° 4. Признак постоянства функции. Мы знаем, что если функция постоянна, то ее производная равна нулю. Оказывается, что верно и обратное.

Теорема. *Пусть на $[a, b]$ задана $f(x)$, имеющая производную $f'(x)$. Если при всех x из $[a, b]$ окажется, что $f'(x)$ равна нулю, то можно утверждать, что*

$$\boxed{f(x)\equiv \text{const.}}$$

Доказательство. Выберем и закрепим какую-нибудь точку x из отрезка $[a, b]$ и применим теорему Лагранжа к отрезку $[a, x]$. По этой теореме между a и x найдется такое c, что

$$f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Но c лежит на $[a, b]$, значит, $f'(c)=0$ и потому

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0,$$

или $f(x)-f(a)=0$ и $f(x)=f(a)$, а так как x любое, то теорема доказана.

Пример. Пусть $-1<x<1$ и $\varphi(x)=\arcsin x+\arccos x$. Тогда

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

*) Этот переход законен только при $g'(c)\neq 0$ и $g(b)-g(a)\neq 0$. Поэтому формулировка теоремы для большей строгости должна была бы быть дополненной так, чтобы можно было гарантировать указанные неравенства. Мы оставляем это в стороне.

Поэтому $\varphi(x) = \text{const}$. Но $\varphi(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Значит, вообще, при всех x из $[-1, +1]$ будет $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

n° 5. Раскрытие неопределенностей. Здесь мы изложим способ раскрытия неопределенностей при помощи производных. Этот способ обычно называют „правилом Лопиталя“ (по имени французского математика *) 17-го века).

Теорема. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две гладкие функции, которые обращаются в нуль в одной и той же точке $x = a$* **):

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0.$$

Если существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

то к тому же пределу стремится и отношение самих функций, т. е.

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} A.}$$

Доказательство. Так как $f(a) = g(a) = 0$, то дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ можно записать и так:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

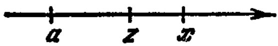


Рис. 174.

По обобщенной формуле конечных приращений между a и x обязательно найдется такая точка z, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Значит,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}, \tag{1}$$

причем z лежит между a и x (рис. 174).

---

*) G.-F. de l'Hospital (1661—1704).

**) Тогда дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$ представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Пусть теперь x стремится к a, тогда и z тоже стремится к a, а так как по условию теоремы

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} \xrightarrow[x \to a]{} A,$$

то в силу (1) будет

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} A,$$

что и доказывает теорему.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x - 7}{2x} = -\frac{3}{4}$.

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{1} = \frac{1}{6}$.

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{\ln x - \ln a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{1}{x}} = 2a \sin a \cos a$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$.

Замечание. Можно доказать, что тем же способом раскрываются и неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$.

2) Пусть $a > 1$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = +\infty$.

Заметив это, возьмем любое $b > 0$. Так как

$$\frac{a^x}{x^b} = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^x}{x}\right]^b,$$

а по уже доказанному

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{b}}\right)^x}{x} = +\infty,$$

то и

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty.}$$

Иначе говоря, *показательная функция растет быстрее степенной.*

n° 6. Оценка точности равенства $\Delta y = dy$. Пусть на отрезке $[a, b]$ дана функция $f(x)$, имеющая непрерывные $f'(x)$ и $f''(x)$. Пусть x_0 и $x_0 + \Delta x$ — две точки из $[a, b]$. По формуле Лагранжа будет

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\bar{x})\,\Delta x,$$

где $\bar{x}$ лежит между x_0 и $x_0 + \Delta x$.

С другой стороны,

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

Отсюда

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = [f'(\bar{x}) - f'(x_0)]\,\Delta x.$$

Вторичное применение формулы Лагранжа дает

$$f'(\bar{x}) - f'(x_0) = f''(x^*)(\bar{x} - x_0),$$

где x^* лежит между x_0 и $\bar{x}$. Значит,

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = f''(x^*)(\bar{x} - x_0)\,\Delta x.$$

Обозначим через M наибольшее значение $|f''(x)|$. Так как $|\bar{x} - x_0| < |\Delta x|$, то, заменяя для простоты x_0 на x, мы приходим к оценке

$$|\Delta f(x) - df(x)| \leqslant M(\Delta x)^2,$$

о которой упоминали еще в § 4 (n° 5).

§ 7. Формула Тейлора

n° 1. Постановка вопроса. Вспомним то определение функции, которое было дано в гл. II: „Переменная y является функцией переменной x, если каждому значению x отвечает определенное значение y“.

В этом определении совершенно не говорится о том, при помощи каких средств находятся те значения y, которые соответствуют заданным значениям x. В тех случаях, когда налицо вычислительная формула, вроде формулы

$$y = x^3$$

или

$$y = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - 7}{x^2 + 6},$$

вопрос ясен. Однако в более сложных случаях дело обстоит не так Например, равенство

$$y = \sin x$$

для человека, знающего только школьный курс тригонометрии, не является вычислительной формулой. То же относится к равенствам

$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad y = \ln x$$

и т. п. Сказанное приводит к важной задаче создания аналитических средств, позволяющих находить значения функции по значениям аргумента. Излагаемая в этом параграфе формула Тейлора представляет собой одно из возможных решений этой задачи.

n° 2. Формула Тейлора для многочлена.

Лемма. *Пусть* $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ *— некоторый многочлен. Какое бы число* a *ни взять, наш многочлен можно записать в форме*

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n,$$

где $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *— некоторые постоянные числа.*

Доказательство. Многочлен $f(x)$ есть сумма степеней x^k, умноженных на постоянные числа c_k. Поэтому достаточно убедиться в возможности записать отдельную степень x^k в форме суммы

$$x^k = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_k(x-a)^k.$$

Последнее, однако, вполне очевидно, так как x можно записать в виде суммы

$$x = a + (x-a)$$

и применить биномиальную формулу Ньютона

$$(p+q)^k = p^k + kp^{k-1}q + \frac{k(k-1)}{2}p^{k-2}q^2 + \ldots + q^k,$$

взяв $p = a$ и $q = x - a$.

Итак, лемма доказана.

Задача. *Зная многочлен* $f(x)$ *и число* a, *найти числа* $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Решение. Пусть

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n. \tag{1}$$

1) Полагая $x = a$, находим $f(a) = A_0$. Итак,

$$A_0 = f(a).$$

2) Продифференцируем (1):

$$f'(x) = A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 2(x-a) + \ldots + A_n n (x-a)^{n-1}. \tag{2}$$

Полагая здесь $x = a$, находим $f'(a) = A_1 \cdot 1$ и

$$A_1 = \frac{f'(a)}{1!}.$$

3) Продифференцируем (2):

$$f''(x)=A_2\cdot 2\cdot 1+A_3\cdot 3\cdot 2(x-a)+\ldots+A_n n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

и положим здесь $x=a$. Тогда $f''(a)=A_2\cdot 1\cdot 2$ и

$$A_2=\frac{f''(a)}{2!}.$$

Продолжая такое рассуждение, получим

$$A_3=\frac{f'''(a)}{3!}$$

и, вообще,

$$A_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Итак, для любого многочлена $f(x)$ и любого числа a верна формула

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,} \tag{3}$$

которая называется *формулой Тейлора* *).

Пример. Пусть $f(x)=x^3-3x^2+4x-8$. Разложить $f(x)$ по степеням $x-2$.

Решение.

$$\begin{aligned} f(x)&=x^3-3x^2+4x-8, & f(2)&=-4,\\ f'(x)&=3x^2-6x+4, & f'(2)&=4,\\ f''(x)&=6x-6, & f''(2)&=6,\\ f'''(x)&=6, & f'''(2)&=6, \end{aligned}$$

и потому

$$x^3-3x^2+4x-8=-4+4(x-2)+3(x-2)^2+(x-2)^3.$$

n°3. Формула Тейлора для любой функции. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная и имеющая непрерывные производные всех порядков. Выберем какие-нибудь a и n и составим многочлен

$$T(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

который будем называть *тейлоровским многочленом* нашей функции $f(x)$. Так как мы не предполагаем, что $f(x)$ — многочлен **), то

*) B. Taylor (1685—1731) — английский математик.

**) Под многочленом (иногда — алгебраическим многочленом) мы, как и выше, понимаем функцию вида $A+Bx+\ldots+Kx^m$.

уже нельзя утверждать, что $f(x)=T(x)$. Однако очень часто оказывается, что разность между $f(x)$ и $T(x)$ весьма мала. Тогда $T(x)$ оказывается хорошим приближенным выражением для $f(x)$. Обычно точность приближенного равенства

$$f(x)\cong T(x)$$

тем выше, чем больше число n. А так как $T(x)$ — обыкновенный алгебраический многочлен, вычисление которого не вызывает никаких затруднений, то формула $f(x)\cong T(x)$ дает средство вычислять и функцию $f(x)$.

Чтобы иметь возможность оценивать ошибку равенства $f(x)\cong T(x)$, нам нужно вывести удобное выражение разности

$$f(x)-T(x).$$

В общем виде выкладки довольно утомительны. Чтобы упростить дело, рассмотрим случай, когда $n=2$, т. е. когда тейлоровский многочлен имеет вид

$$T(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Решение интересующего нас вопроса проводится с помощью следующего искусственного приема *).

Закрепим x и введем функцию $\varphi(t)$ аргумента t, получающуюся из $T(x)$ заменой постоянного числа a переменной величиной t:

$$\varphi(t)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(t)}{2}(x-t)^2.$$

Продифференцируем эту функцию по t (напоминаем, что x закреплен!). Пользуясь правилами дифференцирования суммы и произведения, находим

$$\varphi'(t)=f'(t)+f''(t)(x-t)-f'(t)+\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2-f''(t)(x-t).$$

После очевидных упрощений получаем

$$\varphi'(t)=\frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2.$$

Введем, далее, функцию

$$\psi(t)=\frac{(x-t)^3}{3!}.$$

Очевидно

$$\psi'(t)=-\frac{(x-t)^2}{2}.$$

*) В гл. XIII (§ 1, п° 1) дан другой вывод формулы, которой мы сейчас занимаемся. Он более прост, но требует знания интегрального исчисления.

Применим к паре функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и к отрезку $[a, x]$ обобщенную формулу конечных приращений

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\bar{x})}{\psi'(\bar{x})},$$

где $\bar{x}$ лежит между a и x. Замечая, что по самому определению $\varphi(t)$ будет

$$\varphi(x)=f(x), \qquad \varphi(a)=T(x),$$

а также что

$$\psi(x)=0, \qquad \psi(a)=\frac{(x-a)^3}{3!},$$

и учитывая выражения для $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$, придадим последнему равенству вид

$$\frac{f(x)-T(x)}{-\frac{(x-a)^3}{3!}}=\frac{\frac{f'''(\bar{x})(x-\bar{x})^2}{2}}{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{f(x)-T(x)}{\frac{(x-a)^3}{3!}}=f'''(\bar{x}).$$

Отсюда, пользуясь выражением $T(x)$, получаем формулу

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x-a)^3.} \tag{4}$$

Для простоты мы считали $n=2$. В общем случае аналогично получается формула

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},} \tag{5}$$

где $\bar{x}$ лежит между a и x. Она называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*. Этим „остаточным членом“ является последний член правой части (5), т. е. выражение

$$\boxed{R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.} \tag{6}$$

Точное значение его нам неизвестно, так как мы не знаем точки $\bar{x}$. Однако во многих случаях удается оценить член $R_n(x)$, установив, чего не превосходит абсолютная величина этого члена. Если оказывается, что остаточный член мал, то, пренебрегая им, получаем приближенную формулу

$$f(x)\cong f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Примеры.

1. Применим формулу Тейлора к функции $f(x)=\sin x$, взяв*) $a=0$ и $n=8$.

В нашем случае

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin x, & f(0)&=0,\\ f'(x)&=\cos x, & f'(0)&=1,\\ f''(x)&=-\sin x, & f''(0)&=0,\\ f'''(x)&=-\cos x, & f'''(0)&=-1,\\ f^{(4)}(x)&=\sin x, & f^{(4)}(0)&=0,\\ &\dots\dots & & \end{aligned}$$

Поэтому, обозначая через $\bar{x}$ точку, лежащую между 0 и x, получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{\cos\bar{x}}{9!}x^9.$$

Пренебрегая остаточным членом, получим приближенное равенство

$$\boxed{\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.} \tag{7}$$

Ошибка этого равенства равна $\frac{\cos\bar{x}}{9!}x^9$, ее абсолютная величина не больше чем $\frac{|x|^9}{9!}$. Например, вычисляя по последней формуле $\sin\frac{1}{2}$, мы делаем ошибку, не большую чем

$$\frac{1}{2^9\cdot 9!} < 10^{-8}.$$

Вычисляя синус какого-нибудь угла, выраженного в градусах, надо сначала выразить этот угол в радианах и именно радианную меру угла подставить вместо x в формулу (7). Напомним, что радианная мера x угла, содержащего n градусов, есть

$$x = \frac{n\pi}{180} = \frac{3{,}14159}{180}n = 0{,}0174n.$$

---

*) Частный случай формулы Тейлора, когда $a=0$, т. е. формула

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}$$

называется формулой Маклорена. Никаких разумных оснований это не имеет. Тейлор опубликовал свою формулу (впрочем, без остаточного члена) в 1715 г. Работа же Маклорена (C. Maclaurin) появилась лишь в 1748 г. Название „формула Тейлора“, однако, тоже исторически не оправдано, ибо ее опубликовал швейцарский ученый И. Бернулли (J. Bernoulli) еще в 1694 г.

2) Применим формулу Тейлора к функции $f(x)=e^x$, взяв $a=0$ и $n=7$.

Так как при всех k будет $f^{(k)}(x)=e^x$, то $f^{(k)}(0)=1$ и

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{e^{\bar{x}}}{8!}x^8.$$

В частности, при $x=1$, отбросив остаточный член, имеем

$$e\cong 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}. \tag{8}$$

Ошибка этого равенства есть $\frac{e^{\bar{x}}}{8!}$. Но $0<e^{\bar{x}}<e<3$, поэтому ошибка равенства (8) положительна и меньше $\frac{3}{8!}=\frac{3}{40320}<0{,}00008$. Записывая дроби, входящие в (8), в виде десятичных и удерживая 6 знаков после запятой, находим

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{2!}=0{,}500000\\
\frac{1}{3!}=0{,}166667\\
\frac{1}{4!}=0{,}041667\\
\frac{1}{5!}=0{,}008333\\
\frac{1}{6!}=0{,}001389\\
\frac{1}{7!}=0{,}000198\\
\hline
0{,}718254
\end{array}$$

Отсюда с точностью до 0,0001 получаем

$$e=2{,}7183.$$

n° 4. Некоторые другие формы формулы Тейлора. Заменяя в формуле

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

x на $x+\Delta x$, а a на x, получим

$$f(x+\Delta x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}\Delta x+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}.$$

Перенося $f(x)$ влево и замечая, что $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x)$, получим

$$\boxed{\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n+\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}.} \tag{9}$$

Эта формула дает разложение $\Delta f(x)$ по степеням Δx. Если Δx — бесконечно малая первого порядка, то ошибка равенства

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x$$

есть бесконечно малая второго порядка, а ошибка равенства

$$\Delta f(x)=f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2$$

есть бесконечно малая третьего порядка.

Вспоминая, что произведение

$$f^{(k)}(x)(\Delta x)^k$$

представляет собой дифференциал k-го порядка $d^kf(x)$, мы можем записать формулу Тейлора (9) и так:

$$\boxed{\Delta f(x)=df(x)+\frac{d^2f(x)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(x)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(\bar{x})}{(n+1)!}.}$$

ГЛАВА IV
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 1. Касательная и нормаль

n°1. Проведение касательной. Аналитическая геометрия ставила своей задачей изучение геометрических вопросов при помощи вычислительных средств. Однако ассортимент этих средств был очень невелик: мы ограничивались элементарной алгеброй и тригонометрией. Более возвышенная область математики, занимающаяся решением геометрических задач средствами дифференциального исчисления, называется *дифференциальной геометрией.* Мы изложим лишь самые простые сведения из этой области, да и то ограничиваясь лишь геометрией на плоскости.

Имея в виду, что нам все время будет нужно использовать производные (различных порядков) от рассматриваемых функций, мы раз навсегда предположим, что все упоминаемые в этой главе производные $f'(x)$, $f''(x)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\psi'(t)$ и т. п. существуют и непрерывны.

Займемся прежде всего вопросом о проведении касательной к кривой

$$y=f(x) \tag{1}$$

в точке $M(x_0, y_0)$, лежащей на кривой (1). Еще в n°1 § 1 гл. III, где, кстати сказать, было дано само определение касательной, мы установили, что угловой коэффициент касательной, о которой идет речь, равен $f'(x_0)$. Иными словами, это значение производной ординаты по абсциссе, вычисленное при $x=x_0$, т. е. при абсциссе точки касания*). Полагая для краткости $f'(x_0)=y'_0$, получаем *уравнение касательной:*

$$\boxed{y-y_0=y'_0(x-x_0).} \tag{2}$$

---

*) Обращаем внимание читателя на различие между $f'(x_0)$ и $[f(x_0)]'$. Первое есть значение производной $f'(x)$, вычисленное для $x=x_0$, а второе равно 0, поскольку $f(x_0)$ — постоянная величина.

Примеры. 1) Провести касательную к кривой $y=\ln x$ в точке пересечения кривой с осью Ox.

Решение. У точки касания должно быть $y=0$. Полагая $\ln x=0$, находим $x=1$. Итак, точкой касания будет $M(1, 0)$. Кроме того,

$$y'=\frac{1}{x},$$

откуда $y'_0=1$. Стало быть, уравнение касательной

$$y=x-1.$$

2) Найти точку кривой $y=2x^2-5x+1$, в которой касательная параллельна прямой $y=3x+11$.

Решение. Угловой коэффициент касательной, как мы знаем, равен $y'_0=4x_0-5$, где x_0 — абсцисса точки касания. С другой стороны, угловой коэффициент данной прямой равен 3. Стало быть,

$$4x_0-5=3,$$

откуда $x_0=2$. В таком случае уравнение кривой дает $y_0=-1$. Итак, искомой точкой будет $(2, -1)$.

3) Под каким углом пересекаются параболы*) $y=x^2$ и $y^2=x$?

Решение. Наши параболы пересекаются в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$. В точке $A(0, 0)$ касательными к параболам $y=x^2$ и $y^2=x$ являются соответственно ось Ox и ось Oy. Стало быть, в этой точке параболы пересекаются под прямым углом. Этот результат можно получить и при помощи уравнения (2), если заметить, что для первой из рассматриваемых линий будет

$$y'=2x,$$

и потому $y'_0=0$. Что касается линии $y^2=x$, то она распадается на две линии $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$, каждая из которых имеет явное уравнение. Для этих линий будет $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ и $y'=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$. В точке $x=0$ оба эти выражения обращаются в бесконечность. Это означает, что угол между касательной и осью Ox прямой, и мы получаем тот же результат, что и выше. Для точки $B(1, 1)$ будет $x=1$, и потому угловые коэффициенты касательных к нашим параболам будут равны соответственно 2 и $^1/_2$ (очевидно, через $(1, 1)$ проходит именно первая из кривых $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$). По известной

---

*) Углом между двумя линиями называется угол между их касательными, проведенными в точке пересечения самих линий.

еще из гл. I формуле

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

будет $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+1}=\dfrac{3}{4}$. По таблицам легко найти, что $\theta=36^\circ 52'$.

4) Провести касательную к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

в точке $M(x_0, y_0)$, лежащей на этом эллипсе.

Решение. Уравнение (3) — неявное уравнение. Оно распадается на два явных уравнения

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \tag{4}$$

из которых нам надо выбрать первое, если $y_0>0$, и второе, если $y_0<0$. Сделав это, можно было бы воспользоваться формулой (2). Вместо этого мы проведем другое, весьма поучительное рассуждение, которое с успехом применяется к любой кривой, заданной неявным уравнением. Именно, если из (3) найти явное выражение y через x [это будет одно из уравнений (4), но сейчас нам это неважно] и найденный результат подставить в (3), то полученное соотношение представит собой тождество (относительно x). Это тождество мы запишем опять в форме (3), понимая под y именно ту функцию от x, которая находится решением уравнения*) (3). Дифференцируя это тождество по x и замечая, что $(y^2)'=2yy'$, находим

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0,$$

откуда

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Стало быть,

$$y_0'=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Подставляя это в (2), находим уравнение интересующей нас касательной

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

---

*) Для пояснения этого хода мыслей заметим, что равенство

$$2x-6=0 \tag{$*$}$$

есть уравнение. Решая его, найдем $x=3$. Так вот, если написать ($*$) и под x разуметь именно 3, то ($*$) представит собой уже не уравнение, а тождество.

Отсюда

$$\frac{yy_0 - y_0^2}{b^2} = \frac{x_0^2 - xx_0}{a^2}$$

или

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}. \tag{5}$$

Поскольку точка $M(x_0, y_0)$ лежит на эллипсе (3), правая часть (5) равна 1, и окончательно получается

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.}$$

Рекомендуем читателю тем же методом показать, что уравнения касательных к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболе $y^2 = 2px$ имеют соответственно вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad yy_0 = p(x + x_0),$$

где (x_0, y_0) — точка касания.

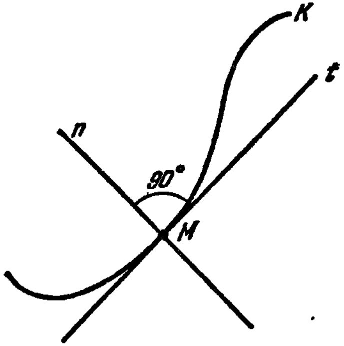


Рис. 175.

n° 2. Нормаль. Н о р м а л ь ю называется нечто вроде перпендикуляра к кривой. Точное определение этого понятия таково: *нормалью к кривой K в данной ее точке M называется перпендикуляр, восставленный в точке M к касательной, проведенной к кривой K в той же точке M* (см. рис. 175).

Учитывая, что угловой коэффициент касательной в точке $M(x_0, y_0)$ к кривой $y = f(x)$ есть $f'(x_0) = y'_0$, и вспоминая условие перпендикулярности двух прямых, находим уравнение нормали к линии (1) в точке $M(x_0, y_0)$:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0).} \tag{6}$$

Этим уравнением нельзя воспользоваться, когда $y'_0 = 0$. В этом случае касательная параллельна оси Ox. Стало быть, нормаль перпендикулярна оси Ox и [поскольку она проходит через $M(x_0, y_0)$] уравнение ее будет

$$\boxed{x = x_0.} \tag{7}$$

Можно и не различать этих случаев, если с самого начала записать (6) в виде $y'_0(y-y_0)=x_0-x$.

Пример. Провести нормали к параболе $y=3x^2-12x+8$ в точках $A(x=5)$ и $B(x=2)$.

Решение. Ординаты точек A и B находятся из уравнения параболы и равны соответственно $y_A=23$, $y_B=-4$. Кроме того, $y'=6x-12$, откуда $y'_A=18$, $y'_B=0$. Поэтому уравнение нормали в точке A

$$y-23=-\frac{1}{18}(x-5),$$

а в точке B

$$x=2.$$

§ 2. Направление вогнутости кривой

n° 1. Направление вогнутости. В некоторых вопросах теории сопротивления материалов играет роль понятие „направления вогнутости“ кривой. Представим себе линию K с уравнением $y=f(x)$, имеющую в точке $M(x_0, y_0)$ определенную касательную Mt. Если все точки нашей линии, лежащие достаточно близко к точке M, расположены над касательной*) Mt (рис. 176), то говорят, что

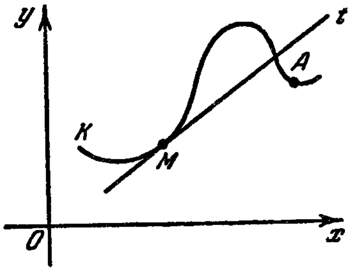


Рис. 176.

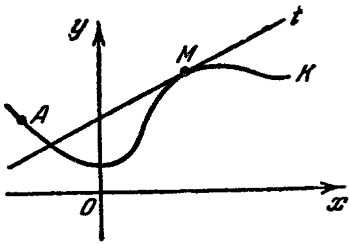


Рис. 177.

кривая в точке M обращена (или направлена) *вогнутостью вверх* (а выпуклостью вниз). Если же (рис. 177), наоборот, точки кривой, лежащие достаточно близко к M, расположены ниже касательной Mt, то говорят, что кривая в точке M обращена вогнутостью вниз (а выпуклостью вверх).

Замечание. Читатель обратит внимание на то, что мы интересуемся лишь теми точками кривой K, которые расположены вблизи точки касания M. Точки же, удаленные от M, нас не

---

*) Под этим мы подразумеваем, что ординаты точек кривой больше ординат точек касательной с той же абсциссой, ибо, как обычно в аналитической геометрии на плоскости, мы представляем себе ось Oy направленной снизу вверх.

интересуют. Например, кривая, изображенная на рис. 176, в точке M обращена вогнутостью вверх, хотя точка A этой кривой расположена ниже касательной Mt. Аналогичное обстоятельство наблюдается и на рис. 177.

Поставим вопрос об аналитическом признаке, с помощью которого можно судить о том, в какую сторону кривая обращена вогнутостью. Предположим, что во всех точках $M(x, y)$ нашей кривой последняя обращена вогнутостью вверх. Тогда кривая выглядит так, как это изображено на рис. 178. Возьмем на кривой две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 < x_2$, и проведем в них касательные к нашей кривой. Пусть α_1 и α_2 — углы, образованные этими касательными с осью Ox. Непосредственно из чертежа мы усматриваем, что

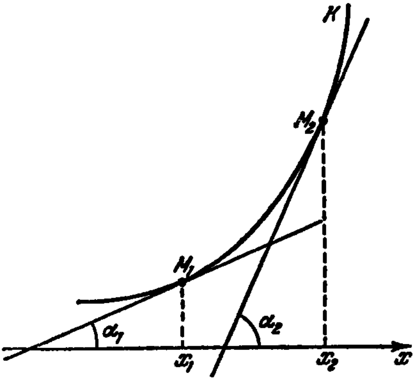


Рис. 178.

$$\alpha_1 < \alpha_2.$$

Но тогда и $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$. С другой стороны, мы знаем, что $\operatorname{tg}\alpha_1 = f'(x_1)$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = f'(x_2)$. Таким образом, получается, что

$$f'(x_1) < f'(x_2).$$

Поскольку это неравенство выведено из предположения, что $x_1 < x_2$, ясно, что производная $f'(x)$ — возрастающая функция. Но тогда ее производная, т. е. вторая производная $f''(x)$, должна быть положительна*) на рассматриваемом промежутке изменения аргумента.

Совершенно аналогично, рассматривая кривую $y = f(x)$, обращенную вогнутостью вниз, и беря на ней точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ с $x_1 < x_2$, последовательно получаем в обозначениях, ясных из рис. 179, что

$$\alpha_1 > \alpha_2,$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 > \operatorname{tg}\alpha_2,$$
$$f'(x_1) > f'(x_2).$$

*) С обычной оговоркой о возможности обращения $f''(x)$ в отдельных точках в нуль.

Это приводит к заключению об убывании $f'(x)$ на рассматриваемом промежутке изменения x и, стало быть, к неравенству

$$f''(x) \leqslant 0.$$

Таким образом, нами установлена

Теорема. *Если кривая обращена вогнутостью вверх (вниз), то вторая производная ординаты по абсциссе $y'' = f''(x)$ положительна (отрицательна).*

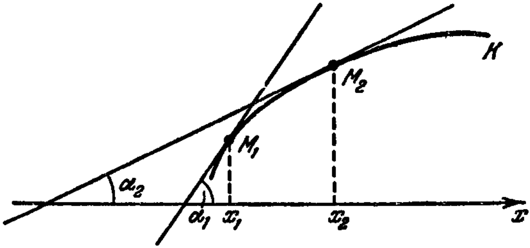


Рис. 179.

Эта теорема обратима, т. е. знание знака второй производной позволяет ответить на вопрос о том, куда направлена вогнутость кривой. Действительно, если, например, $f''(x) > 0$, то первая производная $f'(x)$ возрастает вместе с x. Это означает, что при увеличении абсциссы x будет увеличиваться и угол, образованный осью Ox и касательной к кривой, проведенной в точке $M(x, y)$. Иными словами, при движении по кривой слева направо будет увеличиваться крутизна наклона кривой. Но тогда тот же рис. 178 показывает, что кривая обращена вогнутостью вверх.

Все сказанное можно подытожить с помощью таблички:

Направление вогнутости кривой	Знак $f''(x)$
вверх	$+$
вниз	$-$

n° 2. Точки перегиба и выпрямления. Не следует думать, что на всем своем протяжении кривая всегда обращена вогнутостью в одну и ту же сторону. Обычно дело обстоит немного сложнее: промежуток изменения абсциссы x распадается на части, на которых кривая обращена вогнутостью попеременно то вверх, то вниз.

Определение. Точка M кривой, разделяющая участки, на которых кривая имеет различные направления вогнутости, называется *точкой перегиба* кривой. Иногда точкой перегиба называют не только саму точку M, лежащую на кривой, но и ее абсциссу x_0.

Пусть, например, кривая $y=f(x)$ рассматривается для $a\leqslant x\leqslant b$ и промежуток $[a, b]$ точкой x_0 $(a<x_0<b)$ разделяется на части $a\leqslant x\leqslant x_0$ и $x_0\leqslant x\leqslant b$, на первой из которых наша кривая обращена вогнутостью вверх, а на второй — вниз (рис. 180). Тогда вторая производная $y''=f''(x)$ при переходе x из промежутка $[a, x_0]$ в промежуток $[x_0, b]$ должна менять знак с $+$ на $-$. Поскольку эта вторая производная непрерывна, ясно, что при $x=x_0$ она должна обратиться в нуль:

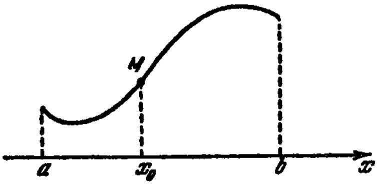


Рис. 180.

$$\boxed{f''(x_0)=0.} \tag{1}$$

Аналогично обстоит дело для любой точки перегиба. Итак, верна

Теорема. *В точках перегиба вторая производная ординаты по абсциссе равна нулю.*

Эта теорема, однако, необратима: из того, что в некоторой точке x_0 выполняется соотношение (1), вовсе не следует, что x_0 будет точкой перегиба. Рассмотрим, например, кривую $y=x^4$. Здесь $y''=12x^2$, и потому $y''>0$ для всех x, кроме $x=0$, для которого $y''=0$. Стало быть, наша кривая на всем своем протяжении обращена вогнутостью вверх и при $x=0$ никакого перегиба не имеет, хотя для этого x и будет $y''=0$. Тем не менее точки кривой $y=f(x)$, для которых справедливо (1), представляют и чисто геометрический интерес. В связи с этим условимся всякую точку $M(x_0, y_0)$ (а также ее абсциссу x_0), в которой выполнено (1), называть *точкой выпрямления* кривой $y=f(x)$ (происхождение этого выражения станет читателю ясным по прочтении § 4). Таким образом, всякая точка перегиба является ее точкой выпрямления, но не наоборот.

Изучение вогнутости кривой сходно с исследованием функции на экстремум, только вместо знаков первой производной $f'(x)$ приходится обращать внимание на знаки второй производной $f''(x)$ *). Рекомендуем следующее

Правило. Чтобы изучить характер вогнутости кривой $y=f(x)$, надо:

1) Найти $f''(x)$.

2) Положить $f''(x)=0$ и решить это уравнение. Его корни $x_1<x_2<\ldots<x_m$ представляют собой точки выпрямления кривой.

---

*) В частности, легко обнаружить, что точки перегиба являются точками экстремума производной $f'(x)$.

3) Нанести точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ на числовую ось и определить знаки $f''(x)$ на получившихся участках оси.

Пример. Исследовать на вогнутость кривую

$$y = x^4 - 14x^3 + 60x^2 + 8x - 9.$$

Решение. Последовательно находим

$$y' = 4x^3 - 42x^2 + 120x + 8,$$
$$y'' = 12x^2 - 84x + 120.$$

Полагая $y'' = 0$ и сокращая на 12, приходим к уравнению

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

с корнями $x_1 = 2$, $x_2 = 5$. Ось разбивается на участки $(-\infty, 2)$, $(2, 5)$, $(5, +\infty)$. Чтобы установить знаки y'' на этих участках, рассуждаем так: если x очень велико по абсолютной величине, то x^2 значительно превосходит x, и потому в составе y'' основное значение будет иметь слагаемое $12x^2$, а оно >0. Значит, на участках $(-\infty, 2)$ и $(5, +\infty)$ будет $y'' > 0$ *). Полагая $x = 3$, находим $y''(3) = -24$, откуда видно, что на $(2, 5)$ будет $y'' < 0$. Итак, кривая обращена вогнутостью вверх для $x < 2$ и $x > 5$ и вниз для $2 < x < 5$. Точки $x = 2$, $x = 5$ оказываются точками перегиба.

§ 3. Параметрическое задание кривой

n° 1. Подход к вопросу. До сих пор мы рассматривали лишь два вида задания кривой: либо уравнением $v = f(x)$ (явное задание), либо уравнением $F(x, y) = 0$ (неявное задание) **). Однако теоретическая механика весьма естественно приводит к другому виду задания линии. В самом деле, задать *движение* точки — это значит дать средство находить ее положение (т. е. ее координаты) для любого момента времени t. Поэтому, например, равенства

$$x = 2t, \quad y = 3t - 2 \tag{1}$$

полностью определяют движение точки, а значит, и линию, по которой она движется. Итак, в этом примере линия оказывается заданной с помощью двух равенств (1). Разумеется, очень легко получить и более привычное нам задание той же линии. Именно, для

---

*) Разумеется, можно было бы просто, взяв $x = 0$, найти $y'' = 120$, откуда следует, что $y'' > 0$ на $(-\infty, 2)$. Точно так же $y''(6) = 48$ даст, что $y'' > 0$ на $(5, +\infty)$. Однако, как мы уже говорили еще в n° 3 § 5 гл. III, рассуждения в тексте поучительнее.

**) Мы говорим сейчас о задании в декартовых координатах. Аналогично обстоит дело и в случае координат полярных: кривую можно задать явно: $r = f(\theta)$ и неявно: $F(r, \theta) = 0$.

любого момента времени t будет $t=\frac{x}{2}$ и, стало быть, $y=\frac{3x}{2}-2$. Эта связь между x и y и дает явное задание нашей линии *). Мы видим, что это задание получено исключением времени t из уравнений (1).

То обстоятельство, что в рассмотренном примере переменная t обозначала время, не играет никакой роли.

Пусть, например, x и y следующим образом зависят от вспомогательной переменной:

$$x=t+1, \quad y=t^2.$$

Меняя t, будем получать различные точки (x, y), совокупность которых составит некоторую линию. Так как любое значение t выражается через соответствующее значение x равенством $t=x-1$, то для любой точки нашей линии будет $y=(x-1)^2$, и мы получили явное задание линии, из которого видно, что мы имеем дело с параболой.

Обобщая изложенное, мы можем сказать, что пара уравнений

$$\boxed{x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),} \tag{*}$$

где t — вспомогательная переменная, задает некоторую линию. Этот способ задания линии называется *параметрическим*, а переменная t — *параметром*. Исключая t, получаем обычное (явное или неявное) уравнение той же линии.

Замечание. Если входящие в уравнение (*) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ заданы и непрерывны на каком-либо отрезке $[p, q]$, то линия, определяемая этими уравнениями, называется *непрерывной кривой*. В частности, линия, определяемая уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ задана и непрерывна на отрезке $[a, b]$, представляет собой непрерывную кривую, так как ее можно задать и уравнениями

$$x=t, \quad y=f(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

n° 2. Параметрические уравнения окружности и эллипса. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат (рис. 181). Положение любой точки M этой окружности вполне определяется заданием угла t, образованного осью Ox и радиусом OM. Естественно выразить координаты x и y точки M через этот угол. Из чертежа непосредственно ясно, что

$$\boxed{x=R\cos t, \quad y=R\sin t.} \tag{2}$$

---

*) Уравнение $y=\frac{3x}{2}-2$ показывает, что линия (1) — прямая.

Эти равенства *) и представляют собой параметрические уравнения нашей окружности. Параметр t можно изменять от $-\infty$ до $+\infty$, но если желать получить каждую точку окружности только один раз, то достаточно заставить t пробежать промежуток $0 \leqslant t < 2\pi$. Удобнее, однако, иметь дело с замкнутым промежутком. Поэтому обычно изменяют t в пределах $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, хотя при этом точка A получается дважды: при $t=0$ и при $t=2\pi$.

Чтобы получить обычное уравнение окружности, надо исключить из (2) параметр t. Проще всего это сделать, возведя равенства (2) в квадрат и сложив результаты. Очевидно, это приводит к хорошо знакомому уравнению

$$x^2+y^2=R^2.$$

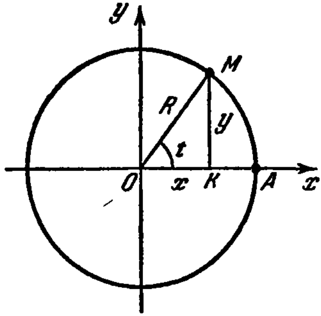


Рис. 181.

Чтобы найти параметрические уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3)$$

полезно вспомнить, что он получается из окружности

$$x^2+y^2=a^2, \qquad (4)$$

имеющей диаметром большую ось эллипса, с помощью сжатия в $\frac{a}{b}$ раз, т. е. что любая точка M эллипса (3) получается из точки N окружности (4), имеющей одинаковую с M абсциссу x, при помощи умножения ординаты точки N на $\frac{b}{a}$.

Согласно сказанному выше, параметрическими уравнениями окружности (4) являются $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. Но тогда ясно, что параметрические уравнения эллипса (3) получаются из них умножением ординаты y на $\frac{b}{a}$, т. е. имеют вид **)

$$\boxed{x=a\cos t, \quad y=b\sin t.} \qquad (5)$$

Для получения всех точек эллипса достаточно изменять t в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. При этом каждая точка эллипса, кроме точки

*) Нетрудно понять, что они справедливы не только тогда, когда точка M лежит в первом координатном угле, но и при любом положении этой точки.

**) Разумеется, здесь t уже не является углом между осью Ox и радиусом-вектором точки (x, y). Если этот угол есть φ, то из (5) следует

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{b}{a}\operatorname{tg} t \text{ и } \varphi \neq t.$$

$(a, 0)$, будет получаться только один раз, а точка $(a, 0)$ — дважды (при $t=0$ и при $t=2\pi$). Если первое из равенств (5) разделить на a, второе на b, полученные равенства возвести в квадрат и сложить, то это приведет к каноническому уравнению эллипса (3).

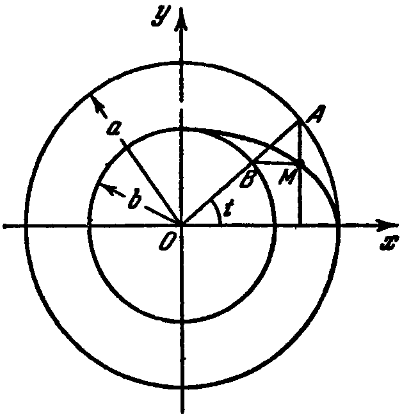


Рис. 182.

Сопоставление параметрических уравнений окружности и эллипса дает удобный прием построения любого количества точек эллипса. Именно, пара уравнений

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \tag{6}$$

задает окружность радиуса a с центром в начале координат, а пара уравнений

$$x = b\cos t, \quad y = b\sin t \tag{7}$$

— окружность с тем же центром и радиусом b. Как показывают уравнения (5), чтобы получить точку (x, y), лежащую на эллипсе, надо находить x с помощью первого из уравнений (6), а y с помощью второго из уравнений (7). Но эти x и y легко находятся графически, если учесть, что в уравнениях (6) и (7) параметр t есть угол наклона радиуса-вектора точки к оси Ox. Поэтому для построения точки $M(x, y)$ эллипса (5) строим окружности (6) и (7) и проводим из начала координат луч под углом t к оси Ox. Найдя точки A и B пересечения этого луча с упомянутыми окружностями и проведя через них прямые, параллельные осям, получаем точку M (см. рис. 182).

n° 3. Циклоида. Познакомимся с важной кривой — циклоидой, представляющей также хороший пример параметрического задания линии.

Определение. *Циклоидой* называется линия, описываемая точкой окружности, которая катится без скольжения и проворачивания по прямой.

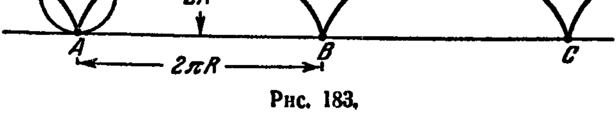


Рис. 183.

Из этого определения сразу ясно, что циклоида состоит из ряда арок, вроде изображенных на рис. 183, причем высота этих арок равна $2R$, где R — радиус катящейся окружности. Ниже мы покажем, что расстояния AB, BC, ... между соседними „точками опоры" равны $2\pi R$.

Найдем параметрические уравнения циклоиды. В качестве оси Ox возьмем ту прямую, по которой катится окружность, а за начало координат мы принимаем положение точки M, описывающей циклоиду, в тот момент, когда эта точка лежит на оси Ox. Этот момент примем за начальный и изобразим катящуюся окружность в начальный момент и в некоторый последующий момент τ. Обозначим через t угол, образованный в момент τ радиусами катящейся окружности, направленными в точку M, описывающую циклоиду, и в точку A соприкосновения окружности с осью Ox, т. е. (рис. 184) радиусами C_1M и C_1A. Этот угол t мы примем за параметр и постараемся выразить через него координаты x и y точки M циклоиды. Что касается ординаты y, то это совсем просто:

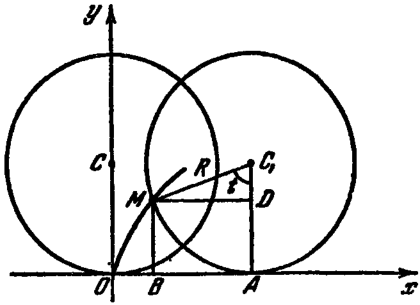


Рис. 184.

$$y = BM = AD = AC_1 - C_1D = R - R\cos t. \tag{8}$$

Для нахождения абсциссы x необходимо принять во внимание равенство отрезка OA и дуги $\smile{AM}$:

$$OA = \overset{\smile}{AM}. \tag{9}$$

В этом равенстве и проявляется отсутствие скольжения и проворачивания окружности. Очень наглядным является следующий способ убедиться в справедливости равенства (9): представим себе катящуюся окружность реализованной в виде деревянного обруча. Обтянем этот обруч нерастяжимой лентой, правый конец которой прибьем гвоздем в точке O к оси Ox, а левый к обручу. Когда обруч покатится, то лента начнет расстилаться по оси Ox, и в момент τ отрезок OA оси окажется накрытым той частью ленты, которая сошла с дуги $\overset{\smile}{AM}$ обруча. Этим *) и доказано (9). Дальнейшее просто: так как t — величина угла AC_1M в радианах, то

$$\overset{\smile}{AM} = Rt.$$

Стало быть,

$$x = OB = OA - BA = \overset{\smile}{AM} - MD = Rt - R\sin t. \tag{10}$$

*) Это рассуждение делает очевидным и сделанное выше замечание, что расстояние между соседними точками пересечения циклоиды с осью Ox равно $2\pi R$.

Сопоставляя (8) и (10), получаем параметрические уравнения циклоиды

$$\boxed{x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t).} \tag{11}$$

Параметр t можно менять от $-\infty$ до $+\infty$. Ближайшая к началу координат и лежащая правее его точка пересечения циклоиды с осью Ox отвечает значению $t = 2\pi$, ибо она получается после одного полного оборота катящейся окружности. Для этого t будет $x = 2\pi R$. Кроме того, из (11) видно, что наивысшая точка циклоиды, отвечающая $t = \pi$, имеет координаты $(\pi R, 2R)$. Отметим в заключение, что выразить y как элементарную функцию x вообще нельзя, а x через y можно $\left[\text{так как } t = \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{y}{R}\right)\right]$, но полученная формула будет очень громоздка. Параметрические уравнения проще.

n° 4. Эвольвента окружности. В теории зубчатых зацеплений применяется кривая, называемая **эвольвентой окружности.**

Определение. *Эвольвента окружности* есть линия, описываемая точкой нити, которая, оставаясь туго натянутой, разматывается с этой окружности.

При этом предполагается, что нить нерастяжима и предварительно была намотана на упомянутую окружность.

Найдем параметрические уравнения эвольвенты окружности. Для этого поместим начало координат в центр окружности и проведем ось Ox через ту точку окружности, где находится точка, описывающая эвольвенту, в момент, когда нить еще целиком намотана на окружность. На рис. 185 эта точка обозначена через A. Пусть рис. 185 изображает положение нити BM в некоторый момент времени. Таким образом, здесь B — точка схода нити с окружности, а M — точка, описывающая эвольвенту. Радиус окружности мы обозначим через R, а угол оси Ox и луча OB через t.

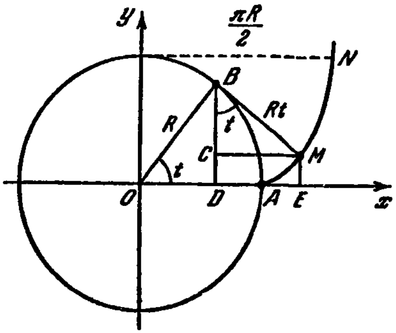


Рис. 185.

Так как нить нерастяжима, то ее отрезок BM равен дуге $\overset{\frown}{AB}$ окружности. Иными словами, $BM = Rt$. Заметим теперь, что поскольку нить остается туго натянутой, то она сходит с окружности **по касательной.** Поэтому нить BM перпендикулярна радиусу OB. Стало быть, углы AOB и MBD равны как углы, стороны которых соответственно взаимно перпендикулярны. Значит, $\angle MBD = t$, и из треугольника MBC мы находим

$$CM = Rt \sin t, \quad CB = Rt \cos t.$$

Теперь уже легко найти координаты x и y точки M. Именно,

$$x = OE = OD + DE = OD + CM = R\cos t + Rt \sin t,$$
$$y = EM = DC = DB - CB = R \sin t - Rt \cos t.$$

Окончательно

$$\boxed{\begin{aligned} x &= R(\cos t + t\sin t), \\ y &= R(\sin t - t\cos t), \end{aligned}} \tag{12}$$

причем $0 \leqslant t < +\infty$.

Нетрудно видеть, что эвольвента окружности представляет собою некоторую спираль. Изображенная на рис. 185 точка N отвечает значению $t = \frac{\pi}{2}$, и потому координаты ее суть $x = \frac{\pi R}{2}$, $y = R$, что, впрочем, очевидно и непосредственно.

Интересно заметить, что определение эвольвенты окружности в некотором смысле „двойственно" определению циклоиды. Именно, если мы проведем в точке A касательную к нашей окружности и начнем ее „катить" по окружности, то в момент, когда точка касания переместится в точку B, точка A (рассматриваемая как точка касательной) окажется в положении M. Таким образом, *эвольвента окружности есть линия, описываемая точкой прямой, когда последняя (без соскальзывания) катится по окружности.*

n° 5. Параметрическое дифференцирование. Пусть требуется провести касательную к кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{13}$$

в точке $M(x, y)$, отвечающей значению параметра t. Для этого дадим t приращение Δt, в результате чего мы получим точку $N(x + \Delta x, \; y + \Delta y)$ той же кривой (13). Угловой коэффициент m^* секущей MN будет равен $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ или, что то же самое,

$$m^* = \frac{\Delta y}{\Delta t} : \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{14}$$

Угловой коэффициент m интересующей нас касательной есть предел выражения (14), когда $N \to M$, т. е. когда $\Delta t \to 0$. Но при $\Delta t \to 0$ будет

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \to y'_t, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'_t.$$

Стало быть,

$$\boxed{m = \frac{y'_t}{x'_t}.} \tag{15}$$

Важно заметить, что производные, фигурирующие в (15), должны быть вычислены при том значении t, которое определяет точку касания M.

Пример. Провести касательную к кривой

$$x = t^3 + 2t^2 + 1, \quad y = t^4 - 7t \tag{16}$$

в точке*) $M(2)$.

Решение. Координаты точки M находим из (16). Они таковы: $x_0 = 17$, $y_0 = 2$. Кроме того, $x'_t = 3t^2 + 4t$, $y'_t = 4t^3 - 7$, так что при $t = 2$ будет $x'_t = 20$, $y'_t = 25$, откуда угловой коэффициент искомой касательной $m = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$. Искомое уравнение имеет вид

$$y - 2 = \frac{5}{4}(x - 17).$$

Замечание. Выше мы говорили, что линия $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ называется непрерывной кривой, если непрерывны функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Если эти функции не только непрерывны, но имеют и непрерывные производные, причем $\varphi'(t) \neq 0$, то, как показывает формула (15), у нашей кривой будет в каждой точке существовать определенная касательная, положение которой непрерывно меняется с изменением точки касания. При этом упомянутая касательная никогда не становится параллельной оси Oy. Ввиду полного равноправия координат x и y у линии $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, причем $\psi'(t) \neq 0$, также существует непрерывно вращающаяся касательная, никогда не параллельная оси Ox.

Все это дает повод следующим образом обобщить понятие гладкой кривой: *под гладкой кривой понимается линия $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, причем*

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0.$$

В частности, линия $y = f(x)$, где $f(x)$ имеет непрерывную производную, подпадает под это определение, ибо здесь роль параметра t играет абсцисса x и

$$x'^2_x + y'^2_x = 1 + y'^2_x > 0.$$

Поставим теперь следующий общий вопрос. Пусть x и y зависят от вспомогательной переменной t так, как это указано в (13). Если мы из первого уравнения (13) выразим t через x и подставим во второе, то убедимся, что y является функцией от x, т. е. $y = f(x)$. Постараемся найти производную y'_x этой функции. Для этого достаточно вспомнить, что интересующая нас производная является не чем иным, как угловым коэффициентом касательной к линии $y = f(x)$, параметрическими уравнениями которой являются уравнения (13). Стало быть, ответ дается формулой (15), которую можно записать в виде

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.} \tag{17}$$

*) Когда кривая задана параметрически, то положение точки на ней определяется значением параметра. Поэтому точку M, отвечающую значению $t = t_0$, удобно обозначать через $M(t_0)$.

Для правильного понимания этой важной формулы надо помнить, что точкой дифференцирования t в правой части (17) служит то значение параметра, которому соответствует по формуле $x=\varphi(t)$ точка дифференцирования x, при которой находится y'_x.

Соотношение (17) легко получить и чисто формальной выкладкой:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt}=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Постараемся теперь найти вторую производную y''_x той же функции $y=f(x)$. Это легко сделать при помощи формулы (17). Именно, обозначим на мгновение y'_x через z. Тогда

$$y''_x=z'_x,$$

а в силу (17)

$$z'_x=\frac{z'_t}{x'_t}.$$

Значит,

$$y''_x=\frac{z'_t}{x'_t}. \tag{18}$$

Но $z=y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, и потому

$$z'_t=\frac{y''_t x'_t-y'_t x''_t}{x'^2_t}. \tag{19}$$

Из (18) и (19) находим окончательно

$$\boxed{y''_x=\frac{y''_t x'_t-y'_t x''_t}{x'^3_t}.} \tag{20}$$

Пример. Установить направление вогнутости кривой

$$x=t^2+3t+1,\quad y=2t^3-1 \tag{21}$$

в точке $M(1)$.

Решение. Из (21) находим: $x'_t=2t+3$, $x''_t=2$, $y'_t=6t^2$, $y''_t=12t$. Значит, для $t=1$ имеем: $x'_t=5$, $x''_t=2$, $y'_t=6$, $y''_t=12$. По формуле (20) в интересующей нас точке M будет

$$y''_x=\frac{12\cdot 5-6\cdot 2}{5^3}=\frac{48}{125}.$$

Поскольку $y''_x>0$, кривая (21) в точке M обращена вогнутостью вверх.

§ 4. Криизна

n° 1. Средняя и истинная кривизна. Здесь мы ознакомимся с важной характеристикой кривых линий: их *кривизной*. Кривизна линии — это мера *степени изогнутости* этой линии.

Возьмем какую-нибудь прямую L (рис. 186). Она сама себе служит касательной во всех своих точках. Поэтому, если мы выделим из L любой отрезок AB, то касательные к L в точках A и B будут совпадать. Мы можем выразить это, сказав, что направление прямой не меняется при переходе из одной точки прямой в другую. Не так обстоит дело с *кривыми* линиями. Если (рис. 187) в точках A и B кривой линии L провести

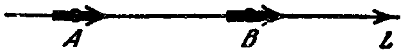


Рис. 186.

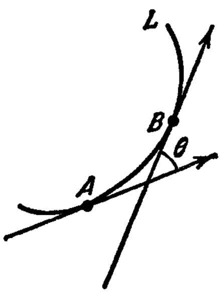


Рис. 187.

касательные, то они образуют некоторый угол θ. Можно сказать, что при переходе из A в B касательная к L (а с ней и сама кривая L) *повернулась* на угол θ. Ясно, что величина этого угла поворота дает некоторое представление о степени изогнутости L на дуге $\overset{\smile}{AB}$: чем больше угол θ, тем сильнее изогнута L. Однако сама по себе величина угла θ еще не может служить мерой упомянутой изогнутости. Действительно, одно дело, если линия L поворачивается на $50°$ на участке длиной в 100 *см*, а другое дело, если она поворачивается на тот же угол на участке в 200 *см*. В первом случае на 1 *см* приходится в среднем $0{,}5°$, а во втором — вдвое меньше*).

Таким образом, важна не сама по себе величина угла θ, а то, какая доля этого угла приходится в среднем на единицу длины дуги $\overset{\smile}{AB}$. Эти соображения приводят нас к следующему определению.

Определение. *Средней кривизной* дуги $\overset{\smile}{AB}$ линии L называется отношение угла θ, на который поворачивается касательная к L при переходе из A в B, к длине дуги $\overset{\smile}{AB}$

$$\boxed{K_{\text{ср}} = \frac{\theta}{\overset{\smile}{AB}}.} \tag{1}$$

*) Точно так же, если Иван и Петр стреляли в цель и оба попали 50 раз, то это вовсе не означает, что они стреляют одинаково. Надо учесть еще, сколько выстрелов сделал каждый из них. Если Иван стрелял 100 раз, а Петр 200, то на каждый выстрел у Ивана приходится в среднем 0,5 попадания, а у Петра вдвое меньше, и надо заключить, что Петр стрелял хуже.

Замечания. 1) В формуле (1) знак угла θ не учитывается: угол берется по абсолютной величине. Поэтому средняя кривизна всегда неотрицательна.

2) Единицей измерения углов при вычислении $K_{ср}$ всегда служит радиан *). Так как в формулах, где фигурирует угол в радианах, наименование угла опускается, то размерность кривизны есть $\frac{1}{\text{длина}}$ **).

1) Угол θ, о котором шла речь выше, иногда называют (по неизвестной причине) *углом смежности* дуги $\overset{\frown}{AB}$.

Нетрудно понять (как это подсказывается и самим термином средняя кривизна), что одна и та же кривая на разных участках может иметь разную среднюю кривизну.

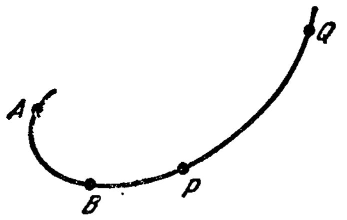


Рис. 188.

Так, на рис. 188 средняя кривизна дуги $\overset{\frown}{AB}$ значительно больше, чем дуги $\overset{\frown}{PQ}$. Желая охарактеризовать степень изогнутости линии L в данной ее точке M, вводят

Определение. *Истинной кривизной* линии L в данной ее точке M называется предел средней кривизны бесконечно малой дуги, стягивающейся в точку M.

Обычно, впрочем, прилагательное „истинная" опускается и говорят просто о кривизне линии L в точке M.

n° 2. Формула для вычисления кривизны.

Задача. Найти истинную кривизну K кривой $y=f(x)$ в данной ее точке $M(x, y)$.

Решение. Возьмем на нашей кривой отличную от M точку $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$. Угол, образованный касательной к кривой и осью Ox, зависит от абсциссы точки касания. Пусть значения этого угла в точках M и N соответственно равны α и $\alpha+\Delta\alpha$. Из рис. 189 видно, что угол θ, на который поворачивается касательная при переходе из точки M в точку N, равен внутреннему углу C треугольника ABC. Другим внутренним углом этого треугольника (углом A)

---

*) Стало быть, если $\overset{\frown}{AB}=100$ *см* и при переходе из A в B касательная поворачивается на 50°, то

$$K_{ср}=\frac{50\left(\frac{\pi}{180}\right)}{100}=\frac{\pi}{360}=0{,}0087.$$

**) Следовательно, в предыдущей сноске надо писать

$$K_{ср}=\frac{\pi}{360}\frac{1}{см}=0{,}0087\frac{1}{см}.$$

служит α, а $\alpha+\Delta\alpha$ — внешний угол того же треугольника, не смежный с A и C. Стало быть, $\alpha+\Delta\alpha=\theta+\alpha$, откуда

$$\theta=\Delta\alpha.$$

Отсюда следует, что средняя кривизна дуги $\overset{\frown}{MN}$

$$K_{\text{ср}}=\frac{\Delta\alpha}{\overset{\frown}{MN}}.$$

Искомая же истинная кривизна K будет пределом этого выражения, когда точка N стремится к M, т. е. когда $\Delta x\to 0$:

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\overset{\frown}{MN}}. \qquad (2)$$

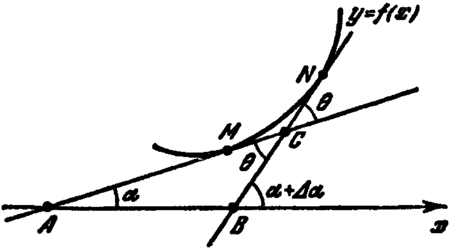


Рис. 189.

Для нахождения этого предела учтем следующее:

1) Когда $\Delta x\to 0$, дробь $\frac{\Delta\alpha}{\overset{\frown}{MN}}$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

2) При раскрытии таких неопределенностей можно заменять числитель и знаменатель величинами им эквивалентными.

3) Бесконечно малая дуга эквивалентна*) своей хорде:

$$\lim_{N\to M}\frac{\overset{\frown}{MN}}{\overline{MN}}=1.$$

На основании этого мы можем в (2) заменить $\overset{\frown}{MN}$ на $\overline{MN}$. Но ведь $\overline{MN}$ есть расстояние между $M(x, y)$ и $N(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$. Значит,

$$\overline{MN}=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

и

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Это равенство можно переписать так:

$$K=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}.$$

*) Как было сказано в начале этой главы, предполагается существование непрерывной $f'(x)$ (и даже производных более высоких порядков, если они потребуются). Значит, наша кривая гладкая.

(ничто не мешает считать $\Delta x > 0$; впрочем, это вообще неважно, так как в выражении K нас интересует лишь абсолютная величина этого выражения).

Но

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \alpha'_x.$$

Значит,

$$K = \frac{\alpha'_x}{\sqrt{1 + y'^2_x}}. \tag{3}$$

Вспомним теперь, что $\operatorname{tg} \alpha = y'_x$. Это дает

$$\alpha = \operatorname{arctg} y'_x,$$

и дифференцирование этого соотношения приводит к равенству

$$\alpha'_x = \frac{y''_x}{1 + y'^2_x}.$$

Подставляя α_x в (3), находим окончательно

$$\boxed{K = \frac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^{3/2}}.} \tag{4}$$

Надо помнить, что y''_x следует брать лишь по абсолютной величине. Отметим также, что обе производные y'_x и y''_x должны вычисляться при абсциссе x той точки M, в которой ищется кривизна.

Примеры. 1) Найти кривизну синусоиды $y = \sin x$.

Решение. Здесь $y'_x = \cos x$, $y''_x = -\sin x$ и (4) дает

$$K = \frac{-\sin x}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}.$$

Поскольку кривизна всегда неотрицательна, то более точным было бы написать

$$K = \frac{|\sin x|}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}. \tag{5}$$

То обстоятельство, что K зависит от x, показывает, что кривизна синусоиды меняется от точки к точке.

2) Найти кривизну прямой.

Решение. Уравнение прямой имеет вид $y = mx + b$. Значит, $y'_x = m$, $y''_x = 0$ и (4) дает $K = 0$. Таким образом, как это, впрочем, должно быть ясно и без всяких вычислений, *кривизна прямой во всех ее точках равна нулю*.

Если рассматривается не прямая, а кривая, то и на ней могут быть отдельные точки, где кривизна равна нулю. Так из (5) видно, что в точках, где $\sin x = 0$, т. е. где синусоида пересекает ось абсцисс, будет $K = 0$. Из общей формулы (4) ясно, что кривизна любой линии обращается в нуль в точках, где $y''_x = 0$. Это и объясняет, почему мы выше назвали такие точки точками *выпрямления*: в них кривая как бы уподобляется прямой. Более точно, факт обращения кривизны в какой-нибудь точке в нуль означает, что в этой точке кривая особенно тесно примыкает к своей касательной. Легко видеть, что в точках перегиба дело обстоит как раз таким образом (рис. 190).

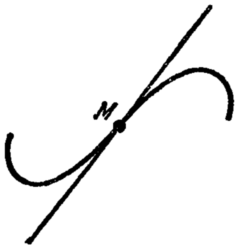


Рис. 190.

3) Найти кривизну окружности.

Решение. Если поместить начало координат в центр окружности, то ее уравнение будет иметь вид $x^2 + y^2 = R^2$. Отсюда $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$. Будем для определенности рассматривать верхнюю полуокружность. В точках этой полуокружности $y > 0$, и потому перед радикалом надо выбрать знак „$+$“. Итак, $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Отсюда $y'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Вторичное дифференцирование дает

$$y''_x = \frac{-\sqrt{R^2 - x^2} + x\dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2} = \frac{-R^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}}.$$

Так как y''_x надо брать лишь по абсолютной величине, то мы отбрасываем в последнем выражении знак минус *). Тогда из формулы (4) после простых преобразований получаем

$$\boxed{K = \frac{1}{R},} \tag{6}$$

т. е. *кривизна окружности во всех ее точках одинакова и равна единице, деленной на радиус окружности* **).

n°3. Случай параметрического задания. Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{7}$$

---

*) Его происхождение совершенно ясно: ведь верхняя полуокружность обращена вогнутостью вниз и на ней $y''_x < 0$.

**) Рекомендуем читателю получить равенство (6), не прибегая к формуле (4), а опираясь на самое определение кривизны.

Как мы видели в п° 5 § 3, если мы будем считать, что уравнения (7) задают зависимость y от x, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}.$$

Подставляя эти величины в формулу (4), дающую кривизну K, найдем

$$K = \frac{\dfrac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{x'^3_t}}{\left[1 + \left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

После небольших упрощений получаем

$$\boxed{K = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}.} \tag{8}$$

Такова формула для кривизны при параметрическом задании кривой. Как и выше, более точным было бы в числителе дроби (8) писать $|y''_t x'_t - y'_t x''_t|$, поскольку всегда $K \geqslant 0$. Точки выпрямления кривой (7) по-прежнему характеризуются равенством $K = 0$.

Пример. Найти кривизну эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

в произвольной его точке.

Решение. Из (9) находим

$$x'_t = -a\sin t, \quad y'_t = b\cos t,$$
$$x''_t = -a\cos t, \quad y''_t = -b\sin t.$$

Подставляя в (8), получим

$$K = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

В частности, в точке $(a, 0)$, отвечающей значению $t = 0$, имеем

$$K = \frac{a}{b^2}.$$

п° 4. Случай полярных координат. Пусть некоторая кривая задана своим уравнением

$$r = f(\theta) \tag{10}$$

в полярных координатах. Возьмем любую точку этой кривой. Если x и y ее декартовы координаты, то

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{11}$$

Но ведь задание угла θ согласно (10) определяет и значение r. Таким образом, угол θ полностью определяет координаты x и y. Стало быть, равенства (11), в которых под r понимается функция (10), представляют собой параметрические уравнения нашей кривой. Но тогда ее кривизна находится по формуле (8). Вычислим входящие в эту формулу величины.

Так как r является функцией θ, то

$$x'_\theta = r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta, \qquad y'_\theta = r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta,$$

$$x''_\theta = r''_\theta\cos\theta - 2r'_\theta\sin\theta - r\cos\theta, \qquad y''_\theta = r''_\theta\sin\theta + 2r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta.$$

Отсюда, опуская для краткости значок θ при r'_θ и r''_θ, находим

$$x'^2_\theta + y'^2_\theta = r'^2 + r^2,$$

$$y''_\theta x'_\theta - y'_\theta x''_\theta = r^2 + 2r'^2 - rr''.$$

Окончательно

$$\boxed{K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'^2 + r^2)^{3/2}}.} \tag{12}$$

Пример. Найти кривизну кривой $r = e^\theta$. Здесь $r' = r'' = e^\theta$. Стало быть,

$$K = \frac{2e^{2\theta}}{(2e^{2\theta})^{3/2}} = \frac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}}.$$

n° 5. Окружность, центр и радиус кривизны. Малую дугу кривой линии L можно приближенно заменить отрезком прямой, касающейся L в какой-нибудь из точек рассматриваемой дуги. В тех вопросах, где нас интересует длина дуги или ее направление, такая замена допустима. Однако она, очевидно, недопустима при изучении кривизны дуги, ибо кривизна любой прямой равна нулю. Если мы хотим приближенно заменить дугу кривой L дугой более простой линии, то в вопросах, связанных с кривизной линии L, приходится вместо заменяющей прямой брать что-либо более сложное. Весьма естественно привлечь для этой цели окружность. Уточняя эти соображения, приходим к следующему определению:

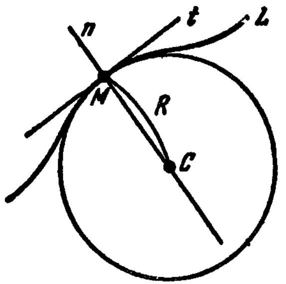


Рис. 191.

Определение. *Окружностью кривизны* кривой L в данной ее точке M называется окружность, которая (рис. 191)

1) проходит через точку M;
2) имеет в M общую касательную с L;
3) имеет ту же кривизну K, что и кривая L в точке M;
4) центр C которой расположен с той стороны кривой L, куда последняя обращена своей вогнутостью (в точке M).

Остановимся немного подробнее на этом определении. Говоря о кривизне кривой L, мы упомянули, что речь идет о кривизне в точке M, ибо у произвольной кривой кривизна меняется от точки к точке. Поскольку кривизна окружности во всех ее точках одна и та же, то по отношению к окружности кривизны мы не говорили о том, что имеем в виду кривизну в точке M. Далее, поскольку окружность касается кривой L в точке M, то ее *центр C лежит на нормали к кривой L в точке M*. Легко сообразить, каков должен быть радиус R окружности кривизны. Именно, с одной стороны, кривизна этой окружности должна равняться кривизне K линии L в точке M, а с другой стороны, как и у всякой окружности, эта кривизна равна $\frac{1}{R}$. Стало быть, $K=\frac{1}{R}$ и

$$\boxed{R=\frac{1}{K}.} \tag{13}$$

Эта величина называется *радиусом кривизны* кривой L в точке M (упоминание о точке обязательно, ибо в разных своих точках кривая L имеет разные радиусы кривизны!). Упомянем еще о том, что центр C окружности кривизны называется коротко *центром кривизны* кривой L в точке M.

Разумеется, все сказанное относится к тому случаю, когда точка M не является точкой выпрямления кривой L. В этом последнем случае будет $K=0$ и не существует окружности с такой кривизной. Условно говорят, что в точке выпрямления кривой L окружность кривизны вырождается в прямую линию (именно в касательную к L в рассматриваемой точке). Соответственно этому говорят также, что в точке выпрямления радиус кривизны „равен бесконечности", а центр кривизны „удаляется в бесконечность".

Пример. Построить центр кривизны параболы

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

в ее вершине (0, 0).

Решение. Из уравнения параболы следует $y'_x=x$, $y''_x=1$. Значит, $K=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, а при $x=0$ оказывается $K=1$. Отсюда и из (13) следует, что $R=1$. Далее, известно, что наша парабола в вершине касается оси Ox так, что центр кривизны C лежит на оси Oy и притом выше оси Ox, поскольку рассматриваемая парабола обращена вогнутостью вверх. Итак, окружность кривизны имеет центр $C(0, 1)$ и радиус $R=1$. На рис. 192 мы видим, как тесно прилегают друг к другу парабола и ее окружность кривизны.

Если мы рассмотрим малую дугу кривой L, содержащую точку M, то приближенно сможем считать эту дугу дугой окружности кривизны (линии L в точке M). Значит, взяв на упомянутой дуге другую точку N, отличную от M, но весьма близкую к M (ибо дуга предполагается малой!) сможем считать, что M и N лежат на одной и той же окружности, которая касается кривой L и в M (точно) и в N (приближенно). Но тогда центр C этой окружности должен лежать сразу на двух нормалях к L, проведенных через M и N, т. е. быть точкой пересечения этих нормалей. Это соображение не только дает сравнительно простой способ приближенного нахождения центра C на чертеже, но и приводит к возможности другого определения центра кривизны. Именно, ведь ошибка, происходящая от замены дуги кривой дугой ее окружности кривизны, тем меньше, чем короче дуга. Иными словами, взяв на кривой L точку M и близкую к ней точку N и найдя пересечение нормалей, проведенных к L из M и N, мы будем получать центр кривизны C (в точке M) с тем большей точностью, чем ближе N к M. Поэтому можно дать

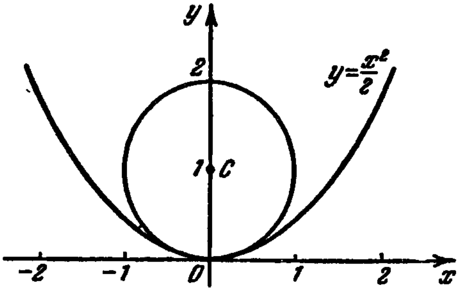


Рис. 192.

Определение. *Центром кривизны* C кривой L в данной ее точке M называется предельное положение точки пересечения нормали к L, проведенной через M, с нормалью, проведенной через бесконечно близкую точку N.

Это определение позволяет дать новое обоснование всей теории кривизны. Именно, зная, что такое центр кривизны кривой L в точке M, мы можем определить радиус кривизны R линии L в точке M формулой

$$R = CM,$$

а затем ввести и понятие кривизны K, положив

$$K = \frac{1}{R}.$$

n° 6. Понятие об эволютах и эвольвентах. Выше мы обращали внимание читателя на то, что, говоря о центре кривизны C какой-либо кривой, надо указывать, для какой точки M кривой точка C является центром кривизны, так как при изменении точки M обычно также будет менять свое положение и точка C. Это приводит к следующему определению:

Определение. Геометрическое место центров кривизны линии L называется *эволютой* этой линии. Сама линия L называется *эвольвентой* своей эволюты *).

Ясно, что прямая линия не имеет эволюты, а эволютой окружности является точка — ее центр. В остальных случаях эволютой служит некоторая линия.

Пример. В п° 4 § 3 мы определили понятие эвольвенты окружности. Покажем, что эта линия действительно служит эвольвентой в только что введенном смысле, т. е. что окружность служит ее эволютой.

Для этого, взяв какую-либо точку $M(t)$ эвольвенты окружности, найдем проходящую через M нормаль к эвольвенте. Параметрические уравнения эвольвенты, как мы видели, таковы:

$$x = R(\cos t + t\sin t),\quad y = R(\sin t - t\cos t).$$

Отсюда

$$x'_t = Rt\cos t,\quad y'_t = Rt\sin t. \tag{14}$$

Стало быть,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t.$$

Если (рис. 185) учесть, что t — угол наклона луча OB к оси Ox, то станет ясно, что касательная к эвольвенте в точке M параллельна радиусу OB, а потому нормаль перпендикулярна к OB. Но из M можно опустить на OB только один перпендикуляр, и им является нить MB. Значит, MB и будет искомой нормалью, на которой находится центр кривизны эвольвенты в точке M.

Найдем теперь радиус кривизны эвольвенты. Согласно (8) кривизна эвольвенты равна

$$K = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}. \tag{15}$$

Но из (14) мы имеем

$$x''_t = R(\cos t - t\sin t),\quad y''_t = R(\sin t + t\cos t).$$

Подставляя это в (15), найдем

$$K = \frac{R^2t^2}{(R^2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{Rt}.$$

Значит, радиус кривизны эвольвенты в точке M равен Rt, т. е. равен длине участка нити MB. Поскольку из чертежа сразу видно, что точка B схода нити с окружности лежит с той стороны эвольвенты, куда последняя обращена вогнутостью, то ясно, что B и будет центром кривизны эвольвенты в точке M. Так как различные положения точки B заполняют окружность, то окружность и служит эволютой своей эвольвенты. Попутно мы установили, что нормаль MB к эвольвенте касается эволюты в соответствующем центре кривизны. Ниже будет показано, что это всегда так.

п° 7. Координаты центра кривизны. Поставим задачу о нахождении координат (x_C, y_C) центра кривизны C кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ этой кривой. Решение этой задачи основано на следующих двух соображениях: 1) точка C лежит на нормали к кривой $y = f(x)$, проведенной через точку M, 2) ее расстояние от M равно радиусу кривизны R. Так как

*) Эволюта и эвольвента (греч.) означают соответственно развертка и развертывающаяся.

уравнение упомянутой нормали

$$y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0),$$

то первое соображение дает

$$x_C-x_0=-y_0'(y_C-y_0). \tag{16}$$

Второе соображение показывает, что

$$(x_C-x_0)^2+(y_C-y_0)^2=R^2, \tag{17}$$

где радиус кривизны R находится из формул (13) и (4):

$$R=\frac{1}{K},\quad K=\frac{y_0''}{(1+y_0'^2)^{3/2}},\quad \text{т. е.}\quad R=\frac{(1+y_0'^2)^{3/2}}{y_0''}$$

и (17) принимает вид

$$(x_C-x_0)^2+(y_C-y_0)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}.$$

Подставляя сюда x_C-x_0 из (16), получим

$$(y_C-y_0)^2y_0'^2+(y_C-y_0)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2},$$

откуда по сокращении на $1+y_0'^2$

$$(y_C-y_0)^2=\left(\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\right)^2.$$

Стало быть,

$$y_C-y_0=\pm\frac{1+y_0'^2}{y_0''}. \tag{18}$$

Остается выяснить, какой из двух знаков надо выбрать.

Различим два случая: 1) кривая $y=f(x)$ в точке M обращена вогнутостью вверх, 2) она обращена в M вогнутостью вниз. В случае 1) будет $y_0''>0$ и, кроме того, из рис. 193 ясно, что точка C лежит выше точки M,

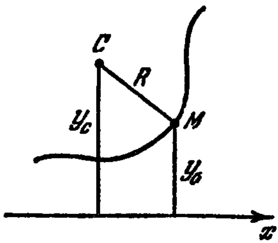


Рис. 193.

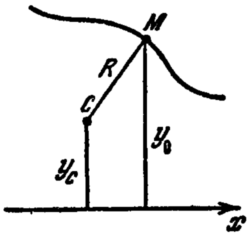


Рис. 194.

т. е. $y_C>y_0$, откуда $y_C-y_0>0$. Поскольку числитель $1+y_0'^2$ дроби, стоящей в (18), всегда положителен, то знак дроби совпадает со знаком ее знаменателя, т. е. дробь >0. Левая часть равенства (18), как мы только что установили, тоже больше нуля. Стало быть, из двух знаков $\pm$ надо выбрать $+$. Точно такие же соображения применимы и тогда, когда кривая в точке M обращена вогнутостью вниз: в этом случае $y_0''<0$ и (рис. 194) $y_C-y_0<0$. Значит, и в случае 2) надо выбирать знак $+$. Итак,

$$y_C-y_0=\frac{1+y_0'^2}{y_0''}.$$

Отсюда и из (16) находим окончательно

$$\boxed{x_C = x_0 - y_0' \frac{1+y_0'^2}{y_0''}, \quad y_C = y_0 + \frac{1+y_0'^2}{y_0''}.} \tag{19}$$

Если исходная кривая задана параметрически, то

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}, \quad y_x'' = \frac{y_t''x_t' - y_t'x_t''}{x_t'^3}.$$

Подставляя эти значения в (19) и опуская для краткости индексы при x_0, y_0, y_0', y_0'', находим

$$x_C = x - \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{y_t''x_t' - y_t'x_t''} y_t', \quad y_C = y + \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{y_t''x_t' - y_t'x_t''} x_t'.$$

На основании формул (19) доказывается

Теорема. *Нормаль к эвольвенте касается эволюты в соответствующем центре кривизны.*

В самом деле, если координаты точки M обозначить просто через x и y, а точки C через ξ и η, то формулы (19) примут вид

$$\xi = x - y'Q, \quad \eta = y + Q, \tag{20}$$

где

$$Q = \frac{1+y'^2}{y''}. \tag{21}$$

Равенства (20) представляют собой параметрические уравнения эволюты (ведь ξ и η — это координаты произвольной точки эволюты), причем параметром служит x.

Угловой коэффициент касательной к эволюте есть η_ξ', т. е. (отмечая штрихами дифференцирование по параметру x)

$$m = \frac{\eta'}{\xi'} = \frac{y' + Q'}{1 - y''Q - y'Q'}.$$

Но из (21) непосредственно следует, что $y''Q = 1 + y'^2$. Значит,

$$m = \frac{y' + Q'}{-y'^2 - y'Q'} = -\frac{1}{y'}.$$

Это значит, что касательная к эволюте в центре кривизны C параллельна нормали к эвольвенте в соответствующей точке M. Но обе эти прямые (рис. 195) проходят через C и потому совпадают, что и требовалось доказать.

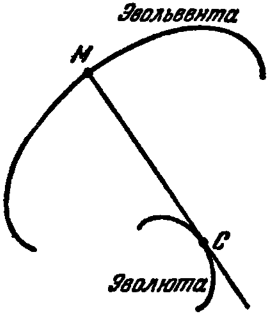


Рис. 195.

п° 8. Железнодорожные закругления. Остановимся на применении понятия кривизны в одном техническом вопросе.

Из механики известно, что:

1) Точка M, равномерно двигающаяся со скоростью v по какой-нибудь плоской линии L, в каждый момент времени обладает ускорением $w = Kv^2$, где K — кривизна линии L в той ее точке, где в рассматриваемый момент находится точка M. Это ускорение (называемое н о р м а л ь н ы м), направлено по нормали к L от точки M к соответствующему центру кривизны. Если линия L прямая, то $K=0$ и нормальное ускорение отсутствует.

2) Если двигающаяся точка M имеет массу m и в какой-нибудь момент обладает ускорением w, то в этот момент на M действует сила $F = mw$, направленная в ту же сторону, что и ускорение w.

3) Если какое-либо тело действует на точку M с силой F, то и M действует на упомянутое тело с равной по величине, но противоположно направленной силой.

Отметив это, рассмотрим равномерное (со скоростью v) движение железнодорожного поезда, который мы приближенно примем за материальную точку массы m.

Пусть (рис. 196) поезд движется сначала по прямой AB, а затем переходит в закругление, представляющее собой дугу BC окружности радиуса R.

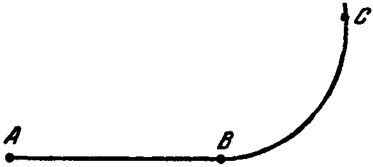


Рис. 196.

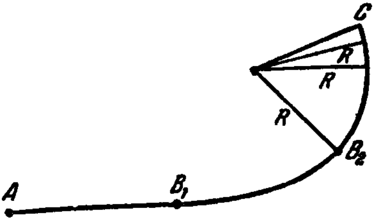


Рис. 197.

Разумеется, прямая AB является касательной к дуге BC. Это обстоятельство, однако, не обеспечивает плавности движения. В самом деле, на участке AB кривизна пути равна нулю, а на дуге BC она равна $\frac{1}{R}$. Значит, пока поезд шел по AB, он не имел ускорения, а при проходе через стык B он мгновенно приобрел ускорение $\frac{v^2}{R}$. Отсюда следует, что в момент перехода поезда через стык B на поезд мгновенно начинает действовать сила

$$F = m\frac{v^2}{R}.$$

Такое мгновенное возникновение силы называется явлением *удара*. Итак, в момент прохода поезда через стык B поезд получает со стороны рельсов удар F, а значит, и сам наносит по рельсам такой же удар. Поскольку и масса m поезда и его скорость v обычно весьма велики, то описанное явление портит полотно и даже может вызвать крушение поезда.

Для избежания указанных неприятностей не применяют непосредственного соединения прямолинейного и кругового участков пути, а вставляют между ними некоторую „переходную кривую“, вроде изображенной на рис. 197 линии B_1B_2. Эту линию выбирают так, чтобы ее кривизна K непрерывно возрастала от значения $K=0$ в точке B_1 до значения $K=\frac{1}{R}$ в точке B_2. Этим будет достигнута плавность движения поезда.

Так как точка B_1 должна быть точкой выпрямления линии B_1B_2, то в качестве переходной кривой может быть выбрана не любая линия, а только такая, на которой имеются точки выпрямления. Например, обычная парабола $y=ax^2$ для этой цели не годится, так как здесь $y''=2a\neq 0$ и точек выпрямления нет. Напротив, кубическая парабола $y=ax^3$ имеет точку выпрямления $x=0$, и потому ее и в действительности используют в качестве переходной кривой.

Интересно, что столь, казалось бы, отвлеченное понятие, как точка выпрямления, имеет важное практическое применение.

ГЛАВА V
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Общие приемы интегрирования

n° 1. Первообразная. Основной задачей дифференциального исчисления является задача дифференцирования, т. е. задача нахождения скорости изменения какой-нибудь функции. На практике часто бывает важно решить обратную задачу: зная скорость изменения функции (по отношению к аргументу), найти эту функцию. Иными словами, здесь нам надо найти функцию, зная ее производную. Эта операция называется интегрированием. Определим этот термин подробнее.

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если эта последняя является производной от $F(x)$

$$\boxed{f(x)=F'(x).}$$

Например, x^3 есть первообразная для $3x^2$, ибо $(x^3)'=3x^2$. Точно так же $\ln x$ есть первообразная для $\frac{1}{x}$.

Действие нахождения первообразной для какой-нибудь функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции. Таким образом, выше мы проинтегрировали $3x^2$ и $\frac{1}{x}$.

Замечание. Иногда приходится специально указывать промежуток, где задана функция, которую надо интегрировать. Например, если мы будем рассматривать функцию $\frac{1}{x}$ на промежутке $(0, +\infty)$, то первообразной функцией для $\frac{1}{x}$ будет $\ln x$. Однако для той же функции $\frac{1}{x}$, но рассматриваемой на промежутке $(-\infty, 0)$, первообразной будет уже не $\ln x$ (который и не определен для $x<0$), а $\ln(-x)$, ибо

$$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}.$$

Напротив, функция x^3 служит первообразной для $3x^2$ на всей вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ (и тем самым на любом ее участке).

Естественно возникает вопрос: у всякой ли функции $f(x)$ имеется первообразная, т. е. всякая ли функция $f(x)$ является производной какой-нибудь другой функции. Ответ дает

Теорема. *Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную.*

Мы не будем доказывать эту теорему.

n° 2. Произвольная постоянная. Неопределенный интеграл. Выше мы сказали, что функция $y = x^3$ есть первообразная для $3x^2$, ибо $y' = 3x^2$. Но ведь $z = x^3 + 5$ также будет первообразной для $3x^2$, так как и $z' = 3x^2$. Вообще, любая функция $x^3 + C$ имеет производную $3x^2$ и потому является для $3x^2$ первообразной. Вообще мы можем утверждать, что наряду с $F(x)$, являющейся первообразной для $f(x)$, любая функция $F(x) + C$ также будет первообразной для $f(x)$, ибо

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x).$$

Естественно возникает вопрос: исчерпывается ли множество в с е х первообразных для данной функции $f(x)$ выражениями вида

$$F(x) + C, \tag{1}$$

где $F(x)$ — одна из них, или же у $f(x)$ имеются первообразные, не получающиеся из (1) ни при каком постоянном значении C. Ответ дает

Теорема. *Никаких других первообразных, кроме* (1), *у* $f(x)$ *нет.*

Действительно, пусть $F_1(x)$ — какая-то первообразная для $f(x)$. Тогда $F_1'(x) = f(x)$. Но ведь и $F(x)$, фигурирующая в (1), также является первообразной для $f(x)$, а потому $F'(x) = f(x)$. Введем в рассмотрение разность $F_1(x) - F(x)$, обозначив ее через $R(x)$. Тогда

$$R'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

На основании известного признака постоянства функции из соотношения $R'(x) = 0$ следует, что $R(x)$ — величина постоянная. Обозначим эту постоянную через A: $R(x) = A$. Тогда $F_1(x) - F(x) = A$ и

$$F_1(x) = F(x) + A.$$

Иначе говоря, функция $F_1(x)$ получается из (1) при значении $C = A$, что и требовалось доказать.

Таким образом, (1) представляет собой о б щ и й в и д или, как иногда говорят, п о л н о е с е м е й с т в о первообразных для $f(x)$.

О п р е д е л е н и е. Если $F(x)$ — какая-то первообразная для $f(x)$, то выражение

$$F(x) + C,$$

где C может принимать любое постоянное значение, называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается через

$$\int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Таким образом, равенство

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{3}$$

есть лишь иная запись соотношения $F'(x) = f(x)$, или, что то же самое, соотношения $dF(x) = f(x)\,dx$. Ниже будет разъяснено, почему в символ (2) вводят множитель dx. Отметим еще, что слагаемое C, входящее в правую часть (3), называют *произвольной постоянной*, а функцию $f(x)$ — *подынтегральной* функцией.

Читателю нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

каждое из которых представляет собой иллюстрацию данного только что определения. Равенство

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

также иллюстрирует наше определение, но лишь тогда, когда $x > 0$. Если же $x < 0$, то

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Из самого определения неопределенного интеграла следует

Теорема. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е.*

$$\boxed{\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).} \tag{4}$$

Действительно, равенство $y = \int f(x)\,dx$ означает, что $y = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, а $C = \text{const}$. Но тогда $y' = F'(x) = f(x)$, что и требовалось доказать *).

Из того же определения вытекает

Правило. Чтобы убедиться, справедливо ли равенство

$$\int f(x)\,dx = H(x) + C, \tag{5}$$

---

*) Можно рассуждать и так: при любом постоянном C выражение $y = F(x) + C$ является первообразной для $f(x)$ и, стало быть, $y' = f(x)$.

где $H(x)$ — какая-нибудь функция, надо продифференцировать его правую часть. Если получится подынтегральная функция левой части, то (5) верно. В противном случае (5) неверно.

Пример. Убедимся, что

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)+C.} \tag{6}$$

Полагая

$$y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)+C,$$

найдем

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+m}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+m}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+m}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+m}+x}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Отсюда

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+m}}$$

и (6) доказано.

n° 3. Таблица основных интегралов. Для выработки умения интегрировать необходимо знать следующие 13 формул:

I.	$\int dx = x+C.$	VII.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
II.	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C.$	VIII.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
III.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$	IX.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
IV.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C.$	X.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C.$
V.	$\int e^x dx = e^x + C.$	XI.	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$
VI.	$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$	XII.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}+C.$

XIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)+C.$

Проверка каждой из формул может быть произведена по правилу n° 2: надо продифференцировать правую часть формулы и убедиться, что получается подынтегральная функция левой части. Эту проверку мы предоставляем читателю.

Замечания. 1. Формула II верна при $a \neq -1$. В самом деле, если $a=-1$, то правая часть формулы теряет смысл. При $a=-1$ место формулы II занимает формула III.

2. В формуле III подразумевается $x>0$. Если $x<0$, то вместо III надо писать

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Обе эти формулы можно заменить одной:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Точно так же формулы XII и XIII можно записать в более общем виде:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C.$$

3. В формуле X подразумевается $a>0$. Действительно, хотя при любом $a \neq 0$ будет

$$\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}},$$

однако преобразование

$$a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2-x^2}$$

верно только*) при $a>0$.

4. В формулах XI и XII подразумевается $a \neq 0$.

5. Вместо X и XI можно было бы написать

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C.$$

6. Вся таблица выписана в предположении, что независимая переменная обозначена буквой x. Легко понять, что формулы III, V, VI, VII можно было бы писать и в виде

$$\int \frac{dz}{z} = \ln z + C, \quad \int e^t\,dt = e^t + C,$$

$$\int \cos y\,dy = \sin y + C, \quad \int \sin u\,du = -\cos u + C$$

---

*) Если $a<0$, то $a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = -\sqrt{a^2-x^2}$.

и т. п. Точно так же формулу I можно писать в любом из видов

$$\int dz = z + C, \quad \int dt = t + C, \quad \int dy = y + C, \quad \int du = u + C.$$

Сказанное сейчас делает понятным, почему неопределенный интеграл для $f(x)$ записывают в виде (2), а не просто как

$$\int f(x). \tag{7}$$

Действительно, приняв обозначение (7), мы не знали бы, чему равен $\int 1$. Равен ли он x, y, z, t, u, зависело бы от того, какой из этих букв обозначена независимая переменная. Назначение множителя dx в выражении (2) как раз и заключается в указании независимой переменной.

n°4 Интегрирование суммы и вынесение постоянного множителя. При интегрировании почти постоянно приходится пользоваться двумя теоремами, которые мы докажем в этом n°.

Теорема 1. *Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е.*

$$\boxed{\int [f(x) + g(x) - h(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx - \int h(x)\, dx.} \tag{8}$$

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости (8), продифференцируем правую часть этого равенства. Но указанная правая часть представляет собой алгебраическую сумму нескольких слагаемых. Поэтому в результате дифференцирования получим

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' + \left(\int g(x)\, dx\right)' - \left(\int h(x)\, dx\right)'. \tag{9}$$

По теореме n° 2 имеем

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x), \quad \left(\int g(x)\, dx\right)' = g(x), \quad \left(\int h(x)\, dx\right)' = h(x).$$

Стало быть, (9) есть не что иное, как $f(x) + g(x) - h(x)$. Итак, дифференцирование правой части (8) приводит к подынтегральной функции левой части этого же равенства, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е.*

$$\boxed{\int af(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.} \tag{10}$$

Доказательство вполне аналогично предыдущему. Именно, положив

$$y = a\int f(x)\,dx,$$

имеем последовательно

$$y' = \left(a\int f(x)\,dx\right)' = a\left(\int f(x)\,dx\right)' = af(x),$$

чем и доказано (10).

Примеры.

1) $$I = \int (2x^2 + 9x - 5)\,dx = 2\int x^2\,dx + 9\int x\,dx - 5\int dx.$$

Все три интеграла справа табличные. Значит,

$$I = 2\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 9\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) - 5(x + C_3),$$

или

$$I = \frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5x + C,$$

где положено $C = 2C_1 + 9C_2 - 5C_3$. Заметим, что обычно при вычислении отдельных интегралов, входящих в правую часть соотношения

$$\int [af(x) + bg(x) - ch(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx - c\int h(x)\,dx,$$

произвольных постоянных не вводят, а приписывают одну постоянную в конце всей выкладки.

2) $$\int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left(4x + 12 + \frac{9}{x}\right)dx = \\ = 2x^2 + 12x + 9\ln x + C.$$

3) $$I = \int \frac{dx}{\sin^2 2x}.$$

Позже мы узнаем совсем простой способ вычисления этого интеграла. При тех скромных сведениях из техники интегрирования, которыми мы обладаем сейчас, нам придется прибегнуть к искусственному приему. Именно,

$$I = \int \frac{dx}{4\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx.$$

Дальнейшее просто:

$$I = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \frac{1}{4}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

n° 5. Способ подстановки. Здесь мы ознакомимся с чрезвычайно важным способом интегрирования: способом *подстановки* (он же способ *замены переменной*). Чтобы понять суть дела, полезно рассмотреть сначала несколько примеров.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int e^{\sin x} \cos x\, dx. \tag{11}$$

Так как $\cos x\, dx = d(\sin x)$, то I можно переписать в виде

$$I = \int e^{\sin x}\, d(\sin x).$$

Введем новую переменную z, положив $\sin x = z$. Тогда

$$I = \int e^z\, dz.$$

Справа получился табличный интеграл (формула V). Стало быть,

$$I = e^z + C.$$

Остается вернуться к старой переменной x, и мы получаем

$$I = e^{\sin x} + C.$$

Справедливость полученного результата легко проверяется дифференцированием.

Рассмотрим еще один пример. Пусть

$$I = \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1 + x^2}. \tag{12}$$

Тогда

$$I = \int e^{\operatorname{arctg} x}\, d(\operatorname{arctg} x),$$

или

$$I = \int e^z\, dz,$$

где $z = \operatorname{arctg} x$.

Отсюда находим

$$I = e^z + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

Мы видим, что использованный прием дал возможность при помощи одной и той же формулы V вычислить столь различные интегралы, как (11) и (12).

Вот еще один пример применения того же способа подстановки:

$$I = \int \sin^8 x \cos x\, dx = \int \sin^8 x\, d(\sin x).$$

Положив $\sin x = z$, находим

$$I = \int z^8\, dz = \frac{z^9}{9} + C = \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

Рассмотренные примеры делают понятным следующее

Правило подстановки. Чтобы вычислить интеграл

$$I = \int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx,$$

надо

1) переписать I в виде

$$I = \int f[\varphi(x)]\,d\varphi(x);$$

2) заменить $\varphi(x)$ буквой z, что приводит к равенству

$$I = \int f(z)\,dz;$$

3) вычислить последний интеграл;

4) в полученном ответе произвести обратную замену z на $\varphi(x)$.

Докажем, что это правило действительно приводит к истинному значению I. Для этого допустим, что

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C. \tag{13}$$

Тогда наше правило приводит к равенству

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C. \tag{14}$$

Чтобы убедиться в справедливости равенства (14), продифференцируем его правую часть

$$y = F[\varphi(x)] + C.$$

Для этого применим „правило цепочки", положив $\varphi(x) = z$. Тогда

$$y = F(z) + C$$

и

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = y'_z \varphi'(x).$$

Но $y'_z = F'(z)$, а соотношение (13) дает $F'(z) = f(z)$. Стало быть,

$$y'_x = f(z)\,\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\,\varphi'(x).$$

Поскольку получилась подынтегральная функция левой части равенства (14), это равенство верно.

В простых случаях введение новой переменной z производят в уме. Например,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x},$$

откуда видно, что

$$\boxed{\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x + C.} \tag{15}$$

Аналогично

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

и

$$\boxed{\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \sin x + C.} \tag{16}$$

Формулы (15) и (16) полезно запомнить. Сходным приемом находим

$$\int \frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x+8}\,dx = \int \frac{d(x^3+3x^2+2x+8)}{x^3+3x^2+2x+8} = \ln(x^3+3x^2+2x+8)+C.$$

Более общим образом

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln\varphi(x)+C,$$

т. е. *интеграл от дроби, числитель которой является производной знаменателя, равен логарифму знаменателя.*

Читателю будет полезно рассмотреть еще и следующие примеры:

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)+C,$$

$$\int \frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{1+\ln^2 x} = \operatorname{arctg}\ln x + C,$$

$$\int \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int \sqrt{\operatorname{ctg} x}\,d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{2}{3}(\operatorname{ctg} x)^{3/2}+C.$$

Возвращаясь к правилу подстановки, выскажем его в более общей форме: *чтобы вычислить интеграл, в котором независимой переменной служит x, можно перейти к другой переменной z, связанной каким-нибудь образом с x, выразив через z все подынтегральное выражение (включая dx!). После нахождения вновь полученного интеграла надо возвратиться к старой переменной x.*

Вот пример на эту более общую формулировку:

$$I = \int \sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Положим $x = R\sin z$. Тогда $\sqrt{R^2-x^2} = R\cos z$ и $dx = R\cos z\,dz$, откуда

$$I = R^2\int \cos^2 z\,dz.$$

На основании известной тригонометрической формулы имеем

$$I = R^2\int \frac{1+\cos 2z}{2}\,dz = \frac{R^2}{2}\left[z+\int \cos 2z\,dz\right].$$

Но

$$\int \cos 2z\,dz = \frac{1}{2}\int \cos 2z\,d(2z) = \frac{\sin 2z}{2}+C.$$

Значит,

$$I = \frac{R^2}{2}z + \frac{R^2\sin 2z}{4}+C.$$

Остается вернуться к старой переменной x. Для этого заметим, что

$$z = \arcsin\frac{x}{R},\quad R^2\sin 2z = 2(R\sin z)(R\cos z) = 2x\sqrt{R^2-x^2}.$$

Таким образом,

$$I=\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+C.$$

В заключение покажем, как способом подстановки можно вывести табличную формулу XIII.

Пусть

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Положим

$$\sqrt{x^2+m}=z.$$

Тогда

$$dz=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+m}}=\frac{x\,dx}{z},$$

откуда

$$\frac{dz}{x}=\frac{dx}{z}.$$

Переходя к производной пропорции, получим

$$\frac{dx}{z}=\frac{dx+dz}{z+x}=\frac{d(x+z)}{x+z}.$$

Итак,

$$I=\int\frac{dx}{z}=\int\frac{d(x+z)}{x+z}=\ln(x+z)+C=\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C.$$

n° 6. **Линейные подстановки.** Отметим два частных случая замены переменной.

I. *Добавление постоянной под дифференциал.*

При любой постоянной a будет

$$d(x+a)=dx.$$

Значит, и наоборот $dx=d(x+a)$, и потому

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(x)\,d(x+a),} \tag{17}$$

т. е. *под знак дифференциала, стоящего в интеграле* *), *можно ввести любое постоянное слагаемое.*

Вот примеры, где используется этот прием:

$$\int\frac{dx}{x+5}=\int\frac{d(x+5)}{x+5}=\ln(x+5)+C,$$

$$\int\sqrt{x-3}\,dx=\int\sqrt{x-3}\,d(x-3)=\frac{2}{3}(x-3)^{3/2}+C,$$

$$\int(x+2)^{35}\,dx=\int(x+2)^{35}\,d(x+2)=\frac{(x+2)^{36}}{36}+C.$$

---

*) Как, впрочем, и под знак любого дифференциала.

II. *Введение под дифференциал постоянного множителя.*

Как известно, если a постоянно, то $d(ax)=a\,dx$. Отсюда при $a\neq 0$

$$dx=\frac{1}{a}d(ax).$$

Стало быть,

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\frac{1}{a}\int f(x)\,d(ax),} \tag{18}$$

т. е. ***под знак дифференциала, стоящего в интеграле, можно ввести любой постоянный множитель, разделив на него интеграл.***

Например,

$$\int \sin 7x\,dx=\frac{1}{7}\int \sin 7x\,d(7x)=-\frac{1}{7}\cos 7x+C,$$

$$\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 2x}=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x+C.$$

Интересно сопоставить простое решение последнего примера с тем решением, какое было дано в n° 4.

Иногда приходится применять оба только что указанных приема. Так, например *),

$$\int \frac{dx}{4x+7}=\frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{4x+7}=\frac{1}{4}\int \frac{d(4x+7)}{4x+7}=\frac{1}{4}\ln(4x+7)+C,$$

$$\int \cos(5x+2)\,dx=\frac{1}{5}\int \cos(5x+2)\,d(5x)=$$
$$=\frac{1}{5}\int \cos(5x+2)\,d(5x+2)=\frac{\sin(5x+2)}{5}+C.$$

n° 7. Интегрирование по частям. Существует еще один широко применяемый способ интегрирования, называемый „интегрированием по частям".

---

*) Первый пример можно решить и так:

$$\int \frac{dx}{4x+7}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+7/4}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x+7/4)}{x+7/4}=\frac{1}{4}\ln\left(x+\frac{7}{4}\right)+C'.$$

На первый взгляд ответ другой. Однако $4x+7=\left(x+\frac{7}{4}\right)4$. Поэтому

$$\frac{1}{4}\ln(4x+7)=\frac{1}{4}\ln\left(x+\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}\ln 4,$$

и дело в различии постоянных C и C', так как $C'=\frac{1}{4}\ln 4+C$.

Пусть u и v — две функции аргумента x, имеющие производные u' и v'. Как известно,

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Это равенство означает не что иное, как то, что произведение uv будет первообразной функцией для суммы $u'v + uv'$. Стало быть,

$$\int (u'v + uv')\,dx = uv + C,$$

откуда

$$\int u'v\,dx + \int uv'\,dx = uv + C. \tag{19}$$

Но ведь $u'\,dx = du$, $v'\,dx = dv$, и потому (19) можно переписать в виде

$$\int v\,du + \int u\,dv = uv + C.$$

Перенесем первый интеграл в правую часть. Это дает

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C. \tag{20}$$

Поскольку в состав интеграла $\int v\,du$ уже входит произвольная постоянная, то в нее можно включить и слагаемое C, стоящее в (20). В результате получаем *формулу интегрирования по частям*

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.} \tag{21}$$

Эта формула представляет собой тождество, справедливое для любой пары функций u и v. В некоторых случаях (разумеется, не всегда) интеграл, стоящий в (21) справа, проще интеграла, стоящего слева. Тогда применение формулы имеет смысл.

Всмотримся внимательнее в структуру формулы (21). Мы видим, что множитель u, стоящий в левом интеграле, при переходе к правому интегралу заменяется на du, т. е. дифференцируется. Другой же сомножитель dv из левого интеграла заменяется на v, т. е. интегрируется*). Рассуждая абстрактно, можно ожидать, что упрощение интеграла может происходить от любой из этих двух операций. Однако в подавляющем большинстве случаев, встречающихся на практике, упрощение вызывается дифференцированием множителя u. Таким образом, *если в составе подынтегральной функции имеется множитель, упрощающийся от дифференцирования, то следует попробовать применить формулу* (21), *приняв упомянутый множитель за u, а все остальное (включая dx!) за dv.*

---

*) Эта необходимость интегрирования не всего подынтегрального выражения $u\,dv$, а только его части dv и объясняет термин „интегрирование по частям“.

Пусть, например,

$$I=\int \sqrt[3]{x^2}\ln x\,dx.$$

В состав подынтегральной функции входит множитель $\ln x$, производная которого $\frac{1}{x}$ гораздо проще его самого. Поэтому полагаем

$$\ln x=u, \quad \sqrt[3]{x^2}\,dx=dv.$$

Отсюда прежде всего получаем $du=\frac{dx}{x}$. Далее надо найти v, т. е. проинтегрировать выражение

$$dv=\sqrt[3]{x^2}\,dx. \tag{22}$$

Как всегда, имеется бесчисленное множество функций v, для которых (22) есть дифференциал. Общий вид этих функций

$$v=\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+C. \tag{23}$$

Но ведь (внимание!) мы хотим воспользоваться тождеством (21). Для этого нам нет надобности привлекать все множество функций (23), а достаточно использовать какую-нибудь одну из них. Разумеется, самое простое — взять ту функцию, которая отвечает значению $C=0$, т. е. положить

$$v=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}.$$

Вообще, *когда применяют интегрирование по частям и по dv находят v, то произвольной постоянной не вводят*, так как руководствуются теми же соображениями, что и в рассматриваемом примере. Возвращаясь к этому примеру, имеем на основании формулы (21)

$$I=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\int \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\,\frac{dx}{x}. \tag{24}$$

Так как

$$\int \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\,\frac{dx}{x}=\frac{3}{5}\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5}+C, \tag{25}$$

то (24) дает *)

$$I=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\ln x-\frac{9}{25}\sqrt[3]{x^5}+C.$$

Вот еще один пример:

$$I=\int xe^x\,dx.$$

*) Строго говоря, подставляя (25) в (24), мы должны были бы написать не „$+C$“, а „$-C$“, но так как C — все равно постоянная произвольная, то безразлично, какой знак поставить перед ней.

Здесь единственным множителем, упрощающимся от дифференцирования, является x. Принимая его за u, составляем таблицу

$$x = u, \quad du = dx,$$
$$e^x\,dx = dv, \quad v = e^x.$$

Применяя (21), получим

$$I = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Сходным образом вычисляется интеграл

$$I = \int x^2 \cos x\,dx.$$

Здесь

$$x^2 = u, \quad du = 2x\,dx,$$
$$\cos x\,dx = dv, \quad v = \sin x$$

и

$$I = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx. \tag{26}$$

Интеграл

$$I_1 = \int x \sin x\,dx$$

проще исходного (то, что $\cos x$ заменился на $\sin x$, не играет роли, а вместо множителя x^2 появился более простой множитель x).

К I_1 снова применяем интегрирование по частям, полагая

$$x = u, \quad du = dx,$$
$$\sin x\,dx = dv, \quad v = -\cos x.$$

Это дает

$$I_1 = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Подставляя в (26), находим окончательно *)

$$I = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

Полезно запомнить следующие 6 типов интегралов, вычислять которые удобно интегрированием по частям:

$$\text{I. } \int x^n e^x\,dx, \qquad \text{IV. } \int x^a \ln x\,dx,$$
$$\text{II. } \int x^n \sin x\,dx, \qquad \text{V. } \int x^n \operatorname{arctg} x\,dx,$$
$$\text{III. } \int x^n \cos x\,dx, \qquad \text{VI. } \int x^n \arcsin x\,dx.$$

Для интегралов I, II, III следует принимать за u множитель x^n. Это приведет к интегралу сходного типа, но уменьшит показатель степени x на единицу. После n-кратного применения этого приема мы

---

*) Снова пишем C вместо $-2C$. Впредь подобные разъяснения опускаем.

получим один из табличных интегралов

$$\int e^x\,dx, \quad \int \sin x\,dx, \quad \int \cos x\,dx.$$

В интегралах IV, V, VI от дифференцирования упрощается трансцендентный множитель (т. е. $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ или $\arcsin x$). Его и следует принять за u.

Иллюстрируем изложенное несколькими примерами.

1) $I=\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Здесь

$$\operatorname{arctg} x=u, \quad du=\frac{dx}{1+x^2},$$

$$x\,dx=dv, \quad v=\frac{x^2}{2},$$

откуда

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}.$$

Последний интеграл вычисляется так:

$$\int\frac{x^2\,dx}{1+x^2}=\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\operatorname{arctg} x+C.$$

Значит,

$$I=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C.$$

2) $I=\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Здесь

$$\operatorname{arctg} x=u, \quad du=\frac{dx}{1+x^2},$$

$$dx=dv, \quad v=x.$$

Интересной особенностью рассматриваемого примера является то, что за u принята вся подынтегральная функция целиком, а за dv принимается только dx.

Формула (21) дает

$$I=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Но

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C,$$

откуда

$$I=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

Вот еще два примера с той же особенностью.

3) $I=\int \ln x\, dx.$

Полагаем

$$\ln x=u, \quad du=\frac{dx}{x},$$

$$dx=dv, \quad v=x.$$

Отсюда

$$I=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x\ln x-x+C.$$

4) $I=\int \arcsin x\, dx.$

Полагаем

$$\arcsin x=u, \quad du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$dx=dv, \quad v=x.$$

Отсюда

$$I=x\arcsin x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Но

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Значит,

$$I=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Во всех рассмотренных примерах мы следовали общему указанию: выбирать за u множитель, упрощающийся от дифференцирования. Попробуем отступить от этого указания. Пусть

$$I=\int xe^x\,dx.$$

Выше мы уже нашли этот интеграл, приняв за u множитель x. Попробуем теперь принять за u множитель e^x, хотя он не упрощается от дифференцирования. Тогда

$$e^x=u, \quad du=e^x\,dx,$$

$$x\,dx=dv, \quad v=\frac{x^2}{2}$$

и

$$\int xe^x\,dx=\frac{x^2}{2}e^x-\frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx.$$

Хотя это равенство верное, но оно бесполезно, так как правый интеграл сложнее левого.

n° 8. Приведение интеграла к самому себе. Выше мы рекомендовали применять формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{21}$$

в тех случаях, когда правый интеграл проще левого. Однако может оказаться, что правый интеграл в точности равен левому. Пусть, например,

$$I = \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Положим здесь *)

$$\ln x = u, \quad du = \frac{dx}{x},$$

$$\frac{dx}{x} = dv, \quad v = \ln x.$$

Тогда формула (21) дает

$$I = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Справа получился исходный интеграл I. Поэтому

$$I = \ln^2 x - I, \tag{27}$$

откуда **)

$$2I = \ln^2 x + C$$

и

$$I = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Таким образом, интегрирование по частям применимо и тогда, когда интегралы формулы (21) совпадают. Более общим образом можно сказать, что формула (21) позволяет найти интеграл I всякий раз, когда она приводит к равенству вида

$$I = uv - aI, \tag{28}$$

---

*) Этот пример приведен лишь для иллюстрации рассматриваемого случая. Гораздо проще I вычисляется подстановкой:

$$I = \int \ln x\,d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

**) Каждый из интегралов I, фигурирующих в (27), представляет собой выражение вида $F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-то первообразная для $\frac{\ln x}{x}$, а C — произвольная постоянная, которая может выбираться для упомянутых интегралов по-разному. Поэтому указанные интегралы могут различаться на постоянную. Это замечание относится и к дальнейшим примерам.

где a — постоянная, отличная от -1. В самом деле, (28) представляет собой уравнение относительно I, из которого находится

$$I=\frac{uv}{1+a}+C.$$

Этот случай применения интегрирования по частям естественно назвать „приведением интеграла к самому себе".

Примеры.

1) $I=\int\sqrt{x^2+m}\,dx.$

Положим

$$\sqrt{x^2+m}=u,\quad du=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+m}},$$

$$dx=dv,\quad v=x.$$

Тогда

$$I=x\sqrt{x^2+m}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}. \tag{28a}$$

Но

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}=\int\frac{(x^2+m)-m}{\sqrt{x^2+m}}\,dx=\int\sqrt{x^2+m}\,dx-m\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Отсюда и из (28a) следует

$$I=x\sqrt{x^2+m}-I+m\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C.$$

Стало быть,

$$2I=x\sqrt{x^2+m}+m\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C.$$

Окончательно

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+m}+\frac{m}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+m})+C.$$

2) $I=\int e^x\cos x\,dx.$

Положим

$$e^x=u,\quad du=e^x\,dx,$$

$$\cos x\,dx=dv,\quad v=\sin x.$$

Тогда

$$I=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx. \tag{29}$$

Справа получился интеграл примерно той же сложности, что и исходный. Это часто является указанием на возможность приведения интеграла к самому себе. В нашем случае применим интегрирование по частям к интегралу

$$I^*=\int e^x\sin x\,dx.$$

Положив

$$e^x = u, \quad du = e^x\,dx,$$
$$\sin x\,dx = dv, \quad v = -\cos x,$$

получим

$$I^* = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx = -e^x \cos x + I. \tag{30}$$

Подставляя это в (29), находим

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I,$$

откуда

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C. \tag{31}$$

Заметим, что нами попутно вычислен и интеграл I^*, так как из (30) и (31) вытекает

$$I^* = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

n° 9. Интегралы, не выражающиеся элементарно. Мы располагаем уже довольно обширным запасом приемов интегрирования. Однако никакой из этих приемов не позволяет найти интеграл

$$I = \int x \operatorname{tg} x\,dx. \tag{32}$$

Более того, можно заранее сказать, что никакое дальнейшее развитие техники интегрирования не даст возможности найти интеграл (32). По поводу этого пессимистического утверждения следует остановиться на некоторых подробностях. Философия диалектического материализма учит нас, что мир принципиально познаваем. Вещи, не познанные сегодня, будут познаны позже, и ставить преграды для развития нашего познания нельзя. Противоположное, антимарксистское учение, называемое агностицизмом и ставящее какие-то границы познанию, опровергается развитием науки. Например, в 19-м веке философ О. Конт заявил, что люди никогда не узнают химического состава звезд. Вскоре после этого был разработан метод спектрального анализа, позволяющий настолько точно изучать химическую структуру звезд, что элемент гелий был обнаружен на солнце раньше, чем на земле. Сейчас этот элемент широко используется в технике.

Возникает естественное опасение, не является ли наше утверждение о том, что интеграл (32) никогда не будет найден, заблуждением, свойственным агностицизму. На самом деле это не так. Мы часто высказываем некоторые истинные суждения в форме отрицания противоречащих им суждений. Например, хорошо известно, что сумма углов треугольника *) равна 180°. Эту истину можно высказать в сле-

*) Речь идет о треугольниках, лежащих на евклидовой плоскости. У треугольника, лежащего на поверхности шара, сумма углов больше 180°, а у треугольника, лежащего на плоскости Лобачевского, упомянутая сумма меньше 180°.

дующей „пессимистической“ форме: „люди никогда не научатся строить треугольники с суммой углов, отличной от 180°“. Ясно, что никакого агностицизма здесь нет, ибо Конт основывался на своем незнании состава звезд (и возводил его в догму), а мы основываемся на своем знании, что сумма углов треугольника равна 180° (если бы этой истины мы не знали, то и не могли бы сделать своего утверждения о невозможности построения упомянутого треугольника).

Разберемся теперь, какие же могут быть основания утверждать, что интеграл (32) никогда не будет найден. Прежде всего возникает мысль, что „не существует функции, для которой $x \operatorname{tg} x$ служит производной“. Эта мысль, однако, неверна. Ведь функция $x \operatorname{tg} x$ непрерывна, например, на промежутке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. А тогда у нее заведомо имеется на этом промежутке первообразная. Итак, первообразная есть, а найти ее нельзя. В чем же дело?

Дело здесь заключается в необходимости уточнения смысла слова „найти“. Для понимания дальнейшего полезен такой пример. Вообразим себе, что люди не догадались ввести тригонометрические функции. Это не помешало бы построению дифференциального и интегрального исчисления. Можно было бы определить понятия переменной, предела, функции. Теорема о том, что предел суммы равен сумме пределов слагаемых, никакой тригонометрии не требует. Определение производной как предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ также не требует знания тригонометрии *). В результате развития такой „бедной“ математики появились бы все же формулы вроде

$$(x^2)' = 2x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

а значит, и равносильные им формулы

$$\int 2x\,dx = x^2 + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Таким образом, в этой математике, как и у нас, возникла бы проблематика вычисления интегралов. Разумеется, о вычислении интеграла

$$\int \cos x\,dx$$

не могло бы идти и речи, ибо этот интеграл представлял бы собою бессмысленное сочетание значков **). Однако (в этом весь смысл

*) Правда, в нашей воображаемой математике уже нельзя было бы сказать, что производная представляет собой тангенс угла наклона касательной к оси Ox.

**) Ведь мы не говорим об „интеграле“

$$\int \text{цыц}\,(x)\,dx,$$

ибо цыц (x) — бессмыслица.

нашего примера!) даже и в рассматриваемой „бедной“ математике можно поставить задачу нахождения интеграла

$$\int \frac{dx}{1+x^2}, \tag{33}$$

ибо составление функции $\frac{1}{1+x^2}$ не требует никаких сведений из тригонометрии. В то же время „найти“ этот интеграл в математике, лишенной тригонометрии, нельзя, ибо

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Мы видим, что вопрос о том, „находится“ или „не находится“ тот или иной интеграл, получает разный смысл в зависимости от того, через какие функции мы хотим записать ответ. В современной математике выбран некоторый запас простых функций (которые выше мы назвали элементарными), и именно через эти функции мы и стараемся выразить встречающиеся нам интегралы. Таким образом, сделанное нами заявление, что интеграл (32) „нельзя найти“, означает более точно, что он не выражается через элементарные функции. Разумеется, если расширить множество функций, которые мы называем элементарными, то в этом более широком классе функций интеграл (32) может оказаться и „находимым“. Мы не можем предсказать, будет ли (и если да, то как) в дальнейшем расширяться класс элементарных функций. Заметим лишь, что, вообще говоря, расширение класса элементарных функций мало перспективно. Возвращаясь к нашему примеру „математики без тригонометрии“, мы видим, что в этой математике интеграл (33) не выражается через функции, принятые (в ней!) за элементарные. Расширив класс этих функций за счет введения тригонометрических функций, мы будем в состоянии найти интеграл (33), но зато у нас появится интеграл (32) (которого в „бедной“ математике не было!), и возникает потребность дальнейшего расширения запаса элементарных функций.

В заключение приведем несколько интегралов, не являющихся элементарными *). Таковы

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x},\quad \int e^{\operatorname{arctg} x}\,dx,$$

$$\int e^{-x^2}\,dx,\quad \int \sin x^2\,dx,\quad \int \cos x^2\,dx,\quad \int \sqrt{x^3+1}\,dx,$$

$$\int \sqrt{\sin x}\,dx,\quad \int \ln \sin x\,dx.$$

Само собой понятно, что в задачниках подобные интегралы не при-

*) Иногда говорят, что эти интегралы „не берутся“ или „не берутся в конечном виде“.

водятся *). Однако в инженерной практике они встречаются очень часто. В главе об определенных интегралах мы укажем, как поступают в случаях, когда конкретная задача приводит к „неберущемуся" интегралу.

§ 2. Интегрирование рациональных функций

п°1. Постановка вопроса. В конце предыдущего параграфа было отмечено, что не всегда интеграл от элементарной функции оказывается и сам элементарной функцией. В связи с этим естественно заняться выделением таких частных классов элементарных функций, чтобы интегрирование этих функций снова приводило лишь к элементарным функциям. Важнейшим из этих классов является класс *рациональных функций*, т. е. дробей вида

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}. \tag{1}$$

В частности, к этому классу относятся *целые рациональные многочлены* **)

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n. \tag{2}$$

Для интегрирования дроби (1) стараются представить ее в форме суммы более простых дробей. Так, например, легко проверить, что

$$\frac{10x-23}{x^2-5x+6}=\frac{3}{x-2}+\frac{7}{x-3},$$

откуда

$$\int\frac{10x-23}{x^2-5x+6}\,dx=3\int\frac{dx}{x-2}+7\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=3\ln(x-2)+7\ln(x-3)+C.$$

Чтобы такой прием удалось провести, надо научиться решать чисто алгебраическую задачу разложения дроби (1) на более простые дроби. К этому мы и переходим.

п°2. Некоторые сведения об алгебраических многочленах. В этом п° мы остановимся на свойствах алгебраических многочленов вида

$$Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q,$$

все коэффициенты которых $A, B, \ldots, P, Q$ — вещественные числа. Такие многочлены мы будем коротко называть „вещественными"

---

*) Вопрос о том, как доказать, что тот или иной интеграл не элементарен, очень труден. Им много занимались в прошлом веке такие математики, как Абель (Норвегия), Лиувилль (Франция), П. Л. Чебышев (Россия), Е. И. Золотарев (Россия), Эрмит (Франция) и другие.

**) Дробь (1) оказывается многочленом вида (2), если $m=0$.

многочленами. Интересующие нас в дальнейшем свойства многочленов сохраняются при умножении многочлена на постоянные (и отличные от нуля) множители. Поэтому для простоты мы примем старший коэффициент A равным единице, $A=1$. Итак, нас интересуют „вещественные" многочлены

$$x^n+Bx^{n-1}+\ldots+Px+Q. \tag{3}$$

Самыми простыми из них являются многочлены первой степени, называемые также *линейными*. Такой многочлен имеет вид

$$x-a. \tag{4}$$

Ясно, что 1) корнем (единственным) многочлена (4) является вещественное число a; 2) многочлен (4) нельзя разложить на множители *).

Следующими по сложности за линейными многочленами (4) являются квадратные трехчлены **)

$$x^2+px+q. \tag{5}$$

Из элементарной алгебры известно, что трехчлен (5) разлагается на множители

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2), \tag{6}$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Если эти корни вещественные, то каждый из сомножителей $x-x_1$ и $x-x_2$ является многочленом с вещественными коэффициентами. Если же x_1 и x_2 мнимы (т. е. это комплексные числа с отличной от нуля мнимой частью), то трехчлен (5) вообще не разложим на вещественные множители. Действительно, рассмотрим, например, трехчлен

$$x^2-8x+25 \tag{7}$$

с мнимыми корнями

$$x_{1,2}=4\pm 3i.$$

Если бы этот трехчлен разлагался на вещественные линейные множители, т. е. представлялся бы в виде

$$x^2-8x+25=(x-a)(x-b) \tag{8}$$

*) Речь идет о множителях, которые сами суть многочлены вида (3). Без этой оговорки возможны разложения $x-a=\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x-a}=\frac{x-a}{x^2}\cdot x^2=\frac{x-a}{\sin x}\cdot\sin x=\frac{x-a}{e^x}\cdot e^x$ и т. п. Разложение же на множители вида (3) невозможно потому, что при перемножении таких множителей их степени складываются. Стало быть, степень каждого множителя должна быть меньше степени произведения (4), т. е. меньше 1, что нелепо.

**) Двучлен x^2+q мы все же считаем трехчленом вида (5), у которого $p=0$.

с вещественными a и b, то эти числа a и b при подстановке вместо x превращали бы правую, а значит, и левую часть (8) в нуль. Иными словами, они были бы вещественными корнями трехчлена (7), в то время как таких корней нет. Это рассуждение можно провести для всякого трехчлена (5) с мнимыми корнями.

Таким образом, квадратный трехчлен (5) разлагается или не разлагается на вещественные линейные сомножители, смотря по тому, вещественны или мнимы его корни.

Переходя далее к вещественным многочленам 3-й степени, естественно было бы ожидать, что и они либо разлагаются на вещественные множители более низких степеней, либо нет. Оказывается, однако, что неразложимых многочленов 3-й степени нет. Более того, справедлива замечательная

Теорема. *Всякий вещественный многочлен степени выше второй разлагается на линейные и квадратные сомножители.*

Эту теорему (доказанную знаменитым немецким математиком Гауссом *)) по справедливости называют „основной теоремой алгебры". Мы примем ее без доказательства **).

Таким образом, всякий многочлен $P(x)$ вида (3) представим в виде

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\ldots, \quad (9)$$

где a, b, c, $\ldots$, p, q, r, s, $\ldots$ вещественны. Ясно, что числа a, b, c, $\ldots$ являются корнями $P(x)$, ибо они обращают (при подстановке вместо x) правую (а значит, и левую) часть (9) в 0. Что касается трехчленов x^2+px+q, x^2+rx+s, $\ldots$, то они предполагаются имеющими мнимые корни, ибо иначе мы разложили бы эти трехчлены на линейные множители. Эти корни являются также корнями и многочлена $P(x)$. В равенстве (9) некоторые сомножители могут быть одинаковыми. Собирая такие сомножители вместе, представим $P(x)$ в форме

$$\boxed{P(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x^2+px+q)^{\varkappa}(x^2+rx+s)^{\rho}\ldots} \quad (10)$$

Здесь уже все сомножители предполагаются различными. Если $\alpha=1$, то говорят, что a — *простой* корень $P(x)$. Если же $\alpha>1$, то a называется α-кратным корнем $P(x)$. Аналогичная терминология употребляется и по отношению к мнимым корням $P(x)$.

---

*) K. F. Gauss (1777—1855).

**) Если бы мы даже и доказали ее, то все же не получили бы никакого способа для фактического разложения многочленов на множители. Разница примерно такая же, как между доказательством (хотя бы спектрографическим) присутствия алюминия на солнце и техническим проектом его доставки.

Пример. Если

$$P(x)=(x+2)(x-1)^2(x-5)^3(x^2-8x+25)(x^2+1)^4,$$

то $x=-2$ — простой корень $P(x)$; $x=1$ — двукратный (или *двойной*) корень; $x=5$ — трехкратный (или *тройной*) корень. Корни трехчлена $x^2-8x+25$ (т. е. числа $x_{1,2}=4\pm 3i$) будут простыми мнимыми корнями $P(x)$. Наконец, корни трехчлена x^2+1 (т. е. $x_{1,2}=\pm i$) будут четырехкратными корнями $P(x)$.

n° 3. Разложение рациональных дробей на простые. Мы будем рассматривать рациональные дроби вида

$$\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L}{Mx^m+Nx^{m-1}+\ldots+Rx+S}, \tag{11}$$

где числитель и знаменатель — вещественные многочлены, т. е. многочлены с вещественными коэффициентами. При этом условии сами дроби (11) мы также будем называть вещественными.

Дробь называется *правильной*, если степень ее числителя ниже степени знаменателя. Если эти степени одинаковы или степень числителя выше, то дробь называется *неправильной*. Например, из дробей

$$\frac{2x^2-1}{x^3-4x+7},\quad \frac{x^2}{x^2+2},\quad \frac{x^3+1}{x^2+2x+5}$$

первая правильная, а вторая и третья неправильные. Если числитель неправильной дроби разделить (с остатком, ибо мы предполагаем, что рассматриваемые дроби несократимы) на ее знаменатель, то дробь представится в форме суммы целого многочлена *) и правильной дроби. Например,

$$\frac{x^2}{x^2+2}=1+\frac{-2}{x^2+2},\quad \frac{x^3+1}{x^2+2x+5}=x-2+\frac{-x+11}{x^2+2x+5}.$$

Поскольку интегрирование целого многочлена выполняется без труда (а ведь мы сейчас рассматриваем дроби (11) именно для того, чтобы научиться их интегрировать), то мы ограничимся правильными дробями. Чтобы упростить дело, мы не будем рассматривать дробей, знаменатели которых имеют кратные мнимые корни (кратные вещественные и мнимые простые корни допускаются). Вопрос об интегрировании дробей, знаменатели которых имеют кратные мнимые корни, рассматривается в более полных учебниках.

Итак, мы будем изучать правильные вещественные дроби **)

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\ldots}. \tag{12}$$

---

*) Который может, в частности, оказаться постоянной величиной.

**) Старший коэффициент знаменателя принят равным 1, ибо к этому всегда можно свести дело, разделив числитель и знаменатель на этот коэффициент.

Сам вид знаменателя подсказывает, что дробь (12) получена в результате сложения более простых дробей

$$\frac{\cdots}{(x-a)^\alpha},\quad \frac{\cdots}{(x-b)^\beta},\quad \ldots,\quad \frac{\cdots}{x^2+px+q},\quad \frac{\cdots}{x^2+rx+s},\quad \ldots \tag{13}$$

Числители этих более простых дробей нам неизвестны, но поскольку дробь (12) правильная, естественно принять (это можно доказать и вполне строго), что дроби (13) тоже правильные. Таким образом, мы приходим к возможности представления дроби (12) в форме

$$\frac{P_a(x)}{(x-a)^\alpha}+\frac{P_b(x)}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{Px+Q}{x^2+px+q}+\frac{Rx+S}{x^2+rx+s}+\ldots, \tag{14}$$

где $P_a(x)$, $P_b(x)$, ... — неизвестные нам многочлены, степени которых соответственно ниже α, β, ... Числа P, Q, R, S, ... также нам пока неизвестны.

Остановимся теперь на отдельной дроби

$$\frac{P_a(x)}{(x-a)^\alpha}. \tag{15}$$

Числитель ее имеет степень, меньшую α, и потому может быть записан в виде

$$P_a(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{\alpha-1}x^{\alpha-1}. \tag{16}$$

Однако еще в гл. III (§ 7, n° 2) мы доказали, что всякий многочлен вида (16) допускает запись

$$P_a(x)=A_0+A_1(x-a)+\ldots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}.$$

Если эту запись подставить в (15), то получится равенство

$$\frac{P_a(x)}{(x-a)^\alpha}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a},$$

в котором все числители A_0, A_1, ..., $A_{\alpha-1}$ — какие-то постоянные. Аналогичное представление возможно и для дробей $\frac{P_b(x)}{(x-b)^\beta}$, ... Сопоставляя все сказанное, получаем, что для правильных вещественных дробей вида (12) имеет место следующий *тип разложения на более простые дроби*:

$$\boxed{\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha\ldots(x^2+px+q)\ldots}=\frac{A_0}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\ldots+\frac{Px+Q}{x^2+px+q}+\ldots} \tag{17}$$

Здесь числители A_0, A_1, ..., $A_{\alpha-1}$, ..., а также числа P, Q, ... будут какими-то (пока еще неизвестными нам!) постоянными. Остается указать, каким образом находятся эти постоянные. Этот вопрос мы разберем на ряде примеров.

1) На основании (17) имеем

$$\frac{2x^2-3x+2}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}. \tag{18}$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части. Это дает нам тождество

$$2x^2-3x+2=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2. \tag{19}$$

Поскольку равенство (19) есть тождество, то оно будет верно и при $x=2$. Подстановка этого значения дает

$$4=C.$$

Итак, $C=4$. Подставляя в (19) $x=1$, находим

$$1=-A,$$

откуда $A=-1$. Таким образом, используя удобные частные значения x *), мы сумели найти два коэффициента A и C. Этот прием называется „способом частных значений". Чтобы найти коэффициент B, применим другой способ, называемый „способом сравнения коэффициентов". Именно, приравняем друг другу коэффициенты, стоящие при x^2 в левой и правой частях равенства (19):

$$2=B+C.$$

Отсюда, зная, что $C=4$, находим $B=-2$.

2) Чтобы разложить на простые дроби

$$\frac{2x^2+1}{x(x-1)(x^2+3)},$$

начинаем с применения формулы (17):

$$\frac{2x^2+1}{x(x-1)(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Отсюда

$$2x^2+1=A(x-1)(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x(x-1).$$

Полагая сначала $x=0$, а затем $x=1$, находим $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{3}{4}$.

---

*) Значения $x=2$ и $x=1$ были удобны потому, что, подставляя их, мы исключали все неизвестные, кроме одного. Таких „удобных" значений больше у нас нет. Однако мы можем подставить в (19) и „неудобное" значение, например $x=3$. Делая это, находим $11=A+2B+4C$. Учитывая, что $A=-1$, $C=4$, получаем $B=-2$.

Сравним *), далее, коэффициенты при x^3:

$$0 = A + B + C.$$

Отсюда $C = -\frac{5}{12}$. Наконец, сравним коэффициенты при x^2:

$$2 = -A - C + D.$$

Это дает $D = \frac{5}{4}$.

4) Аналогично, применяя (17), находим

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Отсюда

$$1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1).$$

Сравнение коэффициентов при различных степенях x дает

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0 = A + C, \\ x^2 & 0 = B + D, \\ x & 0 = 2A + C, \\ 1 & 1 = 2B + D. \end{array}$$

Решение этой системы дает $A = C = 0$, $B = 1$, $D = -1$. Стало быть **),

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}.$$

п° 4. Интегрирование рациональных дробей. Ввиду сказанного в п° 3 для того, чтобы уметь интегрировать любую рациональную дробь (знаменатель которой не имеет кратных мнимых корней), достаточно знать, как интегрируются функции четырех видов:

1) $Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + L$, 2) $\frac{A}{x-a}$, 3) $\frac{A}{(x-a)^m}$ $(m > 1)$,
4) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

Выражения первых трех видов интегрируются без всякого труда. Например,

1) $\int (5x^3 + 4x^2 - 7x + 12)\,dx = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x + C$,

2) $\int \frac{9\,dx}{x-2} = 9\ln(x-2) + C$,

3) $\int \frac{7\,dx}{(x+3)^5} = 7\int (x+3)^{-5}\,dx = \frac{7}{-4}(x+3)^{-4} + C =$

$$= \frac{-7}{4(x+3)^4} + C.$$

---

*) Настоятельно советуем читателю научиться определять коэффициент при той или другой степени x, не раскрывая скобок в правой части.

**) Найденное разложение можно получить и непосредственно, написав

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}.$$

Остановимся поэтому только на интегралах вида

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx. \tag{20}$$

При этом мы можем считать, что корни трехчлена x^2+px+q мнимые, ибо иначе этот трехчлен разлагался бы на линейные множители и дробь

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

разлагалась бы на более простые дроби, т. е. дело свелось бы к уже рассмотренным случаям *).

Из алгебры известно, что условие мнимости корней трехчлена x^2+px+q состоит в неравенстве

$$\frac{p^2}{4}-q<0. \tag{21}$$

Итак, мы считаем условие (21) выполненным.

Интегралы (20) вычисляются легко в двух частных случаях:

а) числитель $Ax+B$ есть производная знаменателя x^2+px+q;

б) числитель подынтегральной дроби не зависит от x, т. е. $A=0$.

Действительно, в случае а) интеграл (20) представит собой логарифм знаменателя. Например,

$$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,dx=\ln(x^2-6x+13)+C,$$
$$\int \frac{2x+7}{x^2+7x+30}\,dx=\ln(x^2+7x+30)+C.$$

В случае б) интеграл (20) выражается через арктангенс. Для этого *надо выделить из трехчлена* x^2+px+q *полный квадрат и применить табличную формулу* XI.

Например,

$$I=\int \frac{11\,dx}{x^2-8x+25}=11\int \frac{dx}{(x^2-8x+16)+9}=11\int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2+9},$$

откуда

$$I=\frac{11}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3}+C.$$

Аналогично

$$I=\int \frac{7\,dx}{x^2+5x+10}=7\int \frac{d\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=\frac{14}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{15}}+C.$$

---

*) В частности, именно так выводится формула XII. Действительно, ведь

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Рассмотрим еще интеграл

$$I=\int \frac{dx}{x^2-8x+15}. \tag{22}$$

Пытаясь применить к I тот же прием, получаем

$$I=\int \frac{dx}{(x-4)^2+(-1)}.$$

Однако написанный интеграл не подходит под формулу XI, ибо мы не можем (оставаясь в области вещественных чисел) принять -1 за a^2. В чем же дело? Дело в том, что у трехчлена $x^2-8x+15$ корни вещественные: $x_1=3$ и $x_2=5$. Поэтому интеграл (22) надо было вычислять иначе *). Докажем в общем виде, что рекомендованный нами прием выделения полного квадрата действительно позволяет подвести случай б) интеграла (20) под формулу XI, если корни трехчлена x^2+px+q мнимые.

В самом деле,

$$I=\int \frac{B\,dx}{x^2+px+q}=B\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}.$$

Мнимость корней трехчлена, как мы уже говорили, обеспечит выполнение неравенства (21), а тогда $q-\frac{p^2}{4}>0$ и это число можно принять за a^2.

Общий случай интеграла (20) легко приводится к случаям а) и б), если числитель $Ax+B$ разделить (может быть с остатком) на производную $2x+p$ знаменателя x^2+px+q и переписать $Ax+B$, используя тождество: „делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток".

Например, если

$$I=\int \frac{6x+7}{x^2-6x+13}\,dx,$$

---

*) Именно $\frac{1}{x^2-8x+15}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}$. Отсюда $1=A(x-5)+$ $+B(x-3)$. Полагая $x=5$ и $x=3$, находим $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$. Стало быть,

$$I=-\frac{1}{2}\ln(x-3)+\frac{1}{2}\ln(x-5)+C.$$

Еще проще воспользоваться формулой XII:

$$\int \frac{dx}{(x-4)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-4)-1}{(x-4)+1}+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x-5}{x-3}+C.$$

то надо $6x+7$ разделить на $2x-6$. Это дает $6x+7=$ $=3(2x-6)+25$. Поэтому

$$I=3\int\frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,dx+\int\frac{25dx}{x^2-6x+13}.$$

Первый из интегралов справа представляет собой случай а), а второй — случай б). Итак, мы умеем теперь интегрировать в элементарных функциях любую вещественную дробь, знаменатель которой не имеет кратных мнимых корней. Последнее ограничение мы сделали лишь в интересах простоты изложения. Вообще же справедлива

Теорема. *Интеграл от любой вещественной рациональной дроби выражается через элементарные функции.*

§ 3. Интегрирование некоторых иррациональностей

n° 1. Рационализация подынтегральной функции. В отличие от функций рациональных иррациональные выражения далеко не всегда интегрируются в элементарных функциях. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые частные типы иррациональных функций, интегрирующихся в конечном виде.

Во многих случаях интегрирование иррациональной функции удается выполнить, сведя эту функцию при помощи некоторой подстановки к функции рациональной. Этот прием называется *рационализацией* подынтегральной функции, а упомянутая подстановка — *рационализирующей* подстановкой. Существо метода покажем сначала на примерах.

Пусть

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

Полагая $x=z^2$, находим $dx=2z\,dz$, откуда

$$I=\int\frac{2z^2}{1+z}\,dz=2\int\frac{z^2\,dz}{z+1}.$$

Дело свелось к интегрированию рациональной дроби. Поскольку дробь неправильная, то делим (с остатком) числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} z^2 & z+1 \\ \cline{2-2} \underline{z^2+z} & z-1 \\ -z & \\ \underline{-z-1} & \\ 1 & \end{array}.$$

Таким образом,

$$\frac{z^2}{z+1}=z-1+\frac{1}{z+1} \quad \text{и} \quad I=z^2-2z+2\ln(z+1)+C.$$

Остается вернуться к старой переменной x, заменяя z на $\sqrt{x}$. Окончательно

$$I = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C.$$

Аналогичным образом для интеграла

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

рационализирующая подстановка имеет вид $x = z^3$, ибо x фигурирует у нас лишь под корнем кубическим. Выполняя эту подстановку, находим

$$I = \int \frac{3z^2\,dz}{z+1} = 3\int \left(z - 1 + \frac{1}{z+1}\right) dz = 3\left[\frac{z^2}{2} - z + \ln(z+1)\right] + C,$$

откуда

$$I = 3\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln(\sqrt[3]{x} + 1)\right] + C.$$

Сложнее обстоит дело в случае интеграла

$$I = \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x} + 1}.$$

Ведь здесь x фигурирует и под знаком квадратного и под знаком кубического корня. Чтобы оба эти корня „извлеклись", естественно положить $x = z^6$. Это дает

$$I = \int \frac{6z^8\,dz}{z^2+1} = 6\int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz,$$

откуда

$$I = 6\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z\right) + C.$$

Остается заменить z на $\sqrt[6]{x}$.

После разбора этих примеров становится ясным следующее

Правило. Если $f(u, v, w, \ldots)$ — рациональная функция своих аргументов *), а $a, b, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ — целые положительные числа, то интеграл

$$\int f\left(x, \sqrt[a]{x^\alpha}, \sqrt[b]{x^\beta}, \ldots\right) dx \tag{1}$$

---

*) Т. е. для нахождения $f(u, v, w, \ldots)$ над этими аргументами не надо производить никаких действий, кроме арифметических. Такова, например, функция

$$\frac{u^2 + 2uv}{w^3 + \sqrt{5}}.$$

приводится к интегралу от рациональной функции при помощи подстановки

$$\boxed{x=z^N} \tag{2}$$

где N — наименьшее общее кратное показателей корней a, b, ...

Действительно, в результате подстановки (2) все корни, входящие в интеграл, „извлекутся".

Сходная подстановка рационализирует подынтегральную функцию и в более общем интеграле

$$\int f\left(x, \sqrt[a]{\left(\frac{Kx+L}{Px+Q}\right)^{\alpha}}, \sqrt[b]{\left(\frac{Kx+L}{Px+Q}\right)^{\beta}}, \ldots\right) dx, \tag{3}$$

где f рациональна, a, b, ..., α, β, ... целые, а K, L, P, Q постоянные.

Именно, здесь надо положить

$$\boxed{\frac{Kx+L}{Px+Q}=z^N,} \tag{4}$$

где N, как и выше, — наименьшее общее кратное показателей корней a, b, ...

Интеграл (3) превращается в (1), когда $K=1$, $L=0$, $P=0$, $Q=1$. Тогда и (4) переходит в (2).

Иллюстрируем сказанное двумя примерами.

1) Пусть

$$I=\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx.$$

Полагая $x+1=z^2$, $dx=2z\,dz$, находим

$$I=\int \frac{2z^2\,dz}{z^2-1}=2\int\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz=2z+\ln\frac{z-1}{z+1}+C.$$

Значит,

$$I=2\sqrt{x+1}+\ln\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+C.$$

2) Найдем еще интеграл

$$I=\int \frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx}{\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\right)x^2}.$$

Здесь надо положить $\frac{x}{x-1}=z^6$. Тогда $x=\frac{z^6}{z^6-1}$, $dx=\frac{-6z^5dz}{(z^6-1)^2}$, откуда

$$I=-6\int \frac{dz}{z^4(z^2+1)}.$$

Дробь $\frac{1}{z^4(z^2+1)}$ разлагается на простые по схеме *)

$$\frac{1}{z^4(z^2+1)}=\frac{A}{z^4}+\frac{B}{z^3}+\frac{C}{z^2}+\frac{D}{z}+\frac{Ez+F}{z^2+1}.$$

Отсюда

$$1=A(z^2+1)+Bz(z^2+1)+Cz^2(z^2+1)+\\+Dz^3(z^2+1)+(Ez+F)z^4.$$

Полагая $z=0$, найдем $A=1$. Сравнение коэффициентов при степенях z дает пять равенств:

$$\begin{array}{c|l} z^5 & 0=D+E, \\ z^4 & 0=C+F, \\ z^3 & 0=B+D, \\ z^2 & 0=A+C, \\ z & 0=B. \end{array}$$

Отсюда $B=D=E=0$, $C=-1$, $F=1$. Значит,

$$I=-6\int\left(\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2+1}\right)dz=\frac{2}{z^3}-\frac{6}{z}-6\operatorname{arctg}z+C,$$

где $z=\sqrt[6]{\frac{x}{x-1}}$.

n° 2. Интегралы $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$**.** Вычисление интегралов указанного вида напоминает вычисление интегралов (20) из § 1. Именно, интеграл

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{5}$$

вычисляется без труда в двух случаях:

а) числитель $Ax+B$ есть производная подкоренного трехчлена ax^2+bx+c;

б) числитель не зависит от x, т. е. $A=0$.

Действительно, в случае а) надо положить $ax^2+bx+c=z$, что приводит интеграл (5) к виду

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=2\sqrt{z}+C.$$

Например,

$$\int\frac{14x+5}{\sqrt{7x^2+5x+12}}dx=2\sqrt{7x^2+5x+12}+C.$$

*) Можно было бы упростить выкладку, если учесть, что $z^4(z^2+1)$ зависит только от z^2, но мы оставим это в стороне.

В случае б) из подкоренного трехчлена надо выделить полный квадрат, что в зависимости от знака a приведет интеграл к одной из табличных формул X или XIII.

Например,

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+18x+2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{-3(x^2-6x+9)+29}}.$$

Отсюда

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{29-3(x-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\,[\sqrt{3}\,(x-3)]}{\sqrt{29-3(x-3)^2}}$$

и окончательно

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\,(x-3)}{\sqrt{29}}+C.$$

Аналогично находим

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+18x+2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3(x^2+6x+9)-25}}.$$

Отсюда

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\,[\sqrt{3}\,(x+3)]}{\sqrt{3(x+3)^2-25}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left[\sqrt{3}\,(x+3)+\sqrt{3x^2+18x+2}\right]+C.$$

Наконец, общий случай интеграла (5) приводится к случаям а) и б), если числитель $Ax+B$ разделить на производную $2ax+b$ подкоренного трехчлена и записать $Ax+B$ как делитель, умноженный на частное, плюс остаток.

Например,

$$\int \frac{8x+11}{\sqrt{x^2+16x+7}}\,dx=\int \frac{4(2x+16)-53}{\sqrt{x^2+16x+7}}\,dx=$$

$$=4\int \frac{2x+16}{\sqrt{x^2+16x+7}}\,dx-53\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16x+7}}.$$

Первый интеграл справа принадлежит типу а), а второй — типу б).

Когда мы познакомимся со способами вычисления интегралов от некоторых тригонометрических функций, то сможем интегрировать еще несколько типов иррациональностей.

§ 4. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

n° 1. Интегралы $\int e^{ax}P(x)\,dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$. Если в указанных интегралах $P(x)$ означает целый многочлен вида $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots+Kx+L$, то интегралы вычисляются при помощи интегрирования по частям. Действительно, остановимся хотя бы на первом из этих интегралов.

Полагая

$$P(x)=u, \qquad du=P'(x)\,dx,$$

$$e^{ax}\,dx=dv, \qquad v=\frac{1}{a}e^{ax},$$

найдем

$$\int e^{ax}P(x)\,dx=e^{ax}\frac{P(x)}{a}-\frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)\,dx.$$

Интеграл справа принадлежит тому же типу, что и интеграл слева, но множитель $P'(x)$ имеет степень, на единицу меньшую, чем $P(x)$. Повторное применение этого приема приводит к цели. Для других интегралов, указанных в заголовке, выкладки аналогичны.

Примеры.

1) $I=\int (x^2-5x+6)\,e^x\,dx.$

Интегрируя по частям, найдем

$$I=(x^2-5x+6)\,e^x-\int (2x-5)\,e^x\,dx. \tag{1}$$

Вторичное интегрирование по частям дает

$$\int (2x-5)\,e^x\,dx=(2x-5)\,e^x-\int 2e^x\,dx=(2x-7)\,e^x+C.$$

Подставляя это в (1), найдем

$$I=(x^2-7x+13)\,e^x+C.$$

2) $I=\int (12x^2-6x)\sin 2x\,dx.$

Полагая

$$12x^2-6x=u, \qquad du=(24x-6)\,dx,$$

$$\sin 2x\,dx=dv, \qquad v=-\frac{\cos 2x}{2},$$

получим

$$I=(3x-6x^2)\cos 2x+\int (12x-3)\cos 2x\,dx.$$

Снова положив

$$12x-3=u, \qquad du=12dx,$$

$$\cos 2x\,dx=dv, \qquad v=\frac{\sin 2x}{2},$$

находим

$$\int (12x-3)\cos 2x\,dx=\left(6x-\frac{3}{2}\right)\sin 2x-6\int \sin 2x\,dx.$$

Остальное ясно.

n°2. Интегралы $\int P(x)\ln^n x\,dx$. Если в написанном интеграле $P(x)$ — целый многочлен, а n — натуральное число, то, интегрируя по частям, полагаем

$$\ln^n x = u, \qquad du = n\ln^{n-1}x\,\frac{dx}{x},$$

$$P(x)\,dx = dv, \qquad v = Q(x),$$

где под $Q(x)$ можно понимать ту первообразную для $P(x)$, которая не содержит свободного члена. Тогда $\frac{Q(x)}{x}$ есть многочлен той же степени, что и $P(x)$. Поэтому формула

$$\int P(x)\ln^n x\,dx = Q(x)\ln^n x - n\int \frac{Q(x)}{x}\ln^{n-1}x\,dx$$

сводит вычисление исходного интеграла к более простому того же вида.

Пример. Пусть

$$I = \int (32x^3 - 9x^2 + 12x + 1)\ln^2 x\,dx.$$

Полагаем

$$\ln^2 x = u, \qquad du = 2\ln x\,\frac{dx}{x},$$

$$(32x^3 - 9x^2 + 12x + 1)\,dx = dv, \qquad v = 8x^4 - 3x^3 + 6x^2 + x.$$

Тогда

$$I = (8x^4 - 3x^3 + 6x^2 + x)\ln^2 x - 2\int (8x^3 - 3x^2 + 6x + 1)\ln x\,dx.$$

Снова интегрируем по частям:

$$\ln x = u, \qquad du = \frac{dx}{x},$$

$$(8x^3 - 3x^2 + 6x + 1)\,dx = dv, \qquad v = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + x.$$

Тогда

$$\int (8x^3 - 3x^2 + 6x + 1)\ln x\,dx =$$
$$= (2x^4 - x^3 + 3x^2 + x)\ln x - \int (2x^3 - x^2 + 3x + 1)\,dx.$$

Остальное ясно.

n°3. Интегралы $\int \sin^n x\cos^m x\,dx$. Написанные интегралы (где n и m целые неотрицательные числа) распадаются на два вида:

а) хоть одно из чисел n или m нечетное;

б) оба эти числа четные.

В случае а) интеграл

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx \tag{2}$$

вычисляется способом, который естественно назвать „способом отщепления“. Сущность его видна из примера

$$I = \int \sin^{22} x \cos^3 x\,dx.$$

От множителя $\cos^3 x$ (нечетная степень!) „отщепляем“ один множитель $\cos x$ и используем то, что $\cos x\,dx = d(\sin x)$. Это дает

$$I = \int \sin^{22} x \cos^2 x\,d(\sin x).$$

Но $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Стало быть, при помощи подстановки $\sin x = z$ (которую производим в уме), получаем

$$I = \int \sin^{22} x (1 - \sin^2 x)\,d(\sin x) = \frac{\sin^{23} x}{23} - \frac{\sin^{25} x}{25} + C.$$

Аналогично этому

$$I = \int \sin^5 x \cos^6 x\,dx = -\int \sin^4 x \cos^6 x\,d(\cos x).$$

Отсюда

$$I = -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^6 x\,d(\cos x) =$$
$$= -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{2\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^{11} x}{11} + C.$$

Если оба показателя n и m нечетны, то „отщепление“ лучше производить от того из множителей $\sin^n x$, $\cos^m x$, у которого показатель меньше *).

Например, интеграл

$$I = \int \sin^3 x \cos^{47} x\,dx$$

надо вычислять так:

$$I = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^{47} x\,d(\cos x) = \frac{\cos^{50} x}{50} - \frac{\cos^{48} x}{48} + C.$$

Если же мы переписали бы наш интеграл в форме

$$I = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x)^{23}\,d(\sin x),$$

то нам пришлось бы развертывать $(1 - \sin^2 x)^{23}$ по степеням $\sin x$, что, конечно, очень громоздко.

Хотя мы рассмотрели интеграл (2) в случае а) только на примерах, но совершенно ясно, что изложенный способ имеет общий характер.

---

*) Если $n = m$, то надо заменить $\sin^n x \cos^n x$ на $\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^n$.

Чтобы вычислить интеграл (2) в случае б), надо применить „переход к двойному углу", т. е. использовать известные формулы тригонометрии

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \tag{4}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}. \tag{5}$$

Заметим, что можно было бы ограничиться формулами (4) и (5), однако всякий раз, когда можно привлечь и формулу (3), это следует делать.

Примеры.

1) $I=\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

Переписываем I в форме

$$I=\int(\sin x\cos x)^2\cos^2 x\,dx$$

и применяем формулы (3) и (5):

$$I=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2x\,dx.$$

Последний из написанных интегралов принадлежит типу а), а к предпоследнему применяем формулу (4):

$$I=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)\,dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\,d(\sin 2x).$$

Окончательно,

$$I=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

2) $I=\int\cos^4 x\,dx$.

По формуле (5) имеем

$$I=\frac{1}{4}\int(1+\cos 2x)^2\,dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx.$$

Вторичное применение той же формулы дает

$$I=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

n°4. Интегралы $\int\operatorname{tg}^n x\,dx$ и $\int\operatorname{ctg}^n x\,dx$. Интеграл

$$I=\int\operatorname{tg}^n x\,dx, \tag{6}$$

где n — натуральное число, берется при помощи способа „отщепления", сходного с тем, какой был описан в предыдущем п°. Именно, если $n=1$, то интеграл равен $-\ln\cos x+C$. Если же $n>1$, то интеграл преобразуется следующим образом:

$$I=\int \operatorname{tg}^{n-2}x\operatorname{tg}^2 x\,dx=\int \operatorname{tg}^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$
$$=\int \operatorname{tg}^{n-2}x\,d(\operatorname{tg}x)-\int\operatorname{tg}^{n-2}x\,dx.$$

Первый из интегралов правой части вычисляется непосредственно, а второй представляет собой интеграл того же вида, что и (6), но более простой, ибо степень $\operatorname{tg}x$ снижена на две единицы. Повторное применение этого приема и приводит к цели. Аналогичным образом вычисляется и

$$\int\operatorname{ctg}^n x\,dx,$$

ибо

$$\operatorname{ctg}^2 x\,dx=\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-d(\operatorname{ctg}x)-dx.$$

Примеры.

1) $I=\int\operatorname{tg}^5 x\,dx=\int\operatorname{tg}^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\int\operatorname{tg}^3 x\,dx.$

Отсюда

$$I=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\int\operatorname{tg}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln\cos x+C.$$

2) $I=\int\operatorname{ctg}^4 x\,dx=\int\operatorname{ctg}^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$

$$=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx.$$

Отсюда

$$I=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+\operatorname{ctg}x+x+C.$$

п° 5. Интегрирование функций, рациональных относительно $\sin x$ и $\cos x$. Интегралы, рассмотренные в п° 3 и 4, представляют собой частные случаи интеграла

$$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx, \tag{7}$$

где $f(u,\ v)$ — рациональная функция своих аргументов. Как мы видели, для этих частных случаев существуют специально приспособленные к ним удобные способы вычисления. Однако существует

универсальная подстановка, позволяющая любой интеграл (7) привести к интегралу от рациональной функции. Такова подстановка

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z.} \tag{8}$$

В самом деле, в этом случае

$$x=2\operatorname{arctg} z,$$

откуда

$$dx=\frac{2dz}{1+z^2}.$$

С другой стороны,

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Стало быть,

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

и в результате подстановки (8) интеграл (7) преобразуется к виду

$$\int f\left(\frac{2z}{1+z^2},\ \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}. \tag{9}$$

Остается заметить, что (9) есть интеграл от рациональной функции.

Примеры.

$$1)\ \int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\dfrac{2dz}{1+z^2}}{\dfrac{2z}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{z}=\ln z+C=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Равенство

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C} \tag{10}$$

полезно запомнить *).

2) Интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\cos x}$$

тоже может быть вычислен при помощи подстановки (8). Проще, однако, переписать I в виде

$$I = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)},$$

что в связи с (10) сразу дает

$$I = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

В некоторых случаях удобна бывает подстановка $\operatorname{tg} x = z$. Например, если

$$I = \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}, \tag{11}$$

то

$$I = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{b^2} \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\frac{a^2}{b^2} + \operatorname{tg}^2 x}$$

и (на основании табличной формулы XI)

$$I = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

---

*) Его можно получить непосредственно. Именно,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Разумеется, это та же подстановка (8), лишь не выписанная явно.

К интегралу типа (11) сводятся интегралы

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} \quad (a > b > 0).$$

Например, если

$$I = \int \frac{dx}{5+3\cos x},$$

то

$$I = \int \frac{dx}{5\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{dx}{8\cos^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Отсюда

$$I = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{4\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{4+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

n° 6. **Тригонометрические подстановки.** Пусть $f(u, v)$ — рациональная функция своих аргументов. Тогда каждый из интегралов

$$\int f(x, \sqrt{R^2-x^2})\,dx, \tag{12}$$

$$\int f(x, \sqrt{R^2+x^2})\,dx, \tag{13}$$

$$\int f(x, \sqrt{x^2-R^2})\,dx \tag{14}$$

приводится к интегралу от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции при помощи надлежащей „тригонометрической подстановки". Эти подстановки таковы *): для интеграла (12)

$$x = R\sin t, \tag{15}$$

для (13)

$$x = R\operatorname{tg} t \tag{16}$$

и для (14)

$$x = R\sec t. \tag{17}$$

Действительно, если $x = R\sin t$, то

$$dx = R\cos t\,dt, \quad \sqrt{R^2-x^2} = R\cos t.$$

Если $x = R\operatorname{tg} t$, то

$$dx = \frac{R\,dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{R^2+x^2} = R\sec t = \frac{R}{\cos t}.$$

Аналогично обстоит дело с интегралом (14), ибо при $x = R\sec t$

$$dx = Rd\left(\frac{1}{\cos t}\right) = \frac{R\sin t\,dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{x^2-R^2} = R\operatorname{tg} t.$$

*) Вместо (15), (16) и (17) можно употреблять соответственно подстановки $x = R\cos t$, $x = R\operatorname{ctg} t$, $x = R\operatorname{cosec} t$.

Рассмотрим несколько примеров. При помощи (15) имеем

$$1)\ I=\int\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int(R\cos t)(R\cos t)\,dt=$$
$$=R^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{R^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt.$$

Отсюда

$$I=\frac{R^2}{2}t+\frac{R^2}{4}\sin 2t+C=\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{R^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

Окончательно *)

$$I=\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+C.$$

$$2)\ I=\int\frac{dx}{(\sqrt{R^2-x^2})^3}=\int\frac{R\cos t\,dt}{R^3\cos^3 t}=\frac{1}{R^2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{R^2}\operatorname{tg} t+C.$$

Отсюда

$$I=\frac{1}{R^2}\frac{R\sin t}{R\cos t}+C=\frac{1}{R^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}+C.$$

$$3)\ I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Здесь применяем подстановку (16):

$$I=\int\frac{\frac{R\,dt}{\cos^2 t}}{R^2\operatorname{tg}^2 t\cdot\frac{R}{\cos t}}=\frac{1}{R^2}\int\frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{\sin t}+C.$$

Но

$$\sin t=\operatorname{tg} t\cdot\cos t=\frac{\operatorname{tg} t}{\sec t}=\frac{R\operatorname{tg} t}{R\sec t}=\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Значит,

$$I=-\frac{\sqrt{R^2+x^2}}{R^2x}+C.$$

$$4)\ I=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-R^2}}.$$

Применяя (17), получим

$$I=\int\frac{\left(\frac{R}{\cos t}\right)^2\frac{R\sin t\,dt}{\cos^2 t}}{R\operatorname{tg} t}=R^2\int\frac{dt}{\cos^4 t}.$$

---

*) Рекомендуем запомнить, что когда $t=\arcsin\frac{x}{R}$, то $\sin 2t$ удобнее выражать через x не равенством $\sin 2t=\sin\left(2\arcsin\frac{x}{R}\right)$, а при помощи преобразования

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=\frac{2}{R^2}(R\sin t)(R\cos t)=\frac{2}{R^2}x\sqrt{R^2-x^2}.$$

Последний интеграл проще всего вычислить так:

$$I = R^2 \int \frac{\cos t\, dt}{\cos^4 t} = R^2 \int \frac{dz}{(1-z^2)^2} \qquad (z = \sin t).$$

Подынтегральную дробь разлагаем на простые:

$$\frac{1}{(z-1)^2 (z+1)^2} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z+1)^2} + \frac{D}{z+1}.$$

Отсюда

$$1 = A(z+1)^2 + B(z+1)^2(z-1) + C(z-1)^2 + D(z-1)^2(z+1).$$

Полагая $z=1$, а затем $z=-1$, найдем $A = C = \frac{1}{4}$. Сравнение коэффициентов при z^3 и при $z^0 = 1$ дает

$$B + D = 0, \quad A - B + C + D = 1,$$

откуда $D = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Стало быть,

$$I = \frac{R^2}{4} \int \left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{z+1}\right] dz =$$

$$= \frac{R^2}{4} \left[\frac{-1}{z-1} - \ln(1-z) - \frac{1}{z+1} + \ln(1+z)\right] + C$$

(мы должны писать $\ln(1-z)$, а не $\ln(z-1)$ потому, что $z = \sin x < 1$, а под знаком логарифма должно стоять положительное число).

Таким образом,

$$I = \frac{R^2}{4} \left[\ln \frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \frac{2 \sin t}{1-\sin^2 t}\right] + C = \frac{R^2}{4} \left[\ln \frac{(1+\sin t)^2}{1-\sin^2 t} + 2 \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right] + C.$$

Окончательно *)

$$I = \frac{R^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - R^2}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - R^2} + C.$$

Разумеется, перед тем как применять к тому или иному интегралу „рекомендованную" подстановку, надо посмотреть, нельзя ли вычислить

---

*) Подробнее:

$$I = \frac{R^2}{2} [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) + \sec t \operatorname{tg} t] + C.$$

Но $R^2 \sec t \operatorname{tg} t = x\sqrt{x^2 - R^2}$. Кроме того, поскольку R — число постоянное, то

$$\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) = \ln(R \sec t + R \operatorname{tg} t) - \ln R = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - R^2}\right) + C_1.$$

интеграл более просто. Например, к интегралу

$$I=\int x\sqrt{x^2+R^2}\,dx$$

нелепо применять подстановку (16), ибо

$$I=\frac{1}{2}\int(x^2+R^2)^{1/2}\,d(x^2+R^2)=\frac{1}{3}(x^2+R^2)^{3/2}+C.$$

В заключение заметим, что подстановка (16) с успехом применяется и к некоторым интегралам от рациональных дробей. Например, подынтегральная функция у интеграла

$$I=\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

есть дробь, знаменатель которой имеет к р а т н ы е м н и м ы е к о р н и. Таким образом, здесь мы имеем дело как раз с тем случаем, который мы не рассматривали в § 2. Полагая $x=\operatorname{tg} t$, получим

$$I=\int\frac{dt}{\cos^2 t\sec^4 t}=\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C.$$

Стало быть,

$$I=\frac{\operatorname{arctg} x}{2}+\frac{\sin t\cos t}{2}+C=\frac{\operatorname{arctg} x}{2}+\frac{\operatorname{tg} t\cos^2 t}{2}+C.$$

Окончательно

$$I=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C.$$

ГЛАВА VI

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определение и важнейшие свойства определенного интеграла

n° 1. Задача о массе стержня. Чтобы подойти к понятию определенного интеграла, рассмотрим некоторую физическую задачу. Еще в гл. III мы говорили о том, что такое средняя и истинная плотности стержня. Напомним, что средней плотностью стержня называется отношение его массы к его длине, а истинной плотностью стержня в данной его точке называется предел средней плотности бесконечно малого участка стержня, стягивающегося в упомянутую точку.

Если равные по длине участки стержня имеют одинаковые массы, то такой стержень называется *однородным*. У подобного стержня истинная плотность во всех его точках одна и та же и равна его средней плотности*). Если же стержень неоднороден, то его истинная плотность меняется от точки к точке. Характеризуя положение точки на стержне ее расстоянием x от одного из концов стержня (и называя ее для краткости „точкой x“), мы видим, что истинная плотность p стержня в точке x зависит от этого x, т. е. является функцией от x

$$p = p(x). \tag{1}$$

---

*) В самом деле, пусть масса однородного стержня равна m, а его длина l. Тогда средняя плотность всего стержня $p = \frac{m}{l}$. Разделим стержень хотя бы на 1000 равных по длине отрезков. Для каждого из них средняя плотность будет равна $\dfrac{\frac{1}{1000}m}{\frac{1}{1000}l} = \frac{m}{l} = p$. Мы видим, что средняя плотность малых участков стержня такова же, как средняя плотность всего стержня. Остальное ясно.

Поставим задачу: зная длину стержня l и его истинную плотность (1), которую мы будем считать непрерывной функцией от x, найти массу m стержня.

Для однородного стержня наша задача решается мгновенно. Действительно, для такого стержня

$$p(x)=p=\frac{m}{l},$$

откуда

$$\boxed{m=pl.} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь нашу задачу для стержня неоднородного. Разложим (мысленно) стержень на n весьма малых (не обязательно равных) участков. Для этого отметим на стержне $n-1$ промежуточных точек *)

$$x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}.$$

Для единообразия обозначений положим еще $x_0=0$ и $x_n=l$ (рис. 198). Тогда упомянутые n отрезков стержня таковы:

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ [x_2,\ x_3],\ \ldots,\ [x_{n-1},\ x_n].$$

Участок $[x_0,\ x_1]$ назовем первым, $[x_1,\ x_2]$ — вторым и т. д. Тогда участок $[x_{k-1},\ x_k]$ будет иметь номер k. Длина этого участка равна

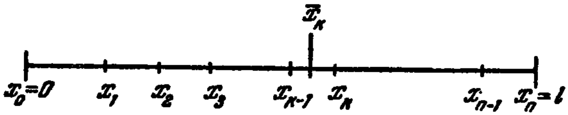


Рис. 198.

x_k-x_{k-1}. Если все участки малы, то мал и самый длинный из них. Его длину, т. е. наибольшую из разностей x_k-x_{k-1}, называют *рангом* произведенного дробления стержня и обозначают через λ:

$$\lambda=\max(x_k-x_{k-1}).$$

Постараемся найти массу участка $[x_{k-1},\ x_k]$ хотя бы приближенно. Для этого заметим, что благодаря малости упомянутого участка (непрерывная!) функция $p(x)$ не может заметно измениться на нем. Стало быть, мы можем приближенно принять, что $p(x)$ постоянна на участке $[x_{k-1},\ x_k]$. За значение этой постоянной можно принять значение $p(\bar{x}_k)$ функции $p(x)$ в произвольно выбранной

*) Ясно, что для разложения стержня на n участков надо взять не n точек деления, а только $n-1$. Например, желая распилить бревно на 6 кусков, надо сделать не 6, а только 5 распилов.

(ведь они все почти равноправны) точке $\bar{x}_k$ *) участка $[x_{k-1}, x_k]$. Итак, мы берем (рис. 198) по произволу на $[x_{k-1}, x_k]$ точку $\bar{x}_k$ и принимаем, что во всех точках x из $[x_{k-1}, x_k]$ будет $p(x) = p(\bar{x}_k)$. Но ведь это означает, что мы считаем участок $[x_{k-1}, x_k]$ однородным с плотностью $p(\bar{x}_k)$. Значит, масса этого участка может быть подсчитана по формуле (2) и оказывается равной

$$p(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{3}$$

Масса m всего стержня равна сумме масс (3) для $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначая операцию сложения буквой $\sum$ **), получаем формулу

$$m = \sum_{k=1}^{n} p(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{4}$$

Однако написанное равенство не является точным, поскольку допущение однородности отдельных участков носило лишь приближенный характер. Заменяя знак равенства в (4) знаком приближенного равенства $\cong$, находим

$$m \cong \sum_{k=1}^{n} p(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{5}$$

Самый вывод равенства (5) показывает, что это равенство является тем более точным, чем меньше отдельные участки, т. е. чем меньше ранг дробления λ. Поэтому точным значением массы m является не сумма, фигурирующая в (5), а предел этой суммы при стремлении λ к нулю

$$\boxed{m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} p(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).} \tag{6}$$

Мы видим, что наша физическая задача привела к рассмотрению предела (6), имеющего весьма специальный вид. Позже мы узнаем, что к нахождению подобных пределов сводится решение весьма многих конкретных задач. Поэтому возникла чисто математическая проблема изучения этих пределов. Каждый такой предел называется *определенным интегралом*. В следующем n° дается точное определение этого понятия.

---

*) Значок k в обозначении точки $\bar{x}_k$ указывает, что она выбрана именно из участка, имеющего номер k.

**) Это прописная греческая буква „сигма“. Строчная буква „сигма“ выглядит так: σ.

n°2. Определенный интеграл. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Проделаем следующие 5 операций над отрезком $[a, b]$ и функцией $f(x)$:

1. Раздробим отрезок $[a, b]$ на n частей при помощи точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, где

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b.$$

Для единообразия обозначений положим еще $x_0 = a$, $x_n = b$. Наибольшую из разностей $x_k - x_{k-1}$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, мы обозначим через λ. Эта величина, характеризующая, насколько мелко раздроблен отрезок $[a, b]$, называется рангом произведенного дробления.

2. На каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем по точке $\bar{x}_k$, $x_{k-1} \leqslant \bar{x}_k \leqslant x_k$ и вычислим значение $f(\bar{x}_k)$ нашей функции $f(x)$ в этой точке.

3. Умножим $f(\bar{x}_k)$ на длину $x_k - x_{k-1}$ отрезка $[x_{k-1}, x_k]$.

4. Сложим все полученные произведения, т. е. составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Эта сумма носит название *интегральной* суммы или *суммы Римана* (по имени немецкого математика 19-го века, изучавшего такие суммы).

5. Будем измельчать произведенное дробление, заставляя λ стремиться к нулю. Во многих случаях при этом измельчении сумма Римана будет стремиться к некоторому конечному пределу*) I, не зависящему ни от способа, каким выбираются точки деления x_k, ни от того, как выбираются промежуточные точки $\bar{x}_k$.

Этот предел

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

и называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$. Он обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами* интегрирования, а отрезок $[a, b]$ — промежутком интегрирования. Таким образом,

---

*) Так, например, обстояло дело в n°1, где сумма σ представляла собою приближенное значение массы стержня, тем более точное, чем меньше ранг дробления.

Определенный интеграл есть конечный предел суммы Римана при стремлении к нулю ранга дробления, порождающего эту сумму *):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).} \tag{7}$$

Так как определенный интеграл есть предел некоторой переменной величины, а вовсе не всякая переменная имеет предел, то не у всякой функции существует определенный интеграл. Однако справедлива важная

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

существует.

Эту теорему мы примем без доказательства. В дальнейшем будут рассматриваться, главным образом, функции непрерывные, хотя справедлива и более общая

Теорема. *Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ существует, если $f(x)$ „кусочно непрерывна“.*

Понятие „кусочно непрерывной“ функции легко разъяснить на простом примере. Пусть $a < c < b$, функция $f_1(x)$ задана и непрерывна на $[a, c]$, а функция $f_2(x)$ на $[c, b]$. Тогда функция $f(x)$, совпадающая с $f_1(x)$ при $a \leqslant x < c$ и с $f_2(x)$ при $c < x \leqslant b$ (чему равно $f(c)$, безразлично), как бы состоит из двух непрерывных „кусков“ (рис. 199). Такая функция и называется „кусочно непрерывной“. Она может состоять и из нескольких непрерывных кусков.

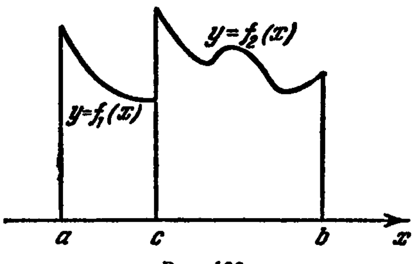


Рис. 199.

Все же, если не будет оговорено противное, подынтегральные функции будут предполагаться непрерывными.

n° 3. Геометрический смысл интеграла. Пусть $f(x)$ — положительная непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Рассмот-

*) Заметим, что дробление, т. е. набор точек деления x_k, не полностью определяет сумму σ. Для задания σ нужно указать еще промежуточные точки $\bar{x}_k$.

рим (рис. 200) фигуру, ограниченную снизу осью Ox, сверху линией $y=f(x)$ (т. е. графиком нашей функции), а с боков прямыми $x=a$, $x=b$. Если бы линия $y=f(x)$ была прямой, то наша фигура представила бы собой обыкновенную трапецию. В общем же случае эта фигура называется *криволинейной трапецией*.

Найдем площадь F этой криволинейной трапеции. Для этого разложим отрезок $[a, b]$ на n малых отрезков точками

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b.$$

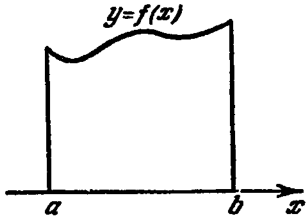


Рис. 200.

Если через точки деления провести прямые $x=x_k$, то они разрежут нашу криволинейную трапецию (рис. 201) на n узких полосок. Каждую из этих полосок можно приближенно принять за прямоугольник. В самом деле, если бы функция $f(x)$ в пределах отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ была постоянной, то полоска, имеющая своим основанием этот отрезок, и в самом деле была бы прямоугольником. В действительности $f(x)$ не будет постоянной на $[x_{k-1}, x_k]$, но благодаря своей

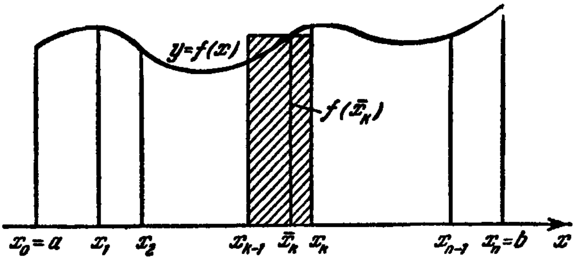


Рис. 201.

непрерывности эта функция не успевает заметно измениться на $[x_{k-1}, x_k]$, если только этот отрезок весьма мал. Иными словами, $f(x)$ почти постоянна на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, когда эти отрезки малы, а это и значит, что упомянутые полоски почти являются прямоугольниками (один такой прямоугольник заштрихован на рис. 201). Принимая за значение $f(x)$ на всем $[x_{k-1}, x_k]$ ее значение в какой-нибудь точке $\bar{x}_k$ этого отрезка (выбор этой точки безразличен, поскольку речь все равно идет о приближенном подсчете, а все точки отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ равноправны), получаем, что высотой прямоугольника, за который мы принимаем нашу полоску, будет $f(\bar{x}_k)$.

Поскольку длина основания этого прямоугольника, очевидно, равна $x_k - x_{k-1}$, то площадь одной полоски приближенно равна произведению $f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1})$. Отсюда для интересующей нас площади F всей криволинейной трапеции получается приближенное равенство

$$F \cong \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{8}$$

Из самого вывода ясно, что точность этого равенства тем выше, чем меньше отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, т. е. чем меньше ранг дробления λ. Но тогда точное значение площади F будет пределом написанной суммы при $\lambda \to 0$:

$$F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Поскольку, однако, сумма (8) является суммой Римана, то по самому определению ее пределом при $\lambda \to 0$ служит интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, мы приходим к формуле

$$\boxed{F = \int_a^b f(x)\,dx.} \tag{9}$$

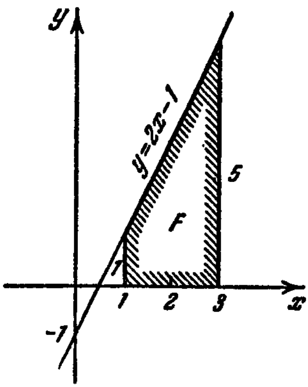


Рис. 202.

Читая ее справа налево, выясняем

Геометрический смысл интеграла. *Если $f(x)$ непрерывна и положительна на $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$.*

Примеры. 1) Найти $\int_1^3 (2x - 1)\,dx$.

Решение. Фигура, ограниченная линиями $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2x - 1$ (рис. 202), есть обыкновенная трапеция. Ее площадь равна полусумме оснований, умноженной на высоту:

$$F = \frac{1+5}{2}(3 - 1) = 6,$$

откуда

$$\int_1^3 (2x-1)\,dx = 6.$$

2) Найти $\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

(8) Решение. Линия $y=\sqrt{R^2-x^2}$ есть расположенная выше оси Ox половина окружности $x^2+y^2=R^2$. Та часть линии, которая получается при изменении x от 0 до R, лежит в 1-м координатном угле. Отсюда ясно, что фигура, ограниченная линиями $x=0$, $x=R$, $y=0$, $y=\sqrt{R^2-x^2}$, является (рис. 203) четвертью круга с центром в начале координат и радиусом R. Площадь этой фигуры равна $\frac{1}{4}\pi R^2$, откуда

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{\pi R^2}{4}.$$

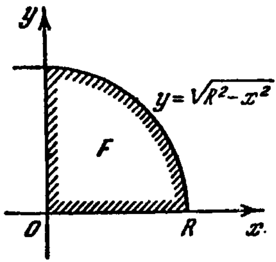


Рис. 203.

Сейчас мы еще не научились вычислять определенные интегралы, и в этих примерах нам пришлось прибегнуть к помощи геометрии. В дальнейшем, наоборот, с помощью интегрального исчисления мы сможем вычислять площади различных криволинейных фигур *).

п° 4. **Два простейших свойства интеграла.** Когда мы занимались неопределенными интегралами, то отмечали, что

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad \int \cos z\,dz = \sin z + C,$$
$$\int \cos t\,dt = \sin t + C.$$

Таким образом, в записи подынтегральной функции и в записи результата интегрирования независимая переменная обозначалась одной и той же буквой. Стало быть, обозначение этой независимой переменной, которую называют *переменной интегрирования*, оказывалось существенным **). Напротив,

---

*) А также решать целый ряд других геометрических и механических задач.

**) Это становится ясным, если мы вспомним хотя бы, как вычисляется интеграл $I=\int \sin^2 x \cos x\,dx$. Ведь его надо записать сначала в виде $\int \sin^2 x\,d(\sin x)$, а затем в виде $\int z^2\,dz$, где $z=\sin x$. Значит, $I=\frac{z^3}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C$. Таким образом, нам совсем не безразлично, написать ли $I=\frac{z^3}{3}+C$ (что верно) или $I=\frac{x^3}{3}+C$ (что уже неверно!).

I. *Обозначение переменной интегрирования в определенном интеграле никакой роли не играет*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt.} \tag{10}$$

Читатель сразу поймет это, если задаст себе вопрос: который из двух интегралов

$$\int_3^5 (2x^3+x)\,dx, \quad \int_3^5 (2t^3+t)\,dt \tag{11}$$

больше? Ясно, что они одинаковы! Более отчетливо мы разберемся в этом, если заметим, что для вычисления любого из интегралов (11) мы должны разбить отрезок [3, 5] на мелкие части, в каждой части выбрать по точке и вычислить в ней значение подынтегральной функции (а она в обоих интегралах одна и та же: удвоенный куб аргумента, сложенный с самим аргументом) и т. д. Иными словами, все вычисления в обоих случаях будут тождественными. Также обстоит дело и в более общем случае интегралов (10), чем и доказано формулированное свойство I определенного интеграла.

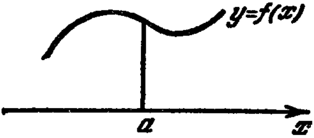


Рис. 204.

Переходя к другому важному его свойству, заметим, что в выражении

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

мы предполагали $a<b$. Что же следует понимать под символом

$$\int_a^a f(x)\,dx?$$

На этот вопрос легко ответить, если вспомнить **геометрический смысл интеграла**. В нашем случае боковые стороны криволинейной трапеции $x=a$ и $x=b$ сливаются в одну прямую $x=a$ и трапеция вырождается в прямолинейный отрезок (рис. 204). Площадь этого отрезка равна нулю, а потому и

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx=0,} \tag{12}$$

т. е.

II. *Определенный интеграл с совпадающими пределами интегрирования равен нулю* *).

Например,

$$\int_{7}^{7} \sin^{3} \sqrt{\ln x}\, dx = 0.$$

n°5. Интеграл как функция верхнего предела. Теорема Барроу. Если в определенном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ пределы интегрирования закреплены, то интеграл оказывается некоторым постоянным числом. Однако если числа a и b изменить, то изменится и значение интеграла. Таким образом, наш интеграл представляет собою функцию своих пределов интегрирования. Мы хотим более обстоятельно изучить свойства этой функции. Поскольку, однако, мы лучше знакомы со свойствами функций одного, а не двух аргументов, то нам будет удобнее один из пределов интегрирования закрепить и рассмотреть зависимость интеграла от другого — переменного — предела. Для определенности закрепим нижний предел a и изучим интеграл как функцию его верхнего предела b. Эту функцию мы обозначим через $\Phi(b)$, т. е. положим

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

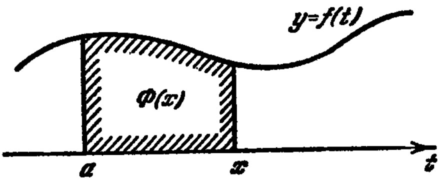


Рис. 205.

Так как обозначение переменной интегрирования несущественно, то можно написать, что

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{13}$$

Желая, как обычно, пользоваться для обозначения независимой переменной буквой x, перепишем (13) в виде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{14}$$

С помощью функции (14) равенству (12) можно придать вид $\Phi(a) = 0$.

Чтобы изобразить функцию $\Phi(x)$ на чертеже, проведем (на плоскости Oty) линию $y = f(t)$ (предполагая, как всегда, что $f(t)$ непрерывна, и считая $f(t) > 0$). Тогда (рис. 205) $\Phi(x)$ будет площадью фигуры, ограниченной линиями $t = a$, $t = x$, $y = 0$, $y = f(t)$.

*) Если угодно, это свойство можно считать некоторым добавлением к определению интеграла, данному в n°2.

Едва ли не самой важной теоремой математического анализа является теорема о производной функции $\Phi(x)$, доказанная в 1669 г. английским математиком Барроу *).

Теорема Барроу. *Производная определенного интеграла как функции его верхнего предела равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования, т. е.*

$$\boxed{\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).} \tag{15}$$

Доказательство. Пользуясь геометрическим смыслом интеграла, изобразим процесс его дифференцирования на чертеже. Начинать этот процесс надо с закрепления точки дифференцирования x и нахождения соответствующего значения функции $\Phi(x)$. Это значение у нас изображено на рис. 205. Затем аргументу надо придать приращение Δx и найти соответствующее приращение функции $\Delta\Phi$. Из рис. 206 ясно, что $\Delta\Phi$ представляет собой площадь заштрихованной узкой полоски. Эту полоску можно приближенно принять за прямоугольник с основанием Δx и высотой $f(x)$ (ибо функция $f(t)$, будучи непрерывной, не успевает заметно измениться, когда t меняется между x и $x+\Delta x$). Таким образом,

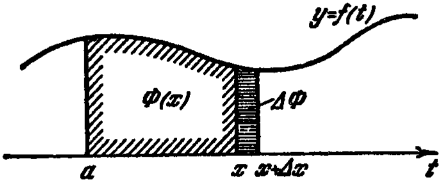


Рис. 206.

$$\Delta\Phi \cong f(x)\,\Delta x,$$

откуда

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \cong f(x). \tag{16}$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше Δx. Значит, по мере уменьшения Δx левая часть равенства (16) будет все ближе и ближе подходить к правой части этого равенства, являющейся числом постоянным (ведь x закреплено!).

Таким образом,

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x}.$$

Но это значит, что $f(x) = \Phi'(x)$, чем и доказана формула (15).

---

*) Разумеется, терминология Барроу была отлична от современной. В его время еще не было определений производной и интеграла.

Примерами, иллюстрирующими теорему Барроу, служат соотношения

$$\left(\int_2^x \cos^3 t\, dt\right)' = \cos^3 x, \quad \left(\int_3^x e^{\sqrt{y}}\, dy\right)' = e^{\sqrt{x}}, \quad \left(\int_3^z e^{\sqrt{y}}\, dy\right)' = e^{\sqrt{z}}. \tag{16}$$

Заметим еще, что

$$\left(\int_2^5 \sqrt{\ln t}\, dt\right)' = 0,$$

ибо интеграл $\int_2^5 \sqrt{\ln t}\, dt$ есть постоянное число!

n°6. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона — Лейбница. Поставим вопрос о вычислении определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{17}$$

Если заметить, что

$$I = \int_a^b f(t)\, dt,$$

и ввести функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

то мы сможем записать I в виде

$$I = \Phi(b)$$

или, что то же самое,

$$I = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{18}$$

ибо

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0.$$

Таким образом, интеграл I оказывается равным приращению функции $\Phi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Отметим далее, что согласно теореме Барроу

$$\Phi'(x) = f(x),$$

т. е. $\Phi(x)$ является одной из первообразных для подынтегральной функции $f(x)$.

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — какие-либо две первообразные для одной и той же функции $f(x)$, то*

$$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a), \tag{19}$$

т. е. их приращения на одном и том же отрезке равны.

В самом деле, две первообразные для одной и той же функции могут отличаться лишь постоянным слагаемым. Значит,

$$F_2(x)=F_1(x)+C.$$

Отсюда

$$F_2(b)=F_1(b)+C, \quad F_2(a)=F_1(a)+C.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим (19).

Допустим теперь, что, применяя методы неопределенного интегрирования, мы сумели найти для $f(x)$ какую-нибудь первообразную $F(x)$. Так как и $\Phi(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то по нашей лемме

$$\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a).$$

Сопоставляя это с (17) и (18), находим фундаментальную *формулу Ньютона — Лейбница*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).} \tag{20}$$

Итак, установлено

Правило. *Для вычисления определенного интеграла от какой-нибудь функции надо найти для нее первообразную и составить разность значений этой первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Из леммы ясно, что безразлично, какую именно из первообразных использовать в формуле (20).

Примеры. 1) Вычислить

$$\int_1^4 x^2\,dx.$$

Согласно правилу, находим для x^2 первообразную. Их имеется бесконечное множество, и все они объединены формулой

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

Проще всего взять $C=0$. По формуле (20) получаем

$$\int_1^4 x^2\,dx=\frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{64-1}{3}=21.$$

2) Вычислить

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x\,dx.$$

Так как

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

то можно положить $F(x) = \sin x$. Тогда из (20) находим

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Записи становятся более экономными, если использовать часто применяемое обозначение разности $F(b) - F(a)$ символом $[F(x)]_a^b$. С помощью этого символа формуле (20) можно придать вид

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b}$$

или *) (что особенно выразительно!)

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.} \tag{21}$$

Например,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\int \frac{dx}{\cos^2 x}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = [\operatorname{tg} x]_{\pi/6}^{\pi/3} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Точно так же

$$\int_2^6 \frac{dx}{x} = \left[\int \frac{dx}{x}\right]_2^6 = [\ln x]_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$$

n° 7. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Все приемы, позволяющие вычислять неопределенные интегралы, применимы и тогда, когда речь идет об интегралах определенных. В частности, для нахождения последних можно интегрировать по частям или производить замену переменной. В применении этих двух приемов к определенным интегралам имеются некоторые особенности.

---

*) Впрочем, в (21) под $\int f(x)\,dx$ проще понимать какую-нибудь о п р е д е л е н н у ю первообразную, т. е. не вводить произвольной постоянной C.

Прежде всего формулу интегрирования по частям для определенных интегралов можно писать в виде

$$\boxed{\int_a^b u\,dv=[uv]_a^b-\int_a^b v\,du.} \tag{22}$$

В самом деле, на основании (21) и формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла имеем

$$\int_a^b u\,dv=\left[\int u\,dv\right]_a^b=\left[uv-\int v\,du\right]_a^b.$$

Остается заметить, что написанное выражение совпадает с правой частью (22).

Примеры.

1) $\int_0^\pi x\cos x\,dx=\int_0^\pi x\,d(\sin x)=[x\sin x]_0^\pi-\int_0^\pi \sin x\,dx=$
$=[\cos x]_0^\pi=-2.$

2) Пусть

$$U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx.$$

Тогда при $n>1$

$$U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\,d(\sin x)=[\sin x\cos^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d(\cos^{n-1}x).$$

Первый член справа равен нулю. Значит,

$$U_n=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx.$$

Отсюда

$$U_n=(n-1)(U_{n-2}-U_n)$$

и, стало быть,

$$U_n=\frac{n-1}{n}U_{n-2}. \tag{23}$$

Эта формула сводит вычисление U_n к такому же интегралу, но со значком, меньшим на 2 единицы. Повторное применение формулы (23) в зависимости от четности числа n сведет дело к одному из двух простых интегралов:

$$U_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1,\quad U_0=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}.$$

Например,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 x\,dx=U_7=\frac{6}{7}U_5=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot U_3=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot U_1=\frac{16}{35}.$$

Что касается правила подстановки, то для случая определенных интегралов оно выражается формулой

$$\boxed{\int\limits_a^b f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz.} \tag{24}$$

Отличие от случая интегралов неопределенных состоит в том, что, производя подстановку, *надо в получающемся интеграле поставить пределы изменения новой переменной z.*

Для доказательства формулы (24) обозначим ее левую и правую части соответственно через $Л$ и $П$ и положим

$$\int f(z)\,dz=F(z)+C.$$

Тогда по формуле Ньютона — Лейбница

$$П=[F(z)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}=F[\varphi(b)]-F[\varphi(a)]. \tag{25}$$

С другой стороны, применяя к неопределенному (!) интегралу

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$$

правило подстановки, находим

$$\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx=F[\varphi(x)]+C.$$

Отсюда по формуле Ньютона — Лейбница следует, что

$$Л=[F[\varphi(x)]]_a^b=F[\varphi(b)]-F[\varphi(a)]. \tag{26}$$

Сравнивая (25) с (26), получаем (24).

При применении подстановки к нахождению определенных интегралов отпадает необходимость возвращения к старой переменной. Это вполне естественно, ибо определенный интеграл есть некоторое постоянное число.

Примеры. 1) Подстановка $\ln x=z$ дает

$$\int\limits_1^e\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}=\int\limits_0^1\frac{dz}{1+z^2}=[\operatorname{arctg} z]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

2) Подстановка $x=R\sin t$ дает *)

$$\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2 t\,dt=\frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{R^2}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R^2}{4}.$$

n° 8. Важнейшие свойства интеграла. При самом определении интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

мы считали нижний предел a меньшим верхнего b. Затем мы дополнили это соотношением

$$\int_a^a f(x)\,dx=0.$$

Оказывается удобным рассматривать интеграл и тогда, когда нижний предел б о л ь ш е верхнего. Именно, поскольку правая часть формулы Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \tag{27}$$

меняет знак при перестановке чисел a и b, то разумно положить (по определению) при $a>b$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx,} \tag{28}$$

так что

I. *Определенный интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования.*

Ясно, что теперь формула (27) оказывается верной во всех случаях $a<b$, $a=b$, $a>b$. Впредь мы будем говорить, что порядок пределов интегрирования *нормальный*, если нижний предел интеграла меньше верхнего.

Следующее важное свойство интеграла, называемое его *аддитивностью*, таково.

---

*) Напомним, что в n° 3 мы нашли рассматриваемый интеграл, исходя из его геометрического смысла.

II. *Если промежуток интегрирования $[a, b]$ какой-нибудь точкой c $(a < c < b)$ разбит на части, то интеграл по всему промежутку равен сумме интегралов по его частям, т. е.*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.} \tag{29}$$

Это свойство с очевидностью вытекает из геометрического смысла интеграла, ибо площадь фигуры $aABb$ (рис. 207) равна сумме площадей фигур $aACc$ и $cCBb$.

Заметим, что формула (29) верна не только когда $a < c < b$, но и при любом расположении точек a, b, c. В самом деле, если $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$, то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c).$$

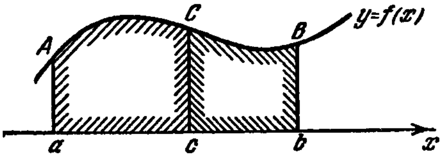


Рис. 207.

Стало быть, правая часть соотношения (29) равна разности $F(b) - F(a)$, которой равна и левая его часть *).

III. **Теорема о среднем значении.** *Между a и b имеется такая точка c, что*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).} \tag{30}$$

Действительно, снова привлекая первообразную $F(x)$, можем к правой части равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

применить формулу Лагранжа, по которой

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a).$$

Остается заметить, что $F'(x) = f(x)$ и потому $F'(c) = f(c)$.

*) Кстати сказать, что аналитическое доказательство формулы (29) не требует положительности функции $f(x)$, которую надо предполагать, говоря о геометрическом смысле интеграла.

Формула (30) имеет простой геометрический смысл: она показывает, что криволинейная трапеция $aABb$ (рис. 208) равновелика некоторому прямоугольнику $aPQb$. Высота $f(c)$ этого прямоугольника называется *средней ординатой* трапеции $aABb$.

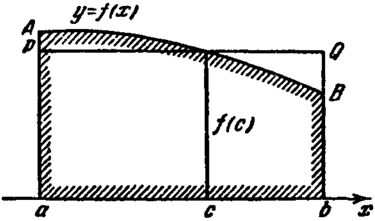


Рис. 208.

IV. *При нормальном порядке пределов интегрирования интеграл от положительной функции есть число положительное.*

В самом деле, если $a < b$ и $f(x) > 0$, то оба сомножителя правой части формулы (30) положительны.

Рассмотрим теперь две функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на $[a, b]$ (предполагая, стало быть, $a < b$). Если

$$f(x) < g(x), \tag{31}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx, \tag{32}$$

т. е.

V. *При нормальном порядке пределов интегрирования неравенство можно интегрировать.*

Действительно,

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx.$$

В последнем интеграле подынтегральная функция положительна [благодаря (31)], а потому и сам он положителен. Значит,

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx > 0,$$

а это равносильно (32).

Замечание. При доказательстве мы воспользовались равенством

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Наряду с равенствами

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

оно является непосредственным следствием формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b.$$

Из формулы (30) легко выводится так называемая

VI. Оценка интеграла. *Если* $|f(x)| \leqslant K$, *то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant K\,|b-a|. \tag{33}$$

В самом деле, абсолютная величина произведения $f(c)(b-a)$ не превосходит числа, стоящего в (33) справа.

Пример. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то при $x > 10$ будет

$$\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right| < 10^{-8}.$$

Стало быть,

$$\left|\int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8}\,dx\right| < 6\cdot 10^{-8} < 10^{-7}. \tag{34}$$

Этот пример показывает практическую ценность неравенства (33). Представим себе, что расчет некоторого сооружения, например моста, привел к тому, что нагрузка, приходящаяся на определенный узел этого сооружения, выражается (в тоннах) интегралом

$$\int_{10}^{16} \frac{\sin x}{1+x^8}\,dx. \tag{35}$$

Вычисление написанного интеграла весьма сложно. Однако неравенство (34) показывает, что интересующая нас нагрузка меньше 10^{-7} тонн, т. е. меньше 0,1 грамма! Ясно, что нет смысла вычислять интеграл (35), а им просто надо пренебречь, т. е. считать интересующий нас узел незагруженным.

§ 2. Методика применения определенного интеграла к решению практических задач

n° 1. Вычисление давления жидкости на вертикальную стенку. Рассмотрим несколько задач на одну и ту же тему.

I. Пусть перед нами прямоугольный резервуар, наполненный водой (рис. 209). Найдем давление*) P на переднюю стенку резервуара.

Вспомним некоторые факты из гидростатики. Если под водой находится некоторая горизонтальная площадка, то давление воды на нее равно весу опирающегося на площадку столба воды, т. е. цилиндрического столба, имеющего эту площадку своим основанием, а высотой — глубину погружения площадки. Так как речь идет о воде, удельный вес которой равен единице, то вес упомянутого столба численно равен его объему, т. е. равен площади площадки, умноженной на глубину ее погружения. Это произведение и дает, стало быть, величину давления на горизонтальную площадку.

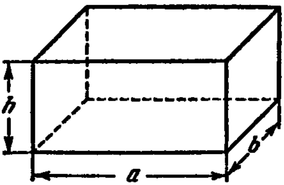


Рис. 209.

Если под водой находится площадка не горизонтальная, то ее различные точки лежат на различных глубинах и нельзя говорить о „глубине погружения всей площадки". Однако если площадка очень мала, то все ее точки лежат почти на одной глубине, которую можно приближенно принять за глубину погружения площадки и так и называть.

Определим давление на такую очень малую площадку. Для этого вообразим, что мы повернули площадку около одной из ее точек так, чтобы она стала горизонтальной. Так как давление внутри жидкости, находящейся в равновесии, в каждой ее точке во всех направлениях одно и то же, то указанная операция поворота почти не изменит давления на площадку. А с другой стороны, к площадке в ее новом, горизонтальном положении уже применимо указанное выше правило определения давления. Поскольку поворот площадки не меняет ни ее площади, ни глубины погружения (последнее потому, что площадка весьма мала), то можно сформулировать

Правило. *Давление воды на малую площадку равно площади этой площадки, умноженной на глубину ее погружения.*

---

*) И здесь и ниже, говоря о „давлении", мы имеем в виду всю силу, с которой вода давит на стенку, а не силу, приходящуюся на единицу площади (т. е. полное, а не удельное давление).

Точность этого приближенного правила тем выше, чем меньше размеры площадки *).

Вернемся теперь к нашей задаче. Передняя стенка резервуара не является весьма малой, и поэтому к ней вышеприведенное правило неприменимо. Чтобы его все же можно было применить, возьмем весьма большое число n и проведем вдоль передней стенки резервуара $n-1$ горизонтальных прямых, отстоящих от верхнего края на расстояния $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ (рис. 210). Пусть для единообразия обозначений будет еще $x_0 = 0$, $x_n = h$.

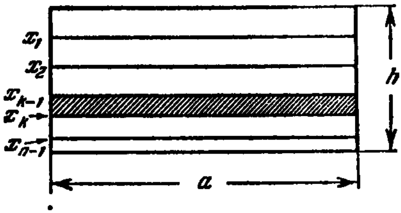


Рис. 210.

Наши прямые разделяют стенку на n узких полосок. Полоска номер k (мы нумеруем их сверху вниз) заштрихована на чертеже. Если наибольшая из разностей $x_k - x_{k-1}$ (т. е. ранг λ произведенного дробления отрезка $[0, h]$) мала, то каждая полоска очень узка и все ее точки лежат почти на одной и той же глубине. Стало быть, давление на одну полоску можно подсчитать по вышеприведенному правилу **). Площадь полоски номер k равна ее основанию a, умноженному на высоту $x_k - x_{k-1}$, т. е. эта площадь равна $a(x_k - x_{k-1})$. Что касается глубины погружения полоски, то за нее можно принять любое из чисел, лежащих от x_{k-1} (глубина верхнего края полоски) до x_k (глубина ее нижнего края). Действительно, ведь само понятие глубины погружения полоски мы определили лишь приближенно как глубину погружения какой-нибудь из ее точек. Выберем же какое-либо $\bar{x}_k$, удовлетворяющее двойному неравенству $x_{k-1} \leqslant \bar{x}_k \leqslant x_k$, и примем это $\bar{x}_k$ за глубину погружения полоски номер k. Тогда давление на эту полоску („элементарное" давление) выразится (приближенно!) числом

$$a\bar{x}_k(x_k - x_{k-1}).$$

Полное же давление P будет (опять-таки приближенно) таково:

$$P \cong \sum_{k=1}^{n} a\bar{x}_k(x_k - x_{k-1}). \qquad (1)$$

---

*) Это значит, что происходящая от применения правила относительная ошибка стремится к нулю вместе с размерами площадки.

**) Ведь для вывода правила было важно лишь, чтобы операция поворота площадки почти не меняла глубины погружения отдельных точек площадки. Поэтому мы и можем применить правило к полоске, хотя, благодаря своей длине, полоска и не является „малой".

Точность равенства (1) тем выше, чем меньше λ. Поэтому точное значение P будет равно не написанной выше сумме, а ее **п р е д е л у** при $\lambda \to 0$, т. е.

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} a\bar{x}_k (x_k - x_{k-1}).$$

Но этот предел как предел суммы вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1})$$

есть **о п р е д е л е н н ы й и н т е г р а л**. Стало быть,

$$P = \int_0^h ax\,dx.$$

Дальнейшее вычисление не представляет труда:

$$P = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_0^h = \frac{ah^2}{2}.$$

II. Рассмотрим другую задачу того же типа. Пусть треугольный щит опущен вертикально в воду, причем основание треугольника находится на уровне свободной поверхности воды (рис. 211). Требуется определить давление P воды на одну из сторон щита.

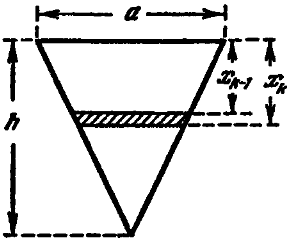


Рис. 211.

Чтобы применить тот же способ, что и выше, снова делим щит на весьма узкие полоски при помощи горизонтальных прямых, лежащих на расстояниях

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = h$$

от верхнего края щита. Снова к полоске номер k применяем установленное выше правило, считая глубиной погружения этой полоски число $\bar{x}_k$, произвольно выбранное между x_{k-1} и x_k. Остается найти площадь полоски. Эта полоска представляет собой **т р а п е ц и ю**. Но (внимание!) благодаря тому, что полоска очень узка, ее с большой степенью точности можно принять за **п р я м о у г о л ь н и к**. Происходящая от этого (относительная!) ошибка в определении площади полоски будет тем меньше, чем у́же полоска, а мы уже из предыдущего примера знаем, что нам все равно предстоит неограниченно уменьшать ширину полосок. Поэтому на окончательном результате сделанная ошибка не отразится *), а вычисления упростятся. Здесь

*) Если каждое слагаемое некоторой суммы найдено с очень малой относительной ошибкой, то относительная ошибка всей суммы также будет очень мала.

мы сталкиваемся с идеей очень общего характера, постоянно применяемой при решении самых разнообразных задач интегрального исчисления: *при подсчете элементарного слагаемого обращать главное внимание на простоту его выражения, пренебрегая для этого, если понадобится, частями упомянутого слагаемого, лишь бы такие неучтенные части были ничтожно малы по сравнению с тем, что учтено*. Поскольку занимающие нас элементарные слагаемые при $\lambda \to 0$ сами стремятся к нулю, то высказанная идея означает, что *при нахождении определенного интеграла можно, составляя интегральную сумму, пренебрегать во всех бесконечно малых слагаемых этой суммы такими частями, которые суть бесконечно малые более высокого порядка, чем сами слагаемые.*

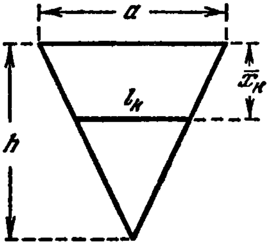


Рис. 212.

Возвращаясь к нашей задаче, мы можем за длину полоски номер k (т. е. того прямоугольника, которым мы заменяем полоску) принять длину отрезка любой горизонтальной прямой, проведенной вдоль полоски. Наиболее простым и естественным будет взять ту прямую, которая расположена на расстоянии $\bar{x}_k$, принятом нами за глубину погружения полоски. Из подобия треугольников, изображенных на рис. 212, ясно, что длина l_k полоски удовлетворяет соотношению

$$\frac{l_k}{a} = \frac{h - \bar{x}_k}{h},$$

откуда

$$l_k = \frac{a}{h}(h - \bar{x}_k).$$

Ширина полоски равна разности $x_k - x_{k-1}$, и потому ее площадь есть

$$\frac{a}{h}(h - \bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Умножая на $\bar{x}_k$, находим (приближенное!) элементарное давление

$$P_k \cong \frac{a}{h}(h - \bar{x}_k)\,\bar{x}_k(x_k - x_{k-1}).$$

Отсюда

$$P \cong \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{h}(h - \bar{x}_k)\,\bar{x}_k(x_k - x_{k-1}).$$

Точное значение P есть предел этой суммы при $\lambda \to 0$, т. е.

$$P = \int_0^h \frac{a}{h}(h-x)\,x\,dx.$$

Окончательно

$$P = \frac{a}{h}\left[h\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{ah^2}{6}.$$

III. Вот еще один пример сходной задачи, который мы решим, используя опыт, уже накопленный при решении задач I и II.

Пусть в воду опущен вертикальный треугольный щит, причем основание треугольника параллельно свободной поверхности воды, а противоположная вершина находится на этой поверхности (рис. 213). Найти давление P на одну из сторон щита.

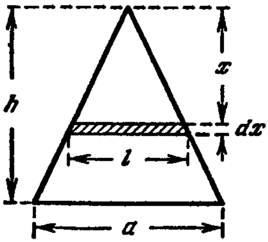


Рис. 213.

Будем решать эту задачу тем же методом, что и выше. Таким образом, мы сначала выразим P приближенно суммой, а точное значение P будет равно пределу этой суммы, т. е. интегралу.

Для подсчета давления на одну из полосок, на которые мы разложим щит, придется ввести глубину погружения полоски $\bar{x}_k$. Но мы уже знаем, что при переходе от суммы к интегралу символ $\bar{x}_k$ будет заменен просто на x. Точно так же при этом переходе ширина полоски $x_k - x_{k-1}$ будет заменена символом dx. Учитывая все это, можно коротко сказать, что мы „проводим на щите на глубине x горизонтальную полоску ширины dx" (рис. 213). Фраза, написанная в кавычках, есть лишь сокращенное выражение того хода мыслей, который мы подробно провели в примерах I и II. Для овладения методами интегрального исчисления необходимо научиться подобному сокращенному способу речи *).

Длина l нашей элементарной полоски находится из подобия треугольников:

$$\frac{l}{a} = \frac{x}{h},$$

так что площадь полоски равна **)

$$\frac{a}{h}x\,dx,$$

*) А в случае нужды уметь изложить свои мысли в совершенно развернутой форме.

**) Если бы потребовалось развернуто изложить наше решение, то мы сказали бы, что полоска номер k приближенно принимается нами за прямоугольник с площадью $\frac{a}{h}\bar{x}_k(x_k - x_{k-1})$.

а давление на нее („элементарное" давление, обозначаемое через dP) находится умножением этой площади на глубину погружения x полоски, т. е. оно равно *)

$$dP=\frac{a}{h}x^2\,dx.$$

Отсюда для всего P получаем точное (!) выражение

$$P=\int_0^h \frac{a}{h}x^2\,dx=\left[\frac{ax^3}{3h}\right]_0^h=\frac{ah^2}{3}.$$

Укажем еще, что для установления пределов интеграла полезно на минуту обратиться к рассмотрению разложения всего щита при помощи прямых, отстоящих от верхнего его края на расстояния x_k, и заметить, что $x_0=0$ и $x_n=h$.

IV. Применим изложенный сокращенный способ для нахождения давления P воды на сторону полукруглого вертикального щита, диаметр которого совпадает с поверхностью воды (рис. 214).

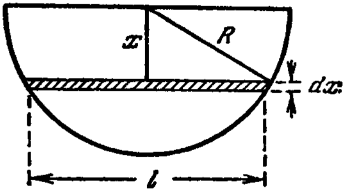


Рис. 214.

Проводим на щите горизонтальную полоску на глубине x. Пусть ширина полоски равна **) dx, а длина ее l.

Из теоремы Пифагора

$$x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=R^2,$$

откуда

$$l=2\sqrt{R^2-x^2}.$$

Значит, площадь полоски равна $2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, а давление на нее

$$dP=2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

---

*) Подробнее надо сказать, что давление на полоску номер k есть

$$\frac{a}{h}x_k^2(x_k-x_{k-1}).$$

Когда мы просуммируем это по всем k и перейдем к пределу, то написанное выражение заменится на $\frac{a}{h}x^2\,dx$.

**) Обозначения должны быть согласованы. Если бы глубина погружения полоски была обозначена через z или t и т. п., то и ширину ее надо было бы обозначать соответственно через dz, dt и т. п.

Отсюда

$$P=\int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx=-\int_0^R (R^2-x^2)^{1/2}\,d(R^2-x^2)=$$
$$=-\left[\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\right]_0^R,$$

т. е.

$$P=\frac{2}{3}R^3.$$

Ниже мы постараемся обобщить изложенные соображения, но до этого рассмотрим еще одну группу задач.

n° 2. Нахождение работы, необходимой для выкачивания воды из сосуда.

I. Пусть в цилиндрическом котле (рис. 215) находится вода и мы хотим выкачать ее с помощью насоса. Требуется найти необходимую для этого работу. Предварительно определим работу, которую надо затратить на удаление из котла одной частицы воды. Эту частицу надо поднять до края котла*), а дальше она вытечет из котла уже под действием своего веса (на продвижение частицы по горизонтальному участку шланга насоса работа не затрачивается). Таким образом, надо только преодолеть силу тяжести частицы на вертикальном участке пути, равном глубине погружения частицы. Необходимая для этого работа равна произведению упомянутых величин. Удельный вес воды $=1$, и потому вес частицы равен ее объему. Итак, *работа, необходимая для удаления из котла частицы воды, равна объему этой частицы, умноженному на глубину ее погружения.*

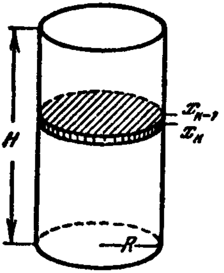


Рис. 215.

Непосредственно это правило для решения задачи применить нельзя, так как различные частицы лежат на различных глубинах. Поступим аналогично тому, как мы поступали в n° 1. Именно, проведем $n-1$ плоскостей, параллельных основанию цилиндра и находящихся на глубинах

$$x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}.$$

Для единообразия положим еще $x_0=0$, $x_n=H$. В результате этих действий вся масса воды окажется разложенной на n цилиндрических „элементарных" слоев. Если ранг λ дробления отрезка $[0, H]$,

*) Точнее говоря, ее надо поднять чуть выше края, но так как насколько именно выше — все равно, то мы и говорим о поднятии лишь до края.

т. е. наибольшая из разностей $x_k - x_{k-1}$, очень мал, то все слои будут иметь малую высоту и можно приближенно принять, что в пределах одного слоя все частицы лежат на одной глубине. Для слоя номер k (сверху) за эту глубину мы примем число $\bar{x}_k$, произвольно выбранное между x_{k-1} и x_k. Тогда работа, необходимая для выкачивания этого слоя, будет равна его объему $\pi R^2 (x_k - x_{k-1})$, умноженному на $\bar{x}_k$, т. е.

$$\pi R^2 \bar{x}_k (x_k - x_{k-1}).$$

Для всей искомой работы T получаем приближенное выражение

$$T \cong \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 \bar{x}_k (x_k - x_{k-1}),$$

тем более точное, чем меньше λ. Отсюда, как и в n° 1, находим

$$T = \int_0^H \pi R^2 x\, dx = \frac{1}{2} \pi R^2 H^2.$$

II. Найдем теперь работу, необходимую для выкачивания воды из конической воронки (рис. 216). Применяя тот же метод, разобьем весь объем воды горизонтальными плоскостями, находящимися на глубинах

$$x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = H,$$

на n слоев. Каждый из этих слоев (являющийся усеченным конусом) принимаем за цилиндр, что не скажется на окончательном результате, ибо совершаемая при этом ошибка в определении объема слоя будет при $\lambda \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем сам объем. Обозначая радиус слоя номер k (слои нумеруются сверху вниз) через r_k и считая слой находящимся на глубине $\bar{x}_k$, где $x_{k-1} \leqslant \bar{x}_k \leqslant x_k$, находим, что работа по удалению слоя номер k равна

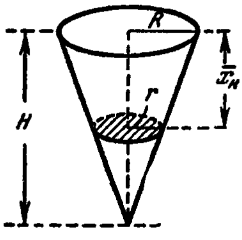


Рис. 216.

$$T_k \cong \pi r_k^2 \bar{x}_k (x_k - x_{k-1}).$$

Из подобия треугольников (см. рис. 216) видно, что

$$\frac{r_k}{R} = \frac{H - \bar{x}_k}{H}.$$

Отсюда

$$T_k \cong \pi \frac{R^2}{H^2} (H - \bar{x}_k)^2 \bar{x}_k (x_k - x_{k-1}).$$

Стало быть,

$$T \cong \sum_{k=1}^{n} \pi \frac{R^2}{H^2} (H - \bar{x}_k)^2 \bar{x}_k (x_k - x_{k-1}),$$

а в пределе при $\lambda \to 0$ будет найдено точное значение T.

$$T = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} (H - x)^2 x\, dx = \frac{1}{12} \pi R^2 H^2.$$

III. Найдем работу по выкачиванию воды из полушара (рис. 217). Все решение изложим сокращенным способом, опуская те детали рассуждения, которые, как мы уже знаем, не скажутся на окончательном результате. Именно, весь объем мы представляем разложенным на слои и рассматриваем один элементарный слой, находящийся на глубине x и имеющий толщину dx. Если его считать цилиндром радиуса r, то работа по выкачиванию этого слоя („элементарная" работа, обозначаемая через dT) будет равна произведению

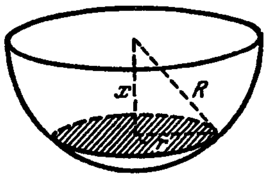


Рис. 217.

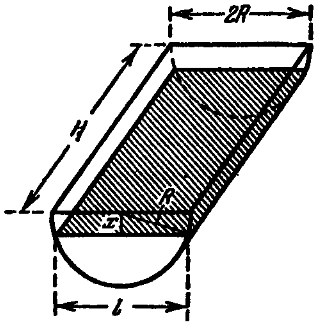


Рис. 218.

$$(\pi r^2\, dx)\, x = \pi r^2 x\, dx.$$

Из теоремы Пифагора видно (рис. 217), что $r^2 = R^2 - x^2$. Стало быть,

$$dT = \pi (R^2 - x^2)\, x\, dx,$$

откуда

$$T = \int_0^R \pi (R^2 - x^2)\, x\, dx = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

IV. Найдем работу по выкачиванию воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра (рис. 218). Слой, находящийся на глубине x и имеющий толщину dx, мы принимаем за прямоугольную плитку. Ее длина равна длине H всего корыта, а ширина l находится из теоремы Пифагора

$$l=2\sqrt{R^2-x^2}.$$

Высота слоя есть dx. Значит, его объем равен $Hl\,dx=2H\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, а элементарная работа

$$dT=2Hx\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Отсюда

$$T=\int\limits_0^R 2Hx\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{2}{3}HR^3.$$

n° 3. Правило применения интеграла в конкретных вопросах. Постараемся охватить опыт, накопленный в двух предыдущих nn°, некоторой общей схемой.

Пусть мы хотим найти значение какой-нибудь физической или геометрической величины A, соответствующее изменению переменной x от a до b (например, значение давления P воды на вертикальную стенку, соответствующее изменению глубины x от 0 до h).

Эту величину мы будем предполагать *аддитивной*, т. е. такой, что при разбиении отрезка $[a, b]$ точкой c, $a<c<b$, на части $[a, c]$ и $[c, b]$ значение величины A, соответствующее всему отрезку $[a, b]$, равно сумме ее значений, соответствующих $[a, c]$ и $[c, b]$ *).

Переходя к решению поставленной задачи, разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей при помощи точек

$$x_0=a<x_1<\ldots<x_{n-1}=b. \qquad (2)$$

В соответствии с этим и интересующая нас величина A разобьется на n слагаемых $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A=\sum_{k=1}^{n} A_k.$$

Допустим теперь, что существует такая функция $f(x)$, что „элементарное“ слагаемое A_k, соответствующее промежутку $[x_{k-1}, x_k]$, приближенно можно записать в виде

$$A_k\cong f(\bar{x}_k)(x_k-x_{k-1}), \qquad (3)$$

где $\bar{x}_k$ лежит между x_{k-1} и x_k, причем ошибка равенства (3) при бесконечно малом ранге λ дробления (2) будет бесконечно малой порядка высшего, чем A_k.

*) Можно сказать, что величина A есть „функция отрезка“, и ввести обозначения $A([a, b])$, $A([a, c])$ и т. п. Тогда свойство аддитивности величины A означает, что $A([a, b])=A([a, c])+A([c, b])$.

В этом случае для A получается приближенное выражение

$$A \cong \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}),$$

тем более точное, чем меньше λ. Стало быть, точное значение A будет служить пределом написанной суммы при $\lambda \to 0$ или, что то же самое,

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx.} \tag{4}$$

На практике это рассуждение облекают в более краткую форму, говоря, что *если элемент* ΔA *величины* A, *отвечающий элементарному отрезку* $[x, x+\Delta x]$, *с точностью до малых высшего порядка представим в виде*

$$\Delta A \cong f(x)\,\Delta x, \tag{5}$$

то верно (4).

Равенство (5) записывают обычно в форме*)

$$dA = f(x)\,dx \tag{6}$$

и говорят, что величина A получается „суммированием элементов dA". На самом деле интеграл есть не просто сумма, а ее предел, и именно благодаря этому предельному переходу получаемый результат оказывается не приближенным, а точным.

Таким образом, все дело сводится к подысканию функции $f(x)$, удовлетворяющей соотношению (6).

Вернемся, например, к задаче IV из n° 1. Мы нашли там, что

$$dP = 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx,$$

и это привело нас к формуле

$$P = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{2}{3}R^3.$$

---

*) Отметим, что (6) — равенство уже не приближенное, а точное. Действительно, пусть $A(x)$ — значение величины A, отвечающее (переменному!) отрезку $[a, x]$. Согласно (4) будет

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

и по теореме Барроу $A'(x) = f(x)$, что равносильно 6.

Точно так же равенство

$$dT = \pi (R^2 - x^2)\, x\, dx,$$

установленное при решении задачи III из n° 2, дало величину

$$T = \int_0^R \pi (R^2 - x^2)\, x\, dx = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

Ниже мы будем систематически применять изложенную схему.

§ 3. Геометрические приложения определенного интеграла

n° 1. Вычисление площадей. Декартовы координаты. Пусть требуется вычислить площадь F криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x) > 0$. Мы уже знаем, что F равна интегралу

$$F = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1}$$

Формулу (1) обычно записывают в виде

$$\boxed{F = \int_a^b y\, dx,} \tag{2}$$

памятуя, что y надо заменить его выражением $f(x)$ из уравнения граничной кривой. Заметим, что формулы (1) и (2) легко получить при помощи методов предыдущего параграфа. Действительно, если заштрихованную на рис. 219 элементарную полоску принять за прямоугольник с основанием dx и высотой y, то ее площадь будет

$$dF = y\, dx. \tag{3}$$

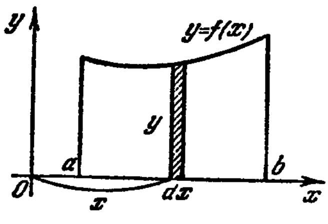


Рис. 219.

Остается „просуммировать“ выражения (3), чтобы получить (2).

Пример. Найти площадь, ограниченную полуволной синусоиды (рис. 220). Согласно (2) имеем

$$F = \int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

Заметим, что формулой (2) надо пользоваться только тогда, когда кривая $y=f(x)$ лежит выше оси Ox, т. е. когда $f(x)>0$. Если же

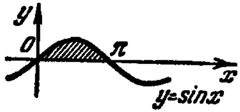


Рис. 220.

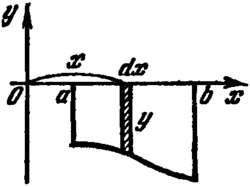


Рис. 221.

(рис. 221) $f(x)<0$, то площадь заштрихованной полоски будет $dF=-y\,dx$ (ибо площадь положительна, а $y<0$), откуда

$$F=-\int_a^b y\,dx. \tag{4}$$

Если, наконец, надо найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, причем кривая $y=f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a, b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ знака не меняет, и к каждой такой части применить ту из формул (2) или (4), которая ей соответствует.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=6x-3x^2$, $x=3$.

Решение. Интересующая нас фигура заштрихована на рис. 222, где показано, что парабола $y=6x-3x^2$ пересекает ось Ox в точках $x=0$ и $x=2$. Стало быть,

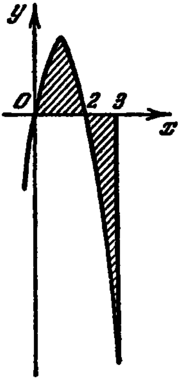


Рис. 222.

$$F=\int_0^2 y\,dx-\int_2^3 y\,dx=$$

$$=\int_0^2 (6x-3x^2)\,dx-\int_2^3 (6x-3x^2)\,dx.$$

Но

$$\int_0^2 (6x-3x^2)\,dx=[3x^2-x^3]_0^2=4,$$

$$\int_2^3 (6x-3x^2)\,dx=[3x^2-x^3]_2^3=-4,$$

откуда $F=8$.

n°2. Вычисление площадей. Полярные координаты. Пусть из центра круга радиуса R под углом α (радианов!) проведены два радиуса. Площадь полученного таким образом сектора (рис. 223), как известно *), равна

$$F=\frac{1}{2}\alpha R^2. \tag{5}$$

Этот результат позволяет решить следующую задачу: найти площадь F сектора (уже не кругового!), ограниченного лучами $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ и кривой $r=f(\theta)$ (рис. 224). Именно, вырежем из нашего

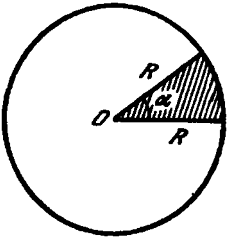


Рис. 223.

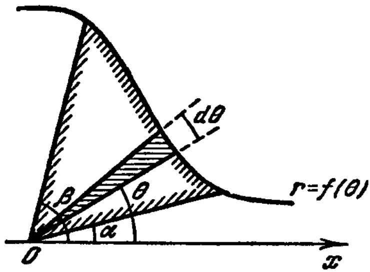


Рис. 224.

сектора элементарный сектор, образованный лучами, наклоненными к полярной оси под углами θ и $\theta+d\theta$ (рис. 224). Если этот элементарный сектор принять за круговой **) [вырезанный из круга радиуса $r=f(\theta)$], то его площадь согласно (5) будет

$$dF=\frac{1}{2}r^2\,d\theta.$$

Отсюда

$$\boxed{F=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta.} \tag{6}$$

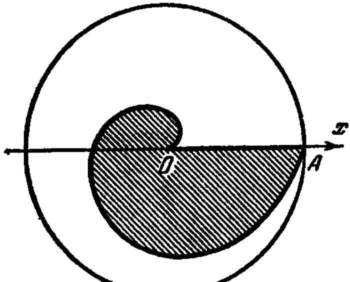


Рис. 225.

При использовании формулы (6) надо заменять r функцией $f(\theta)$, входящей в уравнение $r=f(\theta)$.

Примеры. 1) Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $r=k\theta$ (рис. 225).

*) Впрочем, формула (5) очевидна: ясно, что площадь интересующего нас сектора составляет ту же часть площади всего круга, какую дуга сектора составляет от длины окружности, т. е. $\frac{F}{\pi R^2}=\frac{\alpha R}{2\pi R}$, что и дает (5).

**) Непосредственно ясно, что ошибка, вызванная этим, есть бесконечно малая порядка более высокого, чем площадь элементарного сектора.

Решение. Здесь $\alpha=0$, $\beta=2\pi$. Значит,

$$F=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(k\theta)^2\,d\theta=\frac{4}{3}k^2\pi^3. \tag{7}$$

Этому результату можно дать наглядную формулировку. Именно, точка A пересечения спирали с полярной осью имеет радиус-вектор $OA=r=k\cdot 2\pi$. Стало быть, круг радиуса OA имеет площадь $\pi OA^2=4k^2\pi^3$. Из сопоставления этого равенства с (7) получается открытое еще Архимедом предложение: *площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда, равна $\frac{1}{3}$ площади круга с радиусом, равным наибольшему из радиусов-векторов точек витка.*

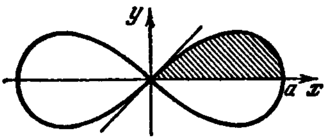


Рис. 226.

2) Найти площадь F фигуры, ограниченной лемнискатой

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Решение. Еще в первой главе было показано, что в полярных координатах наша лемниската имеет уравнение

$$r^2=a^2\cos 2\theta.$$

Лемниската симметрична относительно обеих осей, и та часть ее, которая расположена в первом координатном угле, лежит между лучами $\theta=0$ и $\theta=\frac{\pi}{4}$. Значит, площадь фигуры, ограниченной этой частью лемнискаты и осью Ox (она заштрихована на рис. 226), равна

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{4}\left[\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{4}.$$

Отсюда $F=a^2$.

n°3. Выражение объема тела через площади его сечений. Пусть (рис. 227) тело T расположено между параллельными плоскостями $x=a$ и $x=b$. Проведем плоскость, параллельную упомянутым и пересекающую ось Ox в точке x. Обозначим через F_x площадь фигуры, являющейся сечением тела T этой плоскостью. Рассмотрим элементарный слой тела T, содержащийся между плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и $x+dx$. Если этот слой принять за цилиндрический, то он представит собой пластинку толщины dx, основание которой имеет площадь F_x. Поэтому объем dV этого слоя будет равен $F_x dx$. Отсюда для объема V всего тела T получаем формулу

$$\boxed{V=\int_a^b F_x\,dx,} \tag{8}$$

т. е. *объем тела равен интегралу от площади его поперечного сечения.*

Примеры. 1) Пусть тело T есть конус (рис. 228). Выберем за Ox ось конуса, направив ее от его вершины O к основанию. Сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию и отстоящей от

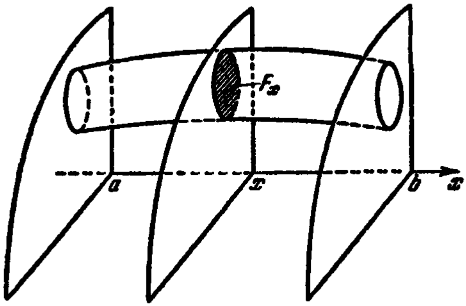


Рис. 227.

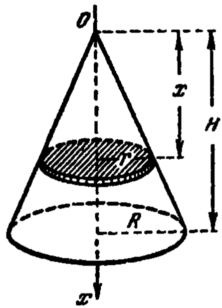


Рис. 228.

вершины на расстояние x, представляет собой круг некоторого радиуса r. Стало быть,

$$F_x=\pi r^2.$$

Из подобия треугольников легко вывести пропорцию

$$\frac{r}{R}=\frac{x}{H}.$$

Отсюда $r=\frac{R}{H}x$, и для объема V конуса получается хорошо известная формула

$$V=\int_0^H \pi\frac{R^2}{H^2}x^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

2) Столь же просто находится объем шара. Радиус r заштрихованного на рис. 229 круга, являющегося сечением шара плоскостью

x $(-R \leqslant x \leqslant R)$, как это следует из теоремы Пифагора, равен $\sqrt{R^2 - x^2}$. Отсюда

$$F_x = \pi r^2 = \pi (R^2 - x^2),$$

и потому объем шара есть

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3) Объем общей части двух цилиндров. Пусть оси двух цилиндров одного радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдем объем V тела T, по которому пересекаются цилиндры. Отчетливое представление этого тела несколько затруднительно, но оно нам и не потребуется.

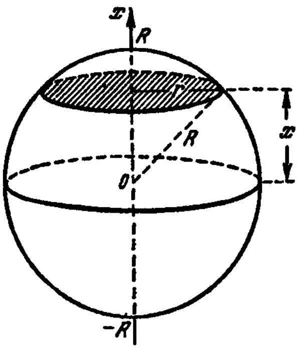


Рис. 229.

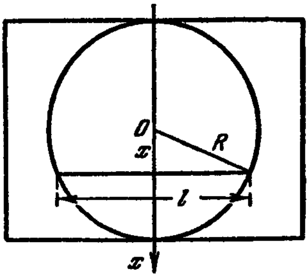


Рис. 230.

Пусть P — плоскость, содержащая оси обоих цилиндров. За ось Ox возьмем прямую, перпендикулярную плоскости P и проходящую через точку пересечения осей обоих цилиндров. Если рассечь тело T плоскостью, параллельной P и отстоящей от P на расстояние x $(-R \leqslant x \leqslant R)$, то эта плоскость пересечет каждый из цилиндров по некоторой полосе. Поскольку эти полосы, очевидно, одинаковы, то пересечением T и нашей плоскости является квадрат. Сторона l этого квадрата легко находится из рис. 230, где изображен вид наших цилиндров сверху *). По теореме Пифагора

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + x^2 = R^2.$$

Отсюда площадь упомянутого квадрата будет

$$F_x = l^2 = 4 (R^2 - x^2),$$

*) Мы считаем ось одного из цилиндров вертикальной.

и по формуле (8)

$$V=\int_{-R}^{R}4(R^2-x^2)\,dx=4\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{16}{3}R^3.$$

Интересно, что ответ не содержит никаких иррациональностей.

4) В качестве последнего примера рассмотрим так называемый *цилиндрический отрезок*, т. е. тело T, отсекаемое от цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр его основания. Пусть в обозначениях рис. 231 будет $AB=H$, $OA=R$. Если тело T пересечь плоскостью, параллельной плоскости треугольника OAB, то в сечении получится треугольник $O_1A_1B_1$, подобный OAB. Если $OO_1=x$ $(-R\leqslant x\leqslant R)$, то площадь F_x треугольника $O_1A_1B_1$ будет

$$F_x=\frac{1}{2}O_1A_1\cdot A_1B_1.$$

Но по теореме Пифагора

$$O_1A_1=\sqrt{R^2-x^2},$$

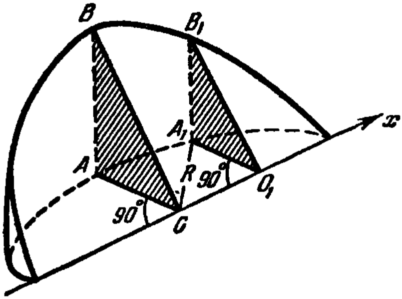


Рис. 231.

а из подобия треугольников OAB и $O_1A_1B_1$ следует, что

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{O_1A_1}{OA},$$

откуда

$$A_1B_1=\frac{AB}{OA}\cdot O_1A_1=\frac{H}{R}\sqrt{R^2-x^2}.$$

Стало быть,

$$F_x=\frac{H}{2R}(R^2-x^2)$$

и

$$V=\frac{H}{2R}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{H}{2R}\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^2H.$$

n°4. Объем тела вращения. Пусть фигура, ограниченная линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$ (рис. 232), вращается вокруг оси Ox. Найдем объем V полученного при этом тела вращения T. Это легко сделать при помощи формулы (8), если учесть, что сечение тела T плоскостью, пересекающей ось Ox в точке x, есть круг радиуса $f(x)$.

Отсюда *)

$$F_x = \pi f^2(x)$$

и

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Обычно эту формулу записывают в виде

$$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 dx.} \tag{9}$$

Пример. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной осью Ox и полуволной синусоиды (рис. 220) $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$,

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Замечание. Если фигура, ограниченная линиями $y = a$, $y = b$, $x = 0$, $x = f(y)$ (рис. 233), вращается вокруг оси Oy, то объем V

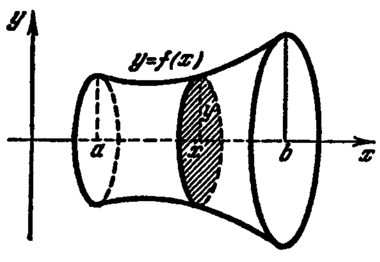


Рис. 232.

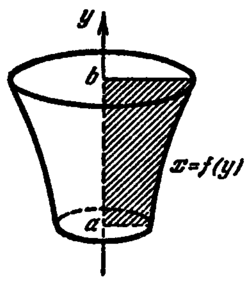


Рис. 233.

полученного тела вращения находится по аналогичной формуле

$$\boxed{V = \pi \int_a^b x^2\,dy,} \tag{10}$$

где x надо заменить на $f(y)$.

*) Для простоты мы предположили, что $f(x) \geqslant 0$. Совершенно ясно, что равенство $F_x = \pi f^2(x)$ верно и тогда, когда $f(x)$ меняет знак.

Пример. Пусть дуга параболы $y=ax^2$ $(a>0)$, отсеченная прямой $y=h>0$ (рис. 234), вращается вокруг оси Oy. Объем полученного при этом тела (оно называется *параболоидом* вращения) по формуле (10) будет

$$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h \frac{y}{a}\,dy=\frac{\pi h^2}{2a}.$$

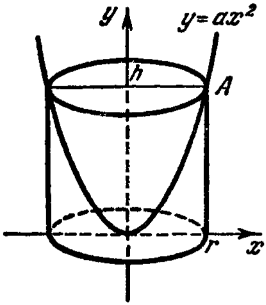


Рис. 234.

Этому результату можно дать наглядную формулировку, если ввести в рассмотрение отмеченную на чертеже точку A параболы. Ее абсцисса r и ордината h связаны соотношением $h=ar^2$. Значит,

$$V=\frac{1}{2}\pi\frac{h}{a}h=\frac{1}{2}\pi r^2h.$$

Но πr^2h есть объем цилиндра радиуса r и высоты h, откуда следует

Теорема Архимеда. *Объем параболоида вращения равен половине объема цилиндра, имеющего те же радиус основания и высоту.*

п° 5. Длина дуги кривой. Рассмотрим вопрос о длине s дуги гладкой *) кривой $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. Выделим из нашей дуги элементарный отрезок ds. В силу гладкости кривой этот отрезок можно приближенно принять за прямолинейный **). Применяя к заштрихованному треугольнику (рис. 235) теорему Пифагора, находим ***)

$$\boxed{ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.} \tag{11}$$

Но $dy=y'_x\,dx$. Значит,

$$ds=\sqrt{1+y'^2_x}\,dx \tag{12}$$

и

$$\boxed{s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2_x}\,dx,} \tag{13}$$

где $y'_x=f'(x)$.

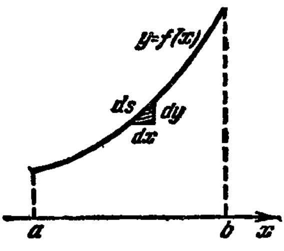


Рис. 235.

*) Напомним, что кривая называется гладкой, если во всех ее точках существует касательная, непрерывно изменяющаяся вместе с точкой касания. В частности, кривая $y=f(x)$ гладкая, если существует непрерывная $f'(x)$. Последнее и предполагается в этом п°.

**) Вспомним, что бесконечно малая дуга гладкой кривой эквивалентна своей хорде.

***) Строго говоря, вертикальный катет треугольника равен Δy, но, заменяя Δy на dy, мы делаем ошибку высшего порядка малости.

Пример. Найти длину дуги кривой

$$x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}.$$

Эта кривая называется *астроидой* *) и имеет изображенный на рис. 236 вид бубнового туза. Действительно, прежде всего заметим, что кривая симметрична относительно обеих осей (ибо x и y входят под знаки кубических корней в квадратах: $x^{2/3}=\sqrt[3]{x^2}$). Та часть кривой, которая лежит в первой четверти, имеет уравнение

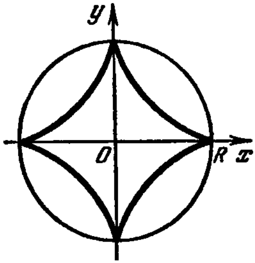


Рис. 236.

$$y=(R^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}, \tag{14}$$

так что x может изменяться лишь от 0 до R, чему соответствует убывание y от R до 0. Из (14) следует, что

$$y'_x=\frac{3}{2}(R^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right),$$

т. е.

$$y'_x=-(R^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}. \tag{15}$$

Отсюда видно, что при $0<x\leqslant R$ кривая гладкая (ибо для этих x производная непрерывна). Если $x=R$, то $y'_x=0$, а если $x\to 0$, то $y'_x\to -\infty$, Стало быть, астроида касается обеих осей. Из (15) получаем

$$y'^2_x=(R^{2/3}-x^{2/3})x^{-2/3}=R^{2/3}x^{-2/3}-1.$$

Отсюда длина дуги, лежащей в первой четверти, такова:

$$\int_0^R\sqrt{1+y'^2_x}\,dx=\int_0^R R^{1/3}x^{-1/3}dx=\frac{3}{2}R^{1/3}\,[x^{2/3}]_0^R=\frac{3}{2}R.$$

Значит, длина s всей астроиды такова:

$$s=6R.$$

Интересно, что эта величина выражается через R даже проще, чем длина окружности $2\pi R=6{,}283\ \dots\ R$.

---

*) Она имеет кинематическое происхождение. Если окружность катится без скольжения и проворачивания по внутренней стороне неподвижной окружности большего радиуса, то каждая ее точка описывает некоторую линию, называемую *гипоциклоидой*. Астроида есть тот случай гипоциклоиды, когда отношение радиусов равно 4. Заметим, что линия, описываемая точкой окружности, катящейся по внешней стороне неподвижной окружности, называется *эпициклоидой*. Все эти кривые находят применение в теории зубчатых зацеплений.

n° 6. Площадь поверхности вращения. Пусть дуга гладкой кривой $y=f(x)>0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ вращается вокруг оси Ox (рис. 237). Найдем площадь L получаемой при этом поверхности вращения. Для этого выделим из нашей дуги элемент ds, соответствующий изменению абсциссы от x до $x+dx$. Если принять, как мы уже делали, этот элемент за прямолинейный, то описанная им часть поверхности окажется усеченным конусом, у которого ds служит образующей. Радиусы оснований этого конуса будут y и $y+dy$. Значит, площадь его боковой поверхности *) равна

$$\pi[y+(y+dy)]\,ds=2\pi y\,ds+\pi\,dy\,ds. \tag{16}$$

Мы знаем, что, применяя определенный интеграл, при подсчете элементарного слагаемого можно пренебрегать бесконечно малыми высшего порядка. Так как (при бесконечно малых dx, dy, ds) произведение $dy\,ds$ есть

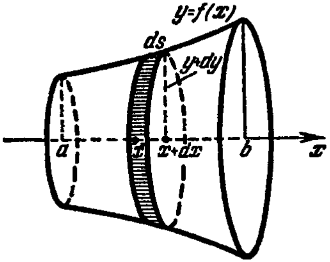


Рис. 237.

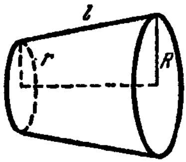


Рис. 238.

бесконечно малое высшего порядка, чем (16), то им можно пренебречь, и (16) дает

$$dL=2\pi y\,ds. \tag{17}$$

Но согласно (12)

$$ds=\sqrt{1+y_x'^2}\,dx.$$

Отсюда и из (17) получаем

$$\boxed{L=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx,} \tag{18}$$

где $y=f(x)$ и $y_x'=f'(x)$.

Пример. Найти площадь L поверхности, образованной вращением астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=R^{2/3}$ вокруг оси Ox.

Решение. Выше мы уже нашли, что для той дуги астроиды, которая лежит в первой четверти,

$$y=(R^{2/3}-x^{2/3})^{3/2},\quad \sqrt{1+y_x'^2}=R^{1/3}x^{-1/3}.$$

*) Напомним, что площадь боковой поверхности усеченного конуса (рис. 238) с образующей l и радиусами оснований r и R равна $\pi(r+R)\,l$.

Вращение этой дуги образует половину интересующей нас поверхности, откуда

$$L = 4\pi \int_0^R (R^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} R^{1/3} x^{-1/3} dx.$$

Сделаем подстановку $x = Rt^3$. Тогда

$$L = 12\pi R^2 \int_0^1 (1 - t^2)^{3/2} t\, dt = 6\pi R^2 \int_0^1 (1 - t^2)^{3/2} d(t^2).$$

Отсюда

$$L = -6\pi R^2 \left[\frac{2}{5}(1 - t^2)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{12}{5}\pi R^2.$$

Замечания. 1) Формула (18) дает площадь L лишь при $f(x) > 0$. Если $f(x) < 0$, то перед интегралом надо поставить знак „—". Если же кривая $y = f(x)$ между $x = a$ и $x = b$ пересекает ось абсцисс, то $[a, b]$ надо разбить на участки, где $f(x)$ сохраняет знак, и к каждому из них применить надлежащую формулу.

2) Иногда формулу (18) записывают в виде

$$\boxed{L = 2\pi \int_a^b y\, ds,} \tag{19}$$

помня, однако, что a и b суть пределы изменения не дуги s, а абсциссы x.

n°7. Случай параметрически заданной кривой. Формулы

$$F = \int_a^b y\, dx, \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx \tag{20}$$

применимы и тогда, когда интересующая нас кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t) \quad (p \leqslant t \leqslant q),$$

причем возрастанию t от p до q соответствует возрастание x от a до b. Надо только в формулах (20) сделать подстановку $x = x(t)$, которая повлечет замену y на $y(t)$. Пределы a и b надо при этом заменить на p и q.

Что касается длины дуги и площади поверхности вращения

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx, \quad L = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx, \tag{21}$$

то здесь подстановка $x=x(t)$ влечет замены

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad dx=x'_t dt,$$

откуда *)

$$\sqrt{1+y'^2_x}\,dx=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt, \tag{22}$$

и формулы (21) принимают вид

$$\boxed{s=\int_p^q \sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt,} \tag{23}$$

$$\boxed{L=2\pi\int_p^q y\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,dt.} \tag{24}$$

Пример. Найти величины F, V, s и L для одной арки циклоиды:

$$x=R(t-\sin t), \quad y=R(1-\cos t)\,(0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Решение. Очевидно, $dx=R(1-\cos t)$. Значит,

$$F=\int_0^{2\pi R} y\,dx=\int_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=R^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=3\pi R^2.$$

Аналогично

$$V=\pi\int_0^{2\pi R} y^2\,dx=\pi R^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=$$

$$=\pi R^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt=5\pi^2R^3.$$

Далее,

$$x'_t=R(1-\cos t), \quad y'_t=R\sin t,$$

откуда

$$\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=R\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=R\sqrt{2(1-\cos t)}=2R\sin\frac{t}{2}.$$

---

*) Формула (22) еще проще получается непосредственно из того, что $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, и равенств $dx=x'_t dt$, $dy=y'_t dt$.

Значит,

$$s=2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=4R\left[-\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8R.$$

Наконец,

$$L=2\pi\int_0^{2\pi}y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=$$

$$=4\pi R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi R^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt.$$

Заменяя t через 2φ, находим

$$L=16\pi R^2\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi=$$

$$=-16\pi R^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\,d(\cos\varphi)=-16\pi R^2\left[\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi}$$

и окончательно $L=\frac{64}{3}\pi R^2$.

Итак, $F=3\pi R^2$, $V=5\pi^2R^3$, $s=8R$, $L=\frac{64}{3}\pi R^2$.

n° 8. Длина дуги в полярных координатах. Пусть требуется найти длину дуги кривой $r=f(\theta)$, отвечающую промежутку $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$. Если перейти к декартовым координатам при помощи формул

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta, \tag{25}$$

то соотношения (25), где под r мы понимаем $f(\theta)$, представят собой параметрические уравнения нашей кривой, причем роль параметра играет угол θ.

В таком случае

$$x_\theta'=r_\theta'\cos\theta-r\sin\theta,\qquad y_\theta'=r_\theta'\sin\theta+r\cos\theta,$$

откуда

$$x_\theta'^2+y_\theta'^2=r_\theta'^2+r^2.$$

Значит, по формуле (23) будет

$$\boxed{s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r_\theta'^2+r^2}\,d\theta\,.} \tag{26}$$

Пример. Найти длину кривой

$$r = a(1 + \cos\theta) \qquad (a > 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Эта кривая (называемая *кардиоидой*) имеет вид, изображенный на рис. 239*). Так как

$$r'_\theta = -a\sin\theta,$$

то

$$r'^2_\theta + r^2 = a^2(\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) =$$
$$= 2a^2(1 + \cos\theta) = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Стало быть,

$$s = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2a\int\limits_0^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 0.$$

Этот результат, однако, явно нелеп. В чем же дело?

Дело в ошибочной замене $\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}$ на $2a\cos\frac{\theta}{2}$. Она законна при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, но при $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ надо писать

$$\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

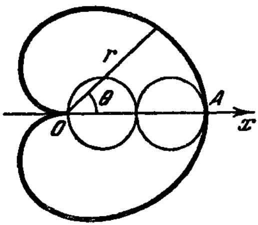


Рис. 239.

В самом деле, ведь равенство $\sqrt{A^2} = A$ верно лишь при $A \geqslant 0$, а при $A < 0$ будет $\sqrt{A^2} = -A$. Функция же $\cos\frac{\theta}{2}$ как раз и будет положительна на отрезке $[0, \pi]$ и отрицательна на отрезке $[\pi, 2\pi]$. Поэтому правильное решение таково:

$$s = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta + \int\limits_\pi^{2\pi} \sqrt{4a^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta =$$
$$= 2a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - 2a\int\limits_\pi^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

откуда

$$s = 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi} - 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_\pi^{2\pi} = 4a + 4a = 8a.$$

*) Кардиоида есть частный вид эпициклоиды, когда радиусы неподвижной и катящейся окружностей равны. На рис. 239 неподвижной окружностью является левая, и кардиоида описывается точкой A.

§ 4. Механические применения определенного интеграла

n° 1. Статические моменты и моменты инерции. В механике важную роль играет понятие материальной точки, т. е. тела столь малых размеров, что мы считаем его геометрической точкой, но в то же время не пренебрегаем его массой.

Моментом инерции материальной точки M относительно точки O (или прямой Ox, или плоскости xy) называется произведение массы m точки M на квадрат ее расстояния d от точки O (или соответственно от прямой Ox, или плоскости xy), т. е.

$$J_0 = md^2 \text{ (соответственно } J_x = md^2,\ J_{xy} = md^2).$$

Сходным образом вводится понятие *статического момента* S_0 (соответственно S_x, S_{xy}) точки M относительно O (или Ox, или xy). В этом случае масса m точки M умножается на первую степень расстояния d:

$$S_0 = md,\ S_x = md,\ S_{xy} = md.$$

Однако здесь дело обстоит сложнее, ибо при рассмотрении нескольких материальных точек $M, M', \ldots$ оказывается полезным приписывать соответствующим расстояниям $d, d', \ldots$ определенные знаки. Если речь идет о S_0 и материальные точки расположены на оси,

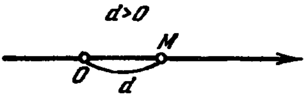


Рис. 240.

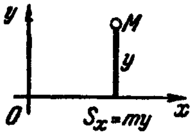


Рис. 241.

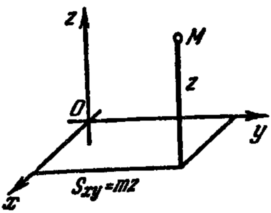


Рис. 242.

содержащей точку O, то упомянутые знаки ввести легко. Надо лишь принять эту ось за координатную, точку O за начало координат и под d понимать координату точки M (рис. 240). Однако, если точки M расположены на плоскости или в пространстве, то нет никаких разумных оснований приписать их расстояниям d от точки O те или иные знаки, и потому для указанного расположения точек момент S_0 не рассматривают. Аналогичным образом, момент S_x вводят в рассмотрение только тогда, когда точки M расположены в плоскости, содержащей ось Ox. В этом случае проводят через O координатную ось Oy, перпендикулярную оси Ox, и под d понимают координату y точки M (рис. 241). При пространственном же расположении материальных точек момент S_x относительно оси не рассматривают. Напротив, момент S_{xy} в этом случае вводится весьма естественно, если под d понимать координату z точки M, отсчитанную вдоль оси Oz, перпендикулярной к плоскости xy (рис. 242).

Под моментом (статическим или инерции) материальной системы, состоящей из конечного числа точек, относительно точки (соответственно оси или плоскости) понимают сумму одноименных моментов всех точек системы. Если же массы распределены сплошным образом, то вместо сумм рассматривают интегралы. Как это делается, мы разъясним на примерах.

I. *Моменты линий.* Представим себе материальную кривую $y=f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Будем считать ее однородной с плотностью *), равной единице. Тогда масса любой дуги нашей кривой будет равна длине этой дуги. Возьмем на кривой точку (x, y) [ясно при этом, что координаты x и y связаны соотношением $y=f(x)$] и вырежем из кривой элементарный участок длины ds, содержащий точку (x, y). Если считать массу участка (равную ds) сосредоточенной в точке (x, y), то моменты участка („элементарные моменты"), очевидно, будут (рис. 243) таковы:

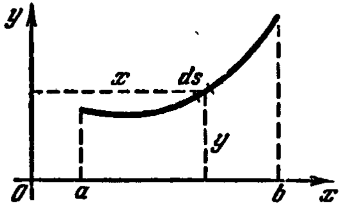


Рис. 243.

$$dS_x = y\,ds,\quad dS_y = x\,ds,\quad dJ_x = y^2\,ds,\quad dJ_y = x^2 ds,\quad dJ_0 = (x^2 + y^2)\,ds.$$

Моменты всей кривой получаются отсюда при помощи операции суммирования. Например, статический момент S_x относительно оси Ox будет даваться формулой

$$\boxed{S_x = \int_a^b y\,ds.} \tag{1}$$

При этом y надо заменить на $f(x)$, $ds = \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$, и пределы a и b суть пределы изменения абсциссы x.

В виде примера найдем S_x полуокружности

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \quad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Здесь

$$y_x' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}},\quad 1 + y_x'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2},\quad ds = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

и потому

$$S_x = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R\int_{-R}^{R} dx = 2R^2. \tag{2}$$

*) Когда масса распределена вдоль кривой, то под плотностью разумеется отношение массы дуги к ее длине.

12*

II. *Моменты плоских фигур.* В примерах этой группы мы считаем, что масса равномерно распределена по той или иной плоской фигуре, причем плотность (т. е. отношение массы фигуры к ее площади) равна единице.

1) Найти моменты S_a и J_a прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его основания.

Решение. Выделим из прямоугольника элементарную полоску (рис. 244), параллельную основанию, отстоящую от основания на расстояние z и имеющую ширину dz. Масса полоски равна ее площади $a\,dz$, а расстояния от всех ее точек до основания равны z. Поэтому

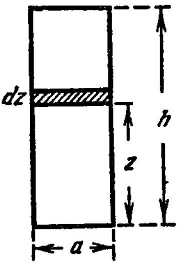


Рис. 244.

$$dS_a = az\,dz, \quad dJ_a = az^2\,dz.$$

Отсюда

$$S_a = \int_0^h az\,dz, \quad J_a = \int_0^h az^2\,dz,$$

т. е.

$$\boxed{S_a = \frac{1}{2}ah^2, \quad J_a = \frac{1}{3}ah^3.} \qquad (3)$$

2) Найти момент инерции J_0 круга радиуса R относительно его центра O.

Решение. Выделим из круга элементарное кольцо, содержащееся между окружностями радиусов r и $r+dr$, имеющими центр O (рис. 245). Площадь кольца равна $2\pi r\,dr$, все его точки удалены от O на расстояние r и потому

$$dJ_0 = 2\pi r^3\,dr,$$

откуда

$$J_0 = 2\pi\int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

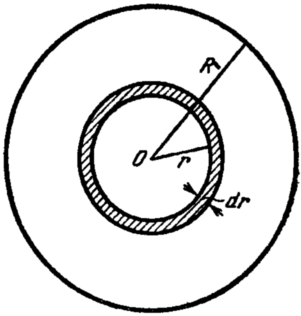


Рис. 245.

3) Криволинейная трапеция ограничена линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)>0$. Найти ее моменты S_x, S_y, J_x, J_y.

Решение. Выделим из трапеции элементарную полоску, параллельную оси Oy, отстоящую от нее на расстояние x и имеющую ширину dx (рис. 246).

Так как все точки полоски одинаково удалены от оси Oy, то (поскольку площадь полоски равна $y\,dx$)

$$dS_y = xy\,dx, \qquad dJ_y = x^2 y\,dx,$$

откуда

$$S_y = \int_a^b xy\,dx, \quad J_y = \int_a^b x^2 y\,dx.$$

Чтобы найти моменты полоски относительно оси Ox, примем полоску за прямоугольник. Тогда мы сможем использовать формулы (3), где надо только вместо h написать y, а вместо a — dx. Это дает

$$dS_x = \frac{1}{2} y^2 dx, \qquad dJ_x = \frac{1}{3} y^3 dx.$$

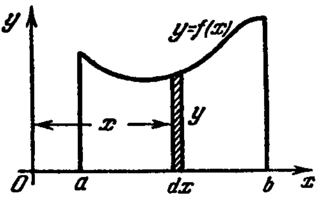


Рис. 246.

Остается просуммировать эти элементарные моменты. Например,

$$\boxed{S_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx.} \tag{4}$$

В виде примера найдем S_x полукруга, ограниченного снизу осью Ox, а сверху полуокружностью

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad (-R \leqslant x \leqslant R).$$

Формула (4) дает

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{2}{3} R^3. \tag{5}$$

III. *Моменты тел.* В примерах этой группы рассматриваются материальные тела. Мы предполагаем их однородными с плотностью *), равной единице.

1) Найти статический момент и момент инерции конуса относительно его основания.

Обозначим радиус основания и высоту конуса через R и H. Выделим из конуса элементарный диск, параллельный основанию, отстоящий от основания на расстояние x и имеющий толщину dx (рис. 247). Если радиус диска есть r, то из подобия треугольников

$$\frac{r}{R} = \frac{H - x}{H}.$$

---

*) Здесь плотность есть отношение массы тела к его объему.

Отсюда $r=\frac{R}{H}(H-x)$, и объем диска будет равен

$$\pi r^2\,dx=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-x)^2\,dx.$$

Все точки диска лежат на расстоянии x от основания конуса, и потому

$$dS=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-x)^2\,x\,dx,\qquad dJ=\pi\frac{R^2}{H^2}(H-x)^2\,x^2\,dx.$$

Стало быть,

$$S=\pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H(H-x)^2\,x\,dx,\quad J=\pi\frac{R^2}{H^2}\int_0^H(H-x)^2\,x^2dx,$$

т. е.

$$S=\frac{1}{12}\pi R^2H^2,\qquad J=\frac{1}{30}\pi R^2H^3. \tag{6}$$

2) Найти момент инерции конуса относительно его оси.

Выделим (рис. 248) из основания конуса элементарное кольцо, содержащееся между окружностями, имеющими центр в центре

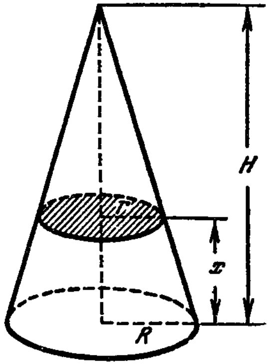


Рис. 247.

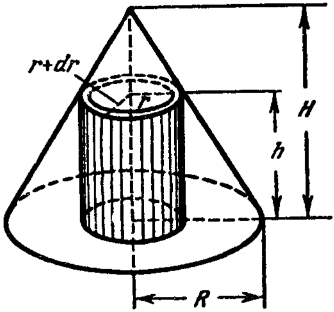


Рис. 248.

основания конуса и радиусы r и $r+dr$. Если рассмотреть цилиндрические поверхности, для которых эти окружности служат направляющими и образующие которых параллельны оси конуса, то между указанными поверхностями будет находиться полое элементарное тело. Объем этого тела равен $2\pi r\,dr\cdot h$, где h — высота тела. Из подобия треугольников

$$\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R},$$

откуда

$$h=\frac{H}{R}(R-r)$$

и

$$dV = 2\pi \frac{H}{R} r (R - r)\, dr.$$

Расстояния всех точек выделенного элементарного тела от оси конуса равны r и потому

$$dJ = 2\pi \frac{H}{R} r^3 (R - r)\, dr.$$

Значит,

$$J = 2\pi \frac{H}{R} \int_0^R r^3 (R - r)\, dr = \frac{1}{10} \pi R^4 H.$$

Вот другое решение той же задачи. Как мы видели, момент инерции круга радиуса R относительно его центра равен $\frac{1}{2}\pi R^4$. Если разбить конус на элементарные диски так, как это мы сделали в предыдущем примере, то момент инерции одного диска (толщины dx) относительно оси конуса будет равен $\frac{1}{2}\pi r^4 dx$ (ибо мы можем считать, что масса диска распределена по кругу равномерно). Но мы уже нашли, что

$$r = \frac{R}{H}(H - x).$$

Значит,

$$J = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{H^4} \int_0^H (H - x)^4\, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{H^4} \left[-\frac{(H - x)^5}{5} \right]_0^H = \frac{1}{10} \pi R^4 H.$$

3) Найти момент инерции шара радиуса R относительно его центра.

Выделим „элемент" шара, содержащийся между двумя концентрическими шаровыми поверхностями радиусов r и $r + dr$. Объем такого элемента равен площади $4\pi r^2$ шаровой поверхности, умноженной на его толщину dr.

Поскольку расстояния всех точек элемента от центра шара равны r, то $dJ = 4\pi r^4 dr$ и

$$J = \int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{4}{5} \pi R^5.$$

n° 2. Центр параллельных сил. Пусть в точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$ твердого тела приложены параллельные и одинаково направленные силы F_1, F_2, ..., F_n*).

---

*) Под F_k мы понимаем величину силы. Поскольку все силы направлены одинаково, векторный характер силы можно не учитывать.

Требуется найти их равнодействующую и точку ее приложения. Начнем с того, что сложим силы F_1 и F_2. Из школьного курса физики известно, что они имеют равнодействующую R'', параллельную им, направленную в ту же сторону, равную их сумме F_1+F_2 и приложенную к точке C'', лежащей на отрезке M_1M_2 и делящей его на части, обратно пропорциональные силам, т. е. так, что

$$\frac{M_1C''}{C''M_2}=\frac{F_2}{F_1}.$$

Используя формулы для деления отрезка в данном отношении*), находим выражение абсциссы x'' точки C'':

$$x''=\frac{x_1F_1+x_2F_2}{F_1+F_2}. \tag{7}$$

Теперь прибавим к уже найденной равнодействующей R'' третью силу F_3. Дело снова сводится к сложению двух сил. Как мы видели, их равнодействующая R''' им параллельна, направлена в ту же сторону, равна их сумме $R''+F_3=F_1+F_2+F_3$ и приложена к точке C''', делящей отрезок $C''M_3$ на части, обратно пропорциональные силам R'' и F_3. Согласно (7) абсцисса x''' точки C''' такова:

$$x'''=\frac{x''R''+x_3F_3}{R''+F_3}=\frac{\dfrac{x_1F_1+x_2F_2}{F_1+F_2}(F_1+F_2)+x_3F_3}{(F_1+F_2)+F_3},$$

т. е.

$$x'''=\frac{x_1F_1+x_2F_2+x_3F_3}{F_1+F_2+F_3}.$$

Добавляя теперь силу F_4, аналогичным образом найдем равнодействующую сил F_1, F_2, F_3, F_4 и абсциссу точки ее приложения. Продолжая это рассуждение, приходим к выводу, что наша система сил имеет равнодействующую, параллельную им, направленную в ту же сторону, равную их сумме и приложенную к точке $C(x_C, y_C, z_C)$, где

$$\boxed{x_C=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}F_k},\qquad y_C=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_ky_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}F_k},\qquad z_C=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}F_kz_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}F_k}.} \tag{8}$$

З а м е ч а н и я. 1) Как известно, силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия. Но тогда все

---

*) Они были выведены нами для точек, лежащих на плоскости xy. В гл. VIII мы увидим, что эти формулы сохраняются и в пространственном случае.

точки этой линии равноправны и неясно, чем же замечательна точка C, координаты которой даются формулами (8). Чтобы ответить на это, вообразим, что мы повернули все силы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ вокруг их точек приложения $M_1, M_2, \ldots, M_n$ (выбрав и закрепив эти последние произвольно на линиях действия сил) так, чтобы силы остались параллельны друг другу и по-прежнему направлены в одну сторону. Тогда и равнодействующая их повернется, но по-прежнему ее точкой приложения останется точка C, ибо формулы (8) не отражают, каково направление сил. Таким образом, точка C определяется двумя факторами: величинами сил F_k и тем, какие точки выбраны за их точки приложения M_k, но от направления сил C не зависит. В связи с этим точку C называют *центром параллельных сил* F_k (хотя следовало бы добавить: при выбранных точках их приложения). Если мы откажемся от предположения, что точки $M_1, M_2 \ldots, M_n$ взяты на одном и том же твердом теле, а будем считать их произвольными точками пространства, то ни о каком переносе сил F_k вдоль их линий действия говорить будет нельзя, но название „центр параллельных сил" для точки C, даваемой формулами (8), сохраняется.

2) Если, в частности, все точки M_k лежат в одной плоскости, то в той же плоскости лежит и точка C. Действительно, если взять эту плоскость за плоскость xy, то окажется $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, а тогда из (8) следует, что и $z_C = 0$.

n°3. Центр тяжести. Рассмотрим систему n материальных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n, y_n, z_n)$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Тогда веса этих точек представят собой систему параллельных и одинаково направленных сил. Центр C этих сил называется *центром тяжести* системы точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Координаты точки C даются формулами (8), в которых под F_k надо понимать вес точки M_k. Но вес точки M_k связан с ее массой m_k соотношением

$$F_k = m_k g,$$

где $g = 9{,}81 \frac{м}{сек^2}$ — ускорение, сообщаемое силой тяжести телам, свободно падающим вблизи земной поверхности. Подставляя $F_k = m_k g$ в третью из формул (8) и сокращая на g, находим

$$z_C = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

Заметим теперь, что $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k = M$ — масса всей рассматриваемой материальной системы, а $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k$ — статический момент S_{xy} этой системы относительно плоскости xy. Стало быть,

$$\boxed{z_C=\frac{S_{xy}}{M}.} \tag{9}$$

Такова координата z_C центра тяжести при пространственном распределении масс. Если же массы распределены на плоскости xy, то аналогичное рассуждение, примененное ко второй из формул (8), дает

$$\boxed{y_C=\frac{S_x}{M}.} \tag{10}$$

Из формул (9) и (10) следует, что

$$S_{xy}=Mz_C, \qquad S_x=My_C, \tag{11}$$

т. е.*)

а) *статический момент пространственной материальной системы относительно любой плоскости не изменится, если всю массу системы сосредоточить в ее центре тяжести;*

б) *статический момент плоской материальной системы относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости системы, не изменится, если всю массу системы сосредоточить в ее центре тяжести.*

С помощью предельного перехода формулы (9) и (10), а значит и (11), распространяются на случай сплошного распределения массы.

Применим установленные общие результаты к частным случаям.

I. *Центр тяжести плоской кривой.* Мы видели в n° 1, что в случае однородной плоской кривой, плотность которой равна единице, будет

$$S_x=\int_a^b y\,ds.$$

Поскольку масса кривой равна ее длине, $M=s$, то формула (10) дает

$$\boxed{y_C=\frac{1}{s}\int_a^b y\,ds.} \tag{12}$$

Пример. Найти ординату центра тяжести полуокружности**) $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

---

*) Ведь любую плоскость можно принять за плоскость xy. Точно так же в случае плоской материальной системы любую ось, лежащую в плоскости системы, можно принять за Ox.

**) По соображениям симметрии ясно, что $x_C=0$.

В нашем случае $s=\pi R$, а [по формуле (2)] $S_x=2R^2$. Значит,

$$y_C=\frac{2}{\pi}R\cong 0,637R. \qquad (13)$$

Интересно сопоставить формулу (12) с формулой (19) из § 3, дающей выражение площади поверхности, образованной вращением кривой $y=f(x)>0$ вокруг оси Ox. Формула (19) имеет вид

$$L=2\pi\int_a^b y\,ds.$$

Стало быть,

$$y_C=\frac{1}{s}\cdot\frac{L}{2\pi},$$

откуда

$$\boxed{L=s\cdot 2\pi y_C.} \qquad (14)$$

Формулой (14) выражается замечательная

Первая теорема Паппа — Гульдина. *Площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, равна длине вращающейся кривой, умноженной на путь, проходимый ее центром тяжести.*

Замечания. 1) Условие, что кривая не пересекает ось вращения, существенно. Его приходится ставить потому, что формула для L установлена лишь при $f(x)>0$.

2) Впервые теорему нашел александрийский математик Папп (3-й век н. э.). В эпоху средневековья многие достижения античной науки были в Европе утрачены (в значительной степени они сохранились в мусульманской культуре). В 17-м веке теорему вновь открыл швейцарский математик Гульдин.

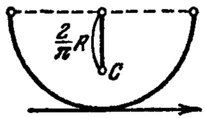


Рис. 249.

Суть теоремы в том, что если из трех величин L, y_C, s две известны, то третья находится сразу.

Примеры. 1) Если полуокружность вращается вокруг своего диаметра, то образуемая ею шаровая поверхность имеет площадь $L=4\pi R^2$. Кроме того, $s=\pi R$. Стало быть,

$$4\pi R^2=\pi R\cdot 2\pi y_C,$$

и мы снова получаем формулу (13).

2) Пусть та же полуокружность вращается вокруг касательной, параллельной диаметру (рис. 249). Здесь центр тяжести опишет

окружность радиуса $\left(1-\frac{2}{\pi}\right)R$. Стало быть, площадь поверхности вращения будет

$$L=\pi R\cdot 2\pi\left(1-\frac{2}{\pi}\right)R=2\pi(\pi-2)R^2.$$

II. *Центр тяжести криволинейной трапеции.* Если масса равномерно распределена с плотностью, равной единице, по трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)>0$, то ее статические моменты S_x и S_y выражаются интегралами*)

$$S_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,\qquad S_y=\int_a^b xy\,dx. \tag{15}$$

Масса трапеции равна ее площади F (которую тоже можно найти при помощи интегрального исчисления). Все это позволяет найти центр тяжести трапеции. Ордината его дается формулой (10) (где M заменяется на F), а абсцисса — аналогичной формулой

$$x_C=\frac{S_y}{F}. \tag{16}$$

Примеры. 1) Найти ординату центра тяжести полукруга, ограниченного осью Ox и полуокружностью $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

У нас $M=F=\frac{1}{2}\pi R^2$, а $S_x=\frac{2}{3}R^3$ мы нашли в n°1 [см. (5)]. Значит,

$$y_C=\frac{S_x}{F}=\frac{4}{3\pi}R\cong 0{,}424R.$$

Читатель заметит существенное отличие от формулы (13), дающей центр тяжести полуокружности.

2) Найти центр тяжести фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=\sin x$.

---

*) Выше мы получили первую из этих формул, применяя к элементарной полоске выражение статического момента для прямоугольника. Теперь можно дать и другой вывод формулы: центр тяжести полоски находится в ее середине. Масса полоски равна ее площади $y\,dx$. Значит, $dS_x=(y\,dx)\frac{y}{2}=\frac{1}{2}y^2\,dx$ (мы пользуемся тем, что статический момент можно подсчитывать, сосредоточивая массу в ее центре тяжести).

Здесь

$$F=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=1,\qquad S_x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{8},$$

$$S_y=\int_0^{\pi/2}x\sin x\,dx=1.$$

Значит,

$$x_C=\frac{S_y}{F}=1,\qquad y_C=\frac{S_x}{F}=\frac{\pi}{8}.$$

Сопоставим формулы

$$S_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,\qquad V=\pi\int_a^b y^2\,dx,$$

вторая из которых дает объем тела, образованного вращением нашей трапеции вокруг оси Ox. Ясно, что

$$S_x=\frac{1}{2\pi}V.$$

Подставляя это значение S_x в равенство

$$y_C=\frac{S_x}{F},$$

находим

$$y_C=\frac{V}{2\pi F},$$

откуда

$$\boxed{V=F\cdot 2\pi y_C.}\tag{17}$$

Это есть

Вторая теорема Паппа — Гульдина. *Объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси, равен площади фигуры, умноженной на путь, проходимый ее центром тяжести.*

Условие, что фигура не пересекает ось вращения, существенно. Оно было использовано, когда мы применяли первую из формул (15), выведенных для случая $y=f(x)>0$.

Как и первая теорема тех же авторов, настоящая теорема находит свое применение тогда, когда из трех величин V, F, y_C две известны.

Например, если полукруг вращается вокруг своего диаметра, то $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, $F=\frac{1}{2}\pi R^2$, и формула (17) дает $y_C=\frac{4}{3\pi}R$.

III. *Центры тяжести тел.* Если тело T однородно и его плотность равна единице, то его масса равна объему, $M=V$, и формула (9) дает

$$z_C = \frac{S_{xy}}{V}. \tag{18}$$

Например, в n° 1 мы нашли, что для конуса, основание которого находится на плоскости xy, будет [формула (6)]

$$S_{xy} = \frac{1}{12}\pi R^2 H^2.$$

Так как $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, то

$$\boxed{z_C = \frac{1}{4} H,}$$

т. е. *центр тяжести конуса лежит на его оси*) и отстоит от основания на* $\frac{1}{4}$ *высоты.*

В качестве другого примера рассмотрим полушар радиуса R, считая диаметральную плоскость совпадающей с плоскостью xy. Выделяя из полушара элементарный диск радиуса r (рис. 250), легко найдем

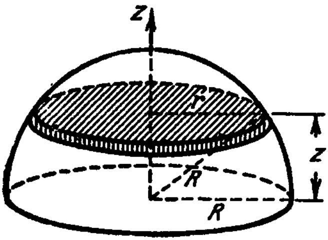


Рис. 250.

$$dS_{xy} = (\pi r^2\,dz)\,z = \pi(R^2 - z^2)\,z\,dz.$$

Отсюда

$$S_{xy} = \pi\int_0^R (R^2 z - z^3)\,dz = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

Так как $V = \frac{2}{3}\pi R^3$, то из (18) получаем

$$z_C = \frac{3}{8} R.$$

§ 5. Приближенное вычисление определенных интегралов

n° 1. Постановка вопроса. Формула Ньютона — Лейбница сводит вычисление определенного интеграла от какой-либо функции к нахождению ее первообразной. Значит, если эта последняя (т. е. первообразная) не элементарна, то надо вычислять определенный интеграл как-то иначе. Иногда удается сделать это „в обход“, минуя нахождение неопределенного интеграла.

---

*) Это ясно из соображений симметрии.

Пример. Пусть

$$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Здесь как раз

$$\int \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

не берется в конечном виде. Чтобы все же найти интеграл I, сделаем в нем подстановку $x=\pi-z$, что приводит его к виду

$$I=\int_0^\pi \frac{(\pi-z)\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz=\pi\int_0^\pi \frac{\sin z\,dz}{1+\cos^2 z}-I.$$

Значит,

$$2I=\pi\int_0^\pi \frac{\sin z\,dz}{1+\cos^2 z}=-\pi\int_0^\pi \frac{d(\cos z)}{1+\cos^2 z}=-\pi\,[\operatorname{arctg}(\cos z)]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2},$$

откуда

$$I=\frac{\pi^2}{4}.$$

Ясно, однако, что здесь мы имеем дело с исключительным случаем. Вообще же говоря, определенный интеграл от функции, имеющей неэлементарную первообразную, приходится вычислять при помощи той или иной *приближенной* формулы. Таких формул существует очень много, но мы познакомим читателя лишь с двумя: формулой трапеций и формулой Симпсона.

n° 2. Формула трапеций. Пусть

$$I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, которую мы для наглядности будем предполагать положительной. Тогда I представит собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$. Выберем какое-нибудь натуральное число n и разложим $[a, b]$ на n *равных* отрезков при помощи точек $x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b$. Прямые $x=x_k$ разбивают интересующую нас криволинейную трапецию на n полосок. Примем каждую из этих полосок за обыкновенную прямолинейную трапецию (рис. 251, где $n=5$). Тогда площадь первой слева полоски будет приближенно выражаться числом

Рис. 251.

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0)=\frac{y_0+y_1}{2}\cdot\frac{b-a}{n},$$

ибо основания трапеции, за которую мы принимаем полоску, равны $f(x_0)=y_0$ и $f(x_1)=y_1$, а высота ее $x_1-x_0=\frac{b-a}{n}$. Аналогично площади дальнейших полосок выразятся числами

$$(y_1+y_2)\frac{b-a}{2n},\quad (y_2+y_3)\frac{b-a}{2n},\ \ldots,\ (y_{n-1}+y_n)\frac{b-a}{2n}.$$

Значит, для нашего интеграла получается формула

$$I\cong\frac{b-a}{2n}[y_0+2(y_1+\ldots+y_{n-1})+y_n].$$

Полагая для краткости*)

$$y_0+y_n=Y_{\text{кр}},\quad y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}=Y_{\text{пром}},$$

получим окончательно**)

$$\boxed{\int\limits_a^b y\,dx\cong\frac{b-a}{2n}(Y_{\text{кр}}+2Y_{\text{пром}}).}\tag{1}$$

Эта приближенная формула и называется *формулой трапеций*. Она оказывается тем более точной, чем больше взятое нами число n.

Пример. Найти

$$I=\int\limits_0^1 x^2\,dx.\tag{2}$$

Точное значение этого интеграла находится легко:

$$I=\left[\int x^2dx\right]_0^1=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$$

Мы, однако, „притворимся", что интегрировать не умеем, и найдем I по формуле трапеций. Выбор числа n зависит от нас. Возьмем $n=5$. Так как $y=x^2$, $a=0$, $b=1$, то вычисления можно вести при помощи таблицы

x	y
0	0
0,2	0,04
0,4	0,16
0,6	0,36
0,8	0,64
1	1

$$Y_{\text{кр}}=0+1=1,$$

$$Y_{\text{пром}}=0{,}04+0{,}16+0{,}36+0{,}64=1{,}2,$$

$$Y_{\text{кр}}+2Y_{\text{пром}}=3{,}4.$$

Значит, $I=\frac{3{,}4}{10}=0{,}34$.

Поскольку точное значение интеграла равно 0,3333..., то абсолютная ошибка меньше 0,007, а относительная

*) Значки при Y означают „крайние" и „промежуточные".
**) Сделанное выше предположение $f(x)>0$ несущественно.

меньше $\frac{0{,}007}{1/3}=0{,}021$, т. е. меньше $2{,}1\%$. Во многих технических вопросах эта точность достаточна.

На практике, однако, точное значение интеграла бывает неизвестно (ибо иначе и считать его незачем). Как же оценить достигнутую при использовании формулы (1) точность? Для этого обычно увеличивают n и заново вычисляют интеграл. Если результаты в пределах принятой точности совпадут, то это и свидетельствует чаще всего о том, что достигнута нужная точность.

x	y
0	0
0,1	0,01
0,2	0,04
0,3	0,09
0,4	0,16
0,5	0,25
0,6	0,36
0,7	0,49
0,8	0,64
0,9	0,81
1	1

Возвращаясь к нашему интегралу (2), вычислим его по формуле (1) при $n=10$:

$$Y_{\text{кр}}=1, \quad Y_{\text{пром}}=2{,}85,$$
$$Y_{\text{кр}}+2Y_{\text{пром}}=6{,}7,$$
$$I=\frac{6{,}7}{20}=0{,}335.$$

Сравнивая значения I, отвечающие $n=5$ и $n=10$,

$$I_5=0{,}340, \quad I_{10}=0{,}335,$$

видим, что они отличаются на 0,005.

Принимая, что истинное значение интеграла хотя бы грубо совпадает с найденными числами (т. е. принять, например, $I=0{,}3$), видим, что относительную ошибку при замене I_5 на I_{10} можно считать равной $\frac{0{,}005}{0{,}3}<0{,}02=2\%$. Если тот практический расчет, ради которого нам потребовалось найти интеграл (2), ведется с точностью, допускающей подобную ошибку, то мы можем удовлетвориться найденным значением I, причем лучше, разумеется, принять за I значение $I_{10}=0{,}335$. В нашем случае, когда точное значение $I=\frac{1}{3}=0{,}333\ \ldots$, абсолютная ошибка будет $<0{,}002$, а относительная $<0{,}006$, т. е. $<0{,}6\%$.

В ответственных случаях рекомендуется производить еще одну контрольную проверку.

Замечание. В более полных курсах доказывается, что абсолютная ошибка формулы (1) не больше, чем

$$K\frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

где K — наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

n° 3. Малая формула Симпсона. В тех случаях, когда линия $y=f(x)$ между $x=a$ и $x=b$ мало изогнута, интеграл

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

приближенно выражается очень простой формулой. Для ее вывода мы, как обычно, будем считать $f(x)$ положительной и будем искать площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 252). Для этого разделим отрезок $[a, b]$ точкой $c=\frac{a+b}{2}$ пополам и в точке $C(c, f(c))$ проведем касательную к линии $y=f(x)$. После этого разделим $[a, b]$ точками p и q на 3 равные части и проведем через них прямые $x=p$ и $x=q$. Пусть P и Q — точки пересечения этих прямых с упомянутой касательной. Соединив A с P и B с Q, получим 3 прямолинейные трапеции

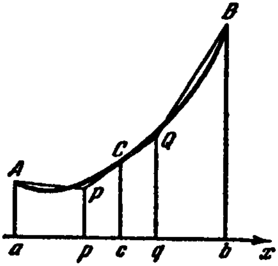


Рис. 252.

$$aAPp,\ pPQq,\ qQBb.$$

Интересующая нас приближенная формула получится, если мы площадь криволинейной трапеции $aABb$ заменим суммой площадей этих трех трапеций, т. е. положим

$$I\cong\frac{aA+pP}{2}\cdot\frac{b-a}{3}+\frac{pP+qQ}{2}\cdot\frac{b-a}{3}+\frac{qQ+bB}{2}\cdot\frac{b-a}{3},$$

откуда

$$I\cong\frac{b-a}{6}[aA+2(pP+qQ)+bB]. \tag{3}$$

Заметим теперь, что

$$aA=f(a)=y_a,\quad bB=f(b)=y_b.$$

Отрезки же pP и qQ не являются ординатами точек линии $y=f(x)$, ибо P и Q лежат не на ней, а на касательной к ней. Однако ведь нам нужны не сами эти отрезки, а их сумма, которую найти просто, ибо средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований, и потому

$$cC=f(c)=y_c=\frac{pP+qQ}{2}.$$

Значит, $pP+qQ=2y_c$, и формула (3) принимает вид

$$\boxed{\int_a^b y\,dx\cong\frac{b-a}{6}(y_a+4y_c+y_b).} \tag{4}$$

Напомним, что здесь $c=\frac{a+b}{2}$. Формула (4) называется *малой формулой Симпсона.*

Замечательным образом *эта формула оказывается абсолютно точной всякий раз, когда* (x) — *многочлен ниже четвертой* *степени.* Действительно, такой многочлен имеет вид

$$f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D,$$

и надо лишь проверить, что формула верна для каждого слагаемого. Остановимся для примера на первом слагаемом. Так как коэффициент A можно вынести и за знак интеграла и за скобки в правой части формулы (4), то дело сводится к интегралу

$$\int_a^b x^3\,dx=\frac{b^4-a^4}{4}.$$

Для этого интеграла $y=x^3$, и потому $y_a=a^3$, $y_b=b^3$. Кроме того,

$$y_c=\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8}.$$

Значит, правая часть формулы (4) имеет вид

$$\frac{b-a}{6}(y_a+4y_c+y_b)=\frac{b-a}{6}\cdot\frac{3a^3+3a^2b+3ab^2+3b^3}{2}=\frac{b^4-a^4}{4},$$

чем и доказано наше утверждение.

Для функций более сложной природы формула (4) будет только приближенной, но из самого ее вывода видно, что для мало изогнутой линии $y=f(x)$ она обладает хорошей точностью.

Пример. Если

$$I=\int_0^1 x^4\,dx,$$

то $y=x^4$, $a=0$, $b=1$, $c=0{,}5$, откуда

$$y_a=0,\quad y_c=0{,}0625,\quad y_b=1,$$

и формула (4) дает

$$I=\frac{1{,}25}{6}=0{,}208. \tag{5}$$

На самом деле $I=0{,}2$, и потому абсолютная ошибка равенства (5) равна 0,008, а относительная $0{,}04=4\%$.

n° 4. Выражение объема тела при помощи формулы Симпсона. Рассмотрим тело высоты h. Пусть его основание горизонтально (рис. 253). Обозначим через F_x площадь сечения тела горизонтальной плоскостью, отстоящей на расстоянии x от основания. Как известно [§ 3, формула (8)], объем V нашего тела есть

$$V=\int_0^h F_x\,dx.$$

Применяя формулу (4), найдем приближенно

$$V\cong\frac{h}{6}\left(F_0+4F_{\frac{h}{2}}+F_h\right).$$

Более выразительная запись этой формулы такова:

$$\boxed{V \cong \frac{h}{6}\left(F_{\text{нижн}} + 4F_{\text{ср}} + F_{\text{верхн}}\right).} \tag{6}$$

Этой формулой часто пользуются на практике (например, при подсчете кубатуры котлована). Во многих случаях она абсолютно точна. Например, для конуса или шара формула (6) дает точные значения объема *). Действительно, если радиус шара равен R, то

$$h = 2R,$$

$$F_{\text{нижн}} = F_{\text{верхн}} = 0, \quad F_{\text{ср}} = \pi R^2$$

и (6) дает

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Для конуса подсчет аналогичен.

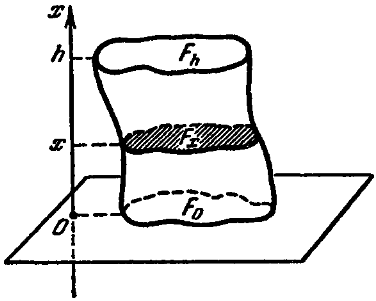


Рис. 253.

п° 5. Приближенное спрямление эллипса. Поставим вопрос о выражении длины s эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

через его полуоси a и b. Оказывается, что s не является элементарной функцией a и b, и потому речь может идти лишь о приближенной формуле. Таких формул существует много, но мы выведем только одну из них. Для этого напишем параметрические уравнения эллипса (7)

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t. \tag{8}$$

Чтобы точка (x, y) описала весь эллипс, в формулах (8) надо менять t от 0 до 2π. Мы ограничимся нахождением длины той дуги эллипса, которая лежит в первом координатном угле. Эта дуга описывается точкой (x, y) при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Стало быть,

$$\frac{1}{4}s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Этот интеграл **) не элементарен (потому-то s и не будет элементарной функцией a и b). Применим к нему формулу (4). Здесь роль чисел a, b, c, входящих в эту формулу, играют 0, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, а подынтегральная функция есть

$$z = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.$$

---

*) Это является следствием того, что для конуса и шара F_x является квадратичной функцией x, а формула (4) верна для многочленов даже третьей степени (как это было показано на стр. 371).

**) Из-за его происхождения этот интеграл называют *эллиптическим*.

Поэтому

$$z_0=b,\quad z_{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},\ z_{\frac{\pi}{2}}=a,$$

откуда

$$\frac{1}{4}s\cong\frac{\pi}{12}\left(b+4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+a\right)$$

и окончательно

$$\boxed{s\cong\frac{\pi}{3}\left(a+4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+b\right).}\tag{9}$$

Чтобы отдать себе отчет в качестве этой приближенной формулы, рассмотрим два частных случая, когда известно точное значение s. Прежде всего, при $a=b$, когда эллипс вырождается в окружность радиуса a, формула (9) дает точный результат $s=2\pi a$. Пусть теперь $b=0$. Тогда эллипс вырождается в отрезок $[-a, a]$ оси Ox, проходимый дважды (чтобы лучше это понять, следует представить себе эллипс (7) при очень малом $b>0$). Стало быть, точное значение s равно $4a$. Формула же (9) дает

$$s\cong\frac{\pi a}{3}(1+2\sqrt{2}).$$

Принимая $\pi=3{,}1416$, $\sqrt{2}=1{,}4142$, получаем $s\cong 4{,}0091a$. Стало быть, здесь абсолютная ошибка $<0{,}01a$, а относительная $<0{,}25\%$.

n° 6. Большая формула Симпсона. Малая формула Симпсона дает интеграл с хорошей точностью тогда, когда график подынтегральной функции мало изогнут. Напротив, для случая, изображенного на рис. 254, формула явно непригодна, ибо дает для нарисованной площади значение 0. Однако если отрезок $[a, b]$ разбить на части $[a, c]$ и $[c, b]$ и к каждой из них применить формулу (4), то получится уже приемлемый результат.

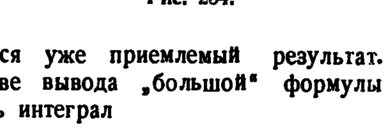


Рис. 254.

Указанная идея лежит в основе вывода „большой" формулы Симпсона. Именно, желая вычислить интеграл

$$I=\int_a^b f(x)\,dx,$$

выберем какое-либо четное число n и разложим $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

Тогда интеграл представится в виде суммы

$$I=\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

Применим к каждому слагаемому справа малую формулу Симпсона (4). Если учесть, что в каждом интеграле длина промежутка интегрирования равна

$$2\frac{b-a}{n}$$

(ибо отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... имеется n, а промежутки интегрирования вдвое длиннее), и положить $f(x_k)=y_k$, то мы получим

$$I\cong\frac{b-a}{3n}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{b-a}{3n}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{b-a}{3n}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

или

$$I\approx\frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})].$$

Полагая для краткости

$$y_0+y_n=Y_{\text{кр}},$$
$$y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}=Y_{\text{неч}},$$
$$y_2+y_4+\ldots+y_{n-2}=Y_{\text{чет}},$$

находим окончательно

$$\boxed{\int_a^b y\,dx\cong\frac{b-a}{3n}(Y_{\text{кр}}+4Y_{\text{неч}}+2Y_{\text{чет}}).} \tag{10}$$

Это и есть „большая формула Симпсона". Ее точность тем выше, чем больше n. Качество этой формулы лучше, чем формулы трапеций, ибо при одном и том же n (т. е. при одной и той же затрате вычислительной работы) она дает бóльшую точность.

Пример. Применим (10) к интегралу

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

взяв $n=4$. Здесь $y=\frac{1}{1+x^2}$ и согласно нижеследующей таблице

x	y
0	1
$^1/_4$	$\frac{16}{17}=0{,}9412$
$^1/_2$	0,8
$^3/_4$	0,64
1	0,5

$$Y_{\text{кр}}=1{,}5,\quad Y_{\text{неч}}=1{,}5812,\quad Y_{\text{чет}}=0{,}8,$$
$$Y_{\text{кр}}+4Y_{\text{неч}}+2Y_{\text{чет}}=9{,}4248.$$

Отсюда (поскольку $n=4$)

$$\frac{\pi}{4}\cong\frac{1}{12}\cdot 9{,}4248$$

и

$$\pi\cong\frac{9{,}4248}{3}=3{,}1416.$$

Мы видим, что формула (10) дала средство вычислить с хорошей точностью (ведь $\pi=3{,}141592\ldots$) такую важную постоянную, как π. Если бы мы увеличили n, то получили бы π с большей точностью. Что касается контроля, то здесь следует повторить сказанное в конце n° 2 по поводу формулы трапеций.

Замечание. В более полных курсах доказывается, что ошибка формулы (10) не больше чем

$$M\frac{(b-a)^5}{180n^4},$$

где

$$M=\max|f^{(4)}(x)|.$$

Выше мы отмечали, что ошибка формулы трапеций оценивается числом

$$K\frac{(b-a)^3}{12n^2}\ [K=\max|f''(x)|].$$

Так как n^4 растет гораздо быстрее, чем n^2, то этим и объясняется, что формула Симпсона точнее формулы трапеций.

§ 6. Несобственные интегралы

n° 1. Интегралы по бесконечному промежутку. До сих пор мы изучали интегралы

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

по конечному промежутку, предполагая функцию $f(x)$ непрерывной *). Иногда приходится отказываться от одного (или обоих!) из этих предположений. Здесь мы остановимся на понятии интеграла по бесконечному промежутку.

Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$. Тогда для любого $B > a$ существует интеграл

$$\int_a^B f(x)\,dx.$$

Предел (конечный или бесконечный, но определенного знака) этого интеграла, когда $B \to +\infty$, называется *несобственным интегралом* и обозначается через

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

*) Или кусочно непрерывной, но во всяком случае ограниченной.

Примеры.

1) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_0^B \cos x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty} (\sin B)$ — не существует!

2) $\int\limits_0^{+\infty} 2x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_0^B 2x\,dx = \lim\limits_{B\to+\infty} (B^2) = +\infty.$

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 1.$

В тех случаях, когда интеграл (1) существует и конечен, говорят, что он *сходится*. Если же он бесконечен или вовсе не существует, то говорят, что он *расходится*. Так, интегралы $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty} 2x\,dx$ расходятся *), а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится.

Если функция $f(x)$ положительна, то интеграл

$$\int\limits_a^B f(x)\,dx$$

возрастает вместе с B. Действительно, если $B' > B$, то

$$\int\limits_a^{B'} f(x)\,dx = \int\limits_a^B f(x)\,dx + \int\limits_B^{B'} f(x)\,dx > \int\limits_a^B f(x)\,dx,$$

потому что $\int\limits_B^{B'} f(x)\,dx > 0$ (при нормальном порядке пределов интегрирования интеграл от положительной функции положителен). Всякая возрастающая переменная имеет предел, конечный или равный $+\infty$. Значит, при $f(x) > 0$ интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

заведомо имеет (конечное или бесконечное) числовое значение.

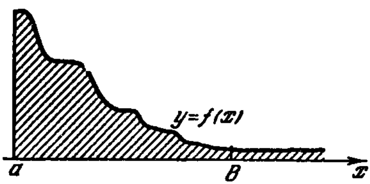


Рис. 255.

Геометрически он представляет собой площадь фигуры, ограниченной слева прямой $x = a$, снизу осью Ox, сверху линией $y = f(x)$ и неограниченно простирающейся направо (рис. 255). Из этого замечания

*) Первый из них вообще не имеет никакого числового значения, а второй равен $+\infty$.

становится ясно, почему

$$\int_0^{+\infty} 2x\,dx = +\infty,$$

а

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Ведь во втором случае линия $y=\frac{1}{x^2}$ имеет ось Ox своей асимптотой (рис. 256), и потому заштрихованная фигура, несмотря на свое бесконечное протяжение, все же имеет конечную площадь. Надо заметить, впрочем, что дело не всегда обстоит таким образом. Например,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty,$$

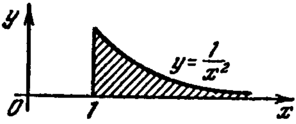


Рис. 256.

хотя гипербола $y=\frac{1}{x}$ тоже имеет ось Ox асимптотой. Различие в этих примерах объясняется тем, что $\frac{1}{x^2}$ гораздо быстрее стремится к нулю при $x\to+\infty$, чем $\frac{1}{x}$.

Пусть $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)\,dx = \lim_{B\to+\infty} [F(B)-F(a)].$$

Если ввести обозначение *) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, то мы приходим к аналогу формулы Ньютона—Лейбница

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty)-F(a).} \qquad (2)$$

Формулу (2) записывают также в виде

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = [F(x)]_a^{+\infty}.$$

*) Разумеется, оно окажется бессодержательным, если этот предел не существует. Например, символ $\sin(+\infty)$ не имеет смысла.

Наряду с интегралом (1) рассматривают также интегралы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)\,dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)\,dx\ ^{*)}.$$

Для этих интегралов формула (2) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = E(b) - F(-\infty), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(-\infty),$$

где $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

Примеры. 1) Пусть вдоль оси Ox равномерно с плотностью, равной 1, распределена масса, а в точке $P(0, 1)$ сосредоточена масса m. Найти силу F притяжения этой массы осью Ox.

Решение. По соображениям симметрии сила F направлена вдоль оси Oy к началу координат. Выделим из оси Ox элементарный отрезок $[x, x+dx]$ (рис. 257). По закону Ньютона сила, с которой этот отрезок притягивает массу m, равна

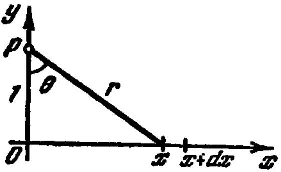


Рис. 257.

$$\frac{m\,dx}{r^2} = \frac{m\,dx}{1+x^2}.$$

Проекция этой силы на отрицательное направление оси Oy получается умножением величины силы на косинус угла θ между силой и этим направлением, т. е. на $\frac{1}{r}$. Значит,

$$dF = \frac{m\,dx}{r^3} = \frac{m\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Отсюда

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

---

*) Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ иногда определяют как сумму

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Это определение равносильно данному в тексте.

Положим $x=\operatorname{tg}\theta$. Тогда (это отчетливо видно из рис. 257) θ меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Кроме того,

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^3}}=\frac{1}{\sqrt{\sec^6\theta}}=\cos^3\theta,\quad dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Значит,

$$F=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} m\cos\theta\,d\theta=2m.$$

2) Найти силу, с которой масса m из предыдущего примера притягивается массой, расположенной на полуоси $0\leqslant x<+\infty$.

Здесь надо рассмотреть проекции силы F на обе оси. Из решения предыдущего примера ясно, что $F_y=m$. Кроме того,

$$dF_x=\frac{m\,dx}{1+x^2}\cdot\sin\theta=\frac{mx\,dx}{(1+x^2)^{3/2}},$$

откуда

$$F_x=m\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Так как

$$\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}d(1+x^2)=-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C,$$

то

$$F_x=m\left[\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^{+\infty}=m.$$

Таким образом, сила F равна $m\sqrt{2}$ и образует с отрицательным направлением оси Oy угол 45°, т. е. она направлена в точку $(1, 0)$ оси Ox.

3) Мы уже видели, что площадь фигуры, ограниченной линиями $x=1$, $y=0$, $y=\frac{1}{x}$, бесконечна. Интересно, что объем тела, образованного вращением этой фигуры вокруг оси Ox, конечен, так как он равен

$$V=\pi\int_1^{+\infty}y^2\,dx=\pi\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\pi.$$

n°2. Интегралы от неограниченных функций. Допустим теперь, что отрезок $[a, b]$ конечен, но функция $f(x)$ уже не ограничена на нем, а стремится к бесконечности при приближении x к одной из нескольких „особых" точек c_1, c_2, ... Пусть сначала имеется только одна особая точка, и это есть левый конец $x=a$ отрезка $[a, b]$. Во всех остальных точках $[a, b]$ функцию $f(x)$ мы считаем непрерывной, а при $x \to a$ пусть $f(x) \to \infty$.

Возьмем между a и b точку α. На отрезке $[\alpha, b]$ наша $f(x)$ непрерывна и имеет интеграл

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx.$$

Предел

$$\lim_{\alpha \to a+0} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \qquad (3)$$

называется ***несобственным интегралом*** и обозначается обычным символом

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Разумеется, этот предел может вовсе не существовать или быть бесконечным. В этих случаях говорят, что интеграл (4) расходится. Если же предел (3) существует и конечен, то интеграл (4) сходится.

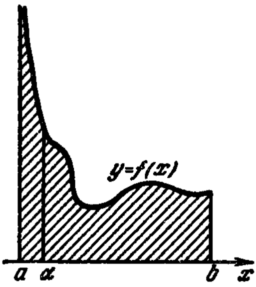


Рис. 258.

Примеры.

1) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \to 0} (-\ln \alpha) = +\infty.$

2) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to 0} \int_{\alpha}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to 0} (2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2.$

Если $f(x) > 0$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty$, то график функции $f(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 258. Интеграл (4) геометрически представит собой площадь заштрихованной фигуры.

Аналогично рассматривается случай, когда $f(x)$ непрерывна во всех точках $[a, b]$, кроме точки $x=b$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Тогда

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b-0} \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Если особыми точками являются обе точки a и b, то интеграл

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (4)$$

определяется как сумма *)

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

где c — любая точка, лежащая между a и b.

Пусть, наконец, $f(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$, кроме точек $c_1<c_2<\ldots<c_n$, лежащих между a и b, в которых она обращается в бесконечность (т. е. $f(x)\to\infty$ при $x\to c_i$). Допустим еще возможность обращения $f(x)$ в бесконечность в одной (или обеих) из точек a и b. Тогда символом (4) обозначается сумма

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx+\ldots+\int_{c_n}^b f(x)\,dx.$$

Надо заметить, что в то время как сам символ $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ указывает, что мы имеем дело с несобственным интегралом, символ (4) (когда a и b конечны) ничем не отличается от обозначения обыкновенного определенного интеграла. Если (4) представляет собой сходящийся интеграл, то никаких неприятностей от этого несовершенства обозначений произойти не может, но в случае, когда (4) расходится, возможны недоразумения.

Пример. Пусть

$$I=\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}. \tag{5}$$

Так как

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C,$$

то по формуле Ньютона — Лейбница

$$I=\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1}=-2,$$

что, однако, явно нелепо, поскольку при нормальном порядке пределов интеграл от положительной функции должен быть положителен. Ошибка произошла от незаконного применения формулы Ньютона — Лейбница к расходящемуся несобственному интегралу (5). Действительно, подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ обращается

*) Эта сумма конечна, если конечны оба слагаемых. Кроме того, мы считаем, что $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$, а выражение $(+\infty)+(-\infty)$ считаем бессмысленным. Наконец, если p конечно, то $(+\infty)+p=+\infty$, $(-\infty)+p=-\infty$.

в бесконечность при $x=0$. Значит, (5) надо находить как сумму $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$. Но

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to-0}\int\limits_{-1}^{\beta}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to-0}\left(\frac{-1}{\beta}-1\right)=+\infty.$$

Аналогично и $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=+\infty$. Значит, $I=+\infty$, а вовсе не -2.

Покажем, что несобственные интегралы от неограниченных функций встречаются в конкретных вопросах. Пусть, например, требуется найти длину полуокружности

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\quad(-R\leqslant x\leqslant R).$$

Здесь

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

и потому

$$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Стало быть,

$$s=\int\limits_{-R}^{+R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Но это интеграл **несобственный**, поскольку подынтегральная функция обращается в бесконечность при $x=\pm R$. Никакого неудобства от этого не проистекает, так как полученный интеграл сходится. В самом деле,

$$\int\limits_{0}^{R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\lim_{\beta\to R-0}\int\limits_{0}^{\beta}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=R\lim_{\beta\to R}\left(\arcsin\frac{\beta}{R}\right)=R\arcsin 1=\frac{\pi R}{2}.$$

Аналогично

$$\int\limits_{-R}^{0}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{\pi R}{2},$$

и потому $s=\pi R$, что соответсгвует действительности. Заметим, что и выше (стр. 348) при нахождении длины астроиды мы использовали (сходящийся!) несобственный интеграл.

ГЛАВА VII

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определители 2-го порядка

n° 1. Определения. В ряде вопросов математики используются некоторые специальные выражения, называемые *определителями* (или *детерминантами*). Простейшие из них — это так называемые „определители 2-го порядка". Покажем, как эти определители возникают при решении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=r_1,\\ a_2x+b_2y&=r_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы исключить неизвестное y, умножим второе уравнение на b_1 и вычтем то, что получится, из первого уравнения, умноженного на b_2. В результате окажется

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=r_1b_2-r_2b_1.$$

Коэффициент при x записывается в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

и называется определителем 2-го порядка. Таким образом, определитель 2-го порядка есть некоторое число, определяемое как числами a_1, a_2, b_1, b_2, так и их взаимным расположением. Это расположение задается квадратной таблицей

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что эта таблица рассматривается как нечто целое, ее окаймляют круглыми скобками или двумя парами вертикальных черточек:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \text{ или } \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Такие таблицы называются *матрицами* *) 2-го порядка. Про определитель (2) говорят, что он п о р о ж д е н матрицей (3).

Итак, *определителем*

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$$

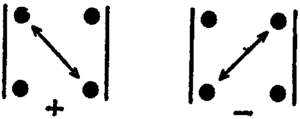
называется число, находимое по формуле

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.} \tag{4}$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами* определителя (2) [и матрицы (3)]. В определителе (и матрице) различают первый *столбец* $\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$, второй столбец $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$, а также первую *строку* a_1b_1 и вторую строку a_2b_2. Общее название для строк и столбцов — *ряды* определителя.

Пара чисел a_1, b_2 образует *главную диагональ* определителя, а пара a_2, b_1 — в т о р у ю диагональ.

Надо запомнить, что знаки перед произведениями, входящими в состав определителя, расставляются по схеме



П р и м е р ы.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 35 - 12 = 23, \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 2 = 26$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -26, \quad \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14, \quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1.$$

---

*) Читатель должен отчетливо понимать разницу между определителем $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и матрицей $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$. Первый есть ч и с л о, а вторая — просто т а б л и ц а, составленная из четырех чисел.

n° 2. Шесть основных свойств определителя 2-го порядка.

I. *Определитель не изменится, если его строки превратить в столбцы, а столбцы в строки:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

В самом деле, каждый из написанных определителей равен $a_1b_2 - a_2b_1$, и потому они равны между собой.

Это свойство определителя означает полную равноправность строк и столбцов. Поэтому дальнейшие свойства мы для краткости формулируем только для строк.

II. *При перестановке строк определитель меняет знак:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Действительно, здесь слева написано $a_1b_2 - a_2b_1$, а справа $-(a_2b_1 - a_1b_2)$, а это одно и то же.

III. *Если строки определителя одинаковы, то определитель равен нулю:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно *), написанный определитель равен $ab - ab = 0$.

IV. *Если все элементы одной из строк определителя умножить на некоторое число q, то весь определитель умножится на это число:*

$$\begin{vmatrix} a_1q & b_1q \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Действительно, обе части равны $q(a_1b_2 - a_2b_1)$.

Доказанное свойство допускает и такую формулировку: *общий множитель элементов строки можно вынести за знак определителя.*

V. *Если элементы одной строки пропорциональны элементам другой, то определитель равен нулю:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ qa_1 & qb_1 \end{vmatrix} = 0.$$

---

*) Можно рассуждать и так: от перестановки строк определитель меняет знак, но когда строки одинаковы, их перестановка не меняет определителя. Обозначая определитель через x, будем иметь $x = -x$, откуда $x = 0$.

Это немедленно вытекает из свойств III и IV, да и непосредственно ясно, так как написанный определитель равен

$$qa_1b_1 - qa_1b_1 = 0.$$

VI. *Если к одной из строк прибавить другую, умноженную на любое число, то определитель не изменится.*

Пусть, например, к первой строке прибавляется вторая, умноженная на q. Это приводит к определителю

$$\begin{vmatrix} a_1 + qa_2 & b_1 + qb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

равному

$$(a_1 + qa_2)\, b_2 - a_2 (b_1 + qb_2) = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Это свойство, как мы увидим ниже, является самым важным из всех шести.

§ 2. Определители 3-го порядка

п° 1. **Определение. Правило Саррюса.** Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= r_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= r_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= r_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Исключим отсюда y и r.

С этой целью умножим первое уравнение на b_2 и из того, что получится, вычтем второе уравнение, умноженное на b_1. В результате получим уравнение, не содержащее y:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x + (b_2c_1 - b_1c_2)\, z = h_3, \tag{2}$$

где h_3 — некоторая величина, точное значение которой нам не понадобится.

Если такую же операцию исключения y проделать, заменив в нашем рассуждении первое уравнение вторым, а второе третьим, то мы получим

$$(a_2b_3 - a_3b_2)\, x + (b_3c_2 - b_2c_3)\, z = h_1, \tag{3}$$

где h_1 — некоторое не интересующее нас число.

Ясно, что (3) получено из (2) заменой индексов 1, 2, 3 соответственно на 2, 3, 1. Проделывая эту замену вторично, получим

$$(a_3b_1 - a_1b_3)\, x + (b_1c_3 - b_3c_1)\, z = h_2. \tag{4}$$

Теперь умножим уравнения (2), (3), (4) соответственно на c_3, c_1, c_2 и все сложим.

В результате этого мы приходим к уравнению

$$(a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2)\,x = H, \tag{5}$$

где H — некоторое известное число.

Коэффициент, стоящий здесь при x, называется *определителем 3-го порядка*, соответствующим матрице*) (т. е. попросту таблице)

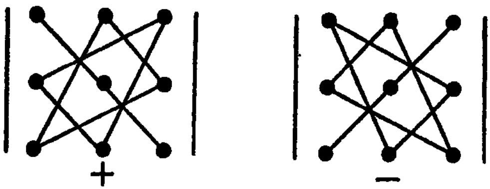
$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\| \tag{6}$$

(или порожденным этой матрицей).

Обозначается определитель так же, как и матрица, но только двойные вертикальные черточки заменяются одиночными. Итак, определителем 3-го порядка называется число

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.} \tag{7}$$

Чтобы запомнить, какие произведения берутся со знаком „+", а какие со знаком „—", полезно следующее *правило Саррюса*:



Как и для определителей 2-го порядка, числа $a_1, a_2, \ldots, c_3$ называются *элементами определителя* (или матрицы). Само собой понятно также, что такое строки, столбцы, ряды определителя. Главной диагональю его называется диагональ $a_1\ b_2\ c_3$.

Примеры.

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 72 + 280 + 18 - 168 - 135 - 16 = 51.$$

*) Это матрица 3-го порядка.

$$2)\ \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -9+28-20-10-24-21=-56.$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = yz^2+xy^2+zx^2-x^2y-y^2z-z^2x =$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y).$$

n°2. Шесть основных свойств определителя 3-го порядка. Определители 3-го порядка обладают теми же шестью свойствами, что и определители 2-го порядка. Доказываются эти свойства прямым вычислением по формуле (7). Это вычисление хотя и громоздко, но совершенно элементарно, и мы ограничимся лишь формулировками.

I. *Определитель не изменится, если его строки сделать столбцами, а столбцы строками.*

II. *При перестановке двух строк определителя он меняет знак.*

III. *Если в определителе имеются две одинаковые строки, то определитель равен нулю.*

IV. *Общий множитель элементов строки можно вынести за знак определителя.*

V. *Если элементы одной строки определителя пропорциональны элементам другой, то определитель равен нулю.*

VI. *Если к одной строке определителя прибавить другую, умноженную на любое число, то определитель не изменится.*

n°3. Миноры и алгебраические дополнения.

Определение 1. Если в матрице 3-го порядка вычеркнуть строку и столбец, то определитель, порожденный оставшейся матрицей 2-го порядка, называется *минором* того элемента, на котором пересекаются вычеркнутые ряды.

Например, минором элемента a_2 [для матрицы (6)] служит определитель $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, минором элемента c_3 — определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Определение 2. *Алгебраическим дополнением* элемента называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^p$, где p — сумма номеров рядов, пересекающихся на нашем элементе. Алгебраическое дополнение элемента обозначается той же, но заглавной буквой, что и сам элемент. Например, алгебраическое дополнение элемента a_2 обозначается через A_2, элемента b_3 — через B_3.

Так как элемент a_2 находится на пересечении первого столбца и второй строки, то для него $p=1+2=3$

$$A_2=-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для элемента b_3 будет $p=2+3=5$ и $B_3=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Теорема.* (*Теорема разложения.*) *Определитель 3-го порядка равен сумме парных произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.

Доказательство. Пусть

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\Delta.$$

Тогда

$$\Delta=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2.$$

Отсюда, выделяя элементы первого столбца, находим

$$\Delta=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1),$$

или

$$\Delta=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Но

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=A_1,\quad \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=A_2,\quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=A_3.$$

Таким образом,

$$\boxed{\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3.} \tag{8}$$

Это есть требуемое представление Δ, причем за ряд, упомянутый в формулировке теоремы, принят первый столбец. Само равенство (8) называется *разложением определителя по элементам первого столбца*. Аналогично устанавливается формула разложения определителя по элементам любого другого ряда. Например, разложение по элементам второй строки имеет вид

$$\boxed{\Delta=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2.}$$

§ 3. Определители любого порядка

n° 1. Определение. Рассмотрим матрицу 4-го порядка

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

Минором любого элемента матрицы называется определитель 3-го порядка, порождаемый той матрицей, которая получается из (1) вычеркиванием рядов, пересекающихся на упомянутом элементе. Этот минор, умноженный на $(-1)^p$, где p — сумма номеров вычеркнутых рядов, называется алгебраическим дополнением того же элемента.

Например, минор элемента d_3 есть определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix},$$

а алгебраическое дополнение D_3 элемента d_3 есть тот же определитель, умноженный на $(-1)^7 = -1$, ибо здесь $p = 3 + 4$ (так как d_3 лежит на пересечении четвертого столбца и третьей строки).

Лемма. *Сумма парных произведений элементов какого-либо ряда матрицы* (1) *на их алгебраические дополнения не зависит от выбора ряда.*

Например,

$$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 + d_3D_3.$$

Эту важную лемму мы принимаем без доказательства.

Определение. *Определителем* 4-*го порядка*, соответствующим матрице (1), называется сумма парных произведений элементов любого ряда матрицы на их алгебраические дополнения. Обозначается этот определитель через

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Разумеется, приведенное определение законно лишь благодаря предшествующей лемме.

Таким образом, зная, что такое определитель 3-го порядка, мы смогли ввести понятие определителя 4-го порядка. Но тогда совершенно аналогично можно ввести определители 5-го, 6-го и т. д. порядков. Вообще, *определителем n-го порядка, соответствующим некоторой матрице (n-го порядка), называется сумма парных произведений элементов любого ряда этой матрицы на их алгебраические дополнения* Важно, что эта сумма не зависит от выбора ряда. Последнее принимаем без доказательства.

n°2. Основные свойства определителей. Их вычисление.

Теорема. *Определители любого порядка обладают теми же свойствами* I—VI, *что и определители 2-го и 3-го порядков* (см. § 1, n°2 и § 2, n°2).

Эту теорему мы принимаем без доказательства.

Остановимся теперь на вычислении определителей. Пусть надо найти

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель обладает одной особенностью: все элементы четвертого столбца, кроме одного, равны нулю. Значит, разлагая Δ по элементам четвёртого столбца, получим *) лишь о д н о слагаемое (а не четыре, как в общем случае!):

$$\Delta=2\begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2(-2+30+18-9+30-4)=126.$$

Условимся называть „удобным" определитель, содержащий такой ряд, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю. Рассмотреный нами определитель Δ как раз и был „удобным" благодаря наличию четвертого столбца.

Теперь рассмотрим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Он не является „удобным", но его легко превратить в „удобный", используя свойство VI. Именно, вычтем из второго столбца удвоенный третий столбец. Как мы знаем, это не отражается на значении определителя **). В результате находим

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix},$$

---

*) Надо обратить внимание на то, что для элемента 2, стоящего в четвертом столбце, будет $p=6$.

**) В свойстве VI говорилось о законности „прибавления" ряда, а не о его вычитании, но так как прибавляемый ряд можно умножить на л ю б о е число, например на -2, то нет разницы между прибавлением и вычитанием.

а здесь справа написан уже „удобный" определитель. Разлагая его по элементам второй строки, получим *)

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 4.$$

Вот еще пример:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычитая второй столбец из третьего столбца, найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим первую строку к третьей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ 10 & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Получился „удобный" определитель. Разложение по элементам третьего столбца дает

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 2(56-20) = 72.$$

Покажем, что, пользуясь свойством VI, можно любой определитель сделать „удобным" **). Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Добьемся того, чтобы в произвольно выбранной нами строке все элементы, кроме, может быть, одного, стали нулями. Пусть для определенности это будет третья строка. Если бы все элементы этой строки были нулями, то, очевидно, было бы $\Delta = 0$. Оставляя этот тривиальный случай в стороне ***), можем считать, что один из элементов третьей строки отличен от нуля. Пусть, например, $a_3 \neq 0$.

*) Мы вынесли 4 из первой строки и -1 из второго столбца.

**) Точнее, найти равный ему „удобный".

***) Вообще, можно считать, что в Δ нет ряда, состоящего сплошь из нулей.

Тогда, вычитая из второго столбца первый столбец, умноженный на $\frac{b_3}{a_3}$ *), получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1' & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2' & c_2 & d_2 \\ a_3 & 0 & c_3 & d_3 \\ a^4 & b_4' & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

где $b_1' = b_1 - a_1 \frac{b_3}{a_3}$, $b_2' = b_2 - a_2 \frac{b_3}{a_3}$, $b_4' = b_4 - a_4 \frac{b_3}{a_3}$.

Мы видим, что на пересечении третьей строки и второго столбца вместо b_3 появился нуль. Вычитая из третьего столбца первый, умноженный на $\frac{c_3}{a_3}$, заменим элемент c_3 нулем. Наконец, проделывая еще одну аналогичную операцию, заменим и d_3 нулем. В результате третья строка примет вид

$$a_3 \; 0 \; 0 \; 0,$$

т. е. Δ превратится в „удобный" определитель.

Замечание. В большинстве случаев определители 3-го порядка вычислять проще приведением к „удобному" виду, чем по правилу Саррюса.

n° 3. Теоремы замещения и аннулирования. Следующие две теоремы очень важны.

Теорема замещения. *Пусть Δ — некоторый определитель n-го порядка. Сумма парных произведений алгебраических дополнений элементов какого-нибудь ряда на любые числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ равна тому определителю Δ', который получается из Δ заменой упомянутого ряда рядом $q_1, q_2, \ldots, q_n$.*

Доказательство. Пусть для определенности $n = 4$ и

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

В качестве заменяемого ряда возьмем первый столбец. Тогда теорема утверждает, что

$$q_1A_1 + q_2A_2 + q_3A_3 + q_4A_4 = \Delta', \tag{3}$$

где

$$\Delta' = \begin{vmatrix} q_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ q_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ q_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ q_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

---

*) Так как $a_3 \neq 0$, то имеет смысл дробь $\frac{b_3}{a_3}$.

Чтобы убедиться в справедливости (3), разложим Δ' по элементам первого столбца:

$$\Delta' = q_1 Q_1 + q_2 Q_2 + q_3 Q_3 + q_4 Q_4, \tag{4}$$

где, как обычно, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — алгебраические дополнения чисел q_1, q_2, q_3, q_4. Но ведь Q_1 получается из Δ' вычеркиванием первого столбца (и первой строки):

$$Q_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & c_4 \end{vmatrix},$$

т. е. $Q_1 = A_1$. Аналогично $Q_2 = A_2$, $Q_3 = A_3$, $Q_4 = A_4$. Если в (4) заменить Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 на A_1, A_2, A_3, A_4, то и получится (3).

Теорема аннулирования. *Сумма парных произведений элементов какого-нибудь ряда определителя на алгебраические дополнения параллельного ряда равна нулю.*

Пусть для определенности речь идет об определителе (2). Покажем, например, что

$$d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + d_4 A_4 = 0.$$

В самом деле, по теореме замещения написанная слева сумма равна определителю

$$\Delta' = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ d_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

получаемому из Δ заменой столбца $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{vmatrix}$ столбцом $\begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{vmatrix}$. Но в определителе Δ' первый и четвертый столбцы совпадают! Значит,

$$\Delta' = 0,$$

и теорема доказана.

§ 4. Решение систем линейных уравнений

n° 1. Формулы Крамера. Рассмотрим вопрос о решении системы n линейных уравнений с n неизвестными. Для простоты записи мы ограничимся случаем $n = 4$, но приведенные ниже соображения будут иметь общий характер.

Итак, пусть дана система

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1u&=r_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2u&=r_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3u&=r_3,\\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4u&=r_4. \end{aligned} \tag{1}$$

Определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы.

Пусть, как и выше, A_1, A_2, A_3, A_4 — алгебраические дополнения первого столбца. Умножим первое уравнение системы на A_1, второе на A_2, третье на A_3, четвертое на A_4 и все сложим. Обозначая, как обычно, суммы вида

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

через $\sum\limits_{k=1}^{4}\alpha_k$, получим

$$\left(\sum_{k=1}^{4}a_kA_k\right)x+\left(\sum_{k=1}^{4}b_kA_k\right)y+\left(\sum_{k=1}^{4}c_kA_k\right)z+\left(\sum_{k=1}^{4}d_kA_k\right)u=$$
$$=\sum_{k=1}^{4}r_kA_k. \tag{2}$$

По теореме аннулирования будет

$$\sum_{k=1}^{4}b_kA_k=b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4=0.$$

Аналогично

$$\sum_{k=1}^{4}c_kA_k=0, \qquad \sum_{k=1}^{4}d_kA_k=0.$$

Далее, сумма

$$\sum_{k=1}^{4}a_kA_k=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4$$

равна определителю системы Δ, так как она представляет собой разложение Δ по элементам первого столбца.

Наконец, по теореме замещения

$$\sum_{k=1}^{4} r_k A_k = \Delta_x, \quad \text{где} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} r_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ r_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ r_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ r_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, равенство (2) принимает вид

$$\Delta x = \Delta_x.$$

Если $\Delta \neq 0$, то отсюда находится

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.} \tag{3}$$

Ввиду равноправности всех неизвестных мы приходим к следующему результату.

Теорема Крамера. *Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение *), причем каждое неизвестное равно дроби, знаменателем которой служит определитель системы, а числителем определитель, получаемый из знаменателя заменой столбца коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом свободных членов.*

Формула (3) и аналогичные ей выражения других неизвестных называются *формулами Крамера.*

Пример. Решить систему

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5, \\ x + y + 2z &= 7, \\ 2x - y + z &= 1. \end{aligned}$$

Здесь определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя удвоенный второй столбец к первому, а затем (в полученном определителе) второй столбец к третьему, найдем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 18.$$

---

*) Напомним, что решением системы (1) называется вся четверка (x, y, z, u) значений неизвестных, удовлетворяющая системе.

Значит, $\Delta \neq 0$, и система имеет единственное решение. При этом

$$x=\frac{\Delta_x}{18}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя второй столбец к первому и третьему столбцам, получим

$$x=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}.$$

Далее,

$$y=\frac{\Delta_y}{18}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая удвоенную вторую строку из первой и третьей строк, получаем

$$y=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 0 & -9 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & -13 & -3 \end{vmatrix}=\frac{-1}{18}\begin{vmatrix} -9 & -5 \\ -13 & -3 \end{vmatrix}=\frac{38}{18}=\frac{19}{9}.$$

Наконец,

$$z=\frac{\Delta_z}{18}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя удвоенный второй столбец к первому столбцу, а затем второй столбец к третьему, получим

$$z=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 8 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=\frac{40}{18}=\frac{20}{9}.$$

Итак, искомое решение таково: $x=\frac{4}{9}$, $y=\frac{19}{9}$, $z=\frac{20}{9}$.

Замечание. Условие $\Delta \neq 0$ в теореме Крамера гарантирует два вывода: 1) система имеет решение (т. е. она совместна), 2) это решение единственно (т. е. система определенная). Если $\Delta=0$, то возможны два типа осложнений *): 1) система вовсе не имеет

*) Можно доказать, что при $\Delta=0$ одно из этих „осложнений“ обязательно реализуется.

решений (она несовместна), 2) система имеет много решений (она неопределенная). Вот иллюстрации обеих особенностей.

1) Рассмотрим систему $\begin{matrix} x-y=0 \\ x-y=1 \end{matrix}$ Ясно, что она не имеет решений, ибо левые части уравнений совпадают, а правые нет. У этой системы $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$.

2) Рассмотрим систему $\begin{matrix} x-y=0 \\ x-y=0 \end{matrix}$. Здесь также $\Delta=0$. Система имеет бесконечно много решений: каково бы ни было число a, пара чисел $x=a$, $y=a$ представляет решение системы.

n° 2. Однородные системы.

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены всех уравнений системы равны нулю.

Независимо от того, будет ли число уравнений системы меньше, равно или больше числа неизвестных, однородная система всегда совместна, так как имеет очевидное (тривиальное) решение, в котором значения всех неизвестных равны нулю. Во многих вопросах техники представляет интерес вопрос о том, имеются ли у однородной системы решения, отличные от нулевого. Мы рассмотрим этот вопрос, предполагая, что число уравнений системы равно числу неизвестных. Для определенности разберем случай трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z&=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

— определитель системы.

Теорема 1. *Если* $\Delta\neq 0$, *то у системы* (4) *нет решений, отличных от очевидного решения*

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0. \tag{5}$$

Действительно, линейная система с определителем, отличным от нуля, по теореме Крамера может иметь только одно решение. Значит, решений, отличных от (5), нет.

Доказанную теорему можно формулировать и по-другому:

Теорема 2. *Если однородная система имеет неочевидное решение, то ее определитель обязательно равен нулю.*

Действительно, иначе неочевидных решений по теореме 1 не было бы.

Справедлива и теорема, обратная для теоремы 2:

Теорема 3. *Если определитель однородной системы равен нулю, то у нее имеются неочевидные решения.*

В полном виде эту теорему мы доказывать не будем, а ограничимся рассмотрением того частного случая, когда минор хоть одного элемента определителя Δ не равен нулю. Зато для этого случая мы не только докажем существование неочевидного решения, но укажем и само его построение.

Для этой цели докажем следующее предложение:

Теорема 4. *Если* $\Delta = 0$, *то решением системы является набор алгебраических дополнений элементов любой строки* Δ.

Покажем, например, что решением системы (4) служит тройка чисел

$$x = A_3, \quad y = B_3, \quad z = C_3. \tag{6}$$

Для этого надо подставить числа (6) в систему (4) и убедиться, что полученные равенства

$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0,$$
$$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0,$$
$$a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 = 0$$

верны. Но это ясно: первые два равенства верны по теореме аннулирования, а третье верно потому, что его левая часть представляет разложение Δ по элементам третьей строки, а у нас по условию $\Delta = 0$.

Итак, теорема 4 доказана. Возвращаясь к доказательству теоремы 3 для упомянутого частного случая, допустим для определенности, что отличен от нуля минор элемента a_2. Тогда и $A_2 \neq 0$ (ибо A_2 лишь знаком отличается от этого минора). Значит, тройка чисел

$$x = A_2, \quad y = B_2, \quad z = C_2 \tag{7}$$

заведомо отлична от нулевой тройки (5), а по теореме 4 тройка (7) будет решением системы (1). Попутно нами получена

Теорема 5. *Если определитель* Δ *однородной системы равен нулю, но минор какого-нибудь элемента* Δ *отличен от нуля, то набор алгебраических дополнений элементов строки, содержащей упомянутый элемент, представляет неочевидное решение системы.*

В заключение отметим еще одно свойство однородных систем.

Теорема 6. *Если числа* x^*, y^*, z^* *представляют решение системы* (4), *то числа* qx^*, qy^*, qz^* *также представляют собой ее решение.*

В самом деле, если числа x^*, y^*, z^* представляют решение (4), то

$$a_1x^*+b_1y^*+c_1z^*=0.$$

Умножая на q, находим

$$a_1(qx^*)+b_1(qy^*)+c_1(qz^*)=0,$$

т. е. qx^*, qy^*, qz^* удовлетворяют первому уравнению системы. Аналогично устанавливается, что они удовлетворяют и остальным уравнениям.

Пример. Установить, при каком λ система

$$\begin{aligned} x+\ 3y-z&=0,\\ 2x+\ \lambda y+z&=0,\\ 4x+11y-z&=0 \end{aligned}$$

имеет неочевидное решение. Найти такие решения.

Прежде всего вычисляем определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1\\ 2 & \lambda & 1\\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя вторую строку к первой строке, а потом к третьей строке, находим

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 3+\lambda & 0\\ 2 & \lambda & 1\\ 6 & 11+\lambda & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 3+\lambda\\ 6 & 11+\lambda \end{vmatrix}=3\lambda-15.$$

Так как для существования неочевидного решения надо, чтобы было $\Delta=0$, то искомым будет

$$\lambda=5.$$

Подставим это λ в систему и в Δ. Минор элемента a_1 в Δ будет

$$A_1=\begin{vmatrix} 5 & 1\\ 11 & -1 \end{vmatrix}=-16.$$

Так как этот минор отличен от нуля, то по теореме 5 неочевидным решением будет тройка чисел A_1, B_1, C_1. Число $A_1=-16$ нам уже известно. Далее,

$$B_1=-\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 4 & -1 \end{vmatrix}=6,\qquad C_1=\begin{vmatrix} 2 & 5\\ 4 & 11 \end{vmatrix}=2.$$

Итак, числа $x=-16$, $y=6$, $z=2$ представляют (неочевидное) решение системы. По теореме 6 решение (и притом более простое) будут образовывать и числа

$$x=8,\quad y=-3,\quad z=-1,$$

получающиеся из предыдущих умножением на $-1/2$.

Примеры для упражнений

1) Вычислить $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Ответ: -78.

2) Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. Ответ: -204.

3) Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Ответ: -141.

4) При помощи определителей решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x+2y+z&=6, \\ 3x-y+2z&=3, \\ 5x+2y+z&=10. \end{aligned}$$

Ответ: $x=1$, $y=2$, $z=1$.

5) При помощи определителей решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x+4y+z&=0, \\ 3x+2y+2z&=5, \\ 2x+5y+z&=-1. \end{aligned}$$

Ответ: $x=1$, $y=-1$, $z=2$.

6) При помощи определителей решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x+3y+2z&=6, \\ 4x+2y+5z&=5, \\ x+2y+z&=4. \end{aligned}$$

Ответ: $x=-1$, $y=2$, $z=1$.

7) Установить, при каком λ имеется неочевидное решение у системы

$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0, \\ x+y+2z&=0, \\ 5x-y+\lambda z&=0, \end{aligned}$$

и найти какое-нибудь из таких решений.

Ответ: $\lambda=4$; $x=1$, $y=1$, $z=-1$.

ГЛАВА VIII

ВЕКТОРЫ

§ 1. Основные определения

n° 1. Вектор. Значения многих геометрических и физических величин полностью определяются заданием некоторого числа. Таковы, например, длина отрезка, объем и масса некоторого тела, температура, количество электричества и т. п. Подобные величины называются *скалярными* *). В связи с этим числа иногда называют *скалярами*. Таким образом, скаляр — это некоторое число (иногда именованное). Другие геометрические и физические величины определяются заданием направления и числа. Примером может служить сила, приложенная к некоторой точке. Здесь недостаточно знать, что эта сила равна 5 *кг*, ибо она может действовать на точку снизу вверх, сверху вниз, справа налево и бесчисленным множеством других способов. Еще более простым примером подобной величины является направленный отрезок прямой линии. Величины такого рода называются *векторными*, а простейшая из них — направленный прямолинейный отрезок — *вектором*. Всякая векторная величина изображается (если выбран масштаб) некоторым вектором.

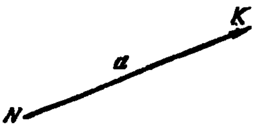


Рис. 259.

Итак, *вектор — это прямолинейный отрезок, у которого различают начало и конец*. На рисунке направление вектора часто отмечают стрелкой (рис. 259). Если начало вектора N, а его конец K, то вектор обозначают через $\overline{NK}$. Иногда вектор обозначается одной буквой жирного шрифта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и т. п. или такой же буквой светлого шрифта с черточкой наверху $\bar{a}$, $\bar{b}$ и т. п.

Длина вектора $\overline{NK}$ обозначается через $|\overline{NK}|$. Если вектор обозначен через $\boldsymbol{a}$ или через $\bar{a}$, то его длина обозначается через $|\boldsymbol{a}|$, или через $|\bar{a}|$, или, наконец, просто через a.

*) Их значения можно откладывать на шкале.

Если длина вектора равна **единице**, то он называется *единичным* вектором или *ортом*.

Подобно тому как в арифметике важную роль играет число нуль, так и в теории векторов необходим так называемый *нулевой* вектор или *нуль-вектор*. Это вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначается нуль-вектор символом $\bar{0}$. Очевидно, $|\bar{0}|=0$.

n°2. Равенство векторов. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными*,

$$\mathbf{a}=\mathbf{b},$$

если 1) они параллельны, 2) направлены в одну и ту же сторону, 3) имеют одинаковые длины *) (рис. 260). Таким образом, различные

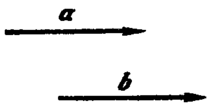


Рис. 260.

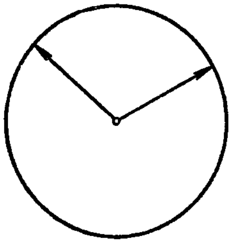


Рис. 261.

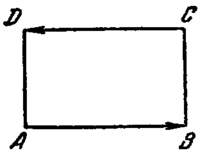


Рис. 262.

радиусы одной окружности, если их рассматривать как векторы, начинающиеся в центре окружности, не равны друг другу (рис. 261). Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ (рис. 262) и даже векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ не равны друг другу **).

n°3. Умножение вектора на число.

Определение. *Произведением* вектора $\mathbf{a}$ на число p называется новый вектор $p\mathbf{a}$, который параллелен $\mathbf{a}$ и длина которого равна длине вектора $\mathbf{a}$, умноженной на абсолютную величину $|p|$ числа p; направление же вектора $p\mathbf{a}$ совпадает с направлением $\mathbf{a}$, если $p>0$, и противоположно ему, если $p<0$.

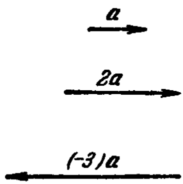


Рис. 263.

На рис. 263 изображены векторы $\mathbf{a}$, $2\mathbf{a}$ и $(-3)\mathbf{a}$.

Ясно, что $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$ и $0\cdot\mathbf{a}=0$. Вектор $(-1)\mathbf{a}$ обыкновенно обозначается через $-\mathbf{a}$. Очевидно, $-\overline{AB}=\overline{BA}$.

Построение произведения $p\mathbf{a}$ называется *умножением* $\mathbf{a}$ на p. Легко видеть, что $p(q\mathbf{a})=(pq)\mathbf{a}$.

*) Короче: вектор $\mathbf{b}$ равен вектору $\mathbf{a}$, если он получен из него при помощи параллельного переноса.

**) Вектор $\overline{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overline{AB}$.

n° 4. Сложение векторов.

Определение. *Суммой* *) n векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется новый вектор s, который строится по следующему правилу:

От произвольной точки A_0 пространства откладывается вектор $\overline{A_0A_1}=a_1$. От его конца A_1 откладывается вектор $\overline{A_1A_2}=a_2$, от A_2 откладывается вектор $\overline{A_2A_3}=a_3$ и т. д. Этот процесс продолжают до построения вектора $\overline{A_{n-1}A_n}=a_n$.

Вектор $s=\overline{A_0A_n}$ (т. е. идущий от начала первого отложенного вектора к концу последнего), а также любой, равный ему, и есть определяемая нами сумма.

Обозначение таково:

$$s=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

На рис. 264 построена сумма четырех слагаемых

$$s=a_1+a_2+a_3+a_4.$$

Замечания.

1) Многоугольник **) $A_0A_1A_2\ldots A_n$ называется *векторным*, а про вектор $\overline{A_0A_n}$ говорят, что он *замыкает* этот многоугольник.

2) Выбор точки A_0 не играет роли. Если эту точку передвинуть, то векторный многоугольник передвигается параллельно самому себе и новый замыкающий вектор будет равен старому.

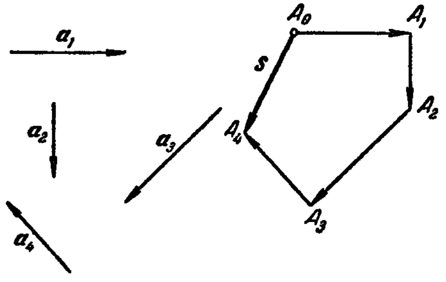


Рис. 264.

3) Если векторный многоугольник замыкается сам собой, т. е. A_n совпадает с A_0, то $a_1+a_2+\ldots+a_n=\bar{0}$.

4) Построение суммы векторов называется их *сложением*.

5) Сумма векторов не зависит от порядка слагаемых, т. е. сложение векторов обладает переместительным (или коммутативным) свойством. Ни этого, ни следующего свойства мы не доказываем.

6) Сложение векторов обладает сочетательным (или ассоциативным) свойством: можно разбить множество слагаемых векторов на несколько групп, произвести сложение в отдельных группах и сложить суммы этих групп. Например,

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(a_1+a_2)+a_3+(a_4+a_5+a_6).$$

---

*) Иногда говорят: *геометрической суммой*.

**) Подчеркнем, что этот многоугольник может не быть плоским.

7) По отношению к умножению на число сложение векторов обладает **распределительным** (или **дистрибутивным**) свойством, выражающимся равенством

$$p(a_1+a_2+\ldots+a_n)=pa_1+pa_2+\ldots+pa_n,$$

т. е. *при умножении всех слагаемых векторов на какое-нибудь число их сумма умножается на то же число.*

Это свойство ясно, если $p>0$. В этом случае размеры векторного многоугольника $A_0A_1A_2\ldots A_n$ умножаются на p, но он не поворачивается. Точно так же, если $p=-1$, то в векторном многоугольнике лишь изменяется порядок обхода вершин на обратный (если при этом изменить на обратный и порядок слагаемых, что возможно благодаря переместительному свойству). Значит, при умножении на $p=-1$ сумма $\overline{A_0A_n}$ заменится на $\overline{A_nA_0}$, т. е. и она умножится на -1. Наконец, случай, когда $p<0$, но $p\neq-1$, приводится к последовательному умножению на $|p|>0$ и на -1.

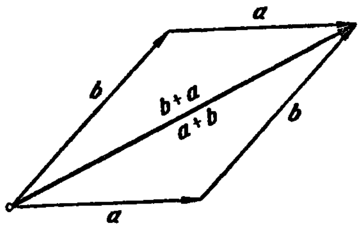


Рис. 265.

8) Справедлива также сходная формула

$$(p+q)a=pa+qa,$$

в которой p и q — числа. Доказательство мы предоставляем читателю. Оно очень просто: надо рассмотреть порознь случаи, когда p и q одного знака и когда они разных знаков.

9) Особый интерес представляет случай сложения **двух** векторов. Легко видеть, что в этом случае сумма получается так: слагаемые приводятся к общему началу, на них строится параллелограмм, и из общего начала проводится диагональ этого параллелограмма (рис. 265).

Здесь равенство

$$a+b=b+a,$$

выражающее переместительное свойство сложения, непосредственно очевидно.

n° 5. Вычитание векторов.

Определение. *Разностью* векторов a и b называется такой вектор r, который надо сложить с b, чтобы получить a: $b+r=a$.

Обозначается эта разность через $a-b$, а ее построение называется *вычитанием* вектора b из вектора a. В связи с этим a называют *уменьшаемым*, а b — *вычитаемым* вектором.

Если отложить $a=\overline{OA}$ и $b=\overline{OB}$ от общего начала O, то, как показывает рис. 266, вектор $\overline{BA}$ и будет разностью $a-b$.

Таким образом, разность двух векторов, отложенных от общего начала, соединяет их концы, будучи направленной от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого.

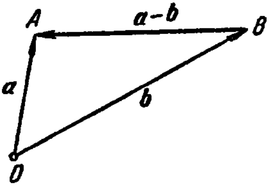


Рис. 266.

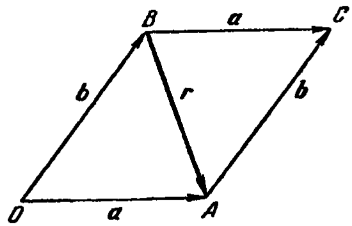


Рис. 267.

Если построить на $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$ (отложенных от одной точки O) параллелограмм (рис. 267), то разность $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ представится его диагональю $\overline{BA}$, не проходящей через O.

Из последнего рисунка видно, что

$$\boldsymbol{r}=\overline{BA}=\overline{BC}+\overline{CA}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

т. е. вычитание из $\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{b}$ равносильно прибавлению к $\boldsymbol{a}$ вектора, противоположного $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{1}$$

Отсюда следует, что для любого числа p будет

$$p(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=p[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]=p\boldsymbol{a}+p(-\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}+p\cdot(-1)\boldsymbol{b}=$$
$$=p\boldsymbol{a}+(-p)\boldsymbol{b}=p\boldsymbol{a}+(-1)(p\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}-p\boldsymbol{b},$$

т. е.

$$p(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}-p\boldsymbol{b}.$$

Впрочем, доказательство этого равенства, основанное на чисто геометрических соображениях, пожалуй, проще приведенного.

Отметим также равенство

$$(p-q)\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{a}-q\boldsymbol{a},$$

легко выводимое из (1) *).

n° 6. Скользящий вектор. Мы уже говорили, что направленная прямая называется *осью*. Если выбрана единица длины и начало отсчета O, то положение любой точки M на оси характеризуется ч и с л о м: расстоянием OM, взятым со знаком „+" или „—" в зави-

*) Действительно, $p\boldsymbol{a}-q\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{a}+(-q)\boldsymbol{a}=[p+(-q)]\boldsymbol{a}=(p-q)\boldsymbol{a}$.

симости от того, совпадают или нет направления оси и вектора $\overline{OM}$ (рис. 268).

Указанное число называется *координатой* точки M. Часто, желая подчеркнуть, что на оси выбраны начало отсчета и единица длины, мы будем называть ось *координатной*.

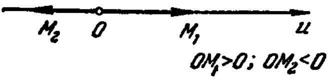


Рис. 268.

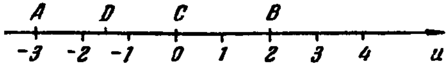


Рис. 269.

Если координату точки M оси u обозначить через u_M, то на рис. 269 имеем

$$u_A = -3,\quad u_B = 2,\quad u_C = 0,\quad u_D = -\frac{3}{2}.$$

Определение. Векторы, лежащие на оси, называются *скользящими**) векторами. Сама ось называется *основанием* лежащих на ней векторов. Скользящий орт, направление которого совпадает с направлением его основания, называется *ортом оси*.

Определение. *Алгебраической величиной* скользящего вектора называется его длина, взятая со знаком „+" или „−" в зависимости от того, совпадают или нет направления вектора и его основания**). Обозначать алгебраическую величину вектора $\boldsymbol{a}$ будем так: алг. вел. $\boldsymbol{a}$.

На рис. 269 имеем

$$\text{алг. вел. } \overline{AB} = 5,\quad \text{алг. вел. } \overline{BC} = -2.$$

С понятием алгебраической величины скользящего вектора связаны три важные теоремы:

Теорема 1. *Скользящий вектор равен своей алгебраической величине, умноженной на орт своего основания, т. е.*

$$\boldsymbol{a} = (\text{алг. вел. } \boldsymbol{a})\,\boldsymbol{e},$$

где $\boldsymbol{e}$ — *орт основания* $\boldsymbol{a}$.

В самом деле, пусть алг. вел. $\boldsymbol{a} = p$. Тогда $|\boldsymbol{a}| = |p|$. Если $p > 0$, то направления $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$ совпадают (рис. 270), откуда $\boldsymbol{a} = p\boldsymbol{e}$.

Если же $p < 0$, то направления $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{e}$ противоположны и снова $\boldsymbol{a} = p\boldsymbol{e}$ (рис. 271).

---

*) Или *приложенными*.

**) Длина нуль-вектора равна нулю, и потому нет надобности говорить о том, с каким знаком она берется.

Теорема 2. *При умножении скользящего вектора на какое-нибудь число его алгебраическая величина умножается на это же число:*

$$\text{алг. вел. } (p\mathbf{a}) = p\,(\text{алг. вел. } \mathbf{a}),$$

т. е. числовой множитель можно выносить за знак алгебраической величины.

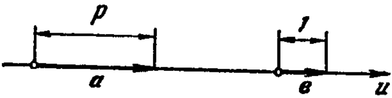


Рис. 270.

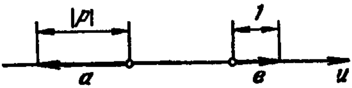


Рис. 271.

Действительно, пусть $p\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Тогда длины a и b векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ связаны соотношением $b = |p|\,a$. Иными словами, абсолютные величины обеих частей равенства

$$\text{алг. вел. } \mathbf{b} = p \cdot \text{алг. вел. } \mathbf{a}$$

совпадают. Остается заметить, что и знаки их одинаковы, ибо при $p > 0$ векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ направлены одинаково и знаки их алгебраических величин совпадают, а при $p < 0$ эти знаки противоположны.

Теорема 3. *Алгебраическая величина вектора, лежащего на координатной оси, равна координате его конца без координаты начала:*

$$\boxed{\text{алг. вел. } \overline{NK} = u_K - u_N.} \qquad (2)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение, кроме начала N и конца K нашего вектора, еще начало отсчета O оси u.

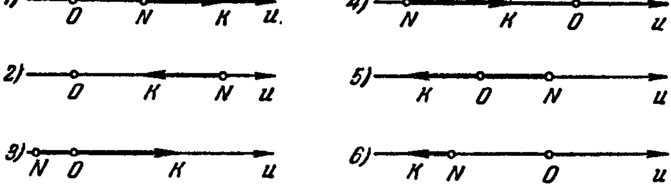


Рис. 272.

Оставляя в стороне простейший случай, когда две из точек O, N, K совпадают, имеем шесть возможных расположений этих точек (см. рис. 272).

В случае 1 будет

$$\text{алг. вел. } \overline{NK} = |\overline{NK}| = |\overline{OK}| - |\overline{ON}| = u_K - u_N.$$

В случае 2 будет

$$\text{алг. вел. } \overline{NK} = -|\overline{NK}| = -(|\overline{ON}| - |\overline{OK}|) = -(u_N - u_K) = u_K - u_N.$$

В случае 3 будет

$$\text{алг. вел. } \overline{NK} = |\overline{NK}| = |\overline{ON}| + |\overline{OK}| = (-u_N) + u_K = u_K - u_N.$$

Аналогично устанавливается справедливость формулы (2) и в остальных случаях.

§ 2. Проекции

n° 1. Проекция вектора на ось. Пусть в пространстве дана ось Ou. Ввиду той роли, которую она будет играть в дальнейшем, назовем ее *осью проекций*. Взяв в пространстве любую точку M, проведем через нее плоскость (рис. 273), перпендикулярную оси Ou.

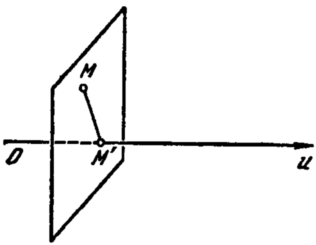


Рис. 273.

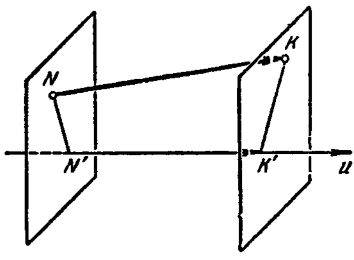


Рис. 274.

Точка M', в которой эта плоскость пересекается с осью Ou, называется *проекцией* точки M на ось Ou, а координата точки M' называется также и координатой точки M *).

Пусть теперь в пространстве расположен какой-нибудь вектор $\overline{NK}$. Вектор $\overline{N'K'}$, у которого начало N' и конец K' суть соответственно проекции точек N и K (рис. 274) на ось Ou, называется *геометрической проекцией* вектора $\overline{NK}$ на ту же ось или *составляющей* вектора $\overline{NK}$ по оси Ou. Введем для $\overline{N'K'}$ обозначение $\text{сост}_u(\overline{NK})$.

Так как $\overline{N'K'}$ — скользящий вектор (с основанием Ou), то у него имеется а л г е б р а и ч е с к а я в е л и ч и н а. Эта величина

*) Точнее, координатой точки M на оси Ou.

называется *алгебраической проекцией* вектора $\overline{NK}$ на ось Ou. Впредь мы лишь эту проекцию и будем называть проекцией вектора $\overline{NK}$ на ось Ou, а для геометрической проекции $\overline{N'K'}$ сохраним только название составляющей. Итак, во всем дальнейшем для нас слова „проекция вектора $\overline{NK}$ на ось Ou" будут обозначать число:

$$\boxed{\text{Пр}_u\overline{NK} = \text{алг. вел. } (\text{сост}_u\overline{NK}).} \tag{1}$$

Ясно, что 1) проекции двух равных векторов на одну и ту же ось равны и 2) проекции вектора на две параллельные и одинаково направленные оси равны.

n° 2. Важнейшие свойства проекций.

Теорема 1. *При умножении вектора на какое-нибудь число его проекция также умножается на это число:*

$$\boxed{\text{Пр}_u(p\boldsymbol{a}) = p\,\text{Пр}_u\boldsymbol{a},} \tag{2}$$

т. е. числовой множитель можно выносить за знак проекции.

В самом деле, пусть $\boldsymbol{a} = \overline{NK}$. Если $p > 0$, то при умножении $\overline{NK}$ на p вектор $\overline{NK}$ сохранит свое направление и лишь растянется в p раз $\left(\text{если } p < 1, \text{ то „растяжение в } p \text{ раз" сведется к сжатию в } \frac{1}{p} \text{ раз}\right)$. Из чертежа*) ясно, что то же самое произойдет и с составляющей $\overline{N'K'} = \text{сост}_u\overline{NK}$. Иными словами, при умножении вектора на число $p > 0$ его составляющая также умножается на это число. То же имеет место и для $p < 0$. Таким образом,

$$\text{сост}_u(p\boldsymbol{a}) = p\,\text{сост}_u\boldsymbol{a}.$$

Но тогда (по теореме 2 из n° 6 § 1)

$$\text{алг. вел.}\,[\text{сост}_u(p\boldsymbol{a})] = p\cdot\text{алг. вел.}\,(\text{сост}_u\boldsymbol{a}),$$

а это по самому определению проекции [см. (1) из n° 1] как раз и есть доказываемое равенство (2).

Теорема 2. *Проекция вектора на координатную ось равна координате его конца без координаты начала:*

$$\boxed{\text{Пр}_u\overline{NK} = u_K - u_N.} \tag{3}$$

*) Предоставляем читателю сделать его.

В самом деле, если $\text{сост}_u\overline{NK}=\overline{N'K'}$, то по теореме 3 из n° 6 § 1 будет

$$\text{Пр}_u\overline{NK}=\text{алг. вел.}\,\overline{N'K'}=u_{K'}-u_{N'}.$$

Остается заметить, что по самому определению координаты точки, не лежащей на оси, $u_{K'}=u_K$, $u_{N'}=u_N$.

Теорема 3. *Проекция суммы нескольких векторов на какую-нибудь ось равна сумме проекций слагаемых на ту же ось:*

$$\boxed{\text{Пр}_u(\boldsymbol{a}_1+\ldots+\boldsymbol{a}_n)=\text{Пр}_u\boldsymbol{a}_1+\ldots+\text{Пр}_u\boldsymbol{a}_n.} \tag{4}$$

Докажем теорему, например, для $n=4$. По определению суммы векторов мы должны для ее построения взять любую точку пространства A_0, отложить от нее вектор $\overline{A_0A_1}=\boldsymbol{a}_1$, от A_1 отложить $\overline{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$, затем отложить $\overline{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_3$ и $\overline{A_3A_4}=\boldsymbol{a}_4$. Тогда вектор $\boldsymbol{s}=\overline{A_0A_4}$ и представит собой сумму $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$.

Считая ось проекций Ou координатной осью (т. е. предполагая, что на ней имеются числовые отметки), обозначим координаты точек A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно через u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. Тогда по предыдущей теореме будет

$$\begin{aligned}\text{Пр}_u\boldsymbol{a}_1&=u_1-u_0,\\ \text{Пр}_u\boldsymbol{a}_2&=u_2-u_1,\\ \text{Пр}_u\boldsymbol{a}_3&=u_3-u_2,\\ \text{Пр}_u\boldsymbol{a}_4&=u_4-u_3,\end{aligned}$$

откуда

$$\text{Пр}_u\boldsymbol{a}_1+\text{Пр}_u\boldsymbol{a}_2+\text{Пр}_u\boldsymbol{a}_3+\text{Пр}_u\boldsymbol{a}_4=u_4-u_0.$$

Остается заметить, что $\text{Пр}_u\boldsymbol{s}$ также равна u_4-u_0.

Теорема 4. *Проекция разности двух векторов на какую-нибудь ось равна разности их проекций на ту же ось:*

$$\boxed{\text{Пр}_u(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\text{Пр}_u\boldsymbol{a}-\text{Пр}_u\boldsymbol{b}.} \tag{5}$$

Пусть $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}$. Тогда $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{r}$ и по (4) будет

$$\text{Пр}_u\boldsymbol{a}=\text{Пр}_u\boldsymbol{b}+\text{Пр}_u\boldsymbol{r},$$

что равносильно (5).

Теорема 5. *Проекция вектора равна его длине, умноженной на косинус угла между вектором и осью проекций.*

Доказательство. При параллельном переносе проектируемого вектора его проекция не меняется. Поэтому мы можем считать, что начало N проектируемого вектора $a=\overline{NK}$ лежит на оси проекций Ou. Тогда вектор и ось будут лежать в одной плоскости. Относительно угла θ между ними возможны 3 предположения: он острый, тупой или прямой.

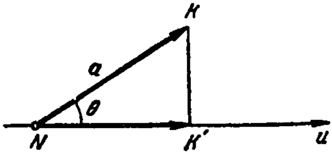


Рис. 275.

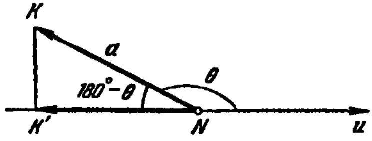


Рис. 276.

В первом случае (рис. 275) алгебраическая величина вектора $\overline{NK'}$ равна длине $|\overline{NK'}|$ этого вектора, т. е. попросту длине катета прямоугольного треугольника NKK'. Тогда

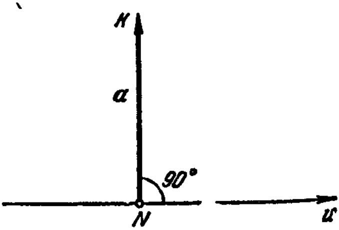


Рис. 277.

$$|\overline{NK'}|=|\overline{NK}|\cos\theta=a\cos\theta.$$

Поскольку алг. вел. $(\overline{NK'})$ и есть $\text{Пр}_u a$, имеем

$$\boxed{\text{Пр}_u a=a\cos\theta.} \qquad (6)$$

Если угол θ тупой (рис. 276), то

$$\text{Пр}_u a=\text{алг. вел. }(\overline{NK'})=-|\overline{NK'}|,$$

ибо $\overline{NK'}$ имеет направление, противоположное направлению своего основания. Но

$$|\overline{NK'}|=|\overline{NK}|\cos(180^\circ-\theta)=-|\overline{NK}|\cos\theta=-a\cos\theta,$$

и мы снова приходим к (6).

Наконец, формула (6) верна и тогда, когда $\theta=90^\circ$ (рис. 277), ибо в этом случае обе ее части равны нулю. Теорема доказана полностью.

§ 3. Координаты в пространстве

n° 1. Определения и обозначения. Пусть в пространстве через точку O (начало координат) проходят три взаимно перпендикулярные координатные оси Ox, Oy, Oz, направленные (рис. 278) так, что наблюдателю, у которого ось Oz проходит от ног к голове, вращение от оси Ox к оси Oy на угол 90° кажется происходящим против часовой стрелки. Орты осей Ox, Oy, Oz обозначают соответственно через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Любая точка M пространства имеет на каждой из указанных осей определенную координату. Эти координаты*) носят названия: x — *абсцисса*, y — *ордината*, z — *апликата*.

То, что M имеет координаты x, y, z, записывают так:

$$M(x, y, z).$$

Вектор $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$, идущий от начала координат к точке M, называется *радиусом-вектором* этой точки. Поскольку начало координат O имеет координаты $(0, 0, 0)$, а проекция вектора на оси координат равна координате его конца без координаты начала, то

$$\text{Пр}_x\overline{OM} = x - 0,$$

или $\text{Пр}_x\boldsymbol{r} = x$. Аналогично и для других осей. Итак,

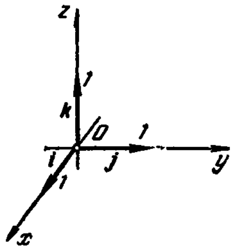


Рис. 278.

$$\boxed{x = \text{Пр}_x\boldsymbol{r},\ y = \text{Пр}_y\boldsymbol{r},\ z = \text{Пр}_z\boldsymbol{r}.} \qquad (1)$$

Координата точки представляет собой проекцию ее радиуса-вектора на соответствующую ось координат.

Проекции произвольного вектора $\boldsymbol{a} = \overline{NK}$ на оси Ox, Oy, Oz обозначаются через a_x, a_y, a_z, что мы будем записывать также в виде $\boldsymbol{a}\{a_x, a_y, a_z\}$. Напомним еще, что д л и н а вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается буквой a.

Если координаты точек N и K суть соответственно (x_N, y_N, z_N) и (x_K, y_K, z_K), то согласно теореме 2 из n°2 § 2 будет

$$\boxed{a_x = x_K - x_N,\quad a_y = y_K - y_N,\quad a_z = z_K - z_N.} \qquad (2)$$

Если углы вектора $\boldsymbol{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ, то (теорема 5 n° 2 § 2)

$$\boxed{a_x = a\cos\alpha,\quad a_y = a\cos\beta,\quad a_z = a\cos\gamma} \qquad (3)$$

или, что то же самое,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.} \qquad (4)$$

---

*) Их называют п р я м о у г о л ь н ы м и (или декартовыми).

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\boldsymbol{a}$.

n° 2. Основная формула векторного исчисления. Длина вектора. Соотношение между направляющими косинусами. Расстояние между двумя точками. Уравнение поверхности шара. Докажем следующую важную теорему.

Теорема. *Всякий вектор является суммой своих составляющих по осям Ox, Oy, Oz.*

Доказательство. При параллельном переносе вектора его составляющие не меняются, а лишь скользят по соответствующим осям. Поэтому мы можем передвинуть интересующий нас вектор $\boldsymbol{a}$ так, чтобы его начало N совпало с началом координат O. Тогда все три составляющие $\boldsymbol{a}$ будут иметь общее начало O. Из рис. 279 ясно, что

$$\overline{OK}=\overline{OA}+\overline{AH}+\overline{HK}.$$

Но

$$\overline{OK}=\boldsymbol{a},\quad \overline{AH}=\overline{OB},\quad \overline{HK}=\overline{OC}.$$

Поэтому

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC},} \tag{5}$$

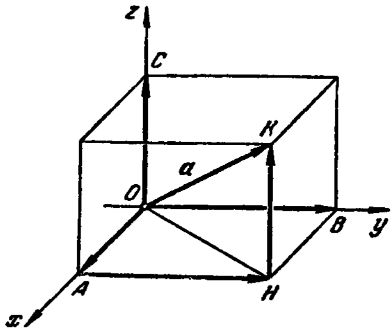


Рис. 279.

чем и доказана теорема, ибо $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ как раз и являются составляющими вектора $\boldsymbol{a}$ по осям координат.

Вспомним теперь, что алгебраическая величина составляющей $\overline{OA}$ вектора $\boldsymbol{a}$ по оси Ox есть не что иное, как проекция a_x вектора $\boldsymbol{a}$ на ось Ox:

$$\text{алг. вел. }(\overline{OA})=a_x.$$

Так как (теорема 1 n° 6 § 1) скользящий вектор равен своей алгебраической величине, умноженной на орт своего основания, то $\overline{OA}=a_x\boldsymbol{i}$. Аналогично $\overline{OB}=a_y\boldsymbol{j}$, $\overline{OC}=a_z\boldsymbol{k}$, и формула (5) принимает вид

$$\boxed{\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.} \tag{6}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении. Для радиуса-вектора $\boldsymbol{r}=\overline{OM}$ точки $M(x, y, z)$ формула (6) принимает вид

$$\boxed{\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.} \tag{7}$$

Вернемся к рис. 279. Он показывает, что вектор $\overline{OK}$ есть гипотенуза прямоугольного треугольника OHK. Значит, по теореме Пифагора

$$|\overline{OK}|^2 = |\overline{OH}|^2 + |\overline{HK}|^2.$$

Вторичное применение теоремы Пифагора (к треугольнику OAH) дает

$$|\overline{OH}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{AH}|^2,$$

откуда

$$|\overline{OK}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{AH}|^2 + |\overline{HK}|^2.$$

Но $\overline{AH} = \overline{OB}$, $\overline{HK} = \overline{OC}$, так что

$$|\overline{OK}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 + |\overline{OC}|^2.$$

Вспоминая, что длины составляющих $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ вектора $\boldsymbol{a} = \overline{OK}$ разве лишь знаком могут отличаться от проекций a_x, a_y, a_z, получаем, что

$$\boxed{a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{8}$$

и

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},} \tag{9}$$

т. е. *длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.*

Формулы (4) в соединении с (9) показывают, как, зная проекции вектора, найти его направляющие косинусы.

Если в (8) подставить выражения (3) для a_x, a_y, a_z и результат сократить на a^2, то получится соотношение

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,} \tag{10}$$

т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.*

С помощью формулы (9) мгновенно решается задача о нахождении расстояния d между двумя точками $N(x_N, y_N, z_N)$ и $K(x_K, y_K, z_K)$. В самом деле, это расстояние есть длина вектора $\overline{NK}$, проекции которого на оси равны соответственно $x_K - x_N$, $y_K - y_N$, $z_K - z_N$. Стало быть,

$$\boxed{d = \sqrt{(x_K - x_N)^2 + (y_K - y_N)^2 + (z_K - z_N)^2}.} \tag{11}$$

В заключение рассмотрим поверхность шара с центром $C(a, b, c)$ и радиусом R. Ясно, что точка $M(x, y, z)$ лежит на этой поверхности тогда и только тогда, когда $|\overline{CM}|=R$, т. е. когда

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.} \tag{12}$$

Таким образом, равенство (12) есть уравнение рассматриваемой поверхности. Если центр шара лежит в начале координат, то уравнение имеет более простой вид

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2.} \tag{13}$$

n°3. Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, а также числа $q_1>0$, $q_2>0$. Найдем на отрезке M_1M_2 точку $M(x, y, z)$, делящую M_1M_2 в отношении

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{q_1}{q_2}.$$

Для этого заметим, что векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ параллельны и направлены в одну сторону. Но тогда вектор $\overline{M_1M}$ получается из $\overline{MM_2}$ умножением на $\frac{q_1}{q_2}$, т. е.

$$\overline{M_1M}=\frac{q_1}{q_2}\overline{MM_2}.$$

Проектируя это равенство *) на ось Ox, находим

$$x-x_1=\frac{q_1}{q_2}(x_2-x).$$

Отсюда

$$x\left(1+\frac{q_1}{q_2}\right)=x_1+\frac{q_1}{q_2}x_2$$

и

$$\boxed{x=\frac{x_1q_2+x_2q_1}{q_1+q_2}.} \tag{14}$$

---

*) Равные векторы имеют равные проекции (на одну и ту же ось). Поэтому из равенства

$$a=b \tag{*}$$

следует

$$a_x=b_x. \tag{**}$$

Переход от соотношения (*) к (**) мы называем „проектированием равенства (*) на ось Ox".

Аналогично

$$y=\frac{y_1q_2+y_2q_1}{q_1+q_2},\quad z=\frac{z_1q_2+z_2q_1}{q_1+q_2}.$$

Таким образом, решение ничем не отличается от плоского случая *). В частности, координата середины отрезка равна полусумме одноименных координат его концов.

§ 4. Скалярное произведение векторов

n° 1. Скалярное произведение и его свойства.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется произведение их длин и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ обозначается через $\boldsymbol{ab}$, или $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Итак,

$$\boxed{\boldsymbol{ab}=ab\cos\theta,} \tag{1}$$

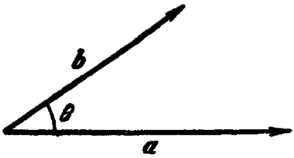


Рис. 280.

где θ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 280). Ясно, что

I. *Скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей*, $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$.

Заметим теперь, что произведение $b\cos\theta$ есть не что иное, как проекция вектора $\boldsymbol{b}$ на вектор $\boldsymbol{a}$ **):

$$b\cos\theta=\text{Пр}_a\boldsymbol{b}.$$

Поэтому

$$\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=a\,\text{Пр}_a\boldsymbol{b},} \tag{2}$$

т. е.

II. *Скалярное произведение двух векторов равно проекции одного из них на другой, умноженной на длину этого другого.*

Из этого свойства скалярного произведения немедленно вытекают два других:

III. *Числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения.*

В самом деле, если p — число, то, как известно (§ 2, n° 2, теорема 1),

$$\text{Пр}_a(p\boldsymbol{b})=p\,\text{Пр}_a\boldsymbol{b}.$$

---

*) Об этом мы уже упоминали в гл. VI.

**) Говоря о проектировании на вектор $\boldsymbol{a}$, мы имеем в виду проектирование на ось Ou, на которой лежит $\boldsymbol{a}$ и которая одинаково направлена с $\boldsymbol{a}$.

Умножая это равенство на a и применяя (2), находим

$$\boxed{(\boldsymbol{a},\ p\boldsymbol{b}) = p(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}).} \tag{3}$$

IV. *Скалярное произведение обладает распределительным свойством, т. е.*

$$\boxed{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2).} \tag{4}$$

Для доказательства надо лишь умножить равенство

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = \text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}_1 + \text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}_2$$

на $\boldsymbol{a}$ и применить (2).

V. *Скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю.*

Это вытекает непосредственно из (1), ибо при взаимной перпендикулярности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будет $\theta = 90°$, откуда $\cos\theta = 0$ и

$$\boldsymbol{ab} = 0.$$

В частности, так как координатные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ попарно перпендикулярны, то

$$\boxed{\boldsymbol{ij} = 0, \quad \boldsymbol{jk} = 0, \quad \boldsymbol{ki} = 0.} \tag{5}$$

VI. *Скалярное произведение любого вектора на самого себя („скалярный квадрат" $\boldsymbol{a}^2$ вектора $\boldsymbol{a}$) равно квадрату длины этого вектора.*

В самом деле, если $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, то $\theta = 0$ и $\cos\theta = 1$.

В частности,

$$\boxed{\boldsymbol{i}^2 = 1, \quad \boldsymbol{j}^2 = 1, \quad \boldsymbol{k}^2 = 1.} \tag{6}$$

n° 2. Выражение скалярного произведения через проекции. Найдем скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, проекции a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z которых на оси нам известны.

По основной формуле векторного исчисления имеем $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, и потому

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a},\ b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}).$$

Отсюда на основании (4) следует

$$\boldsymbol{ab} = (\boldsymbol{a},\ b_x\boldsymbol{i}) + (\boldsymbol{a},\ b_y\boldsymbol{j}) + (\boldsymbol{a},\ b_z\boldsymbol{k}). \tag{7}$$

Но в силу (3)

$$(\boldsymbol{a},\ b_x\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{i})\,b_x. \tag{8}$$

Снова применяя основную формулу и соотношения (4) и (3), получим

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{i})=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i})=a_x(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i})+a_y(\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i})+a_z(\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{i}),$$

откуда в силу (5) и (6) следует

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{i})=a_x.$$

Подставляя в (8), находим

$$(\boldsymbol{a},\ b_x\boldsymbol{i})=a_xb_x.$$

Аналогично выражаются второе и третье слагаемые правой части (7), и мы получаем важную формулу

$$\boxed{\boldsymbol{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,} \tag{9}$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их проекций.*

n° 3. Угол между двумя векторами. Условия перпендикулярности и параллельности. Сопоставляя формулы (1) и (9), находим, что

$$\boxed{\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{ab},} \tag{10}$$

т. е. *косинус угла между двумя векторами равен сумме парных произведений их проекций, деленной на произведение их длин.*

Если углы, составляемые векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с осями, обозначить соответственно через α, β, γ и α', β', γ' и учесть, что

$$\frac{a_x}{a}=\cos\alpha,\quad \frac{b_x}{b}=\cos\alpha',\quad \frac{a_y}{a}=\cos\beta,\ldots,$$

то из (10) получим другую формулу для $\cos\theta$:

$$\boxed{\cos\theta=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',} \tag{11}$$

т. е. *косинус угла между двумя векторами равен сумме парных произведений их направляющих косинусов.*

Если, в частности, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то мы вновь получаем формулу

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Условие перпендикулярности векторов. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, то $\boldsymbol{ab}=0$, и (9) принимает вид

$$\boxed{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0,} \tag{12}$$

т. е. *чтобы два вектора были взаимно перпендикулярны, нужно, чтобы сумма парных произведений их проекций равнялась нулю.*

Условие параллельности векторов. Пусть, наконец, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны. Если они направлены в одну и ту же сторону, то в предшествующих обозначениях будет

$$\alpha = \alpha'.$$

Отсюда $\cos\alpha = \cos\alpha'$ или, что то же самое,

$$\frac{a_x}{a} = \frac{b_x}{b},$$

так что

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a}{b}.$$

Аналогично

$$\frac{a_y}{b_y} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{a_z}{b_z} = \frac{a}{b}$$

и окончательно

$$\boxed{\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.} \tag{13}$$

Если же векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены в разные стороны, то (рис. 281)

$$\alpha + \alpha' = \pi,$$

откуда

$$\cos\alpha' = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Принимая во внимание, что $\cos\alpha = \frac{a_x}{a}$, $\cos\alpha' = \frac{b_x}{b}$, находим

$$\frac{a_x}{a} = -\frac{b_x}{b}$$

и

$$\frac{a_x}{b_x} = -\frac{a}{b}.$$

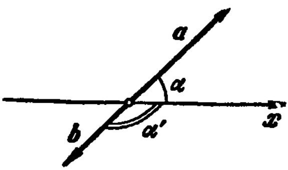


Рис. 281.

Аналогично

$$\frac{a_y}{b_y} = -\frac{a}{b}, \qquad \frac{a_z}{b_z} = -\frac{a}{b},$$

и мы снова приходим к (13). Итак, *для параллельности двух векторов нужно, чтобы тройка проекций одного из них была пропорциональна тройке проекций другого.*

Замечания. 1) Из вывода формул (13) ясно, что знак отношения $\frac{a_x}{b_x}$ показывает взаимную направленность параллельных векторов a и b: если $\frac{a_x}{b_x}$ положительно (отрицательно), то направления a и b совпадают (противоположны).

2) Если векторы a и b параллельны и $a_x = 0$, то и $b_x = 0$. Таким образом, в (13) не исключено, что один из числителей (или знаменателей) равен нулю, но тогда равен нулю и соответствующий знаменатель (или числитель).

n° 4. Работа. Покажем одно применение скалярного произведения. Пусть материальная точка M из положения A по прямолинейному отрезку AB переходит в положение B. Если во время движения на точку M действует постоянная по величине и по направлению сила F, образующая с вектором перемещения $\overline{AB}$ угол θ (рис. 282), то скалярное произведение

$$T = (F, \overline{AB}) = Fs\cos\theta$$

называется *работой* силы F на перемещении AB.

Если на точку M во время ее перемещения AB действует несколько (постоянных) сил F_1, F_2, ..., F_n, то они (будучи приложены к одной точке) имеют равнодействующую R, равную их геометрической сумме

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Отсюда

$$(R, \overline{AB}) = (F_1, \overline{AB}) + (F_2, \overline{AB}) + \ldots + (F_n, \overline{AB}),$$

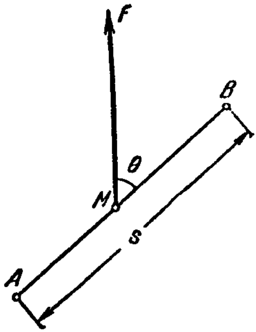


Рис. 282.

т. е. *работа равнодействующей нескольких сил равна сумме работ этих сил.* Мы видим, что это важное предложение механики является простым следствием распределительного свойства скалярного произведения.

n° 5. Задачи.

1) Найти угол A в треугольнике с вершинами $A(1, 3, -2)$, $B(5, 6, 10)$, $C(13, 19, 19)$.

Решение. Искомый угол — это угол между векторами $a = \overline{AB}$ и $b = \overline{AC}$. Их проекции (по формулам (2) и (3)) суть

$$a_x = 4, \quad a_y = 3, \quad a_z = 12,$$
$$b_x = 12, \quad b_y = 16, \quad b_z = 21.$$

По формуле (10) имеем

$$\cos A = \frac{48 + 48 + 252}{\sqrt{16 + 9 + 144} \cdot \sqrt{144 + 256 + 441}} = \frac{348}{13 \cdot 29} = \frac{12}{13}.$$

2) Найти угол между биссектрисами углов xOy и xOz.

Решение. Направим векторы по каждой из обеих биссектрис (рис. 283). Нам нужно найти угол θ между этими векторами.

Используя обозначения чертежа и сохраняя названия углов α, β, ..., имеем

$$\alpha=45^\circ, \quad \beta=45^\circ, \quad \gamma=90^\circ,$$
$$\alpha'=45^\circ, \quad \beta'=90^\circ, \quad \gamma'=45^\circ.$$

По формуле (11) будет

$$\cos\theta=\frac{1}{2}+0+0=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\theta=60^\circ$.

3) Найти орт e, перпендикулярный векторам

$$a\{5, 7, 1\} \quad \text{и} \quad b\{4, 2, -1\}.$$

Решение. Пользуясь условием перпендикулярности (12), имеем

$$5e_x+7e_y+e_z=0,$$
$$4e_x+2e_y-e_z=0.$$

Складывая эти равенства и деля результат на 9, найдем $e_x+e_y=0$. Значит, $e_y=-e_x$, а тогда $e_z=2e_x$. Но e есть орт. Стало быть, $e_x^2+e_y^2+e_z^2=1$, откуда $6e_x^2=1$ и $e_x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. Задача имеет два решения:

$$e=\pm\left\{\frac{\sqrt{6}}{6}, \ -\frac{\sqrt{6}}{6}, \ \frac{\sqrt{6}}{3}\right\}.$$

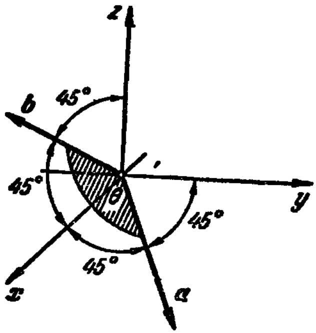


Рис. 283.

4) При каком λ векторы $a=2i+\lambda j+3k$ и $b=\lambda i+2j-3k$ взаимно перпендикулярны?

Решение. $ab=2\lambda+2\lambda-9=4\lambda-9$. Условием перпендикулярности a и b служит равенство $ab=0$. Следовательно, $\lambda=2{,}25$.

5) Найти угол A в треугольнике с вершинами $A(1, 4, 7)$, $B(4, -8, 3)$, $C(13, 1, 11)$.

Ответ: $\cos A=\frac{56}{169}$.

6) Точка $N(1, 3, 5)$ есть начало вектора $\overline{NK}$, параллельного вектору $12i+16j+21k$, причем $|\overline{NK}|=87$. Найти точку K.

Ответ: $K_1(37, 51, 68)$, $K_2(-35, -45, -58)$.

7) При каком λ векторы $a=\lambda i+\lambda j+5k$ и $b=2i+3j-7k$ взаимно перпендикулярны?

Ответ: $\lambda=7$.

8) Найти орт e, перпендикулярный векторам $3i+4j$ и $2j-k$.

Ответ: $e_1 = \left\{\frac{4}{\sqrt{61}}, \frac{-3}{\sqrt{61}}, \frac{-6}{\sqrt{61}}\right\}$, $e_2 = -e_1$.

9) Ребра куба OA и OB исходят из начала координат. Найти конец C третьего ребра, если $A(3, 6, -2)$, $B(6, -2, 3)$.

Ответ. $C(2p, -3p, -6p)$, $p = \pm 1$.

§ 5. Векторное произведение

n° 1. Определение и простейшие свойства векторного произведения.

Определение. *Векторным произведением* вектора a на вектор b называется вектор c, который строится по следующему правилу:

1) a и b приводятся к общему началу N, и вектор c откладывается от N перпендикулярно плоскости, содержащей a и b.

2) Направление c таково, что наблюдателю, у которого c проходит от ног к голове, вращение от первого сомножителя a ко второму b (на угол, не больший 180°) кажется происходящим против часовой стрелки.

3) Длина вектора c равна площади параллелограмма, построенного на a и b.

Описанное построение изображено на рис. 284.

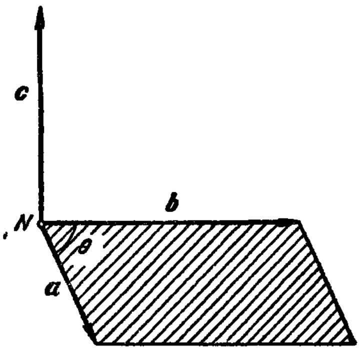


Рис. 284.

Обозначается векторное произведение a на b одним из знаков:

$$[ab],\ [a, b],\ a \times b.$$

Из данного определения вытекает:

I. *При перестановке сомножителей векторное произведение меняет направление:*

$$\boxed{[ba] = -[ab].} \tag{1}$$

Таким образом, векторное произведение переместительным свойством не обладает.

II. *Длина векторного произведения двух векторов равна произведению их длин и синуса угла между ними:*

$$\boxed{|a \times b| = ab \sin \theta.} \tag{2}$$

В самом деле, площадь F треугольника NAB (рис. 285) равна $\frac{1}{2}bh$. Но

$$h = a \sin \theta,$$

откуда

$$F = \frac{1}{2} ab \sin \theta.$$

Остается заметить, что площадь параллелограмма $NASB$ вдвое больше *).

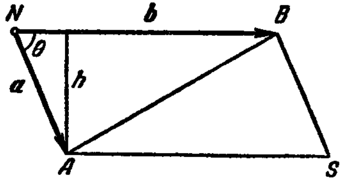


Рис. 285.

III. *Векторное произведение двух параллельных векторов есть нуль-вектор.*

Действительно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны, то упомянутый в определении параллелограмм вырождается. Еще проще обсуждаемое свойство получить чисто формально из формулы (2): ведь при параллельности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будет $\theta = 0$ или $\theta = 180°$. В обоих случаях $\sin \theta = 0$.

В частности,

IV. *Векторное произведение любого вектора на самого себя равно нулю*

$$\boxed{[\boldsymbol{aa}] = \bar{0}.} \tag{3}$$

V. *Справедлива формула*

$$\boxed{[\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k},} \tag{4}$$

связывающая координатные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Наряду с (4) будет

$$\boxed{[\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i}, \quad [\boldsymbol{ki}] = \boldsymbol{j},} \tag{5}$$

а также

$$\boxed{[\boldsymbol{ji}] = -\boldsymbol{k}, \quad [\boldsymbol{kj}] = -\boldsymbol{i}, \quad [\boldsymbol{ik}] = -\boldsymbol{j}.} \tag{6}$$

Чтобы доказать (4), достаточно заметить, что параллелограмм, построенный на ортах $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, есть квадрат с площадью, равной единице, и вспомнить взаимное расположение координат-

*) Учащимся иногда представляется соблазнительным краткое утверждение: „векторное произведение двух векторов есть произведение их длин и синуса угла между ними“, напоминающее определение скалярного произведения. Фраза в кавычках неверна: векторное произведение есть вектор.

ных осей *). Формулы (5) устанавливаются аналогично, а формулы (5) получаются из (4) и (5) на основании свойства I.

Для запоминания формул (4), (5), (6) полезно понятие о „круговой замене“ букв $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Вообразим их написанными около трех точек окружности (рис. 286) так, чтобы, двигаясь по этой окружности против часовой стрелки и начиная с буквы $\boldsymbol{i}$, мы встречали эти буквы в следующем порядке:

$$\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}. \tag{7}$$

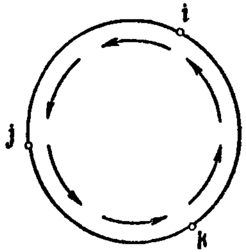


Рис. 286.

Тогда, двигаясь в том же направлении, но начав с буквы $\boldsymbol{j}$, получим расположение $\boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{i}$, про которое говорят, что оно получено из расположения (7) *круговой заменой*. Еще одна такая замена приводит к расположению $\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}$.

Следует запомнить формулу (4) и то, что формулы (5) получаются из нее круговыми заменами. Что касается формул (6), то порядок букв в их левых частях таков, как при обходе упомянутой окружности *по часовой стрелке*, и этому соответствуют знаки „—“ в правых частях.

VI. *При умножении одного из двух векторов на число их векторное произведение также умножается на это число, т. е.*

$$\boxed{[\boldsymbol{a},\ p\boldsymbol{b}] = p\,[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}].} \tag{8}$$

Формулу (8) читают и так: *числовой множитель можно вынести за знак векторного произведения.*

Докажем это свойство. Если $p > 0$, то вектор $p\boldsymbol{b}$ имеет то же направление, что и $\boldsymbol{b}$, а тогда оба векторных произведения, стоящих в (8), не только параллельны, но и направлены в одну сторону. Остается заметить, что при умножении одной из сторон параллелограмма на какое-либо число площадь этого параллелограмма умножается на то же число. Пусть теперь $p = -1$. Ясно, что векторные произведения $[\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}]$ и $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]$ направлены в противоположные стороны (см. рис. 287), ибо параллелограммы $NASB$ и $NAS'B$ лежат в одной плоскости, но если с конца вектора $\overline{NK}$ вращение от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$

*) Само определение векторного произведения связано с этим расположением. Иногда употребляют такую пространственную систему координат, что наблюдателю, у которого ось Oz проходит от ног к голове, вращение от оси Ox к оси Oy на 90° кажется происходящим *по часовой стрелке*. Применяя подобную систему координат, векторное произведение направляют противоположно тому, как это сделано у нас (и, таким образом, формулы (4), (5), (6) все же оказываются справедливыми!).

кажется происходящим против часовой стрелки, то вращение от a к $-b=\overline{NB'}$ будет казаться происходящим против часовой стрелки с конца вектора $\overline{NK'}$.

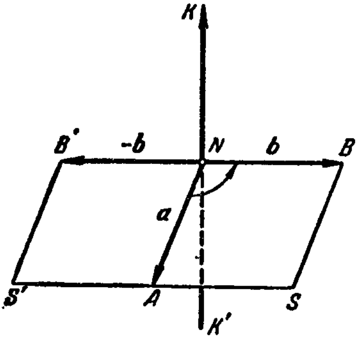


Рис. 287.

Остается заметить, что площади параллелограммов $NASB$ и $NAS'B'$, т. е. длины векторов $[ab]$ и $[a, -b]$, равны. Все это показывает, что

$$[a, -b]=-[ab].$$

Наконец, чтобы установить формулу (8) для $p<0$ и $p\neq -1$, пишем цепь равенств

$$[a, pb]=[a, -|p|b]= \\ =-[a, |p|b]=-|p|[ab]=p[ab],$$

каждое из которых уже обосновано.

n° 2. Распределительное свойство. Нахождение векторного произведения. Справедлива следующая важная

Теорема. *Векторное произведение обладает распределительным свойством, т. е.*

$$\boxed{[a, b_1+b_2]=[a, b_1]+[a, b_2]} \tag{9}$$

и

$$\boxed{[a_1+a_2, b]=[a_1, b]+[a_2, b].} \tag{10}$$

Грубо говоря, эта теорема означает, что при нахождении векторного произведения скобки можно раскрывать, как в арифметике.

Здесь мы примем эту теорему без доказательства, которое приводим для желающих ниже в n° 3 мелким шрифтом.

С помощью распределительного свойства нетрудно найти проекции вектора

$$c=[ab],$$

если известны проекции a и b.

Именно, по основной формуле векторного исчисления

$$a=a_x i+a_y j+a_z k, \qquad b=b_x i+b_y j+b_z k.$$

Значит,

$$c=[a_x i+a_y j+a_z k,\ b_x i+b_y j+b_z k].$$

Раскрывая скобки и вынося числовые множители, получим

$$c=a_x b_x[ii]+a_x b_y[ij]+a_x b_z[ik]+ \\ +a_y b_x[ji]+a_y b_y[jj]+a_y b_z[jk]+ \\ +a_z b_x[ki]+a_z b_y[kj]+a_z b_z[kk].$$

Согласно (3), будет

$$[ii]=[jj]=[kk]=\bar{0},$$

и три слагаемых справа обращаются в нуль. Для каждого из остающихся произведений применяем одну из формул (4), (5), (6). Это дает

$$c=a_xb_yk-a_xb_zj-a_yb_xk+a_yb_zi+a_zb_xj-a_zb_yi$$

или

$$c=(a_yb_z-a_zb_y)i+(a_zb_x-a_xb_z)j+(a_xb_y-a_yb_x)k. \qquad (11)$$

Коэффициентами при ортах i, j, k являются определители

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что это алгебраические дополнения элементов последней строки определителя 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ i & j & k \end{vmatrix}.$$

Поэтому формулу (11) можно переписать в компактном и легко запоминающемся виде

$$\boxed{[ab]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ i & j & k \end{vmatrix}.} \qquad (12)$$

Читатель обратит внимание, что первая строка определителя состоит из проекций первого сомножителя, вторая из проекций второго сомножителя, а третья из координатных ортов.

Примеры. 1) Найти $[ab]$, если $a=2i+3j+4k$, $b=5i+j-k$. Согласно (12)

$$[ab]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ i & j & k \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты при i, j, k соответственно таковы:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-7, \quad -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=22, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-13,$$

и потому $[ab]=-7i+22j-13k$. Следует привыкнуть коэффициенты при i, j, k находить в уме и сразу писать произведение $[ab]$.

2) Найти орт e, перпендикулярный к векторам $a\{5, 7, 1\}$ и $b\{4, 2, -1\}$.

Решение*). Искомый орт параллелен вектору $c=[ab]$. Но

$$c=\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = -9i+9j-18k.$$

Отсюда $|c|=\sqrt{81+81+324}=\sqrt{486}=9\sqrt{6}$. Стало быть,

$$e=\pm\frac{c}{|c|}=\pm\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}i+\frac{\sqrt{6}}{6}j-\frac{\sqrt{6}}{3}k\right).$$

3) Вычислить векторные произведения следующих пар векторов:

а) $a=i+j+k,\ b=2i-k;$ б) $x=3i-2k,\ y=i+4j+5k;$ в) $u=5i-2j+k,\ v=3i-7j+k.$

Ответы. $[ab]=-i+3j-2k$; $[xy]=8i-17j+12k$; $[uv]=5i-2j-29k$.

4) Найти площадь треугольника с вершинами $A(3, 1, 2)$, $B(2, 2, 3)$, $C(4, 3, 2)$.

Решение. Ясно (рис. 288), что площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, т. е. половине длины векторного произведения этих векторов. Проекции их суть $\overline{AB}\{-1, 1, 1\}$, $\overline{AC}\{1, 2, 0\}$. Значит,

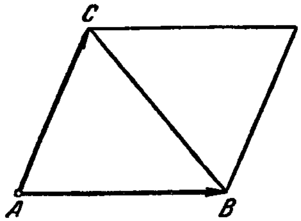


Рис. 288.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix}= -2i+j-3k.$$

Отсюда

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14},$$

и искомая площадь равна $\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

5) Найти площадь треугольника с вершинами $A(3, 1, 2)$, $B(4, 5, 2)$, $C(3, 2, 4)$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{69}$.

n° 3. Процесс построения векторного произведения. Доказательство распределительного свойства. Построение векторного произведения $[ab]$ полезно расчленить на несколько этапов. Именно, пусть a и b приведены

*) Ср. с решением задачи 3 из n° 5 § 4.

к общему началу O. Проведем через O плоскость P (см. рис. 289), перпендикулярную вектору $\boldsymbol{a}$, и спроектируем на нее вектор $\boldsymbol{b}$ (т. е. опустим из конца $\boldsymbol{b}$ перпендикуляр на эту плоскость). Обозначим вектор, полученный в результате этой операции, через $\boldsymbol{b}^*$. Легко видеть, что его длина есть

$$b^* = b \sin\theta,$$

где θ — угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Таков первый этап построения. На втором шаге повернем (в плоскости P) вектор $\boldsymbol{b}^*$ вокруг точки O на 90° в таком направлении, чтобы с конца вектора $\boldsymbol{a}$ это вращение казалось происходящим против часовой стрелки. Пусть в результате этой операции вектор $\boldsymbol{b}^*$ перешел в вектор $\boldsymbol{b}^{**}$. Тогда вектор $\boldsymbol{b}^{**}$ будет перпендикулярен к $\boldsymbol{a}$ (ибо он лежит в плоскости P) и к $\boldsymbol{b}$ [ибо он перпендикулярен к двум векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}^*$, лежащим в плоскости (не путать ее с P!), проведенной через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, и потому перпендикулярен ко всем векторам, лежащим в этой плоскости]. Непосредственно из чертежа видно, что наблюдателю, у которого $\boldsymbol{b}^{**}$ проходит от ног к голове, вращение от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ на угол $\theta < 180^\circ$ кажется происходящим против часовой стрелки. Таким образом, вектор $\boldsymbol{b}^{**}$ имеет то же направление, что и произведение $[\boldsymbol{ab}]$. Однако длина $\boldsymbol{b}^{**}$ равна $b \sin\theta$, и потому, чтобы получить из $\boldsymbol{b}^{**}$ произведение $[\boldsymbol{ab}]$, надо умножить $\boldsymbol{b}^{**}$ на длину a вектора $\boldsymbol{a}$. Таков третий и последний этап построения $[\boldsymbol{ab}]$. Итак,

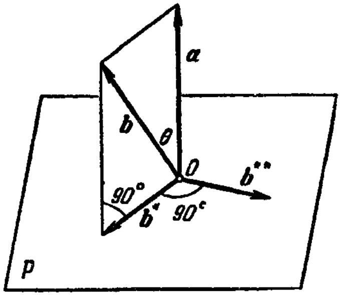


Рис. 289.

$$[\boldsymbol{ab}] = a\boldsymbol{b}^{**}.$$

Допустим теперь, что

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2.$$

Тогда $\boldsymbol{b}$ будет диагональю параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$. Будем строить три произведения $[\boldsymbol{ab}]$, $[\boldsymbol{ab}_1]$, $[\boldsymbol{ab}_2]$ при помощи только что описанного процесса. На первом шаге надо провести через общее начало O всех векторов плоскость P, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{a}$, и спроектировать на нее весь упомянутый параллелограмм. Легко усмотреть, что он спроектируется также в параллелограмм (заштрихованный на рис. 290), причем проекция $\boldsymbol{b}^*$ вектора $\boldsymbol{b}$ будет диагональю нового параллелограмма, т. е. будет верно равенство

$$\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b}_1^* + \boldsymbol{b}_2^*.$$

Теперь, чтобы проделать второй шаг построения, повернем заштрихованный параллелограмм как твердое тело в плоскости P около точки O на угол 90°. В новом положении (оно не изображено на чертеже) векторы $\boldsymbol{b}^*$, $\boldsymbol{b}_1^*$ и $\boldsymbol{b}_2^*$ перейдут в $\boldsymbol{b}^{**}$, $\boldsymbol{b}_1^{**}$ и $\boldsymbol{b}_2^{**}$, но по-прежнему $\boldsymbol{b}^{**}$ будет диагональю параллелограмма, построенного на $\boldsymbol{b}_1^{**}$ и $\boldsymbol{b}_2^{**}$, т. е.

$$\boldsymbol{b}^{**} = \boldsymbol{b}_1^{**} + \boldsymbol{b}_2^{**}.$$

Умножая это векторное равенство на числовой множитель a, мы и получаем формулу

$$[ab] = [ab_1] + [ab_2],$$

т. е. формулу (9) n°2. Переставляя сомножители, придем к формуле (10) того же n°.

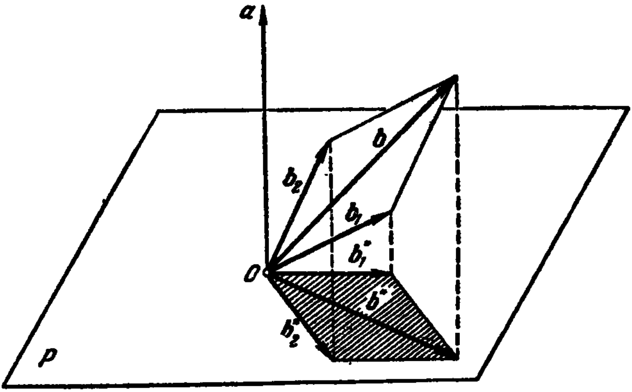


Рис. 290.

n°4. Момент силы относительно точки. Пусть к точке N твердого тела приложена сила $F = \overline{NK}$ и пусть O — некоторая точка пространства.

Как известно из механики, ***моментом*** силы F относительно точки O (ц е н т р а момента) называется вектор $L = \text{mom}_O F$, который: 1) имеет начало в точке O; 2) перпендикулярен к плоскости P, проходящей через точки O, N, K; 3) направлен так, что наблюдателю, у которого он проходит от ног к голове, сила F представляется вращающей плоскость P вокруг точки O против часовой стрелки; 4) имеет длину L, равную произведению величины F силы F на расстояние d от точки O до линии действия силы

$$L = Fd.$$

Из рис. 291 ясно, что L есть удвоенная площадь треугольника ONK. Если мы отложим от точки O вектор $\overline{OA}$, равный F, то тот же рис. 291 показывает, что L есть не что иное, как векторное произведение

$$L = \overline{ON} \times \overline{OA}$$

или, обозначая вектор $\overline{ON}$ через r (это радиус-вектор точки N приложения силы F, если центр момента O есть начало координат),

$$\boxed{L = [rF].} \tag{13}$$

Отсюда на основании распределительного свойства векторного произведения легко найти, как меняется момент при изменении его центра. Именно, пусть O_1 — точка, отличная от O. Тогда

$$\text{mom}_{O_1} F = [\overline{O_1N}, F] = [\overline{O_1O} + \overline{ON}, F] = [\overline{O_1O}, F] + [\overline{ON}, F]. \tag{14}$$

Если через F^* обозначить силу, равную F, но приложенную в точке O, то, очевидно,

$$[\overline{O_1O}, F] = \mathrm{mom}_{O_1} F^*.$$

Кроме того, $[\overline{ON}, F] = \mathrm{mom}_O F$ и (14) дает

$$\boxed{\mathrm{mom}_{O_1} F = \mathrm{mom}_O F + \mathrm{mom}_{O_1} F^*,} \qquad (15)$$

т. е. *момент силы относительно нового центра O_1 равен ее моменту относительно старого центра O, сложенному с моментом относительно O_1 равной силы, но приложенной в O.*

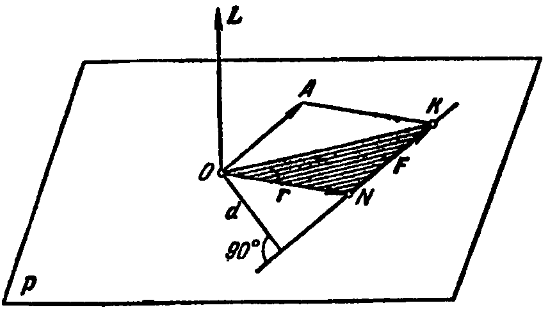


Рис. 291.

Проекции L_x, L_y, L_z вектора $L = \mathrm{mom}_O F$ на оси координат (причем O мы считаем началом координат) называются *моментами* силы F относительно этих осей. Они легко находятся из формулы (12). Именно, пусть проекции силы F на оси суть $F_x = X$, $F_y = Y$, $F_z = Z$, а координаты точки N приложения силы суть $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$. Тогда из (13) и (12) следует

$$L = \begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ i & j & k \end{vmatrix},$$

откуда

$$\boxed{L_x = yZ - zY, \qquad L_y = zX - xZ, \qquad L_z = xY - yX.} \qquad (16)$$

Соотношения (13), (15), (16) играют важную роль в статике твердого тела.

п° 5. Смешанное произведение трех векторов. Пусть a, b, c — три вектора. Составим векторное произведение $[ab]$ первых двух и умножим его скалярно на третий, т. е. найдем число

$$[ab]\, c.$$

Это число называется *смешанным произведением* векторов a, b, c и обозначается через abc. Нетрудно отдать себе отчет в геометрическом смысле величины $\mathbf{abc}$. Именно, если положить $[\mathbf{ab}] = \boldsymbol{\partial}$, то, как известно, будет

$$\mathbf{abc} = \partial \, \text{Пр}_{\boldsymbol{\partial}} \mathbf{c}.$$

Но $\text{Пр}_{\boldsymbol{\partial}} \mathbf{c}$ есть не что иное, как взятая с тем или иным знаком высота h параллелепипеда, построенного (рис. 292) на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, если за его основание принять параллелограмм, построенный на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

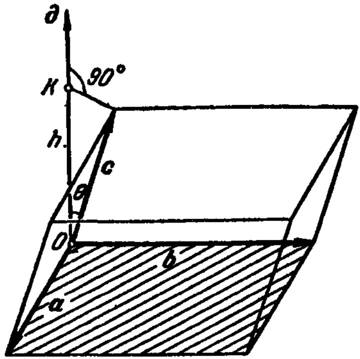


Рис. 292.

Если учесть, что ∂ есть площадь основания этого параллелепипеда, то станет ясным, что *абсолютная величина смешанного произведения $\mathbf{abc}$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.*

Остановимся на вычислении произведения $\mathbf{abc}$. Полагая, как и выше, $[\mathbf{ab}] = \boldsymbol{\partial}$, будем иметь

$$\mathbf{abc} = \partial_x c_x + \partial_y c_y + \partial_z c_z. \qquad (17)$$

Но ведь

$$\boldsymbol{\partial} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}.$$

Стало быть, ∂_x, ∂_y, ∂_z суть алгебраические дополнения элементов последней строки написанного определителя. Но тогда ясно, что

$$\boxed{\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},} \qquad (18)$$

ибо правая часть формулы (17) представляет собой разложение этого определителя по элементам третьей строки. Формула (18) удобна для вычисления объема параллелепипеда, построенного на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Пример. Найти объем V параллелепипеда с ребрами

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = -2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Согласно (18)

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

По правилу Саррюса $\mathbf{abc} = 12 + 10 - 40 = -18$ и $V = 18$.

§ 6. Переменные векторы. Вектор-функции и их дифференцирование

n° 1. Переменный вектор. Вектор-функция. Годограф. Представим себе точку $M(x, y, z)$, движущуюся в пространстве по некоторой кривой K (рис. 293). Выберем единицу времени и некоторый начальный момент. Тогда любой момент времени можно характеризовать числом t, равным продолжительности промежутка времени, отделяющего этот момент от начального. При этом числу t приписывается знак „+" или „—", смотря по тому, следует ли интересующий нас момент за начальным или предшествует ему.

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}=\overline{OM}$ в каждый определенный момент t будет иметь определенные длину и направление. Однако с течением времени эти длина и направление будут изменяться *). Таким образом, здесь мы имеем дело с переменным вектором. Вообще, *переменным вектором называется вектор, у которого изменяется длина или направление*. Впрочем, постоянный вектор мы будем считать частным случаем переменного (подобно тому как мы поступали с постоянной величиной в скалярном анализе).

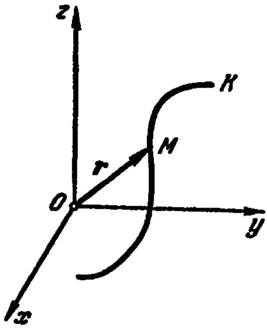


Рис. 293.

В скалярном анализе, когда мы имели дело с какой-либо переменной, мы различали ее отдельные постоянные значения. Собственно говоря, задание переменной и состояло в задании множества ее значений. Точно так же задание переменного вектора $\boldsymbol{a}$ сводится к заданию множества постоянных векторов — отдельных значений $\boldsymbol{a}$. В процессе своего изменения $\boldsymbol{a}$ принимает то или другое из этих значений.

Если $\boldsymbol{a}$ — переменный вектор, то его проекции a_x, a_y, a_z также будут (скалярными!) переменными величинами. Задание вектора $\boldsymbol{a}$ равносильно заданию переменных a_x, a_y, a_z. Если $\boldsymbol{a}$ принимает одно из своих значений, то a_x, a_y, a_z также принимают соответствующие постоянные значения.

Весьма важным примером переменного вектора являются вектор-функции скалярного аргумента. Говорят, что *переменный вектор $\boldsymbol{a}$ есть вектор-функция скалярного аргумента u, если каждому значению u сопоставлено определенное значение $\boldsymbol{a}$*. В этом случае пишут

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u).$$

Ясно, что если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$, то и проекции a_x, a_y, a_z будут (скалярными!) функциями аргумента u:

$$a_x=a_x(u), \quad a_y=a_y(u), \quad a_z=a_z(u).$$

---

*) В частном случае, когда кривая K лежит на поверхности шара с центром в начале координат, длина r не меняется. Точно так же возможен случай постоянного направления r, имеющий место, когда K есть луч с началом в начале координат.

Рассмотренный выше случай радиуса-вектора $\mathbf{r}=\overline{OM}$ движущейся точки M как раз и дает пример вектор-функции. Здесь аргументом служит время t, и потому

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t). \tag{1}$$

Это равенство называется *векторным уравнением движения* точки M. Координаты (x, y, z) точки M являются проекциями ее радиуса-вектора $\mathbf{r}$, и потому уравнение (1) можно заменить тремя скалярными уравнениями движения

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

Например, равенства

$$x=t^2, \quad y=7t+2, \; z=\sin t$$

задают движение точки. Их можно заменить одним векторным уравнением

$$\mathbf{r}=t^2\mathbf{i}+(7t+2)\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}.$$

Определение. *Годографом* переменного вектора называется геометрическое место концов всех его отдельных значений, если их откладывать от одного общего начала.

Годографом вектор-функции $\mathbf{a}(u)$ служит (вообще говоря, пространственная) кривая линия. Если все значения $\mathbf{a}(u)$ откладывать от начала координат, то равенства

$$x=a_x(u), \quad y=a_y(u), \quad z=a_z(u)$$

представят собой параметрические уравнения упомянутой линии.

Если вектор $\mathbf{a}(u)$ сохраняет постоянную длину, то его годограф будет линией, лежащей на поверхности шара. Годографом постоянного вектора служит точка. Годографом радиуса-вектора $\mathbf{r}=\overline{OM}$ движущейся точки M является траектория этой точки.

n° 2. Предел вектора. Рассмотрим переменный вектор $\mathbf{a}$, изменяющийся по некоторому закону *).

Определение 1. Переменный вектор $\mathbf{a}$ называется *бесконечно малым*, если его длина стремится к нулю

$$a \to 0.$$

Определение 2. Постоянный вектор $\mathbf{l}$ называется *пределом* переменного вектора $\mathbf{a}$, если их разность есть бесконечно малый вектор.

---

*) Например, $\mathbf{a}$ является вектор-функцией $\mathbf{a}=\mathbf{a}(u)$ скалярного аргумента u, стремящегося к определенному пределу, или, что еще проще, $\mathbf{a}$ пробегает нумерованную последовательность постоянных значений $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$

Записывают это одной из формул

$$\lim \boldsymbol{a} = \boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{l}.$$

Пусть (рис. 294) векторы $\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{a}$ приведены к общему началу O, совпадающему с началом координат. Тогда разность $\boldsymbol{l} - \boldsymbol{a}$ изображается вектором $\overline{AL}$.

Если длина этого вектора стремится к нулю, то точка A стремится к совпадению с точкой L, и потому

$$x_A \to x_L.$$

Но ведь (поскольку O совпадает с началом координат) x_A и x_L являются проекциями векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$ на ось Ox. Поэтому предыдущее соотношение означает, что

$$a_x \to l_x.$$

Аналогично обстоит дело с проекциями наших векторов на другие оси. Таким образом, верна

Теорема 1. Соотношение

$$\boxed{\lim \boldsymbol{a} = \boldsymbol{l}} \tag{2}$$

влечет тройку соотношений

$$\boxed{a_x \to l_x, \quad a_y \to l_y, \quad a_z \to l_z.} \tag{3}$$

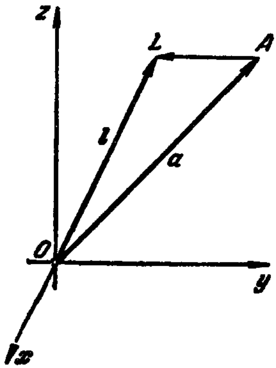


Рис. 294.

Покажем, что верна и обратная

Теорема 2. Из (3) *следует* (2).

В самом деле, приведем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$ к общему началу O, совпадающему с началом координат. Если при этом концами векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{l}$ окажутся точки A и L

$$\boldsymbol{a} = \overline{OA}, \quad \boldsymbol{l} = \overline{OL},$$

то в само собой понятных обозначениях будет

$$a_x = x_A, \quad a_y = y_A, \quad a_z = z_A,$$
$$l_x = x_L, \quad l_y = y_L, \quad l_z = z_L.$$

Тогда (3) означает, что

$$x_A \to x_L, \quad y_A \to y_L, \quad z_A \to z_L,$$

откуда

$$\sqrt{(x_A - x_L)^2 + (y_A - y_L)^2 + (z_A - z_L)^2} \to 0.$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$|\overline{AL}| \to 0,$$

а это по определению 2 и означает, что верно (2).

Таким образом, векторное соотношение (2) равносильно тройке скалярных соотношений (3). Эта равносильность позволяет с большой легкостью перенести на векторы важнейшие свойства скалярных переменных. Например, верна

Теорема 3. *Если*

$$\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{a}^* \to \boldsymbol{l}^*, \tag{4}$$

то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^* \to \boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^*, \quad \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^* \to \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l}^*, \tag{5}$$

т. е. предел суммы (разности) векторов, имеющих пределы, равен сумме (разности) их пределов.

Действительно, из (4) следует, что

$$a_x \to l_x, \quad a_x^* \to l_x^*, \ \dots, \ a_z^* \to l_z^*.$$

Тогда

$$a_x + a_x^* \to l_x + l_x^*, \quad a_y + a_y^* \to l_y + l_y^*, \quad a_z + a_z^* \to l_z + l_z^*. \tag{6}$$

Если положить для краткости

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^* = \boldsymbol{m},$$

то (6) можно переписать в виде

$$b_x \to m_x, \quad b_y \to m_y, \quad b_z \to m_z,$$

и по теореме 2 будет

$$\lim \boldsymbol{b} = \boldsymbol{m},$$

что равносильно первому из соотношений (5). Второе доказывается аналогично.

Сходными рассуждениями доказываются еще две теоремы:

Теорема 4. *Из* (4) *следует, что*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^*) \to (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l}^*), \quad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}^*] \to [\boldsymbol{l}, \boldsymbol{l}^*],$$

т. е. предел скалярного (векторного) произведения двух векторов, имеющих пределы, равен (соответствующему) произведению их пределов.

Теорема 5. *Если*

$$\lim \boldsymbol{a} = \boldsymbol{l},$$

а p — скалярная переменная, имеющая конечный предел q, то

$$\lim (p\boldsymbol{a}) = q\boldsymbol{l}.$$

n° 3. Непрерывность вектор-функций. Их дифференцирование. Пусть

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$$

— вектор-функция скалярного аргумента u. Как и в обычном дифференциальном исчислении, *функция $\boldsymbol{a}(u)$ называется непрерывной, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое же приращение функции, т. е.*

$$\lim_{\Delta u \to 0}[\boldsymbol{a}(u+\Delta u)-\boldsymbol{a}(u)]=\overline{0}. \tag{7}$$

Равенство (7) можно записать и в форме

$$\lim_{\Delta u \to 0}\boldsymbol{a}(u+\Delta u)=\boldsymbol{a}(u).$$

Заменяя здесь u через u_0, а $u+\Delta u$ через u, придаем определению непрерывности вид

$$\lim_{u \to u_0}\boldsymbol{a}(u)=\boldsymbol{a}(u_0).$$

Таким образом, как и в гл. II, свойство непрерывности вектор-функции означает, что *предел этой функции* (при $u \to u_0$) *равен ее значению от предела аргумента.*

Остановимся теперь на действии дифференцирования непрерывной вектор-функции. Пусть

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$$

— такая функция.

Проделаем 5 операций:

1) закрепим значение аргумента u и найдем соответствующее значение функции $\boldsymbol{a}(u)$;

2) придадим аргументу приращение Δu и найдем новое значение функции $\boldsymbol{a}(u+\Delta u)$;

3) найдем приращение $\Delta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u+\Delta u)-\boldsymbol{a}(u)$;

4) составим отношение $\dfrac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta u}=\dfrac{\boldsymbol{a}(u+\Delta u)-\boldsymbol{a}(u)}{\Delta u}$;

5) устремим Δu к нулю и будем искать предел*)

$$\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\boldsymbol{a}(u+\Delta u)-\boldsymbol{a}(u)}{\Delta u}.$$

Этот предел называется *производной* функции $\boldsymbol{a}(u)$ и обозначается одним из символов

$$\boldsymbol{a}',\quad \boldsymbol{a}'(u),\quad \frac{d\boldsymbol{a}}{du}.$$

Нахождение $\boldsymbol{a}'(u)$ называется *дифференцированием* функции $\boldsymbol{a}(u)$.

*) Которого, разумеется, может и не существовать.

Нетрудно выяснить геометрический смысл производной $a'(u)$. Для этого представим себе годограф нашей вектор-функции. Если (см. рис. 295)

$$a(u)=\overline{OM}, \quad a(u+\Delta u)=\overline{ON},$$

то

$$\Delta a=\overline{MN}.$$

Отношение $\frac{\Delta a}{\Delta u}$ представляет собой вектор того же направления, что и $\overline{MN}$, если $\Delta u>0$, и противоположного направления, если $\Delta u<0$. На нашем чертеже изображен случай, когда $\Delta u>0$ и

$$\frac{\Delta a}{\Delta u}=\overline{MP}.$$

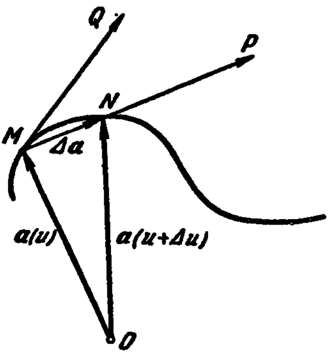


Рис. 295.

Мы видим, что вектор $\overline{MP}$ направлен по *секущей* к годографу. Когда $\Delta u\to 0$, (по непрерывности нашей вектор-функции) точка N стремится к совпадению с точкой M. Поэтому предельное положение вектора $\overline{MP}$ будет направлено по *касательной* MQ к годографу. Но это предельное положение и есть производная $a'(u)$. Таким образом, *производная вектор-функции направлена по касательной к годографу этой функции.*

Пример. Пусть точка M движется в пространстве и

$$r=r(t)$$

— векторное уравнение ее движения. Годографом радиуса-вектора $r(t)$ служит траектория точки M. Производная $r'(t)$ называется *скоростью* точки M. Таким образом, скорость точки есть вектор, направленный по касательной к траектории этой точки. Этот вектор характеризует направление движения и его быстроту. Именно, длина вектора $r'(t)$ будет пределом длины вектора

$$\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}$$

при $\Delta t\to 0$. Считая для определенности $\Delta t>0$, мы видим, что

$$|r'(t)|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|r(t+\Delta t)-r(t)|}{\Delta t}.$$

Но (рис. 296) $|\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)|$ является длиной хорды $\overline{MN}$, стягивающей бесконечно малую дугу $\overset{\frown}{MN}$ траектории точки. Как известно, эти хорды и дуга эквивалентны друг другу, и потому

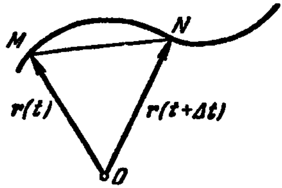


Рис. 296.

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overset{\frown}{MN}}{\Delta t},$$

т. е. длина вектора скорости есть *предел отношения пути, пройденного точкой за бесконечно малый промежуток времени, к продолжительности этого промежутка*. Эта скалярная величина является быстротой точки. Направление же вектора $\boldsymbol{r}'(t)$ показывает направление движения.

n° 4. Формулы и правила дифференцирования вектор-функций. Правила дифференцирования вектор-функций совершенно аналогичны таким же правилам обычного дифференциального исчисления. Они исчерпываются следующей таблицей, в которой $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(u)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(u)$ — вектор-функции скалярного аргумента u, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, $\varphi(u)$ — скалярная функция u, k — постоянное число, v — скалярный аргумент, связанный с u формулой $u=u(v)$:

1) $\dfrac{d\boldsymbol{c}}{du}=\overline{0}$;

2) $\dfrac{d(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{du}=\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}+\dfrac{d\boldsymbol{b}}{du}$;

3) $\dfrac{d(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{du}=\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}-\dfrac{d\boldsymbol{b}}{du}$;

4) $\dfrac{d(\varphi\boldsymbol{a})}{du}=\dfrac{d\varphi}{du}\boldsymbol{a}+\varphi\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}$;

5) $\dfrac{d(k\boldsymbol{a})}{du}=k\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}$;

6) $\dfrac{d(\varphi\boldsymbol{c})}{du}=\dfrac{d\varphi}{du}\boldsymbol{c}$;

7) $\dfrac{d(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})}{du}=\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\dfrac{d\boldsymbol{b}}{du}$;

8) $\dfrac{d(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a})}{du}=\boldsymbol{c}\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}$;

9) $\dfrac{d[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]}{du}=\left[\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du},\ \boldsymbol{b}\right]+\left[\boldsymbol{a},\ \dfrac{d\boldsymbol{b}}{du}\right]$;

10) $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dv}=\dfrac{d\boldsymbol{a}}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}$.

Формула 1) очевидна. Для доказательства 2) положим $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Тогда $\boldsymbol{s}+\Delta\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})$, откуда $\Delta\boldsymbol{s}=\Delta\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{b}$ и

$$\frac{\Delta\boldsymbol{s}}{\Delta u}=\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta u}+\frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\Delta u}.$$

Переходя к пределу при $\Delta u\to 0$, получим 2). Формула 3) доказывается аналогично. Далее, пусть

$$\varphi(u)\,\boldsymbol{a}(u)=\boldsymbol{m}(u).$$

Тогда

$$\boldsymbol{m}(u+\Delta u)=\varphi(u+\Delta u)\,\boldsymbol{a}(u+\Delta u)=(\varphi+\Delta\varphi)(\boldsymbol{a}+\Delta\boldsymbol{a})=$$
$$=\varphi\boldsymbol{a}+\Delta\varphi\cdot\boldsymbol{a}+\varphi\cdot\Delta\boldsymbol{a}+\Delta\varphi\cdot\Delta\boldsymbol{a},$$

стало быть,

$$\Delta \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}(u+\Delta u) - \boldsymbol{m}(u) = \Delta\varphi\cdot\boldsymbol{a} + \varphi\cdot\Delta\boldsymbol{a} + \Delta\varphi\cdot\Delta\boldsymbol{a}$$

и

$$\frac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta u} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta u}\boldsymbol{a} + \varphi\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta u} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta u}\Delta\boldsymbol{a}.$$

В пределе при $\Delta u \to 0$ мы получаем*) формулу 4). Формулы 5) и 6) — частные случаи 4); формула 7) доказывается аналогично 4); 8) — частный случай 7), а 9) аналогична 4). Наконец, 10) доказывается совершенно так же, как и в скалярном анализе.

Пусть a_x, a_y, a_z — проекции вектор-функции $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(u)$. Тогда

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}.$$

Пользуясь формулами 2) и 6), находим

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{du} = \frac{da_x}{du}\boldsymbol{i} + \frac{da_y}{du}\boldsymbol{j} + \frac{da_z}{du}\boldsymbol{k}.$$

Но при разложении вектора по координатным ортам коэффициент, стоящий при орте $\boldsymbol{i}$, будет проекцией разлагаемого вектора на ось Ox. Стало быть,

$$\boxed{\frac{da_x}{du} = \text{Пр}_x\,\frac{d\boldsymbol{a}}{du},}$$

т. е. *проекция производной вектора на какую-либо ось равна производной его проекции на эту ось.*

Пример. Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ — радиус-вектор движущейся точки $M(x, y, z)$. Положим $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Как мы уже знаем, $\boldsymbol{v}$ есть скорость точки M. По только что сказанному будет $v_x = \frac{dr_x}{dt}$. Но ведь $r_x = x$. Значит, $v_x = \frac{dx}{dt}$. Аналогично обстоит дело и с проекциями вектора $\boldsymbol{v}$ на другие оси. Таким образом,

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt},}$$

т. е. *проекции скорости движущейся точки (на оси координат) равны производным от ее соответствующих координат по времени.*

Например, если точка движется так, что $x = 8t^2 - 1$, $y = 4t + 2$, $z = t^3 + 1$, то $v_x = 16t$, $v_y = 4$, $v_z = 3t^2$. Отсюда длина вектора $\boldsymbol{v}$ (т. е. то, что мы выше назвали „быстротой“ движения) равна $v = \sqrt{256t^2 + 16 + 9t^4}$. В момент $t = 1$ будет $v = \sqrt{281} \cong 16{,}8$.

*) Функция $\boldsymbol{a}(u)$ предполагается непрерывной, и потому $\lim \Delta\boldsymbol{a} = \bar{0}$ при $\Delta u \to 0$.

ГЛАВА IX

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Плоскость

n° 1. Уравнение плоскости. Закрепим в пространстве какую-нибудь систему координат $Oxyz$ и рассмотрим некоторую плоскость P. Выберем на P какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и проведем через M_0 вектор $n = \overline{M_0N}$, перпендикулярный плоскости P. Длина этого вектора нас не интересует и может быть выбрана произвольно. Вектор $\overline{M_0N}$ называется *нормалью* к плоскости P. Пусть A, B, C — проекции вектора $\overline{M_0N}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно.

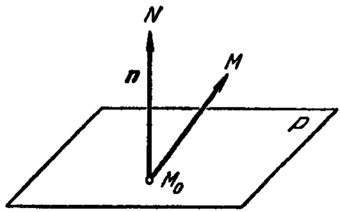


Рис. 297.

Проделав это предварительное построение, возьмем (рис. 297) в пространстве (не обязательно на плоскости!) произвольную точку $M(x, y, z)$. Совершенно ясно, что точка M будет лежать на плоскости P тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0N}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны. Так как проекции вектора $\overline{M_0M}$ на оси суть $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, то условие перпендикулярности векторов $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_0N}$ имеет вид

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \qquad (1)$$

Таким образом, точка M лежит на плоскости P тогда и только тогда, когда ее координаты x, y, z удовлетворяют уравнению (1). Иными словами, *равенство* (1) *есть уравнение плоскости* P. Замечая, что степень этого уравнения первая, приходим к важной теореме:

Теорема 1. *Всякой плоскости соответствует уравнение первой степени.*

Легко понять, что при совершенно произвольных числах x_0, y_0, z_0, A, B, C (впрочем, из последних трех хоть одно должно не быть нулем) уравнение (1) оказываетси уравнением некоторой плоскости, а именно плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулирной вектору $\{A, B, C\}$. Опираись на это замечание, докажем теорему:

Теорема 2. *Всякому уравнению первой степени*

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \tag{2}$$

(в котором хоть одно из чисел A, B, C отлично от нуля) соответствует плоскость.

В самом деле, возьмем любую тройку чисел (x_0, y_0, z_0), удовлетворяющую уравнению (2)*). Тогда будет

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

откуда $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, и уравнение (2) мы сможем переписать в виде

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0,$$

или в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

а это уравнение вида (1), и ему, действительно, соответствует плоскость.

Замечания. 1) Из доказательства теоремы 2 видно, каков *геометрический смысл коэффициентов A, B, C в уравнении* (2): *это проекции вектора, перпендикулярного плоскости.* В связи с этим указанные коэффициенты мы будем называть *направляющими* коэффициентами.

2) Из предшествующего замечании иcно, что, поскольку при $A=0$ вектор $\{A, B, C\}$ перпендикулирен оси Ox, то при $A=0$ плоскость (2) параллельна оси**) Ox. Так же обстоит дело с условием параллельности плоскости (2) другим осям координат.

Иными словами, *если в уравнение плоскости не входит одна из координат, то плоскость параллельна соответствующей оси.* Например, уравнению $5x-3z+7=0$ отвечает плоскость, параллельнаи оси Oy.

---

*) Это сделать легко. Действительно, пусть, например, $A\neq 0$. Тогда, взяв по произволу y_0 и z_0 и подставив их в (2), найдем x_0.

**) Прямая, лежащая на какой-либо плоскости, считается параллельной этой плоскости.

3) Если $A=B=0$, то наша плоскость окажетси параллельной осям Ox и Oy, т. е. координатной плоскости xy. Ее уравнение будег иметь вид

$$Cz+D=0$$

или (ведь $C \neq 0$) $z=-\frac{D}{C}$, т. е.

$$\boxed{z=C.}$$

В частности, уравнение $z=0$ есть уравнение самой плоскости xy.

4) Если в уравнении (2) $D=0$, то точка $O(0, 0, 0)$ будет лежать на соответствующей плоскости, ибо тогда тройка чисел 0, 0, 0 удовлетворит уравнению (2). Таким образом, *равенство $D=0$ есть условие прохождения плоскости* (2) *через начало координат.*

5) Если в (2) $A=D=0$, то соответствующаи плоскость будет параллельна оси Ox и пройдет через начало координат. Но тогда ось Ox будет лежать на рассматриваемой плоскости. Так же обстоит дело и по отношению к другим осим. Например, плоскость $5x-3z=0$ содержит в себе ось Oy.

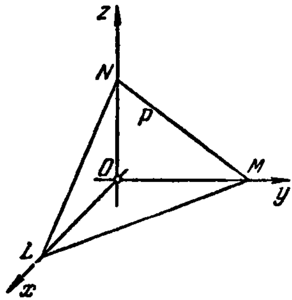


Рис. 298.

n°2. Уравнение плоскости в отрезках на осях. Пусть в уравнении плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

будет $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, т. е. плоскость не параллельна ни одной из осей координат и не проходит через начало координат (рис. 298).

Преобразуем уравнение (2) к виду

$$Ax+By+Cz=-D$$

и далее

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1.$$

Если положить дли краткости

$$-\frac{D}{A}=a, \quad -\frac{D}{B}=b, \quad -\frac{D}{C}=c,$$

то уравнение нашей плоскости примет вид

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \qquad (3)$$

Последнее уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках на осях*. Это название объясняется тем, что *знаменатели a, b, c суть отрезки, отсекаемые нашей плоскостью от осей координат.* В самом деле, желая найти точку $L(x_L, y_L, z_L)$, в которой плоскость пересекает ось Ox, надо учесть, что $y_L = z_L = 0$. Подставляя эти значения в (3), сразу находим, что $x_L = a$.

Пример. Привести уравнение $3x + 5y - 7z + 6 = 0$ к виду (3).

Задача решается последовательными преобразованиями

$$3x + 5y - 7z = -6,$$

$$\frac{3x}{-6} + \frac{5y}{-6} - \frac{7z}{-6} = 1, \tag{4}$$

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-{}^6/_5} + \frac{z}{{}^6/_7} = 1.$$

Другое решение: полагая $y = z = 0$, находим $3x + 6 = 0$, откуда $x = -2$. Это есть отрезок a, отсекаемый плоскостью от оси Ox. Аналогично находим $b = -\frac{6}{5}$, $c = \frac{6}{7}$, что снова приводит к (4).

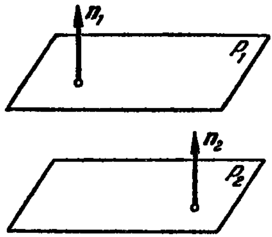


Рис. 299.

Теоретическое значение уравнения (3) невелико, но это уравнение полезно для построения плоскости на чертеже.

n°3. Угловые соотношения.

I. Условие параллельности плоскостей. Рассмотрим две плоскости

$$P_1:\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{5}$$

$$P_2:\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{6}$$

Если эти плоскости параллельны (рис. 299), то будут параллельны и их нормали, т. е. перпендикулярные к нашим плоскостям векторы $n_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $n_2\{A_2, B_2, C_2\}$. Но тогда, как известно, окажется

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},} \tag{7}$$

т. е. *для параллельности двух плоскостей нужно, чтобы тройка направляющих коэффициентов одной из них была пропорциональна*) тройке направляющих коэффициентов другой.* Условие (7) является условием параллельности плоскостей (5) и (6).

*) При этом надо помнить, что обращение в нуль какого-либо числителя влечет обращение в нуль соответствующего знаменателя и обратно.

Например, плоскости

$$3x-5y+6z-9=0,$$
$$6x-10y+12z+3=0$$

параллельны, ибо

$$\frac{3}{6}=\frac{-5}{-10}=\frac{6}{12}.$$

Точно так же параллельны плоскости

$$2x+3z-1=0,$$
$$4x+6z+5=0,$$

ибо здесь

$$\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$$

и $B_1=B_2=0$.

II. Условие перпендикулирности плоскостей. Если плоскости (5) и (6) взаимно перпендикулирны (рис. 300), то таковы же их нормали $n_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $n_2\{A_2, B_2, C_2\}$. Но тогда, как известно,

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0,} \tag{8}$$

т. е. *для взаимной перпендикулярности двух плоскостей нужно, чтобы сумма парных произведений их направляющих коэффициентов равнялась нулю.* Равенство (8) ивляетси условием перпендикулирности плоскостей (5) и (6).

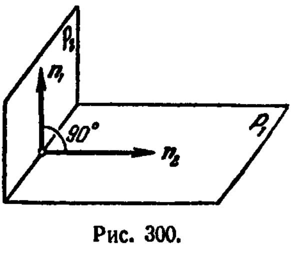


Рис. 300.

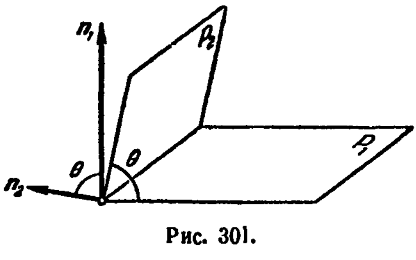


Рис. 301.

III. Угол между двумя плоскостими. При любом расположении плоскостей (5) и (6) угол θ между ними равен углу между их нормалями (рис. 301). Поэтому

$$\boxed{\cos\theta=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.}$$

Двойной знак поставлен здесь потому, что мы не закрепляли направлении нормалей, а перемена одного из этих направлений заменяет угол θ на $\pi-\theta$ и тем самым меняет знак косинуса.

§ 2. Прямая линия

n° 1. Канонические уравнения прямой. Пусть p — некоторая прямая, расположенная в пространстве. Выберем на ней произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и проведем через M_0 какой-нибудь вектор $\mathbf{p}$, лежащий на прямой p. Пусть l, m, n — проекции этого вектора (мы будем называть его „направляющим" вектором прямой p) на оси Ox, Oy, Oz соответственно суть l, m, n.

Проделав это предварительное построение, возьмем в пространстве (не обязательно на нашей прямой!) произвольную точку $M(x, y, z)$ (рис. 302). Ясно, что точка M будет лежать на прямой p тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ окажется параллельным направляющему вектору $\mathbf{p}$. Так как проекциями вектора $\overline{M_0M}$ на оси служат разности $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, то условием нахождения точки M на прямой p являются равенства

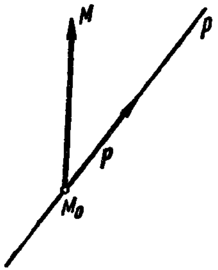


Рис. 302.

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.} \tag{1}$$

Эти равенства называются *каноническими уравнениями* прямой p. Знаменатели l, m, n мы будем называть направляющими знаменателями. Надо помнить, что это проекции вектора, лежащего на прямой.

Ясно, что взяв любые числа x_0, y_0, z_0, l, m, n (лишь бы среди последних трех хоть одно не равнялось нулю) и написав уравнения (1), мы получим канонические уравнения некоторой прямой, а именно той, которая проходит через точку (x_0, y_0, z_0) и несет на себе вектор $\{l, m, n\}$, если он отложен от точки (x_0, y_0, z_0). Как всегда, обращение в нуль одного из знаменателей в пропорции (1) означает обращение в нуль соответствующего числителя. Например, уравнения

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-7}{4} \tag{2}$$

задают прямую, проходящую через точку (5, 3, 7) и несущую на себе отложенный от этой точки вектор $\{2, 0, 4\}$. Этот вектор, а с ним и прямая (2), перпендикулярен оси Oy. Но тогда прямая лежит в плоскости $y=3$, и потому для всех точек прямой будет $y-3=0$.

n°2. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Очень легко написать канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В самом деле, мы можем вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$ принять за направляющий. Поскольку интересующая нас прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то уравнения прямой суть

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \tag{3}$$

n°3. Задание прямой двумя плоскостями. Рассмотрим две непараллельные друг другу плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{4}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{5}$$

Они пересекаются по некоторой прямой p. Ясно, что координаты любой точки этой прямой удовлетворяют обоим уравнениям (4) и (5), и обратно, всякая точка, координаты которой удовлетворяют обоим уравнениям (4) и (5), лежит на p. Таким образом, пара уравнений (4) и (5) задает прямую. Если мы хотим получить канонические уравнения этой прямой, то проще всего найти какие-либо две лежащие на ней точки и применить уравнения (3).

Пример. Написать канонические уравнения прямой, являющейся пересечением плоскостей

$$2x + 3y + 5z - 3 = 0,$$
$$x + y + 2z - 1 = 0.$$

Решение. Положим $z = 0$. Тогда предыдущие уравнения примут вид

$$2x + 3y = 3,$$
$$x + y \ = 1.$$

Решая эту систему уравнений, найдем $x = 0$, $y = 1$. Таким образом, на нашей прямой лежит точка $M_1(0, 1, 0)$. Теперь положим $z = 1$. Тогда для определения x и y получаются уравнения

$$2x + 3y = -2,$$
$$x + y \ = -1,$$

из которых находим $x = -1$, $y = 0$. Значит, другой точкой нашей прямой является $M_2(-1, 0, 1)$. Применяя формулы (3), получаем искомые уравнения

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$

n°4. Параметрические уравнения прямой. Иногда примую полезно задавать не при помощи канонических уравнений (1), а несколько иначе. Именно, если примаи p задана уравнениями

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{1}$$

то дли каждой ее точки (x, y, z) написанные дроби будут иметь определенное значение. Обозначим это значение (дли каждой точки свое!) через t. Тогда

$$\frac{x-x_0}{l}=t, \quad \frac{y-y_0}{m}=t, \quad \frac{z-z_0}{n}=t,$$

откуда

$$\boxed{x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt.} \tag{6}$$

Равенства (6) называютси *параметрическими уравнениями* примой p. Они и представлиют собой то задание этой примой, которое мы имели в виду выше. Чтобы получить из (6) все точки примой, надо заставить параметр t пробежать всю числовую ось.

Параметрическими уравнениими примой удобно пользоватьси дли нахождении точки пересечении этой примой с плоскостью.

Пример. Найти пересечение нримой

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{5} \tag{7}$$

и плоскости

$$x+2y-3z-2=0. \tag{8}$$

Решение. Параметрические уравнении примой (7) суть

$$x=2+3t, \quad y=-1+4t, \quad z=5t. \tag{9}$$

Подставлии эти выражении в (8), находим

$$(2+3t)+2(-1+4t)-3(5t)-2=0$$

или

$$-4t-2=0,$$

откуда $t=-\frac{1}{2}$. Тогда равенства (9) дают искомую точку $\left(\frac{1}{2}, -3, -\frac{5}{2}\right)$.

Разумеетси, предложенную задачу можно было бы решить и не переходи к параметрическим уравнениям примой (7), а непосредственно решаи совместно систему уравнений (7) и (8), но примененный прием упрощает выкладки.

n° 5. Угловые соотношения между прямыми. Рассмотрим две прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \tag{10}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}. \tag{11}$$

Если вспомнить, что векторы $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$ лежат соответственно на прямых (10) и (11), то сразу получаются следующие результаты:

I. Условие параллельности прямых. *Чтобы прямые* (10) *и* (11) *были параллельны, нужно, чтобы тройка направляющих знаменателей одной из них была пропорциональна тройке направляющих знаменателей другой, т. е. чтобы было*

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.} \tag{12}$$

II. Условие перпендикулярности прямых. *Чтобы прямые* (10) *и* (11) *были перпендикулярны, нужно, чтобы сумма парных произведений их направляющих знаменателей равнялась нулю, т. е. чтобы было*

$$\boxed{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.} \tag{13}$$

III. Угол между двумя прямыми. Если обозначить через θ угол между прямыми *) (10) и (11), то

$$\boxed{\cos\theta=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.} \tag{14}$$

В этой формуле поставлен двойной знак потому, что написанная дробь представляет собой косинус угла между направляющими векторами $\{l_1, m_1, n_1\}$ и $\{l_2, m_2, n_2\}$, угол же между самими прямыми **) может не совпадать с углом между этими векторами, а быть смежным с ним (рис. 303).

---

*) Если прямые в пространстве не пересекаются, то надо через любую точку пространства провести две прямые, параллельные данным. Угол между вновь проведенными прямыми и называется углом между исходными прямыми.

**) Ведь таких углов два (смежных друг другу) и любой из них можно принять за θ.

Пример. Провести через точку $M(2, 5, 4)$ прямую, параллельную прямой

$$\left.\begin{aligned} 11x-3y-3z+20&=0, \\ x+3y-6z+1&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Решение. Прежде всего составим канонические уравнения прямой (15). Для этого найдем две точки, лежащие на ней. Полагая $z=1$, находим

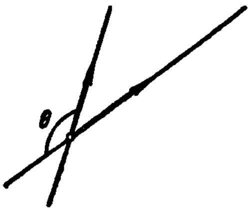


Рис. 303.

$$\begin{aligned} 11x-3y&=-17, \\ x+3y&=\quad 5. \end{aligned}$$

Отсюда $x=-1$, $y=2$. Итак, на (15) лежит $M_1(-1, 2, 1)$. Далее, полагая $z=2$, находим

$$\begin{aligned} 11x-3y&=-14, \\ x+3y&=\quad 11, \end{aligned}$$

откуда $x=-\frac{1}{4}$, $y=3\frac{3}{4}$. Итак, второй точкой на (15) будет $M_2\left(-\frac{1}{4},\ 3\frac{3}{4},\ 2\right)$. Стало быть, канонические уравнения прямой (15) суть

$$\frac{x+1}{^3/_4}=\frac{y-2}{^7/_4}=\frac{z-1}{1}.$$

Направляющие знаменатели здесь $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, 1. У искомой прямой за направляющие знаменатели надо принять любую тройку чисел, пропорциональную этой. Выбирая тройку $\{3, 7, 4\}$, получаем ответ:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-5}{7}=\frac{z-4}{4}.$$

Рассмотрим следующий вопрос: пусть даны две непараллельные друг другу прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}. \qquad (16)$$

Найти условие, при котором эти прямые пересекаются. Для этого напишем параметрические уравнения наших прямых

$$\begin{aligned} x&=x_1+l_1u, & y&=y_1+m_1u, & z&=z_1+n_1u, \\ x&=x_2+l_2v, & y&=y_2+m_2v, & z&=z_2+n_2v. \end{aligned}$$

Если на прямых имеется общая точка, то существует пара значений параметров $u=u^*$, $v=v^*$, для которой

$$x_1+l_1u^*=x_2+l_2v^*, \quad y_1+m_1u^*=y_2+m_2v^*, \quad z_1+n_1u^*=z_2+n_2v^*$$

или

$$\begin{aligned} l_1u^* - l_2v^* + (x_1 - x_2) &= 0, \\ m_1u^* - m_2v^* + (y_1 - y_2) &= 0, \\ n_1u^* - n_2v^* + (z_1 - z_2) &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим вместо (17) однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} l_1u - l_2v + (x_1 - x_2)\,w &= 0, \\ m_1u - m_2v + (y_1 - y_2)\,w &= 0, \\ n_1u - n_2v + (z_1 - z_2)\,w &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

содержащую еще одно неизвестное w. Если существует пара чисел (u^*, v^*), удовлетворяющая соотношениям (17), то тройка чисел $(u^*, v^*, 1)$ будет неочевидным (ибо содержит отличное от нуля значение $w=1$) решением системы (18). Но тогда определитель системы (18) должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & x_1 - x_2 \\ m_1 & m_2 & y_1 - y_2 \\ n_1 & n_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Итак, при наличии у прямых (16) общей точки должно быть выполнено (19). Обратно, пусть выполнено (19). Тогда однородная система (18) имеет неочевидные решения. Пусть (u_0, v_0, w_0) — одно из таких решений. Покажем, что в нем $w_0 \neq 0$. Действительно, иначе было бы

$$\begin{aligned} l_1u_0 &= l_2v_0, \\ m_1u_0 &= m_2v_0, \\ n_1u_0 &= n_2v_0. \end{aligned}$$

Из чисел u_0, v_0 одно, во всяком случае, отлично от нуля *) [иначе (u_0, v_0, w_0) было бы очевидным решением системы]. Пусть, например, $u_0 \neq 0$. Полагая $\frac{v_0}{u_0} = q$, мы получили бы

$$l_1 = ql_2, \quad m_1 = qm_2, \quad n_1 = qn_2,$$

т. е. тройка $\{l_1, m_1, n_1\}$ оказалась бы пропорциональной тройке $\{l_2, m_2, n_2\}$, что, однако, невозможно, так как прямые (16) не параллельны. Итак, $w_0 \neq 0$. Подставив u_0, v_0, w_0 в (18), разделив полученные тождества на w_0 и положив

$$\frac{u_0}{w_0} = u^*, \quad \frac{v_0}{w_0} = v^*,$$

мы пришли бы к (17). Стало быть, (19) обеспечивает наличие общей точки у прямых (16).

Замечание. Условие, что прямые (16) не параллельны, существенно. Действительно, иначе в определителе (19) первый и второй столбцы были бы пропорциональны и определитель равнялся бы нулю. Если откинуть оговорку о непараллельности прямых (16), то (19) представит собой условие того, что эти две прямые лежат в одной плоскости.

---

*) Легко видеть, что тогда и другое $\neq 0$, так как среди чисел $\{l_1, m_1, n_1\}$ и среди чисел $\{l_2, m_2, n_2\}$ имеются отличные от нуля.

n° 6. Угловые соотношения между прямой и плоскостью. Рассмотрим прямую

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{20}$$

и плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{21}$$

Для установления угловых соотношений между ними напомним, что вектор $p\ \{l,\ m,\ n\}$ лежит на прямой (20), а вектор $n\ \{A,\ B,\ C\}$ перпендикулярен плоскости (21). Поэтому параллельность прямой (20) и плоскости (21) равносильна перпендикулярности упомянутых векторов (рис. 304) и выражается соотношением

$$\boxed{Al+Bm+Cn=0,} \tag{22}$$

которое и называется „условием параллельности плоскости и прямой". Точно так же условием перпендикулярности прямой (20)

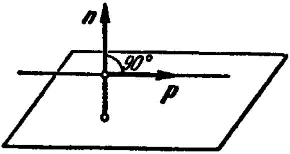


Рис. 304.

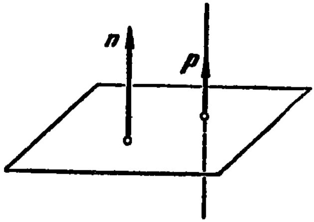


Рис. 305.

и плоскости (21) является параллельность векторов $n\ \{A,\ B,\ C\}$ и $p\ \{l,\ m,\ n\}$ (рис. 305), выражаемая равенствами

$$\boxed{\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}.} \tag{23}$$

Условия (22) и (23) допускают простые словесные формулировки, которые полезно помнить:

Условие параллельности. *Для параллельности прямой и плоскости нужно, чтобы сумма парных произведений направляющих знаменателей прямой и направляющих коэффициентов плоскости равнялась нулю.*

Условие перпендикулярности. *Для перпендикулярности прямой и плоскости нужно, чтобы тройка направляющих знаменателей прямой была пропорциональна тройке направляющих коэффициентов плоскости.*

В заключение рассмотрим, какой угол φ составляет прямая (20) с плоскостью (21). Из рис. 306 видно, что угол φ является дополнительным углу θ, образованному векторами $\boldsymbol{n}\{A, B, C\}$ и $\boldsymbol{p}\{l, m, n\}$. Стало быть,

$$\varphi = 90^\circ - \theta$$

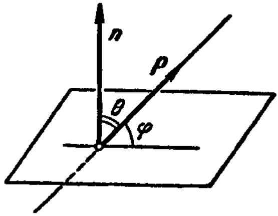


Рис. 306.

и $\sin\varphi = \cos\theta$. Но для $\cos\theta$ формула нам известна. Таким образом,

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.} \tag{24}$$

n° 7. Расстояние от точки до плоскости и до прямой. Рассмотрим сначала пример. Пусть требуется найти расстояние d от точки $M(3, 7, 1)$ до плоскости

$$3x + 4y - 12z + 1 = 0. \tag{25}$$

Искомое расстояние d равно расстоянию от точки M до точки N пересечения перпендикуляра, опущенного из M на плоскость (25), с этой плоскостью (рис. 307). Уравнения этого перпендикуляра (поскольку он проходит через $M(3, 7, 1)$) суть

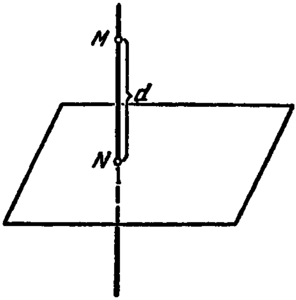


Рис. 307.

$$\frac{x-3}{l} = \frac{y-7}{m} = \frac{z-1}{n},$$

причем на основании условия перпендикулярности (23) тройка направляющих знаменателей $\{l, m, n\}$ должна быть пропорциональна тройке направляющих коэффициентов $\{3, 4, -12\}$ плоскости (25). Таких троек $\{l, m, n\}$ имеется бесконечное множество, и все они задают одну и ту же прямую. Самое простое — взять тройку $\{l, m, n\}$ совпадающей с тройкой $\{3, 4, -12\}$ т. е. записать уравнения интересующего нас перпендикуляра в виде

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-1}{-12}.$$

Обозначая общее значение написанных дробей буквой t, получаем параметрические уравнения перпендикуляра

$$x = 3 + 3t, \quad y = 7 + 4t, \quad z = 1 - 12t. \tag{26}$$

Как мы уже говорили, именно эти уравнения удобны для нахождения точки N пересечения прямой MN с плоскостью. Подставляя (26) в (25), получим

$$3(3+3t)+4(7+4t)-12(1-12t)+1=0,$$

откуда

$$169t+26=0$$

и $t=-\frac{2}{13}$. Подставляя найденное значение t в (26), получаем координаты точки N: $x=\frac{33}{13}$, $y=\frac{83}{13}$, $z=\frac{37}{13}$. Дело свелось к нахождению расстояния между точками $M(3, 7, 1)$ и $N\left(\frac{33}{13}, \frac{83}{13}, \frac{37}{13}\right)$. Таким образом,

$$d=\sqrt{\left(\frac{33}{13}-3\right)^2+\left(\frac{83}{13}-7\right)^2+\left(\frac{37}{13}-1\right)^2}=2.$$

Соображения, которыми мы руководились при решении этого примера, позволяют решить задачу и в общем виде.

Задача. *Найти расстояние d от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости*

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{27}$$

Решение. Уравнения всякой прямой, проходящей через $M(x_0, y_0, z_0)$, суть

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Чтобы эта прямая была перпендикулярна плоскости (27), надо взять знаменатели $\{l, m, n\}$ так, чтобы их тройка оказалась пропорциональной тройке $\{A, B, C\}$. Проще всего взять $l=A$, $m=B$, $n=C$. Таким образом, уравнения перпендикуляра, опущенного из M на плоскость (27), таковы:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}. \tag{28}$$

Для нахождения точки N пересечения этого перпендикуляра с плоскостью, надо решить совместно уравнения (27) и (28). Для этого обозначим общее значение дробей (28) через t, что приводит к параметрическим уравнениям прямой MN:

$$x=x_0+At, \quad y=y_0+Bt, \quad z=z_0+Ct. \tag{29}$$

Вставляя эти величины в (27), последовательно получаем

$$A(x_0+At)+B(y_0+Bt)+C(z_0+Ct)+D=0,$$

$$(A^2+B^2+C^2)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0,$$

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}. \tag{30}$$

Это значение параметра t и определяет точку N. Понимая под буквой t в равенствах (29) именно ту величину, которая дается формулой (30), получаем в левых частях как раз координаты точки N. Но

$$d = MN = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Используя равенства (29), находим

$$d = \sqrt{A^2t^2+B^2t^2+C^2t^2} = |t|\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Сопоставляя последнее равенство со значением t, получаемым из формулы (30), имеем окончательно

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.} \tag{31}$$

Таким образом *), *чтобы найти расстояние точки от плоскости, надо подставить координаты точки в левую часть уравнения плоскости и абсолютную величину полученного числа разделить на квадратный корень из суммы квадратов направляющих коэффициентов.*

Пример. Найти расстояние d между параллельными плоскостями **)

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$Ax+By+Cz+D^*=0.$$

Решение. Возьмем на второй из наших плоскостей какую-нибудь точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Тогда искомое расстояние будет расстоянием от точки M до первой из плоскостей и потому выразится формулой (31). Но поскольку координаты точки M удовлетворяют уравнению второй плоскости

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D^*=0,$$

окажется

$$Ax_0+By_0+Cz_0=-D^*,$$

и формула (31) дает

$$d = \frac{|D-D^*|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

---

*) Полезно обратить внимание на полную аналогию этого результата с правилом нахождения расстояния точки от прямой в геометрии на плоскости.

**) Разумеется, коэффициенты при x, y, z в обоих уравнениях не обязательно должны быть соответственно равны, ибо условие параллельности плоскостей гарантирует лишь их пропорциональность. Однако благодаря этой пропорциональности всегда можно умножением одного из уравнений на некоторое число добиться и равенства упомянутых коэффициентов.

Рассмотрим теперь вопрос о нахождении расстояния от точки до прямой. Решение этого вопроса в общем виде приводит к довольно громоздкой формуле, и мы ограничимся указанием способа, позволяющего решить вопрос в каждом частном случае.

Ясно, что расстояние d от точки $M(x^*, y^*, z^*)$ до прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{32}$$

есть расстояние от M до точки N, в которой (рис. 308) прямая (32) пересекается с перпендикулярной к ней плоскостью, проведенной через M. Уравнение этой плоскости таково:

$$l(x-x^*)+m(y-y^*)+n(z-z^*)=0. \tag{33}$$

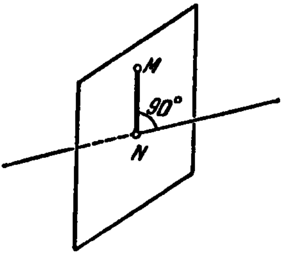


Рис. 308.

Совместное решение уравнений (32) и (33) позволяет найти точку N. После этого остается применить известную формулу для расстояния между двумя точками.

Пример. Найти расстояние от точки $M(2, 3, 4)$ до прямой

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-7}{0}. \tag{34}$$

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через M и перпендикулярной к прямой (34), есть

$$1\cdot(x-2)+3\cdot(y-3)+0\cdot(z-4)=0$$

или, что то же самое,

$$x+3y=11. \tag{35}$$

Обозначая общее значение дробей (34) через t, имеем

$$x=t,\quad y=2+3t,\quad z=7. \tag{36}$$

Отсюда и из (35) получаем

$$t+3(2+3t)=11,$$

т. е. $t=\frac{1}{2}$. Стало быть, координаты точки N суть $\left(\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 7\right)$. Это дает

$$d=MN=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3-3\frac{1}{2}\right)^2+(4-7)^2}=\frac{\sqrt{46}}{2}\cong 3{,}39.$$

Отметим в заключение, что средствами, изложенными в этом параграфе, можно решить задачу о нахождении расстояния между двумя скрещивающимися прямыми. Однако мы решим эту задачу в следующей главе при помощи дифференциального исчисления.

§ 3. Поверхности 2-го порядка

n° 1. Цилиндрические поверхности. В этом параграфе мы рассмотрим поверхности 2-го порядка, т. е. такие поверхности, которые имеют уравнение второй степени. Простейшими из них являются так называемые *цилиндрические поверхности 2-го порядка*, с которых мы и начнем.

Пусть в плоскости xy лежит некоторая линия K (рис. 309). Проведем через каждую точку K прямую, параллельную оси Oz. Множество этих прямых образует некоторую поверхность P, которая называется *цилиндрической*. Упомянутые прямые называются *образующими* поверхности P, а исходная линия K — ее *направляющей*. Пусть уравнение направляющей K есть

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

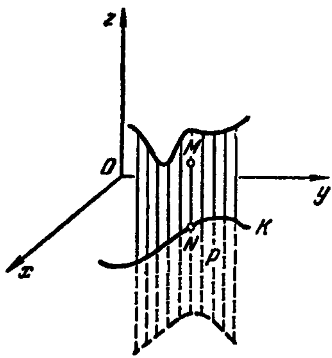


Рис. 309.

Возьмем на P любую точку $M(x, y, z)$. Эта точка лежит на какой-то образующей. Если N — пересечение этой образующей с плоскостью xy, то N лежит на линии K и координаты N должны удовлетворять уравнению (1). Но ясно, что у точки N такие же абсцисса x и ордината y, что и у точки M. Стало быть, эти абсцисса и ордината (точки M!) удовлетворяют уравнению (1). Поскольку M — любая точка поверхности P, то (1) и будет уравнением этой поверхности. Мы видим, что *уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, не содержит координаты z* (и совпадает с уравнением направляющей).

В частности, если направляющей служит эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

то соответствующая цилиндрическая поверхность называется *эллиптическим цилиндром* и (2) является ее уравнением. Мы видим, что эта поверхность 2-го порядка. Аналогично приходим к *параболическому цилиндру*

$$y^2 = 2px$$

и к *гиперболическому цилиндру*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это также поверхности 2-го порядка. Вообще же говоря, цилиндрическая поверхность вовсе не обязательно является поверхностью 2-го порядка. Например, уравнению $y=x^3$ отвечает цилиндрическая поверхность 3-го порядка, а „синусоидальный цилиндр" $y=\sin x$ вообще не имеет определенного порядка, так как уравнение $y=\sin x$ не является алгебраическим.

n°2. Уравнение поверхности вращения. Ряд поверхностей 2-го порядка принадлежит к числу так называемых поверхностей вращения. Остановимся на этом понятии.

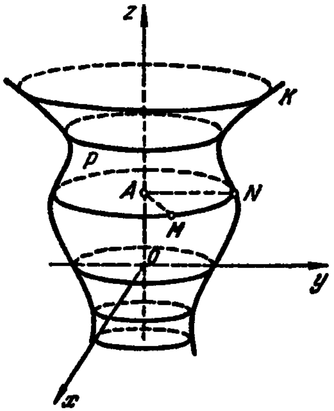


Рис. 310.

Пусть в плоскости yz лежит некоторая линия K. Представим себе, что эта линия вращается вокруг оси Oz, благодаря чему образуется некоторая поверхность P, называемая *поверхностью вращения*. Исходная линия K называется *начальным меридианом*. Пусть уравнение этого меридиана

$$F(y, z)=0. \tag{3}$$

Поставим вопрос о том, каково будет уравнение поверхности P. Для простоты предположим, что меридиан K лежит в той части плоскости yz, где $y \geqslant 0$. Рассмотрим (рис. 310) какую-либо точку $M(x, y, z)$ поверхности P. Как и всякая точка поверхности P точка M получена в результате процесса вращения из некоторой точки N начального меридиана K. При этом вращении точка N остается в плоскости, перпендикулярной оси Oz, и описывает окружность с центром A, лежащим на оси Oz. Ясно, что апликата z точки N такая же, как и у точки M. Если y^* — ордината точки N, то радиус AN как раз и будет равен y^*. Но таков же и радиус AM. С другой стороны, последний радиус есть не что иное, как расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $A(0, 0, z)$, и потому он равен

$$AM=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Таким образом,

$$y^*=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{4}$$

Поскольку точка N лежит на меридиане K, то ее координаты удовлетворяют уравнению (3). Стало быть,

$$F(y^*, z)=0.$$

Отсюда и из (4) следует, что

$$F(\sqrt{x^2+y^2}, z)=0. \tag{5}$$

Если бы линия K не лежала целиком в той части плоскости yz, где $y \geqslant 0$, то могло бы оказаться, что $y^* < 0$. Тогда мы имели бы $AN = -y^*$, откуда

$$y^* = -\sqrt{x^2 + y^2},$$

и вместо (5) получилось бы уравнение

$$F\left(-\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0.$$

Таким образом, координаты (x, y, z) любой точки поверхности P во всяком случае удовлетворяют уравнению

$$\boxed{F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0,} \tag{6}$$

которое и является искомым уравнением поверхности P. Мы видим, что (6) получается из (3) простой заменой y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Это обстоятельство рекомендуется запомнить. Нетрудно понять, что в случае вращения исходного меридиана вокруг оси Oy уравнение поверхности вращения получается заменой в уравнении меридиана координаты z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$.

Пример. Если прямая $y = z$ вращается вокруг оси Oz, то она образует коническую поверхность. Согласно сказанному, уравнение этой поверхности будет

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = z$$

или

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Мы видим, что наша коническая поверхность оказалась поверхностью 2-го порядка. Аналогично можно было бы получить еще ряд поверхностей 2-го порядка, но часто, получив подобную поверхность, ее подвергают еще некоторому преобразованию, к рассмотрению которого мы и переходим.

n°3. Сжатие и растяжение поверхностей. Пусть P' — какая-нибудь поверхность. Выберем некоторое положительное число k и заменим каждую точку M' (x, y, z') поверхности P' другой точкой $M(x, y, z)$, у которой

$$\boxed{z = kz'.} \tag{7}$$

Иными словами, при $k > 1$ мы увеличиваем расстояния всех точек P' от плоскости xy в k раз. Если же $k < 1$, то мы уменьшаем эти расстояния в $\frac{1}{k}$ раз $\left(\text{при } k = \frac{1}{3} \text{ уменьшаем расстояния втрое}\right)$.

В результате этой операции поверхность P' преобразуется (рис. 311) в некоторую новую поверхность P, про которую говорят, что она получена из P' при помощи *растяжения в направлении оси Oz в k раз* (если $k<1$, то мы имеем дело со сжатием; таким образом, растяжение в $^1/_3$ раза означает сжатие в 3 раза).

Поставим вопрос, как, зная уравнение исходной поверхности P', найти уравнение поверхности P. Пусть уравнение P' будет

$$F(x, y, z) = 0. \tag{8}$$

Возьмем на P любую точку $M(x, y, z)$. Она получена из точки $M'(x, y, z')$ поверхности P', причем z и z' связаны соотношением (7). Раз M' лежит на P', то координаты (x, y, z') удовлетворяют уравнению (8), т. е. справедливо соотношение

$$F(x, y, z') = 0.$$

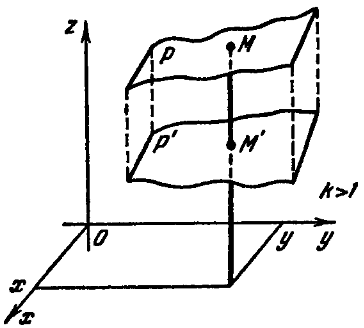


Рис. 311.

Заменяя здесь z' равной величиной $\frac{z}{k}$, находим

$$F\left(x, y, \frac{z}{k}\right) = 0. \tag{9}$$

Это равенство, верное для всех точек P, и является уравнением P. Мы видим, что *для получения уравнения „растянутой“ поверхности, надо в уравнении исходной поверхности заменить z на $\frac{z}{k}$, где k — коэффициент растяжения.*

Пример. Пусть исходная поверхность есть плоскость $z=6$, а коэффициент растяжения $k=2$, т. е. мы увеличиваем апликаты всех точек плоскости вдвое. Согласно сказанному уравнение „растянутой“ поверхности будет $\frac{z}{2}=6$, т. е. эта поверхность будет плоскостью $z=12$. Разумеется, этот факт геометрически очевиден, но потому он и является хорошей иллюстрацией вышеприведенного правила.

Замечание. Аналогично устанавливаются правила написания уравнений поверхностей, получаемых из данной поверхности при помощи растяжения в направлении оси Ox или оси Oy.

п° 4. Эллипсоид. Рассмотрим эллипс

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

лежащий в плоскости yz. Если этот эллипс мы заставим вращаться вокруг оси Oz, то получится некоторая поверхность, называемая *эллипсоидом вращения*. По правилу, выведенному в п° 2, уравнение этого эллипсоида будет

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{10}$$

Растянем этот эллипсоид в направлении оси Ox в k раз. В результате мы придем к поверхности, также называемой *эллипсоидом* и имеющей уравнение, получаемое из (10) заменой x на $\frac{x}{k}$, т. е.

$$\frac{x^2}{k^2b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{11}$$

Если положить для краткости $kb=a$, то уравнение (11) примет вид

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.} \tag{12}$$

Это так называемое каноническое уравнение эллипсоида. Числа a, b, c называются его *полуосями*. Из самого процесса получения эллипсоида ясно, что он имеет вид, изображенный на рис. 312. Нетрудно понять, что в сечении эллипсоида (12) какой-либо плоскостью, параллельной одной из координатных, получается э л л и п с. Например, пересекая эллипсоид плоскостью $z=h$ $(-c<h<c)$, мы должны рассмотреть все точки эллипсоида, у которых $z=h$. Но тогда координаты x и y этих точек будут связаны соотношением

Рис. 312.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1,$$

которому можно дать вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}. \tag{13}$$

Ясно, что множество точек плоскости xy, у которых x и y удовлетворяют уравнению (13), есть эллипс $\left(\text{с полуосями } a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \text{ и } b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)$. Остается заметить, что рассматриваемое нами сечение эллипсоида плоскостью $z=h$ проектируется на плоскость xy именно в полученный эллипс и притом без искажения.

n° 5. Однополостный гиперболоид. Рассмотрим гиперболу

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

лежащую в плоскости yz. Вращая ее вокруг оси Oz, мы получим поверхность

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

которая называется *однополостным* *) *гиперболоидом вращения.* Растягивая этот гиперболоид в направлении оси Ox в k раз, приходим к общему однополостному гиперболоиду

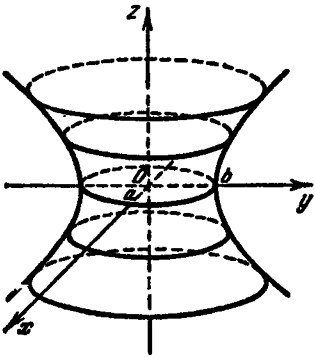


Рис. 313.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}, \tag{14}$$

где для краткости положено $bk=a$. Из самого процесса получения этой поверхности ясно, что она имеет вид, изображенный на рис. 313. Сечения гиперболоида плоскостями $z=h$ представляют собой эллипсы, а сечения плоскостями $x=h$ ($|h|\neq a$) или $y=h$ ($|h|\neq b$) суть гиперболы. Например, сечение гиперболоида плоскостью $x=h$ проектируется на плоскость yz в гиперболу с уравнением

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}. \tag{15}$$

Если $|h|<a$, то у этой гиперболы вещественной осью служит ось Oy, а мнимой ось Oz, а если $|h|>a$, то наоборот. Если $|h|=a$, то (15) принимает вид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

и оказывается уравнением совокупности двух прямых

$$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0, \qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0.$$

Таким образом, *на нашем гиперболоиде лежат прямые линии.*

*) Наша поверхность состоит из одного цельного куска („полости“), в отличие от рассматриваемого в следующем n° „двухполостного“ гиперболоида.

Оказывается, что *через любую точку гиперболоида проходят две прямые, целиком лежащие на гиперболоиде.* Действительно, пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — любая точка гиперболоида (14). Тогда

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

откуда

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)\left(1 - \frac{y_0}{b}\right). \tag{16}$$

Положим

$$\frac{\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}}{1 + \dfrac{y_0}{b}} = m.$$

Тогда

$$\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = m\left(1 + \frac{y_0}{b}\right),$$

откуда в связи с (16) вытекает, что

$$\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{y_0}{b}\right).$$

Таким образом, точка M оказывается лежащей на прямой, являющейся пересечением двух плоскостей

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= m\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{m}\left(1 - \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Но эта прямая целиком лежит на нашем гиперболоиде, так как любые числа (x, y, z), удовлетворяющие уравнениям (17), очевидным образом удовлетворяют уравнению (14), получающемуся от перемножения уравнений (17). Стало быть, мы нашли *) прямую, проходящую через M и целиком лежащую на гиперболоиде. Другой прямой с этими свойствами будет прямая

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = m\left(1 - \frac{y}{b}\right), \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{y}{b}\right), \tag{18}$$

---

*) Приведенное рассуждение не годится, если $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$ или $1 + \frac{y_0}{b} = 0$. В первом случае прямая (17) заменяется прямой $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, $1 - \frac{y}{b} = 0$ или же прямой $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, $1 + \frac{y}{b} = 0$, смотря по тому, будет ли $y_0 = b$ или $y_0 = -b$. Во втором случае вместо (17) появится прямая $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, $1 + \frac{y}{b} = 0$ или $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$, $1 + \frac{y}{b} = 0$.

где m подобрано так, чтобы прямая (18) прошла через M. Таким образом, однополостный гиперболоид весь как бы составлен из прямых линий. Желая подчеркнуть указанное обстоятельство, этот гиперболоид называют *линейчатой поверхностью*, а рассмотренные выше прямые — *прямолинейными образующими* гиперболоида.

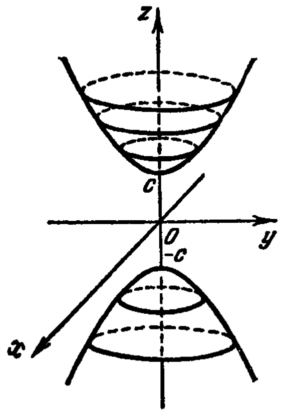


Рис. 314.

n° 6. Двухполостный гиперболоид. Теперь мы рассмотрим гиперболу

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

у которой вещественной осью служит ось Oz. Вращая ее вокруг оси Oz, получим поверхность

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

которая после растяжения вдоль оси Ox в k раз превратится в поверхность

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,} \tag{19}$$

где $a=kb$. Поверхность (19) называется *двухполостным* *) *гиперболоидом*. Она имеет вид, изображенный на рис. 314.

n° 7. Конус. Если прямая $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ вращается вокруг оси Oz, то уравнение полученного конуса будет

$$\frac{\pm\sqrt{x^2+y^2}}{b}=\frac{z}{c}$$

или

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

В результате растяжения вдоль оси Ox в k раз этот круговой конус (или конус вращения) превращается в *общий конус 2-го порядка*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,} \tag{20}$$

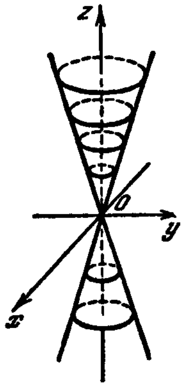


Рис. 315.

изображенный на рис. 315. Его сечения плоскостями $z=h$ представляют собой эллипсы, а плоскостями $x=h$ (или $y=h$) — гиперболы.

*) Она состоит из двух кусков („полостей“).

n° 8. Эллиптический параболоид. Применяемый нами метод (вращения и растяжения) позволяет получить еще одну поверхность 2-го порядка — *эллиптический параболоид*. Пусть парабола

$$y^2 = 2pz \qquad (p > 0)$$

вращается вокруг оси Oz. Поверхность

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

получаемая в результате этого вращения, называется *параболоидом вращения*. Ее уравнение можно переписать в виде

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p}.$$

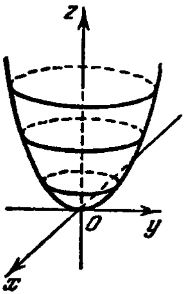


Рис. 316.

Растягивая этот параболоид вдоль оси Oy в k раз, получим эллиптический параболоид, имеющий уравнение

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2k^2p},$$

которое можно записать короче, положив $k^2p = q$:

$$\boxed{z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.} \qquad (21)$$

У нас $p > 0$, $q > 0$. Разумеется, это не существенно, важно лишь, чтобы p и q имели одинаковые знаки. При $p > 0$, $q > 0$ параболоид (21) имеет вид, изображенный на рис. 316. При $p < 0$, $q < 0$ параболоид выглядел бы так, как изображено на рис. 317.

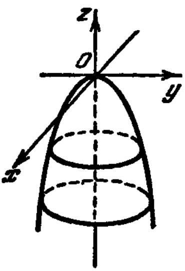


Рис. 317.

n° 9. Гиперболический параболоид. В заключение рассмотрим такую поверхность 2-го порядка, которая не принадлежит ни к числу цилиндров, ни к числу поверхностей, получаемых методом вращения и растяжения. Эта поверхность называется *гиперболическим параболоидом* и задается уравнением

$$\boxed{z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},} \qquad (22)$$

в котором $p > 0$, $q > 0$ (или $p < 0$, $q < 0$).

Чтобы отдать себе отчет в форме этой поверхности, пересечем ее плоскостью xz. Для этого, очевидно, надо в уравнении (22) положить $y = 0$. В результате получается линия

$$z = \frac{x^2}{2p}. \qquad (23)$$

Это парабола, симметричная относительно оси Oz и имеющая вершину в начале координат. Поскольку $p>0$, парабола (23) лежит в полуплоскости $z\geqslant 0$. Теперь рассмотрим сечение нашей поверхности плоскостью $x=h$. Координаты всех точек этого сечения удовлетворяют уравнению

$$z=\frac{h^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}\,. \qquad (24)$$

В это соотношение не входит координата x, и потому (24) является уравнением цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Ox, т. е. проектирующей наше сечение на плоскость yz. Иными словами, (24) представляет собой уравнение **п р о е к ц и и** нашего сечения на плоскость yz, куда оно проектируется, очевидно, без искажения. С другой стороны, (24) есть уравнение параболы, симметричной относительно оси Oz и обращенной своим „отверстием" вниз. Вершина N этой параболы лежит на оси Oz. Но ведь эта вершина является проекцией точки M, принадлежащей рассматриваемому сечению. У обеих точек M и N координата y равна нулю. Значит, M лежит в плоскости xz и, стало быть, принадлежит параболе (23). Заметим еще, что форма параболы (24) определяется коэффициентом q и не зависит от h. Значит, парабола (24) имеет в точности ту же форму, что и парабола

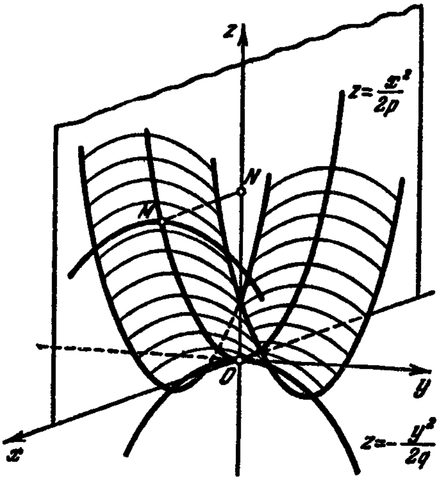


Рис. 318.

$$z=-\frac{y^2}{2q}\,, \qquad (25)$$

являющаяся сечением нашей поверхности плоскостью yz. Сопоставляя все сказанное, мы видим, что для получения параболоида (22) надо параболу (25) перемещать так, чтобы ее плоскость оставалась параллельной плоскости yz, а вершина скользила по параболе (23). Таким образом, гиперболический параболоид имеет седлообразный вид, изображенный на рис. 318.

Гиперболический параболоид, как и однополостный гиперболоид, есть линейчатая поверхность, т. е. он составлен из прямых линий: *через каждую* *точку параболоида проходят две прямые, целиком лежащие на параболоиде.* Чтобы это доказать, возьмем точку $M(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на параболоиде (22). Для нее будет

$$z_0 = \frac{x_0^2}{2p} - \frac{y_0^2}{2q} = \left(\frac{x_0}{\sqrt{2p}} + \frac{y_0}{\sqrt{2q}}\right)\left(\frac{x_0}{\sqrt{2p}} - \frac{y_0}{\sqrt{2q}}\right).$$

Пусть

$$\frac{x_0}{\sqrt{2p}} - \frac{y_0}{\sqrt{2q}} = m.$$

Тогда

$$z_0 = m\left(\frac{x_0}{\sqrt{2p}} + \frac{y_0}{\sqrt{2q}}\right).$$

Нетрудно видеть, что прямая

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}} = m, \quad m\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = z \tag{26}$$

проходит через $M(x_0, y_0, z_0)$. С другой стороны, она целиком лежит на параболоиде (22), ибо при $m \neq 0$ уравнения (26) можно перемножить и результат сократить на m, а если $m = 0$, то уравнения (26) принимают вид

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}} = 0, \quad z = 0 \tag{27}$$

и любые числа (x, y, z), удовлетворяющие соотношениям (27), удовлетворяют и уравнению (22). Другой прямой, проходящей через $M(x_0, y_0, z_0)$ и лежащей на параболоиде (22), будет прямая

$$\frac{x}{\sqrt{2p}} + \frac{y}{\sqrt{2q}} = m, \quad m\left(\frac{x}{\sqrt{2p}} - \frac{y}{\sqrt{2q}}\right) = z, \tag{28}$$

где

$$m = \frac{x_0}{\sqrt{2p}} + \frac{y_0}{\sqrt{2q}}.$$

Прямые (26) и (28) называются *образующими* параболоида (22).

Можно доказать, что других кривых*) поверхностей 2-го порядка, кроме рассмотренных девяти (трех цилиндров: эллиптического, параболического и гиперболического, эллипсоида, двух гиперболоидов: однополостного и двухполостного, конуса и двух параболоидов: эллиптического и гиперболического), не существует.

---

*) Оговорка „кривых" существенна. Действительно, любая пара плоскостей также представляет собой поверхность 2-го порядка. Например, пара плоскостей $x = 0$ и $z = 0$ составляет поверхность $xz = 0$. Кроме того, отдельная точка или прямая тоже могут задаваться как „поверхности" 2-го порядка. Например, „поверхность" $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ есть точка $(0, 0, 0)$, а „поверхность" $x^2 + z^2 = 0$ есть прямая $x = z = 0$. Наконец, уравнению 2-й степени может не соответствовать никакого геометрического образа. Таково, например, уравнение $x^2 + 1 = 0$.

§ 4. Преобразование координат

n° 1. Постановка вопроса. Параллельный перенос системы. Так же, как и в аналитической геометрии на плоскости, бывает нужно переходить от задания пространственной линии (или поверхности) в одной системе координат к ее заданию в другой координатной системе. Для решения этого вопроса надо найти, как выражаются друг через друга координаты одной и той же точки в двух системах координат $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$. Аппарат теории векторов позволяет сделать это с большой легкостью.

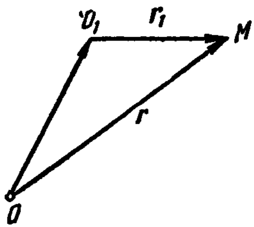


Рис. 319.

Пусть речь идет о точке M, которая в первой („старой") системе координат $Oxyz$ имеет координаты (x, y, z), а во второй („новой") системе $O_1x_1y_1z_1$ — координаты (x_1, y_1, z_1). Введем в рассмотрение старый и новый радиусы-векторы точки M:

$$\overline{OM} = r, \quad \overline{O_1M} = r_1.$$

Как известно, координаты точки M суть проекции этих радиусов-векторов на оси соответствующей системы:

$$x = \text{Пр}_x r, \quad x_1 = \text{Пр}_{x_1} r_1, \ \ldots$$

Между векторами r и r_1 существует очень простая связь. Именно, легко видеть (рис. 319), что

$$\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M},$$

т. е.

$$\boxed{r = \overline{OO_1} + r_1.} \tag{1}$$

Таким образом, *старый радиус-вектор точки равен ее новому радиусу-вектору, сложенному с (старым) радиусом-вектором нового начала.*

Отметив это, рассмотрим простейший случай, когда новые оси O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 параллельны (и одинаково направлены) старым осям, т. е. когда новая координатная система получена из старой при помощи п а р а л л е л ь н о г о п е р е н о с а. В этом случае положение новой системы полностью определяется заданием нового начала O_1. Пусть (a, b, c) — (старые!) координаты нового начала O_1. Спроектируем равенство (1) на ось Ox:

$$\text{Пр}_x r = \text{Пр}_x \overline{OO_1} + \text{Пр}_x r_1.$$

Написанное соотношение можно переписать в виде

$$x = a + \text{Пр}_x r_1. \tag{2}$$

Но так как оси Ox и O_1x_1 параллельны и одинаково направлены, то безразлично, на какую из них проектировать вектор r_1: результаты получаются одинаковые

$$\text{Пр}_x r_1 = \text{Пр}_{x_1} r_1.$$

Таким образом, $\text{Пр}_x r_1 = x_1$ и (2) принимает вид

$$x = a + x_1.$$

Аналогично обстоит дело с другими координатами M. Значит,

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + x_1, \\ y &= b + y_1, \\ z &= c + z_1, \end{aligned}} \tag{3}$$

т. е. *при параллельном переносе системы координат старая координата точки равна ее новой координате, сложенной со старой координатой нового начала.*

п° 2. Поворот системы. Более сложен случай, когда новая система, имея общее начало со старой, получается из нее при помощи некоторого вращения. Положение каждой из трех новых осей определяется заданием тех углов, которые она образует со старыми осями. Пусть нижеследующая таблица указывает, какой угол образует каждая из новых осей с каждой из старых:

	Ox	Oy	Oz
Ox_1	α_1	β_1	γ_1
Oy_1	α_2	β_2	γ_2
Oz_1	α_3	β_3	γ_3

Поскольку обе системы имеют общее начало, то точка M имеет один и тот же радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ в обеих системах. Если орты новых осей обозначить через $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$, то по основной формуле теории векторов будет

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{i}_1 + y_1\boldsymbol{j}_1 + z_1\boldsymbol{k}_1.$$

Спроектируем это равенство на ось Ox. Учитывая написанную выше таблицу углов, мы получим

$$x = x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \cos\alpha_2 + z_1 \cos\alpha_3.$$

Такие же равенства справедливы для координат y и z и потому

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha_1 + y_1 \cos\alpha_2 + z_1 \cos\alpha_3, \\ y &= x_1 \cos\beta_1 + y_1 \cos\beta_2 + z_1 \cos\beta_3, \\ z &= x_1 \cos\gamma_1 + y_1 \cos\gamma_2 + z_1 \cos\gamma_3. \end{aligned}} \tag{4}$$

Полезно отметить, что между написанными косинусами имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 &= 1, \\ \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 &= 1, \\ \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 &= 1, \\ \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 &= 0, \\ \cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 &= 0, \\ \cos\alpha_3\cos\alpha_1 + \cos\beta_3\cos\beta_1 + \cos\gamma_3\cos\gamma_1 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Первое из этих соотношений связывает направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{i}_1$. Аналогичный смысл имеют второе и третье соотношения. Четвертое есть не что иное, как условие взаимной перпендикулярности ортов $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{j}_1$.

Аналогично устанавливаются пятое и шестое соотношения. Меняя роли систем $Oxyz$ и $Ox_1y_1z_1$, мы получим вместо (5) другие шесть соотношений, связывающие те же косинусы. Например, направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{i}$ в новой системе связаны формулой

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1,$$

а взаимная перпендикулярность ортов $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ дает соотношение

$$\cos\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0.$$

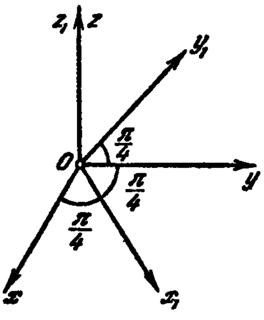


Рис. 320.

n° 3. Общий случай преобразования координат. Как и в геометрии на плоскости, общий случай преобразования координат легко сводится к рассмотренным частным. Именно, пусть новая система координат получается из старой при помощи переноса начала координат в точку O_1 (a, b, c) и последующего поворота системы, в результате которого новые оси составят со старыми углы, указанные в таблице, приведенной в начале n° 2. Вводя вспомогательную систему координат $O_1x^*y^*z^*$, имеющую начало O_1 и оси, параллельные старым осям Ox, Oy, Oz, мы выразим старые координаты (x, y, z) точки M через ее вспомогательные координаты при помощи формул (3)

$$x=a+x^*,\quad y=b+y^*,\quad z=c+z^*. \tag{6}$$

В свою очередь x^*, y^*, z^* выражаются через x_1, y_1, z_1 по формулам (4):

$$\begin{aligned} x^*&=x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\alpha_2+z_1\cos\alpha_3,\\ y^*&=x_1\cos\beta_1+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\beta_3,\\ z^*&=x_1\cos\gamma_1+y_1\cos\gamma_2+z_1\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (6), находим окончательно

$$\boxed{\begin{aligned} x&=a+x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\alpha_2+z_1\cos\alpha_3\,,\\ y&=b+x_1\cos\beta_1+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\beta_3\,,\\ z&=c+x_1\cos\gamma_1+y_1\cos\gamma_2+z_1\cos\gamma_3\,. \end{aligned}} \tag{7}$$

Это и есть общие формулы преобразования координат в пространстве. Само собой ясно, что девять косинусов, входящих в эти формулы, связаны шестью зависимостями (5).

n° 4. Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$\boxed{z^2=Axy,} \tag{8}$$

где $A\neq 0$. Чтобы выяснить, какая поверхность отвечает этому уравнению, повернем систему координат вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{4}$. Пусть оси системы, полученной в результате этого поворота, суть Ox_1, Oy_1, Oz_1 (ясно, что ось

Oz_1 совпадает со старой осью Oz). Таблица углов между осями выглядит так:

	Ox	Oy	Oz
Ox_1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Oy_1	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Oz_1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

в чем легко убедиться из рис. 320. Поэтому формулы (4) принимают вид

$$x = x_1\frac{\sqrt{2}}{2} - y_1\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y = x_1\frac{\sqrt{2}}{2} + y_1\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad z = z_1. \tag{9}$$

Заменяя в (8) x, y, z их выражениями (9), находим

$$z_1^2 = A\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2}\right),$$

откуда ясно*), что (8) есть *уравнение косинуса.*

2. То же преобразование (9) переводит уравнение

$$\boxed{z = Axy,} \tag{10}$$

в котором $A \neq 0$, в уравнение

$$z_1 = \frac{A}{2}(x_1^2 - y_1^2).$$

Сопоставляя последнее с уравнением (22) из § 3, видим, что уравнению (10) отвечает *гиперболический параболоид.*

---

*) Следует сопоставить полученный результат с уравнением (20) из § 3.

ГЛАВА X

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Производные функции нескольких переменных

n° 1. Основные понятия. Еще в гл. II было дано понятие о функциях нескольких переменных. Здесь мы изучим их более обстоятельно.

Напомним, что переменная z называется функцией аргументов x и y, если каждой паре значений x и y отвечает определенное значение z. Записывают это обстоятельство одной из формул

$$z=f(x, y), \quad z=\varphi(x, y), \quad z=F(x, y), \quad z=z(x, y) \text{ и т. п.}$$

При этом символом $f(a, b)$ обозначают то (постоянное!) значение функции $f(x, y)$, которое соответствует системе значений $x=a$, $y=b$.

Аналогично определяются символы $f(x, y, z)$, $F(x, y, z, u, v)$, где независимыми переменными служат x, y, z в первом и x, y, z, u, v во втором случае. Само собой понятно также, что означают выражения $f(a, b, c)$, $F(a, b, c, d, e)$.

Техника и естествознание дают много примеров функций нескольких переменных. В гл. II мы уже упоминали о законе Ома. Приведем еще два примера.

1) Абсолютная температура T, давление p и объем v данной массы газа связаны формулой Клапейрона

$$pv=RT,$$

где R — некоторая постоянная. Отсюда

$$v=R\frac{T}{p},$$

т. е. v — функция двух переменных p и T.

2) Температура θ нагретого тела может в данный момент t меняться от точки к точке. Поэтому

$$\theta=\theta(x, y, z),$$

т. е. θ есть функция трех аргументов x, y, z. Если же еще учитывать зависимость θ от времени t, то окажется

$$\theta=\theta(x,\ y,\ z,\ t),$$

т. е. θ будет функцией четырех аргументов. Таких примеров можно привести сколько угодно.

Обычно функция нескольких аргументов задается явным аналитическим способом. Например, таковы функции

$$z=2x^2+3y, \qquad u=\frac{x+y}{z^2+1}, \qquad w=e^{x\sin(y+z)}$$

и т. п. Встречается также и неявное задание таких функций, например уравнение

$$3z-x-y-5=0$$

задает неявно функцию

$$z=\frac{x+y+5}{3}.$$

Система значений (x, y) может рассматриваться как точка на плоскости. Поэтому, имея дело с функцией $z=f(x, y)$, часто говорят, что z есть функция точки (x, y).

Чтобы задать функцию $z=f(x, y)$, надо не только указать правило нахождения z по заданным x и y, но и то множество (называемое областью задания функции) пар значений, которые могут принимать аргументы x и y. В случае явного аналитического задания функции это множество определяется самой формулой, задающей функцию. Например, функция

$$z=x^2+2y \tag{1}$$

задана для всевозможных x и y. Поэтому пара чисел (x, y) может представлять собой координаты любой точки плоскости. В связи с этим говорят, что функция (1) задана на всей плоскости. Напротив, функция

$$z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

задана (мы интересуемся лишь вещественными значениями z) только при $x^2+y^2\leqslant 1$, т. е. в круге (включающем контур!), ограниченном окружностью $x^2+y^2=1$. Функция

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

задана в том же круге, но в него уже не включаются точки контура. Функция

$$z=\sqrt{x-y}$$

задана при $x\geqslant y$, т. е. на прямой $x=y$ и правее ее.

Аналогично вводится понятие области задания для функций любого числа переменных.

Функции двух переменных допускают графическую иллюстрацию. Именно, графиком функции $z=f(x, y)$, заданной на некотором множестве S точек плоскости xy, называется множество точек (x, y, z) пространства, у которых (x, y) принадлежит S, а $z=f(x, y)$. В наиболее простых случаях такой график представляет собою некоторую поверхность.

Функции трех (и большего числа) переменных не имеют геометрического представления. Однако все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются уже на функциях $f(x, y)$, и мы будем, главным образом, изучать именно их.

n° 2. Непрерывность. Понятие непрерывности функции нескольких переменных определяется так же, как и для функции одной переменной.

Пусть $z=f(x, y)$. Придадим x и y, исходя из значений $x=x_0$, $y=y_0$, приращения Δx, Δy. Это порождает приращение Δz функции $z=f(x, y)$. Если *)

$$\boxed{\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z=0,} \tag{2}$$

т. е. бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое же приращение функции, то говорят, что функция *непрерывна* [при исходных значениях аргументов $x=x_0$, $y=y_0$, или, короче, в точке (x_0, y_0)]. Если заметить, что

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0),$$

и положить $x_0+\Delta x=x$, $y_0+\Delta y=y$, то соотношение (2) можно переписать в виде

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0).} \tag{3}$$

Поэтому непрерывность функции означает, что ее предел равен ее значению от пределов аргументов.

Функция может быть непрерывна в одной точке и не непрерывна в другой. Так, например, функция

$$f(x, y)=\frac{1}{x^2+y^2} \tag{4}$$

---

*) Полезно заметить, что пара соотношений $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ равносильна одному соотношению $(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\to 0$, означающему стремление точки $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ к точке (x_0, y_0).

непрерывна на всей плоскости, кроме точки (0, 0). В этой последней точке наша функция и не задана. Но даже если пополнить задание функции (4), задав ее и в точке (0, 0), каким угодно равенством вида

$$f(0,\ 0)=A,$$

то мы не добьемся непрерывности в этой точке, ибо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=+\infty,$$

а под A мы всегда понимаем конечное число.

Определение непрерывности для функций трех и большего числа аргументов ничем не отличается от рассмотренного.

n°3. Частные производные. Пусть $z=f(x, y)$. Закрепим какую-либо точку (x_0, y_0), а затем, не меняя закрепленного значения аргумента $y=y_0$, придадим аргументу x приращение Δx. *Предел* *)

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}}$$

называется частной производной функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по аргументу x и обозначается одним из символов

$$f'_x(x_0, y_0),\quad z'_x,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{5}$$

Нахождение производной z'_x называется *дифференцированием* функции z по аргументу x, а точка (x_0, y_0) называется *точкой дифференцирования*. Она указывается только в первом из обозначений (5), так что остальные несколько несовершенны.

Аналогично определяется частная производная по y:

$$f'_y(x_0, y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частные производные функции двух аргументов по одному из них — это самые обычные производные той функции одной переменной, которая получается из нашей функции при закреплении другого аргумента.

Пусть, например,

$$z=3x^2y^3+x+y. \tag{6}$$

Найдем z'_x в точке (5, 2). Для этого закрепим значение $y=2$, что превратит z в функцию одного x:

$$z=24x^2+x+2.$$

*) Он может и не существовать.

Производная этой функции в произвольной точке x равна

$$z'_x = 48x + 1,$$

а в точке $x = 5$ будет $z'_x = 241$. Это и есть решение нашей задачи. Вообще говоря, предпочитают находить z'_x и z'_y, оставляя для точки дифференцирования буквенное обозначение (x, y). Так, для функции (6), считая x переменным, а y постоянным, находим

$$z'_x = 6xy^3 + 1.$$

Аналогично

$$z'_y = 9x^2y^2 + 1.$$

Беря, в частности, $x = 5$, $y = 2$, находим, что для этой точки будет

$$z'_x = 241, \quad z'_y = 901.$$

Отметим одну особенность обозначения

$$\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{7}$$

Надо помнить, что это есть **цельный символ** для z'_x, а никак **не дробь** *). Забвение этого может привести к ошибкам.

Пример. Пусть переменные x, y, z связаны соотношением

$$xyz = 1. \tag{8}$$

Тогда каждая из этих переменных является функцией двух других. Явные задания этих функций таковы:

$$z = \frac{1}{xy}, \quad x = \frac{1}{yz}, \quad y = \frac{1}{zx}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{x^2y}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-1}{y^2z}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-1}{z^2x}.$$

Перемножая эти равенства, найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-1}{(xyz)^2}$$

и в силу (8)

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1.$$

---

*) Чем (7) и отличается от обозначения $\frac{dz}{dx}$ для производной функции одного аргумента $z = f(x)$. Действительно, ведь $\frac{dz}{dx}$ и в самом деле есть самая настоящая дробь. Нелишним будет заметить, что (в отличие от dx и dz) символы ∂z и ∂x сами по себе **не имеют смысла**.

Однако если бы (7) было настоящей дробью, то написанное здесь произведение должно было бы равняться $+1$, а не -1.

Приведем несколько примеров нахождения частных производных.

1) $z = x^y,\quad z'_x = yx^{y-1},\quad z'_y = x^y \ln x.$

2) $z = \operatorname{arctg}^3 \frac{x}{y},\quad z'_x = 3\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y},\quad z'_y = 3\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \times$
$\times \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{-x}{y^2}.$

3) $r = \sqrt{x^2+y^2},\quad r'_x = \frac{x}{r},\quad r'_y = \frac{y}{r}.$

Обобщение понятия частной производной на случай функций любого числа переменных не требует объяснений. Ограничимся одним примером

$$w = \frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{x+y+z+t},\qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{2t(x+y+z+t)-(x^2+y^2+z^2+t^2)}{(x+y+z+t)^2}.$$

п°4. Формула полного приращения. Пусть функция $z = f(x, y)$ не только непрерывна, но и имеет в каждой точке (x, y) обе частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, которые также являются непрерывными функциями [точки дифференцирования (x, y)]. Закрепим некоторую пару значений x и y, а затем дадим им приращения Δx и Δy. Тогда наша функция получит приращение

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

которое называется „полным приращением" (в отличие от „частных" приращений, которые порождаются приращением только одного из аргументов при закреплении другого). Ясно, что

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + \\ + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]. \tag{9}$$

Каждое из выражений в скобках представляет собой приращение функции z, рассматриваемой уже как функция только одного аргумента, ибо в первых скобках второй аргумент сохраняет постоянное значение $y+\Delta y$, а во вторых скобках закреплен x. Применим к нашим выражениям формулу Лагранжа:

$$\begin{gathered} f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(\xi, y+\Delta y)\Delta x, \\ f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_y(x, \eta)\Delta y. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь ξ лежит между x и $x+\Delta x$, а η между y и $y+\Delta y$. Если Δx и Δy стремятся к нулю, то $\xi \to x$, $\eta \to y$. Значит, при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ будет (ввиду непрерывности f'_x и f'_y)

$$f'_x(\xi, y+\Delta y) \to f'_x(x, y),\quad f'_y(x, \eta) \to f'_y(x, y).$$

Но переменная, стремящаяся к пределу, равна этому пределу, сложенному с некоторой бесконечно малой. Стало быть,

$$\begin{gathered} f'_x(\xi,\ y+\Delta y)=f'_x(x,\ y)+\alpha, \\ f'_y(x,\ \eta)=f'_y(x,\ y)+\beta, \end{gathered} \tag{11}$$

где α и β стремятся к нулю вместе с Δx и Δy. Сопоставляя (9), (10) и (11), находим

$$\Delta z=f'_x(x, y)\,\Delta x+f'_y(x, y)\,\Delta y+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y. \tag{12}$$

Положим

$$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho.$$

Тогда

$$\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y=\frac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y}{\rho}\,\rho=\varepsilon\rho,$$

где положено $\varepsilon=\dfrac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y}{\rho}$. Но $\left|\dfrac{\Delta x}{\rho}\right|\leqslant 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\rho}\right|\leqslant 1$ и потому $|\varepsilon|=\left|\dfrac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y}{\rho}\right|\leqslant|\alpha|+|\beta|$. Значит, при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ будет $\varepsilon\to 0$. Заметим еще, что пара соотношений $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ равносильна соотношению $\rho\to 0$. Таким образом, окончательно

$$\boxed{\Delta z=f'_x(x,\ y)\,\Delta x+f'_y(x,\ y)\,\Delta y+\varepsilon\rho,} \tag{13}$$

причем

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0}\varepsilon=0.} \tag{14}$$

Формула (13) с учетом равенства (14) называется *формулой полного приращения функции.*

n° 5. Дифференцирование сложных функций. Пусть $z=f(x, y)$. Если x и y — функции некоторой переменной $t: x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то и z окажется (сложной) функцией от t. Поставим вопрос о нахождении производной z'_t в предположении, что существуют непрерывные производные z'_x и z'_y, а также производные x'_t и y'_t.

Закрепим t, что закрепит x и y, а тем самым и z. Дадим, далее, t приращение Δt. Тогда переменные x и y получат приращения Δx и Δy, а это, в свою очередь, породит приращение Δz функции z. Согласно (13), будет*)

$$\Delta z=f'_x(x, y)\,\Delta x+f'_y(x, y)\,\Delta y+\varepsilon\rho \quad \left(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\quad \underset{\rho\to 0}{\varepsilon\to 0}\right),$$

*) Напомним, что f'_x и f'_y должны быть вычислены при значениях x и y, отвечающих закрепленному значению t.

откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\varepsilon\frac{\rho}{\Delta t}.$$

Пусть $\Delta t\to 0$. Тогда $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, а следовательно, и $\varepsilon\to 0$. Кроме того,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\to x'_t,\quad \frac{\Delta y}{\Delta t}\to y'_t,\quad \frac{\rho}{\Delta t}=\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\to\pm\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}.$$

Стало быть,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}\to f'_x(x, y)\,x'_t+f'_y(x, y)\,y'_t.$$

Этим доказано существование z'_t и равенство

$$\boxed{z'_t=f'_x(x, y)\,x'_t+f'_y(x, y)\,y'_t.} \tag{15}$$

Эту формулу можно записать в равносильных видах:

$$\boxed{z'_t=z'_x\cdot x'_t+z'_y\cdot y'_t,} \tag{16}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.} \tag{17}$$

Формула (16) представляет собой распространение „правила цепочки". В формуле (17) интересна расстановка знаков d и ∂, позволяющих различать производные функции одной переменной от частных производных функций нескольких переменных.

Пример. Пусть

$$z=x^y,\quad x=x(t),\quad y=y(t).$$

Тогда $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$ и потому

$$z'_t=yx^{y-1}x'_t+x^y\ln x\cdot y'_t.$$

Например, для $z=(\operatorname{arctg} t)^{\sin t}$ имеем

$$z'_t=\sin t\,(\operatorname{arctg} t)^{\sin t-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}+(\operatorname{arctg} t)^{\sin t}\ln\operatorname{arctg} t\cdot\cos t.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $z=f(x, y)$, а $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$. Тогда z будет функцией от u и v и можно говорить о частных производных z'_u и z'_v. Предполагая существование непрерывных z'_x и z'_y и (любых, но конечных) x'_u и y'_u будем заниматься разысканием z'_u. Для этого надо v закрепить и рассматривать x и y

как функции одного u. Но тогда дело сводится к уже рассмотренному случаю. Значит, z'_u существует и, согласно (16),

$$\boxed{z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u.} \tag{18}$$

Более интересно написать эту формулу, используя обозначение $\frac{\partial z}{\partial u}$. Действительно, тогда (18) примет вид

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}.} \tag{19}$$

Если забыть, что символы $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots$ не являются дробями, то (19) может вызвать недоумение, ибо, „сокращая" на ∂x и ∂y, мы „получили" бы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u} = 2\frac{\partial z}{\partial u},$$

что, разумеется, нелепо.

n° 6. Дифференцирование неявной функции. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = C, \tag{20}$$

где $C = \text{const}$. Это уравнение, вообще говоря, можно решить относительно y, и потому оно задает y как (неявную!) функцию от x. Значит, можно говорить о производной y'_x. Покажем, как найти y'_x, не решая уравнения (20), т. е. не находя явного выражения y через x.

Для этого представим себе, что мы нашли это явное выражение $y = f(x)$ и подставили в (20) вместо аргумента y функцию $f(x)$. Тогда (20) превратится в тождество *) относительно x. Иными словами, если в (20) под y понимать не независимую переменную, а интересующую нас неявную функцию $f(x)$, то обе части (20) представят собой одну и ту же (но лишь по-разному записанную) функцию от x. Найдем производную этой функции (как говорят, „продифференцируем полученное тождество"). Справа получится,

---

*) Если мы решим какое-либо уравнение и подставим в него вместо неизвестного его значение, то получим тождество. Например, решая уравнение

$$2x + 1 = 7, \tag{*}$$

найдем $x = 3$. Подставляя в (*) вместо x его значение 3, получим тождество $2 \cdot 3 + 1 = 7$. Аналогично, если из уравнения

$$2x^2 + y = 5 \tag{**}$$

найти $y = 5 - 2x^2$ и подставить это в (**), то получим тождество

$$2x^2 + (5 - 2x^2) = 5.$$

очевидно, 0. Для нахождения производной левой части учтем, что эта левая часть (обозначим ее через z) есть сложная функция от x

$$z = F(x, y), \qquad y = f(x).$$

Стало быть, по формуле (15)

$$z'_x = F'_x(x, y)\, x'_x + F'_y(x, y)\, y'_x.$$

Так как $x'_x = 1$, а найденная производная z'_x левой части тождества (20) должна равняться 0 (т. е. производной правой части), то

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\, y'_x = 0.$$

Отсюда

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.} \tag{21}$$

Надо помнить, что в правой части x обозначает точку дифференцирования, а y — соответствующее этому x значение рассматриваемой неявной функции.

Пример. Провести к кривой

$$x^5 + y^5 - 2xy^3 = 17 \tag{22}$$

касательную в точке (1, 2).

Найти явное задание нашей кривой мы не умеем. Однако легко проверить, что точка (1, 2) лежит на этой кривой. Поэтому значению $x = 1$ отвечает значение $y = 2$. Этого достаточно, чтобы решить задачу. Именно, обозначая левую часть (22) через $F(x, y)$, имеем: $F'_x(x, y) = 5x^4 - 2y^3$, $F'_y(x, y) = 5y^4 - 6xy^2$. Стало быть,

$$y'_x = -\frac{5x^4 - 2y^3}{5y^4 - 6xy^2},$$

а при $x = 1$ (и $y = 2$) $y' = \frac{11}{56}$. Поэтому уравнение касательной таково:

$$y - 2 = \frac{11}{56}(x - 1).$$

Обобщим этот пример. Пусть требуется провести касательную к кривой

$$F(x, y) = C$$

в точке (x_0, y_0), лежащей на этой кривой.

Искомое уравнение имеет вид

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0).$$

Но по (21) будет

$$y'_0 = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Значит, уравнение касательной имеет вид

$$y-y_0=-\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}(x-x_0)$$

или, что то же самое,

$$\boxed{F'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0)(y-y_0)=0.}$$

n° 7. Касательная к пространственной линии и касательная плоскость к поверхности. Рассмотрим в пространстве кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t). \tag{23}$$

Пусть $M=M(x_0, y_0, z_0)$ — точка этой кривой, отвечающая значению параметра $t=t_0$. Найдем уравнения касательной к линии (23), проведенной в точке M. Для этого дадим параметру приращение Δt и обозначим через $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ точку, отвечающую значению $t=t_0+\Delta t$. Секущая MN как прямая, проходящая через две заданные точки, имеет канонические уравнения

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z},$$

которые можно записать и в виде

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Когда $\Delta t\to 0$, отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$ стремятся соответственно к пределам $x'_t=\varphi'(t_0)$, $y'_t=\psi'(t_0)$, $z'_t=\omega'(t_0)$. Значит, искомые уравнения имеют вид

$$\boxed{\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.} \tag{24}$$

Пример. Провести касательную к линии

$$x=3t^2-2,\ y=t^3+1,\ z=2t^2+6$$

в точке $t=1$.

Решение. Здесь $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=8$, $x'_t=6t$, $y'_t=3t^2$, $z'_t=4t$, $x'(1)=6$, $y'(1)=3$, $z'(1)=4$ и искомая касательная есть

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-8}{4}.$$

Рассмотрим теперь некоторую поверхность

$$F(x, y, z)=C \tag{25}$$

и на ней точку $M(x_0, y_0, z_0)$. Проведем через M какую-нибудь линию K, целиком лежащую на поверхности (25) (рис. 321). Пусть параметрические уравнения линии K суть

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t),$$

причем точка M получается отсюда при $t=t_0$. Так как каждая точка линии K лежит на нашей поверхности, то при любом значении параметра t будет

$$F[\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]=C.$$

Но тогда это соотношение есть т о ж д е с т в о относительно t. Дифференцируя его, находим

$$F'_x[\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]\ \varphi'(t)+F'_y[\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]\ \psi'(t)+\\ +F'_z[\varphi(t),\ \psi(t),\ \omega(t)]\ \omega'(t)=0.$$

Положим здесь $t=t_0$. Это дает соотношение

$$F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)\ \varphi'(t_0)+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\ \psi'(t_0)+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\ \omega'(t_0)=0. \quad (26)$$

Как показывают уравнения (24), вектор $\boldsymbol{\tau}$ с проекциями $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\omega'(t_0)$ (если его отложить от точки M) лежит на касательной, проведенной к линии K в точке M. Введем в рассмотрение вектор

$$\boldsymbol{n}=F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\boldsymbol{i}+\\ +F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\boldsymbol{j}+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\,\boldsymbol{k}.$$

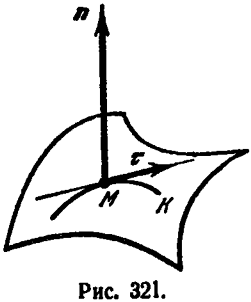


Рис. 321.

Этот вектор полностью определяется поверхностью (25) и точкой M и не зависит от выбора кривой K. Равенство (26) можно кратко записать в виде

$$\boldsymbol{n\tau}=0.$$

Значит, вектор $\boldsymbol{\tau}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{n}$. Итак, если от M отложить вектор $\boldsymbol{n}$, то какую бы линию K на поверхности (25) мы ни провели через точку M, касательная (в точке M) к этой линии будет перпендикулярной к $\boldsymbol{n}$, т. е. будет лежать в плоскости, проходящей через M и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}$*). Эта плоскость называется *касательной* плоскостью к поверхности (25) в точке M. Ее уравнение, очевидно, будет иметь вид

$$\boxed{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)\ (x-x_0)+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\ (y-y_0)+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0.}$$

Вектор $\boldsymbol{n}$ называют *нормалью* к поверхности (25) в точке M.

П р и м е р. Провести в точке M (1, 1, 1) плоскость, касательную к поверхности $x^3y^2+xz+z=3$ **).

Р е ш е н и е. Здесь $F'_x=3x^2y^2+z$, $F'_y=2x^3y$, $F'_z=x+1$. Таким образом, $F'_x(1,\ 1,\ 1)=4$, $F'_y(1,\ 1,\ 1)=2$, $F'_z(1,\ 1,\ 1)=2$ и искомое уравнение будет $4(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0$, т. е. $2x+y+z-4=0$.

n°8. Производные высших порядков.

Пусть

$$z=8x^3y^2+16xy^2-9x. \quad (27)$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y}=16x^3y+32xy.$$

---

*) Эти рассуждения теряют силу, если $F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)=F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)=F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)=0$. Точки $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ с этим свойством называются „особыми". Мы их не рассматриваем.

**) Важно, что точка M лежит на поверхности.

Мы видим, что производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ сама оказалась функцией от x и y *). Поэтому ее можно снова дифференцировать по каждой из переменных. Результат дифференцирования $\frac{\partial z}{\partial y}$ по x обозначается через $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$, а результат дифференцирования по y через $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 48x^2 y + 32y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 16x^3 + 32x.$$

Обе эти функции называются ***вторыми частными производными*** функции z. Само собой понятно, что должен обозначать знак

$$\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x\, \partial y}. \tag{28}$$

Именно, это результат пятикратного последовательного дифференцирования z, причем первое дифференцирование производится по x, результат его дифференцируется опять по x, новый результат — по y, то, что получится, — по x и, наконец, последнее дифференцирование производится по y. Применительно к функции (27) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 24x^2 y^2 + 16y^2 - 9, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 48xy^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y} = 96xy, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x} = 96y$$

и поэтому

$$\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x\, \partial y} = 96.$$

Для получения производной (28) (это производная пятого порядка) функцию z приходится дифференцировать три раза по x и два раза по y, причем эти дифференцирования надо производить в предписанной последовательности: сначала дважды по x, потом по y, потом снова по x и, наконец, по y. Оказывается, что в большинстве практически встречающихся случаев **) ***можно переставлять порядок дифференцирований по отдельным аргументам.*** Например,

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x},} \tag{29}$$

$$\boxed{\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial^5 z}{\partial x^3\, \partial y^2} = \frac{\partial^5 z}{\partial y^2\, \partial x^3} = \frac{\partial^5 z}{\partial y\, \partial x^3\, \partial y}.} \tag{30}$$

*) Здесь x и y — координаты точки дифференцирования.

**) Например, когда все производные до интересующего нас порядка (включительно) непрерывны.

Для функции (27) мы уже видели, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 48x^2y + 32y.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 24x^2y^2 + 16y^2 - 9,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 48x^2y + 32y,$$

так что (29) оказалось верно. Предлагаем читателю на этом же примере проверить соотношения (30), а также на самостоятельно придуманных примерах убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\partial^7 z}{\partial y\,\partial x^3\,\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial^7 z}{\partial x^5\,\partial y^2}.$$

Все сказанное легко переносится на функции любого числа аргументов. Если, например,

$$u = f(x,\ y,\ z),$$

то можно ввести производные вида

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z\,\partial x}$$

и подобные им. Здесь также порядок отдельных дифференцирований безразличен.

§ 2. Экстремальные значения функции нескольких переменных

n° 1. Определение экстремума. Необходимые условия экстремума. Для функции одного аргумента мы дали два определения максимума: 1) функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если x_0 лежит строго внутри промежутка, где задана $f(x)$, и при переходе (слева направо) x через x_0 функция переходит от возрастания к убыванию и 2) функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если существует промежуток $[p,\ q]$, лежащий в промежутке задания функции, содержащий x_0 строго внутри себя, $p < x_0 < q$, и такой, что из всех значений, принимаемых $f(x)$ на $[p,\ q]$, наибольшим оказывается $f(x_0)$. Именно это второе определение максимума переносится на случай функции нескольких переменных. Формулируем его для двух аргументов.

Определение. Функция $f(x,\ y)$ имеет *максимум* в точке $(x_0,\ y_0)$, если существует прямоугольник

$$R\begin{pmatrix} p \leqslant x \leqslant q \\ r \leqslant y \leqslant s \end{pmatrix},$$

лежащий в области задания функции, содержащий (x_0, y_0) строго внутри себя, $p<x_0<q$, $r<y_0<s$, и такой, что из всех значений, принимаемых $f(x, y)$ на R, наибольшим оказывается $f(x_0, y_0)$.

Аналогично определяется точка минимума. Общее название для максимума и минимума — экстремум.

Покажем, как искать точки экстремума для функций, имеющих непрерывные частные производные. Пусть такая функция $f(x, y)$ имеет максимум в точке (x_0, y_0). Закрепим $y=y_0$ и будем рассматривать функцию $f(x, y_0)$ одного переменного x. Если $R\begin{pmatrix}p\leqslant x\leqslant q\\ r\leqslant y\leqslant s\end{pmatrix}$ — тот прямоугольник, о котором шла речь в определении максимума, то (рис. 322) отрезок $[p, q]$ лежит в области задания $f(x, y_0)$, содержит x_0 строго внутри себя и из всех значений, принимаемых $f(x, y_0)$ на $[p, q]$, наибольшим является $f(x_0, y_0)$, т. е. значение, принимаемое функцией $f(x, y_0)$ при $x=x_0$. Иными словами, $f(x, y_0)$ имеет максимум в точке $x=x_0$. Стало быть, производная функции $f(x, y_0)$ при $x=x_0$ должна обращаться в 0. Но ведь эта производная есть не что иное, как частная производная $f'_x(x_0, y_0)$. Итак, $f'_x(x_0, y_0)=0$. Аналогично обстоит дело и с $f'_y(x_0, y_0)$. Таким образом, координаты (x_0, y_0) точки максимума обязательно удовлетворяют системе соотношений

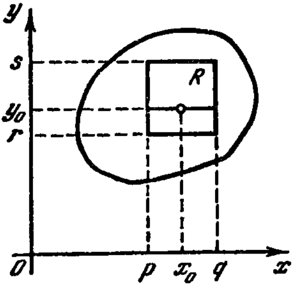


Рис. 322.

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0)&=0,\\ f'_y(x_0, y_0)&=0.\end{aligned}} \tag{1}$$

Ясно, что для точки минимума также должны удовлетворяться соотношения (1).

Заметим, что всякая точка (x_0, y_0) (независимо от того, будет ли в ней экстремум или нет), для которой выполнены соотношения (1), называется *стационарной* точкой. Таким образом, точка экстремума всегда будет стационарной. Система уравнений

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x(x, y)&=0,\\ f'_y(x, y)&=0\end{aligned}} \quad . \tag{2}$$

содержит два уравнения, а неизвестных в ней тоже два. Поэтому, вообще говоря, эту систему можно решить, найдя одну или несколько стационарных точек. В п° 2 мы дадим правило для выяснения вопроса, имеется ли в данной стационарной точке (x_0, y_0) экстремум и если да, то какой, а пока лишь заметим, что, например, для функции трех переменных $f(x, y, z)$ нахождение точек экстремума приводится к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$f'_x(x, y, z)=0, \quad f'_y(x, y, z)=0, \quad f'_z(x, y, z)=0.$$

Иными словами, и здесь число уравнений совпадает с числом неизвестных.

п° 2. Правило исследования стационарной точки. Будем предполагать, что исследуемая функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков *) $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy}$. Пусть (x_0, y_0) — стационарная точка, лежащая строго внутри области задания функции. Положим

$$f''_{xx}(x_0, y_0)=A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0)=B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0)=C$$

и пусть

$$\boxed{\Delta=AC-B^2.}$$

Теорема. *Если $\Delta<0$, то в (x_0, y_0) экстремума нет. Если же $\Delta>0$, то экстремум есть* **), *причем это максимум, когда $A<0$, и минимум, когда $A>0$* ***).

Эту теорему мы доказывать не будем. Заметим, что она не охватывает случая $\Delta=0$ ****), однако очень часто эта теорема решает вопрос о характере точки (x_0, y_0).

Примеры. 1) Пусть $z=x^3+y^3-9xy$. Здесь $z'_x=3x^2-9y$, $z'_y=3y^2-9x$. Значит, для нахождения стационарных точек надо решить систему уравнений $x^2=3y$, $y^2=3x$. Первое уравнение дает $y=\frac{1}{3}x^2$. Подставляя это во второе, находим $x^4-27x=0$. Стало быть, x имеет два значения $x_1=0$, $x_2=3$. Таким образом, найдены две стационарные точки (0, 0) и (3, 3).

Поскольку $z''_{xx}=6x$, $z''_{xy}=-9$, $z''_{yy}=6y$, то в точке (0, 0) будет $A=0$, $B=-9$, $C=0$, откуда $\Delta=AC-B^2=-81<0$ и в нашей точке экстремума нет. В точке же (3, 3) будет $A=18$, $B=-9$, $C=18$, т. е. $\Delta=324-81>0$ и экстремум есть. Так как $A>0$, то это минимум.

---

*) Напомним, что $f''_{xy}=f''_{yx}$.

**) Напомним, что и для одной переменной в стационарной точке x_0 имеется максимум при $f''(x_0)<0$ и минимум при $f''(x_0)>0$.

***) Если $\Delta>0$, то $AC>B^2$ и тем более $AC>0$. Значит (при $\Delta>0$), числа A и C одного знака, и потому можно было бы в теореме говорить не об A, а о C.

****) Так же, как для одной переменной 2-й способ исследования стационарной точки x_0 оказывался неприменимым при $f''(x_0)=0$.

2) $z=x^4+y^4$. Здесь $z'_x=4x^3$, $z'_y=4y^3$, $z''_{xx}=12x^2$, $z''_{xy}=0$, $z''_{yy}=12y^2$. Стационарной точкой является (0, 0). В ней $A=B=C=0$ и потому $\Delta=0$, т. е. теорема неприменима. Однако поскольку в точке (0, 0) будет $z=0$, а во всех остальных точках $z>0$, то непосредственно ясно*), что здесь мы имеем минимум.

п° 3. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Пусть функция $f(x, y)$ задана и непрерывна в некоторой области S, ограниченной замкнутым контуром K (рис. 323). Поставим вопрос о нахождении наибольшего значения этой функции.

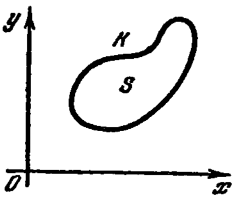


Рис. 323.

Если это значение достигается в точке (x_0, y_0), лежащей строго внутри области S, то, очевидно, в этой точке функция $f(x, y)$ имеет максимум. Однако интересующее нас наибольшее значение может достигаться и в точке, лежащей на контуре K. Стало быть, для решения нашего вопроса надо найти все точки максимума, лежащие внутри S, вычислить в них значения функции и сравнить эти значения с наибольшим из значений, принимаемых функцией на контуре K. Это последнее можно найти, если использовать аналитическое задание контура K. Пусть, например, этот контур задан параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\quad (p\leqslant t\leqslant q).$$

Тогда любая точка (x, y) контура определяется заданием некоторого значения t и в этой точке будет

$$f(x, y)=f[\varphi(t),\ \psi(t)].$$

Иными словами, на контуре K наша функция $f(x, y)$ оказывается функцией $F(t)$ одного аргумента t и вопрос свелся к нахождению наибольшего значения $F(t)$ на отрезке $[p, q]$, т. е. к задаче, которую мы умеем решать.

Разумеется, все сказанное переносится и на случай, когда надо отыскать наименьшее значение функции.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения, принимаемые функцией

$$z=x^2-8x+y^2+6y \tag{3}$$

в круге

$$(x-5)^2+(y-7)^2\leqslant 1. \tag{4}$$

В нашем случае

$$z'_x=2x-8,\quad z'_y=2y+6.$$

---

*) Разумеется, не всегда дело обстоит так просто.

Система уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$ дает единственную стационарную точку $(4, -3)$. Эта точка лежит вне круга (4), и потому внутри круга точек экстремума не имеется. Значит, интересующие нас значения достигаются на окружности, ограничивающей круг (4). Параметрические уравнения этой окружности

$$x=5+\cos t,\ y=7+\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Подставляя эти выражения x и y в (3), получим

$$z=(5+\cos t)^2-8(5+\cos t)+(7+\sin t)^2+6(7+\sin t),$$

т. е.

$$z=77+2\cos t+20\sin t. \tag{5}$$

Надо найти наибольшее и наименьшее значения функции (5) на отрезке $[0, 2\pi]$. Дифференцируя, находим

$$z'_t=20\cos t-2\sin t.$$

Полагая $z'_t=0$, находим $\sin t=10\cos t$, т. е.

$$\operatorname{tg} t=10. \tag{6}$$

При $0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$ есть только один угол θ, удовлетворяющий (6) *). Для него $\operatorname{tg}^2\theta=100$, $\sec^2\theta=101$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{101}}$, $\sin\theta=\frac{10}{\sqrt{101}}$. Другой угол на $[0, 2\pi]$, удовлетворяющий (6), будет $\bar\theta=\theta+\pi$. Для него

$$\sin\bar\theta=-\frac{10}{\sqrt{101}},\quad \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{101}}.$$

Соответствующие значения z

$$z(\theta)=77+\frac{202}{\sqrt{101}},\quad z(\bar\theta)=77-\frac{202}{\sqrt{101}}.$$

Поскольку

$$z(0)=z(2\pi)=79,$$

то $z(\theta)$ и $z(\bar\theta)$ являются наибольшим и наименьшим значениями z.

Замечание. На практике очень часто встречается необходимость нахождения наибольшего значения функции $f(x, y)$, заданной в области S, ограниченной замкнутым контуром K, если известно, что всюду на K будет $f(x, y)=0$, а внутри S будет $f(x, y)>0$. Ясно, что в этом случае достаточно найти все точки максимума функции, лежащие внутри S, и выбрать ту из них, которая дает функции наибольшее значение. Если (в указанных условиях) внутри S

---

*) По таблицам можно найти $\theta=84°\,17'\,22''$.

окажется только одна стационарная точка (x^*, y^*), то $f(x^*, y^*)$ и будет искомым наибольшим значением*). Таким образом, в рассматриваемом случае отпадает надобность в применении (недоказанной!) теоремы п°2.

п° 4. Примеры конкретного характера. 1) Данное число $A > 0$ разложить на слагаемые $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ так, чтобы их произведение

$$P = xyz$$

оказалось наибольшим.

Так как $z = A - x - y$, то

$$P = xy(A - x - y).$$

Дело свелось к нахождению наибольшего значения этой функции двух переменных при условиях $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant A$. Эти три неравенства задают треугольник S (рис. 324), где и требуется найти $P_{\text{наиб}}$. На контуре этого треугольника будет $P = 0$, а внутри его $P > 0$. Значит, мы находимся в тех условиях, о которых говорилось в начале заключительного замечания п° 3. Так как $P = Axy - x^2y - xy^2$, то

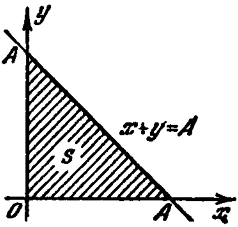


Рис. 324.

$$P'_x = Ay - 2xy - y^2, \quad P'_y = Ax - x^2 - 2xy$$

и система (2) принимает вид

$$y(A - 2x - y) = 0, \quad x(A - x - 2y) = 0. \tag{7}$$

Нас интересуют те решения (x, y) этой системы, которые представляют собой точки, лежащие строго внутри S. Для них $x \neq 0$, $y \neq 0$ и система (7) упрощается:

$$2x + y = A,$$
$$x + 2y = A.$$

Отсюда находим $x = \frac{A}{3}$, $y = \frac{A}{3}$. Эта точка **) и дает наибольшее значение P. Так как при найденных x и y будет и $z = A - x - y = \frac{A}{3}$, то доказана

Теорема. *Произведение трех неотрицательных чисел, имеющих заданную сумму, будет наибольшим тогда и только тогда, когда все эти числа равны друг другу.*

---

*) Действительно, ведь это значение обязательно существует и может достигаться только внутри S, но нигде, кроме (x^*, y^*), оно заведомо не достигается.

**) Поскольку она оказалась единственной стационарной точкой, лежащей внутри S, то мы можем сослаться и на конец упомянутого замечания.

Аналогичная теорема верна и тогда, когда речь идет о произведении любого числа сомножителей. Заметив это, возьмем любые n чисел $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$ и пусть $A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Числа $\frac{A}{n}, \frac{A}{n}, \ldots, \frac{A}{n}$ имеют ту же сумму. А так как все эти числа равны друг другу, то их произведение не меньше, чем $x_1 x_2 \ldots x_n$. Иными словами,

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{A}{n}\right)^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n,$$

т. е.

$$\boxed{\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.} \tag{8}$$

Таким образом, ***среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического****).

2) Неравенство (8) позволяет решить и такую задачу: данное число $P > 0$ разложить на n положительных сомножителей так, чтобы их сумма оказалась наименьшей. Действительно, если $P = x_1 x_2 \ldots x_n$ — какое-нибудь разложение P, то по (8)

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n \sqrt[n]{P}.$$

Итак, нельзя получить сумму, меньшую $n\sqrt[n]{P}$. А эту последнюю сумму получить легко, взяв все сомножители равными $\sqrt[n]{P}$. Значит, доказана

Теорема. Сумма нескольких**) положительных чисел, имеющих данное произведение, оказывается наименьшей тогда и только тогда, когда все эти числа равны между собой.

3) Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих заданную полную поверхность A, найти тот, который имеет наибольший объем V.

Обозначая через x, y, z длины ребер параллелепипеда, получим

$$V = xyz,$$

причем

$$2(xy + yz + zx) = A. \tag{9}$$

Из (9) следует

$$z = \frac{\frac{A}{2} - xy}{x + y}.$$

*) Причем эти средние равны тогда и только тогда, когда все рассматриваемые числа равны друг другу.

**) Их количество дано заранее.

Значит,

$$V=\frac{Axy-2x^2y^2}{2(x+y)}. \tag{10}$$

Надо найти $V_{\text{наиб}}$, если переменные x и y положительны и, кроме того, $2xy<A$. Иными словами, точка (x, y) должна лежать в области S, ограниченной осями координат и гиперболой $2xy=A$ (рис. 325).

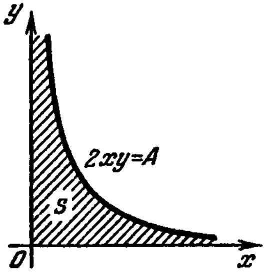


Рис. 325.

Из (10) следует

$$V'_x=\frac{(Ay-4xy^2)(x+y)-(Axy-2x^2y^2)}{2(x+y)^2},$$

откуда

$$V'_x=\frac{y^2}{2(x+y)^2}(A-2x^2-4xy).$$

Аналогично

$$V'_y=\frac{x^2}{2(x+y)^2}(A-2y^2-4xy).$$

Уравнения $V'_x=V'_y=0$ дают

$$2x^2+4xy=A, \quad 4xy+2y^2=A.$$

Отсюда $2x^2=2y^2$, т. е. $x=y$. Стало быть,

$$6x^2=A$$

и

$$x=\sqrt{\frac{A}{6}}.$$

Но тогда и $y=\sqrt{\frac{A}{6}}$ и (9) дает $z=\sqrt{\frac{A}{6}}$, т. е. искомым параллелепипедом является куб *).

n° 5. Расстояние между двумя прямыми в пространстве. Изложенная теория позволяет легко найти расстояние d между двумя прямыми в пространстве. Действительно, эти прямые можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x&=x_1+l_1u, \\ y&=y_1+m_1u, \quad \text{(I)} \\ z&=z_1+n_1u, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x&=x_2+l_2v, \\ y&=y_2+m_2v, \quad \text{(II)} \\ z&=z_2+n_2v. \end{aligned}$$

Взяв на прямой I точку M, отвечающую некоторому значению параметра u, а на прямой II точку N, отвечающую значению пара-

*) То, что в найденной точке достигается именно наибольшее, а не наименьшее значение функции V, видно из того, что при приближении точки (x, y) к любой точке, лежащей на граничных линиях области S, будет $V\to 0$. Это становится ясным, если (10) переписать в виде $V=\frac{xy}{2(x+y)}(A-2xy)$.

метра v, найдем расстояние MN. Оно будет зависеть от u и v. Наименьшее значение этой функции от u и v и будет равно искомому расстоянию d.

Пример *). Найти расстояние между прямыми

$$\begin{aligned} x+y-z-1=0,\\ 2x+y-z-2=0, \end{aligned} \quad \text{(I)} \qquad \begin{aligned} x+2y-z-2=0,\\ x+2y+2z+4=0. \end{aligned} \quad \text{(II)}$$

Прежде всего перейдем к каноническому заданию наших прямых. Если из второго уравнения (I) вычесть первое, то мы найдем, что $x=1$. Подставляя это значение x в любое из уравнений (I), находим $y=z$. Значит, прямая I проходит через точки (1, 0, 0) и (1, 1, 1). Ее канонические уравнения

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},$$

а параметрические получатся отсюда, если общее значение этих дробей обозначить через u:

$$x=1, \quad y=u, \quad z=u.$$

Вычитание одного уравнения (II) из другого дает $z=-2$. Подстановка этого z в любое из уравнений (II) дает $x+2y=0$, т. е. $x=-2y$. Взяв $y=0$ и $y=1$, находим на прямой II две точки $(0, 0, -2)$ и $(-2, 1, -2)$. Значит, канонические уравнения прямой II имеют вид

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{0},$$

а параметрические

$$x=-2v, \quad y=v, \quad z=-2.$$

Таким образом, $M(1, u, u)$ — точка прямой I, а $N(-2v, v, -2)$ — прямой II. Квадрат расстояния MN есть

$$f(u, v)=(1+2v)^2+(u-v)^2+(u+2)^2. \tag{11}$$

Дифференцируя $f(u, v)$ по u и по v и приравнивая f'_u и f'_v нулю, находим

$$2u-v+2=0, \quad 5v-u+2=0.$$

Отсюда $u=-\frac{4}{3}$, $v=-\frac{2}{3}$. Подставляя в (11), находим наименьшее значение $f(u, v)$, равное

$$d^2=\left(1-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}+2\right)^2=1.$$

Значит, $d=1$.

---

*) Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, т. 1, Физматгиз, 1958, стр. 42.

§ 3. Полный дифференциал

n° 1. Определение дифференциала. Пусть функция $z=f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и по y. Закрепим точку (x, y), а затем дадим аргументам приращения Δx и Δy. Как мы знаем из § 1, соответствующее приращение Δz представимо в форме

$$\Delta z=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y+\varepsilon\rho, \tag{1}$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=0$, а f'_x и f'_y вычислены именно в той точке (x, y), которую мы закрепили.

Если $\rho\to 0$, то произведение $\varepsilon\rho$ будет бесконечно малой порядка высшего, чем ρ. Поэтому при весьма малых Δx и Δy этим произведением часто можно пренебречь, что приводит к приближенной формуле

$$\Delta z\cong f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y. \tag{2}$$

Правая часть этой формулы называется *полным дифференциалом* функции $z=f(x, y)$ и обозначается через dz и $df(x, y)$. Итак,

$$\boxed{df(x, y)=f'_x(x, y)\Delta x+f'_y(x, y)\Delta y} \tag{3}$$

или, короче,

$$\boxed{dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y.} \tag{4}$$

Формула (2) означает, что

$$\boxed{\Delta z\cong dz,} \tag{5}$$

т. е. *приращение функции приближенно равно ее дифференциалу* *), причем точность этого равенства тем выше, чем меньше приращения аргументов.

Пример. Пусть

$$z=2x^2y+3xy+1.$$

Дадим x и y, исходя из значений $x=2$, $y=1$, приращения $\Delta x=0{,}01$ и $\Delta y=0{,}02$ и найдем Δz и dz.

Значениям $x=2$, $y=1$ отвечает $z=15$. Новым значениям $x+\Delta x=2{,}01$, $y=1{,}02$ отвечает $z+\Delta z=15{,}392404$. Значит,

$$\Delta z=0{,}392404.$$

---

*) Полный дифференциал зависит от точки дифференцирования (x, y) и от приращений Δx и Δy. В (5) дифференциал dz вычисляется при тех x и y, исходя из которых аргументы получили приращения Δx и Δy, породившие Δz, и именно эти Δx и Δy и надо подставить в dz.

С другой стороны,

$$z'_x = 4xy + 3y, \quad z'_y = 2x^2 + 3x.$$

Если $x = 2$, $y = 1$, то $z'_x = 11$, $z'_y = 14$. Значит,

$$dz = 11 \cdot 0{,}01 + 14 \cdot 0{,}02 = 0{,}39.$$

Таким образом, абсолютная ошибка равенства $\Delta z \cong dz$ есть 0,002404, а относительная

$$\frac{0{,}002404}{0{,}392404} < \frac{0{,}003}{0{,}3} = 0{,}01 = 1\%.$$

Аналогично определяется полный дифференциал функции любого числа аргументов. Например, для $u = f(x, y, z)$ будет

$$du = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z.$$

Здесь также дифференциал при малых приращениях аргументов почти совпадает с приращением функции.

Рассмотрим несколько примеров. 1) Пусть $z = x^3 y^2$. Найти dz при $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = \Delta y = 0{,}3$.

Здесь $z'_x = 3x^2 y^2 = 12$, $z'_y = 2x^3 y = 4$. Значит, $dz = 4{,}8$.

2) Пусть $z = 3x^2 y + 8x$. Найти dz при $x = 2$, $y = 3$ и при произвольных Δx и Δy.

Здесь $z'_x = 6xy + 8 = 44$, $z'_y = 3x^2 = 12$ и потому $dz = 44\,\Delta x + 12\,\Delta y$.

3) Пусть $z = x^y$. Найти dz при произвольных x, y, Δx, Δy.

Здесь $dz = yx^{y-1}\,\Delta x + x^y \ln x\,\Delta y$.

4) $d(x^3 \operatorname{arctg} y) = 3x^2 \operatorname{arctg} y\,\Delta x + x^3 \dfrac{\Delta y}{1+y^2}$.

5) $de^{x \sin y} = e^{x \sin y} \sin y\,\Delta x + e^{x \sin y}\, x \cos y\,\Delta y$.

Интересен пример функции $z = x$. Здесь $z'_x = 1$, $z'_y = 0$ и потому $dz = \Delta x$, т. е.

$$\boxed{dx = \Delta x.}$$

Аналогично $dy = \Delta y$. Иными словами, *дифференциалы аргументов совпадают с их приращениями*. Возвращаясь к формуле (3) и заменяя в ней Δx и Δy на dx и dy, получаем

$$\boxed{df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.} \tag{6}$$

Обычно дифференциал записывают именно в этой форме.

Отметим в заключение, что необходимое условие экстремума функции $z = f(x, y)$, состоящее в равенствах $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$, можно записать одним равенством

$$\boxed{df(x, y) = 0,} \tag{7}$$

если считать его верным для любых Δx и Δy. Действительно, взяв в (7) $\Delta x=1$, $\Delta y=0$, найдем $f'_x(x, y)=0$. Аналогично из (7) следует, что $f'_y(x, y)=0$.

n° 2. Применение дифференциала в теории ошибок. Пусть некоторая величина $z=f(x, y)$ зависит от x и y, причем нас интересует значение z_0, соответствующее системе значений $x=x_0$, $y=y_0$, которые сами находятся в результате некоторого измерения. Всякое измерение дает значение измеряемой величины лишь приближенно, причем ошибка бывает неизвестна, а известно лишь число, которого не может превзойти ошибка. Это число („предельная ошибка") определяется точностью применяемой аппаратуры. Например, если некоторый предмет взвешивается на весах, обеспечивающих точность 1 *мг*, а на шкале весов мы прочли показание 323 *мг*, то можем гарантировать лишь, что истинный вес предмета лежит между 322 и 324 *мг*. Здесь 1 *мг* и есть предельная ошибка.

Возникает естественный вопрос, как, зная предельные ошибки в измерениях x_0 и y_0, найти предельную ошибку величины z_0, которая уже не измеряется непосредственно, а вычисляется по измеренным x_0 и y_0. Теория дифференциала дает решение этого вопроса. Действительно, измерения дают не x_0 и y_0, а $x_0+\Delta x$ и $y_0+\Delta y$, где $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ не превосходят соответствующих предельных ошибок α_x и α_y. Но тогда вычисление даст не $z_0=f(x_0, y_0)$, а $z_0+\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. Разность Δz может быть заменена дифференциалом dz *). Таким образом, ошибка Δz, равная

$$dz=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

удовлетворяет неравенству **)

$$|\Delta z|\leqslant|f'_x(x_0, y_0)|\alpha_x+|f'_y(x_0, y_0)|\alpha_y. \tag{8}$$

Пример. Измерение сторон прямоугольника дало $x=5$ *м*, $y=3$ *м*, причем предельные ошибки при измерении длины равны 0,5 *см*. Площадь прямоугольника $z=xy=15$ *м*². Ошибка этого значения по (8) оценивается так:

$$|\Delta z|\leqslant y\alpha_x+x\alpha_y=(3\cdot 0{,}005+5\cdot 0{,}005)\ м^2=0{,}04\ м^2.$$

---

*) Ведь разности Δx и Δy, как правило, весьма малы (иначе измерения были бы совершенно ненадежны), а тогда ошибка равенства $\Delta z\cong dz$ мала даже по сравнению с $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

**) В правой части этого неравенства фигурируют точные значения x_0 и y_0, которые нам неизвестны. Заменяя их измеренными значениями $x_0+\Delta x$ и $y_0+\Delta y$, мы делаем ошибку высшего порядка малости. Поэтому на практике в формулу (8) и подставляют в качестве x_0 и y_0 их измеренные значения. То, что замена (x_0, y_0) на $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ в формуле (8) влечет ошибку высшего порядка малости, следует из того, что разность между $f'_x(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и $f'_x(x_0, y_0)$ сама имеет тот же порядок, что и $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, а при упомянутой замене эту разность мы будем умножать на малую величину α_x.

Формула (8) позволяет установить большое количество правил, применяемых в теории ошибок. Остановимся на двух из них:

I. Если $z=x+y$, то $dz=\Delta x+\Delta y$, откуда $|\Delta z|\leqslant \alpha_x+\alpha_y$, т. е. *предельная ошибка суммы равна сумме предельных ошибок слагаемых.*

II. Если $z=xy$, то $dz=y\Delta x+x\Delta y$ и $|\Delta z|\leqslant |y|\alpha_x+|x|\alpha_y$. Деля на $|z|=|xy|$, находим

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right|\leqslant\frac{\alpha_x}{|x|}+\frac{\alpha_y}{|y|},$$

т. е. *предельная относительная ошибка произведения равна сумме предельных относительных ошибок сомножителей.*

п° 3. Интегрирование полных дифференциалов. Формула

$$dF(x, y)=F'_x(x, y)\,dx+F'_y(x, y)\,dy \tag{6}$$

показывает, что полный дифференциал имеет вид

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — некоторые функции от x и y. Например, если $F(x, y)=3x^2y^2+2x$, то

$$dF(x, y)=(6xy^2+2)\,dx+6x^2y\,dy,$$

т. е. здесь $P=6xy^2+2$, $Q=6x^2y$.

В ряде вопросов (например, в динамике точки) важно уметь решать следующую задачу.

Задача. *Дано выражение*

$$A=P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy.$$

Узнать, является ли A полным дифференциалом какой-нибудь функции, и если да, найти эту функцию (называемую первообразной для A).

Заметим, что соотношение

$$A=dF(x, y) \tag{9}$$

равносильно системе двух соотношений

$$P(x, y)=F'_x(x, y),\quad Q(x, y)=F'_y(x, y). \tag{10}$$

Если эти соотношения выполнены, то

$$\frac{\partial P}{\partial y}=F''_{xy}(x, y),\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=F''_{yx}(x, y),$$

а так как *) $F''_{xy}=F''_{yx}$, то

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\,.} \tag{11}$$

Равенство (11) является *условием интегрируемости* выражения A **). Если заметить, что P есть коэффициент при dx, а дифференцировать его приходится

---

*) Мы считаем, что речь идет о функциях, имеющих непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков.

**) Т. е. условием существования первообразной для A.

по y, то полученный результат можно формулировать так: *чтобы A было полным дифференциалом, необходимо, чтобы „накрест взятые" производные от P и Q были равны.*

Пусть, например,

$$A=(4x^2y^2+y)\,dx+(2xy^2-x)\,dy. \tag{12}$$

Здесь $P=4x^2y^2+y$, $Q=2xy^2-x$. Значит,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=8x^2y+1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2y^2-1.$$

Так как (11) не выполнено, то (12) не является полным дифференциалом никакой функции.

Покажем теперь, что при выполнении условия (11) выражение A имеет первообразную и дадим способ ее нахождения. Для большей ясности мы начнем с примера.

Пусть

$$A=(3x^2y^2+\cos x)\,dx+\left(2x^3y-\frac{1}{y}\right)dy. \tag{13}$$

Здесь $P=3x^2y^2+\cos x$, $Q=2x^3y-\dfrac{1}{y}$ и потому

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6x^2y,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2y,$$

т. е. (11) выполнено. Это дает основание думать, что существует такая функция $F(x, y)$, для которой

$$A=dF(x, y),$$

т. е. справедливы соотношения (10). Первое из них имеет вид

$$F'_x(x, y)=3x^2y^2+\cos x. \tag{14}$$

Общий вид функций, удовлетворяющих этому соотношению, находится интегрированием правой части по аргументу x. Но

$$\int(3x^2y^2+\cos x)\,dx=x^3y^2+\sin x+\varphi(y). \tag{15}$$

Обратим внимание на то, что когда мы занимались функциями одной переменной, то для получения полного семейства первообразных мы брали одну из них и прибавляли к ней произвольную постоянную C, т. е. такую величину, производная которой равна нулю. Здесь сделано то же самое, но величина, производная которой по x равна нулю, может зависеть от y. Поэтому в правой части (15) написано не C, а функция $\varphi(y)$. При любом выборе этой функции функция

$$F(x, y)=x^3y^2+\sin x+\varphi(y)$$

удовлетворяет условию (14), т. е. первому из соотношений (10). Постараемся же выбрать $\varphi(y)$ так, чтобы удовлетворить и второму из соотношений (10), т. е. чтобы оказалось

$$F'_y(x, y)=[x^3y^2+\sin x+\varphi(y)]'_y=2x^3y-\frac{1}{y}$$

или, что то же самое,

$$2x^3y+\varphi'(y)=2x^3y-\frac{1}{y}.$$

Отсюда $\varphi'(y) = -\dfrac{1}{y}$ и, стало быть, $\varphi(y) = -\ln y + C$ *). Окончательно

$$F(x, y) = x^3y^2 + \sin x - \ln y + C.$$

Изложенный способ фактического построения функции $F(x, y)$ страдает одним недостатком: не видно, где же мы использовали условие (11). Чтобы разобраться в этом, применим тот же способ к выражению (12). Ясно, что поскольку (12) не есть полный дифференциал какой-либо функции, то где-то на нашем пути должно встретиться непреодолимое препятствие.

Подобно тому, как мы поступали по отношению к (13), будем и для (12) искать общий вид функций $F(x, y)$, для которых

$$F'_x(x, y) = P(x, y) = 4x^3y^2 + y.$$

Эти функции таковы:

$$F(x, y) = \int (4x^3y^2 + y)\,dx = x^4y^2 + xy + \varphi(y).$$

Чтобы за счет выбора $\varphi(y)$ удовлетворить соотношению

$$F'_y(x, y) = [x^4y^2 + xy + \varphi(y)]'_y = 2xy^3 - x,$$

надо подобрать $\varphi(y)$ так, чтобы оказалось

$$2x^4y + x + \varphi'(y) = 2xy^3 - x$$

или

$$\varphi'(y) = 2xy^3 - 2x^4y - 2x,$$

а это явно невозможно, ибо производная $\varphi'(y)$ не может зависеть от x. Итак, вот в чем сказалось нарушение условия интегрируемости!

Рассмотрим теперь вопрос в общем виде. Пусть

$$A = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \tag{16}$$

причем справедливо (11). Общий вид функций $F(x, y)$, для которых

$$F'_x(x, y) = P(x, y),$$

таков **):

$$F(x, y) = \int P(x, y)\,dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — совершенно произвольная функция от y. Чтобы было $F'_y = Q$, надо подобрать $\varphi(y)$ так, чтобы оказалось

$$\left[\int P\,dx + \varphi(y)\right]'_y = Q, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx + \varphi'(y) = Q,$$

или, наконец,

$$\varphi'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx. \tag{17}$$

Обозначим правую часть (17) через M. Если M не зависит от x, а есть функция одного лишь y, то из (17) легко найти $\varphi(y)$ при помощи интегрирования по y. Покажем, что M и в самом деле от x не зависит. Для этого

---

*) Так как $\varphi(y)$ — функция одного y, то она не может зависеть от x, и потому здесь C — настоящая постоянная.

**) Здесь под $\int P\,dx$ понимается одна (все равно какая) из первообразных (по x!) для $P(x, y)$.

достаточно проверить, что

$$\frac{\partial M}{\partial x}=0. \tag{18}$$

Но

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right].$$

Используя то, что при вычислении $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$ порядок дифференцирований по x и по y безразличен, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)\,dx\right].$$

Действия же дифференцирования и интегрирования по одной и той же переменной взаимно обратны. Значит,

$$\frac{\partial}{\partial x}\int P\,dx=P.$$

Поэтому

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ввиду (11) отсюда следует (18), т. е. требуемую $\varphi(y)$ найти можно. Итак, нами доказана

Теорема. *Выражение* (16) *есть полный дифференциал тогда и только тогда, когда выполнено* (11).

Более того, при выполнении (11) мы располагаем способом фактического построения первообразной для (16).

Замечание. Как и для одной переменной, полное семейство первообразных для (16) имеет вид

$$F(x, y)+C, \tag{19}$$

где $F(x, y)$ — одна из этих первообразных, а C — постоянная. Действительно, пусть $F_1(x, y)$ — первообразная, отличная от $F(x, y)$. Тогда разность $R(x, y)=F_1(x, y)-F(x, y)$ имеет дифференциал, равный нулю. Иными словами, $R'_x=R'_y=0$. Это значит, что $R(x, y)$ не меняется при изменении x и не меняется при изменении y, т. е. не меняется вовсе. Стало быть, $R(x, y)=C$, т. е. $F_1(x, y)-F(x, y)=C$ и $F_1(x, y)$ представимо в виде (19).

ГЛАВА XI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Уравнения 1-го порядка

n° 1. Основные определения. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную, ее функцию и производные различных порядков этой функции *). Наивысший из указанных порядков называется порядком дифференциального уравнения. Например, $2xy' - 3y = 0$, $2y'' + 3x^2y = 0$, $y^{(5)} = 3x^2$ — дифференциальные уравнения соответственно 1-го, 2-го, 5-го порядка.

В этом параграфе мы будем заниматься только дифференциальными уравнениями первого порядка. Общий вид такого уравнения

$$\boxed{F(x, y, y') = 0.} \tag{1}$$

В частном случае уравнение (1) может не содержать x или y (или их обоих), но производную y' уравнение (1) обязательно должно содержать, ибо иначе это не будет дифференциальным уравнением.

Решением дифференциального уравнения (1) называется такая функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в дифференциальное уравнение вместо y (разумеется, при этом вместо y' подставляется $\varphi'(x)$), обращает (1) в тождество. Например, функция x^2 является решением уравнения

$$xy' - 2y = 0, \tag{2}$$

ибо $x \cdot 2x - 2x^2 \equiv 0$. Однако решением дифференциального уравнения (2) является не только x^2, но и любая функция вида Cx^2, где

*) В этом определении речь идет об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Им противопоставляются уравнения с частными производными, содержащие функции нескольких переменных. Этих уравнений мы здесь не рассматриваем. Некоторые их примеры будут приведены в гл. XIII.

C — постоянная величина. Такое решение уравнения (2) называется его общим решением. Вообще, *общим решением* дифференциального уравнения (1) называется такая функция $\varphi(x, C)$ двух аргументов x и C, которая, при любом постоянном C рассматриваемая как функция одного лишь x, является решением уравнения (1). Те решения $\varphi(x, C_0)$, которые получаются из общего решения $\varphi(x, C)$ закреплением постоянной C, называются его *частными* решениями. Таким образом, общее решение содержит в себе бесчисленное множество частных.

Дифференциальное уравнение

$$y' - 2x = 0 \tag{3}$$

имеет общее решение $y = x^2 + C$. Как мы знаем из главы о неопределенных интегралах, никаких других решений, кроме содержащихся в формуле $y = x^2 + C$, уравнение (3) не имеет. Таким образом, в этом примере общее решение дифференциального уравнения охватывает собой все его решения. Так бывает, однако, не всегда. Встречаются дифференциальные уравнения, имеющие такие решения, которые не получаются из общего решения ни при каком значении постоянной C. Такие решения называются *особыми*. Например, простой проверкой убеждаемся, что функция $y = (x + C)^2$ является общим решением дифференциального уравнения

$$y'^2 = 4y. \tag{4}$$

Однако дифференциальное уравнение (4) имеет еще особое решение $y = 0$, которое не получается из общего $y = (x + C)^2$ ни при каком значении постоянной C. Вопрос о нахождении особых решений труден, и мы его оставим в стороне, ограничиваясь нахождением общего решения дифференциального уравнения.

п° 2. Начальное условие. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$xy' - 2y = 0. \tag{5}$$

Мы уже видели, что функция $y = Cx^2$ является общим решением этого дифференциального уравнения. Представим себе, что мы хотим найти такое частное решение дифференциального уравнения (5), которое удовлетворяет соотношению

$$y|_{x=2} = 12. \tag{6}$$

Если в равенство

$$y = Cx^2$$

подставить $x = 2$, $y = 12$, то получится $12 = 4C$, откуда $C = 3$. Стало быть, соотношение (6) привело к выделению из общего решения $y = Cx^2$ (т. е. из целого собрания решений) индивидуального частного решения $y = 3x^2$. На основании некоторых механических аналогий соотношение вида (6) называется ***начальным*** *условием*. Таким образом, начальным условием, сопровождающим дифференциальное уравнение, называется равенство вида

$$y|_{x=a}=b. \tag{7}$$

Вообще говоря, зная общее решение, можно найти частное решение, удовлетворяющее (7). Именно, если $y=\varphi(x, C)$ — общее решение. то подстановка в него значений $x=a$, $y=b$ дает уравнение

$$b=\varphi(a, C),$$

из которого находится C.

n° 3. Уравнения с отделенными переменными. Общий интеграл. Наиболее простым дифференциальным уравнением 1-го порядка является так называемое уравнение *с отделенными переменными*. Это есть уравнение вида

$$\boxed{f(x)+g(y)y'=0.} \tag{8}$$

Заменяя здесь y' на $\frac{dy}{dx}$ и умножая уравнение на dx, находим

$$\boxed{f(x)\,dx+g(y)\,dy=0.} \tag{9}$$

Теперь понятно, почему рассматриваемое дифференциальное уравнение носит вышеуказанное название: в нем одно слагаемое $f(x)\,dx$ зависит только от x, а другое $g(y)\,dy$ только от y — переменные отделены. Для решения уравнения (9) [или, что то же самое, (8)] достаточно проинтегрировать это уравнение, что дает

$$\int f(x)\,dx+\int g(y)\,dy=C.$$

Находя написанные интегралы, получим

$$F(x)+G(y)=C. \tag{10}$$

Если решить уравнение (10) относительно y, то получится равенство

$$y=\varphi(x, C), \tag{11}$$

правая часть которого является общим решением*) уравнения (8).

Пример. Применим изложенное к дифференциальному уравнению

$$2x+\frac{y'}{y}=0.$$

---

*) В самом деле, поскольку (11) найдено из (10), то подстановка (11) в (10) дает тождество: $F(x)+G[\varphi(x,C)]\equiv C$. Дифференцируя это тождество, надо применить правило цепочки, положив $\varphi(x,C)=y$. Это сразу приводит к тождеству $f(x)+g(y)y'\equiv 0$, ибо $F'(x)=f(x)$, $G'(y)=$ $=g(y)$.

Заменяя y' на $\frac{dy}{dx}$ и умножая на dx, получим

$$2x\,dx+\frac{dy}{y}=0.$$

Интегрируя, находим

$$x^2+\ln y=C.$$

Отсюда $\ln y=C-x^2$ и $y=e^{C-x^2}$. Это равенство можно переписать в виде

$$y=e^C\cdot e^{-x^2}.$$

Обозначим e^C через C_1, а затем снова вместо C_1 будем писать C. Это даст общее решение нашего дифференциального уравнения в виде

$$y=Ce^{-x^2}.$$

Вернемся к равенству (10). Оно называется *общим интегралом* нашего дифференциального уравнения. Вообще, общим интегралом дифференциального уравнения (1) называется такое уравнение

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{12}$$

связывающее x, y и C, решив которое относительно y, мы находим общее решение (1). Поскольку нахождение y из (12) может представить значительные трудности, но уже имеющие только алгебраический характер, то задачу решения дифференциального уравнения считают законченной уже тогда, когда найден его общий интеграл. Более того, если общий интеграл (или решение) уравнения выражен через неэлементарные интегралы, то и тогда он (соответственно решение) считается найденным.

Примеры. 1) Интегрируя уравнение

$$2x\,dx+(5y^4+\cos y)\,dy=0, \tag{13}$$

находим его общий интеграл

$$x^2+y^5+\sin y=C. \tag{13a}$$

Хотя выразить отсюда y через x и C мы не умеем, но все же считаем уравнение (13) решенным.

2) Аналогично, написав для уравнения

$$2x\,dx+e^{-y^2}\,dy=0$$

общий интеграл

$$x^2+\int e^{-y^2}\,dy=C, \tag{13б}$$

мы считаем, что решили уравнение, хотя интеграл $\int e^{-y^2}\,dy$ и не выражается через элементарные функции.

На первый взгляд такой подход кажется чем-то вроде самообмана: ведь решение-то не найдено. Однако, написав для уравнения (13) общий интеграл (13а) и закрепив в нем какое-либо C (т. е. выбрав определенное частное решение дифференциального уравнения), мы сможем для каждого постоянного значения x численно находить соответствующее ему значение y, т. е. получить зависимость y от x хотя бы в табличной форме. Нечто подобное позволяет сделать и равенство (13б).

Задача вычисления неопределенного интеграла принципиально проще задачи решения дифференциального уравнения, а мы всегда считаем сложную задачу „решенной", если свели ее к более простой задаче. Поэтому, когда общий интеграл дифференциального уравнения удается записать в форме, содержащей неопределенные интегралы, то говорят, что уравнение *интегрируется в квадратурах.*

Как мы видели выше, всякое дифференциальное уравнение с отделенными переменными интегрируется в квадратурах. Однако существуют дифференциальные уравнения (разумеется, другого вида), для которых это не так. Например, *уравнение Риккати*

$$y'+y^2=\mathrm{A}x^\alpha$$

интегрируется в квадратурах лишь при некоторых значениях α, и, в частности, уравнение

$$y'+y^2=x$$

в квадратурах не интегрируется. Ниже мы еще вернемся к этому уравнению.

n° 4. Уравнения с отделяющимися переменными. К типу (8) легко приводятся так называемые *уравнения с отделяющимися переменными,* имеющие вид

$$f_1(x)\,g_2(y)+f_2(x)\,g_1(y)\,y'=0$$

или, что то же самое, вид

$$\boxed{f_1(x)\,g_2(y)\,dx+f_2(x)\,g_1(y)\,dy=0.} \tag{14}$$

Действительно, достаточно разделить (14) на произведение $f_2(x)\,g_2(y)$, чтобы придти к уравнению

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx+\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy=0,$$

в котором переменные уже отделены.

Пример. Деля уравнение

$$2x\sin y\,dx+(x^2+3)\cos y\,dy=0 \tag{14а}$$

на $(x^2+3)\sin y$, получаем

$$\frac{2x\,dx}{x^2+3}+\frac{\cos y\,dy}{\sin y}=0.$$

Интегрируя, находим*)

$$\ln(x^2+3)+\ln\sin y=\ln C. \tag{15}$$

Это общий интеграл нашего дифференциального уравнения. Согласно сказанному выше, мы могли бы здесь остановиться, но можно продвинуться и дальше. Именно, из (15) следует**)

$$(x^2+3)\sin y=C,$$

откуда

$$\sin y=\frac{C}{x^2+3}$$

и окончательно

$$y=\arcsin\frac{C}{x^2+3}.$$

Это общее решение дифференциального уравнения (14а) ***).

n°5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. *Линейным* дифференциальным уравнением 1-го порядка называется такое дифференциальное уравнение, в которое неизвестные элементы y и y' входят в первых степенях, не перемножаясь между собой. Иными словами, это дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{A(x)y'+B(x)y+C(x)=0.} \tag{16}$$

Деля (16) на $A(x)$ и полагая для краткости

$$\frac{B(x)}{A(x)}=p(x),\ \frac{C(x)}{A(x)}=-f(x),$$

придадим (16) вид

$$\boxed{y'+p(x)y=f(x),} \tag{17}$$

---

*) Поскольку оба слагаемых слева представляют собой логарифмы, то удобно и правую часть записать не в виде C, а в виде $\ln C$, что, разумеется, одно и то же.

**) Это тоже общий интеграл дифференциального уравнения (14а).

***) Хотя C впервые появилось у нас под знаком логарифма, не следует думать, что обязательно $C>0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что найденное выражение удовлетворяет уравнению при **любом** C. Дело в том, что (15), строго говоря, надо было бы записать в виде $\ln(x^2+3)+\ln|\sin y|=\ln C$ (впрочем, допустимость $C=0$ все равно надо проверять подстановкой).

в котором чаще всего и записывают линейное дифференциальное уравнение.

Существует несколько (по существу равносильных) приемов решения линейного дифференциального уравнения. Мы изложим прием Иоганна Бернулли*). Он основан на простом замечании, что любую величину h (переменную или постоянную) можно представить в форме произведения двух сомножителей

$$h = uv,$$

причем один из них (например, v) можно выбрать по своему желанию (но отличным от нуля). Например, в равенстве

$$\operatorname{tg} x = uv$$

мы можем взять $v = e^x$, или $v = \ln x$, или $v = \arcsin x$, или $v = \sqrt{1 - x^2}$ и т. п. Соответственно этому придется взять $u = e^{-x} \operatorname{tg} x$, или $u = \frac{\operatorname{tg} x}{\ln x}$, или $u = \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$, или $u = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Покажем, как это соображение можно использовать для решения линейного дифференциального уравнения, причем для большей ясности начнем с примера. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' - \frac{2xy}{x^2 + 3} = (x^2 + 3) \cos x. \tag{18}$$

Представим (неизвестное нам!) решение y этого дифференциального уравнения в форме

$$y = uv. \tag{19}$$

Как мы знаем, мы имеем право взять здесь в качестве v все, что нам захочется (кроме $v = 0$). Оставим пока это право неиспользованным и подставим (19) в (18). Так как $y' = u'v + uv'$, то получится уравнение

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2 + 3} uv = (x^2 + 3) \cos x$$

или

$$u'v + u \left[v' - \frac{2xv}{x^2 + 3} \right] = (x^2 + 3) \cos x. \tag{20}$$

Теперь мы используем свое право выбора v, взяв его таким, чтобы коэффициент при u (т. е. выражение, стоящее в квадратных скобках) был равен нулю:

$$v' - \frac{2xv}{x^2 + 3} = 0. \tag{21}$$

*) Математик второй половины 17-го и первой половины 18-го веков.

Для этого надо на (21) взглянуть как на дифференциальное уравнение относительно v и в качестве v взять какое-либо его частное решение (разумеется, не решение $v=0$). Это сделать нетрудно, поскольку (21) есть дифференциальное уравнение с отделяющимися переменными. Заменяя v' через $\frac{dv}{dx}$ и умножая на dx, видим, что отделение переменных достигается делением на v, что дает

$$\frac{dv}{v}-\frac{2x\,dx}{x^2+3}=0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln v-\ln(x^2+3)=C. \tag{22}$$

Поскольку в качестве v нам надо взять какое-нибудь **одно** из решений дифференциального уравнения (21), то нет смысла сохранять в (22) произвольную постоянную C, а проще придать ей какое-либо определенное значение. Наиболее просто взять $C=0$, что приводит к выбору

$$v=x^2+3. \tag{23}$$

Итак, вот какое v мы берем в (19). Подставляя это v в (20) и учитывая (21), находим

$$u'(x^2+3)=(x^2+3)\cos x.$$

Отсюда $u'=\cos x$ и, стало быть,

$$u=\sin x+C. \tag{24}$$

Сопоставляя (19), (24) и (23), получаем

$$y=(\sin x+C)(x^2+3).$$

Теперь мы изложим этот же прием в общем виде. Представим (неизвестное нам!) решение y уравнения

$$y'+p(x)y=f(x) \tag{25}$$

в форме

$$y=uv, \tag{26}$$

причем пока не используем своего права выбора v. Подставляя (26) в (25), находим

$$u'v+u[v'+p(x)v]=f(x). \tag{27}$$

Теперь реализуем свое право выбора v, взяв его так, чтобы оказалось

$$v'+p(x)v=0. \tag{28}$$

Для этого надо рассмотреть (28) как дифференциальное уравнение относительно v и решить его. В (28) отделяются переменные

$$\frac{dv}{v}+p(x)\,dx=0.$$

Отсюда

$$\ln v+\int p(x)\,dx=C.$$

Беря $C=0$ и понимая под $\int p(x)\,dx$ какую-нибудь одну первообразную для $p(x)$ (этого достаточно, ибо в качестве v мы можем взять любое частное решение уравнения (28), кроме $v=0$), найдем сначала $\ln v$, а затем и саму функцию v. В результате получится

$$v=A(x), \tag{29}$$

где $A(x)$ какая-то (известная!) функция. Подставляя (29) в (27), получим [на основании (28)]

$$u'A(x)=f(x).$$

Значит,

$$u'=\frac{f(x)}{A(x)},$$

откуда интегрированием найдем u:

$$u=B(x)+C.$$

Отсюда из (26) и (29) получаем

$$y=[B(x)+C]\,A(x).$$

Иллюстрируем изложенное еще одним примером, опуская объяснения:

$$y'+y\operatorname{tg}x=2^x\cos x. \tag{30}$$

Полагаем

$$y=uv.$$

Тогда (30) примет вид

$$u'v+u[v'+v\operatorname{tg}x]=2^x\cos x. \tag{31}$$

Полагаем

$$v'+v\operatorname{tg}x=0$$

или

$$\frac{dv}{v}+\operatorname{tg}x\,dx=0.$$

Отсюда

$$\ln v+\int\operatorname{tg}x\,dx=0$$

или

$$\ln v-\ln\cos x=0.$$

Стало быть, $v = \cos x$ и (31) дает

$$u' \cos x = 2^x \cos x,$$

т. е. $u' = 2^x$ и $u = \frac{2^x}{\ln 2} + C$. Окончательно

$$y = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right) \cos x.$$

В заключение решим дифференциальное уравнение

$$(x + 2y\sqrt{y} \cos y)\, y' - 2y = 0.$$

На первый взгляд оно не принадлежит к рассматриваемому типу. Однако, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, умножив уравнение на dx и разделив на dy, придадим ему вид

$$x + 2y \sqrt{y} \cos y - 2y \frac{dx}{dy} = 0.$$

Это линейное уравнение, если принять y за независимую переменную, а x за искомую функцию. Приводя уравнение к виду (25), получим

$$x'_y - \frac{x}{2y} = \sqrt{y} \cos y.$$

Дальнейшее ясно: полагая $x = uv$, дадим уравнению вид

$$u'_y v + u \left[v'_y - \frac{v}{2y}\right] = \sqrt{y} \cos y.$$

Положив

$$v'_y - \frac{v}{2y} = 0,$$

находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{2y},$$

откуда

$$v = \sqrt{y}.$$

Значит,

$$u'_y \sqrt{y} = \sqrt{y} \cos y$$

и потому

$$u = \sin y + C.$$

Таким образом,

$$x = (\sin y + C)\sqrt{y}.$$

Это общий интеграл нашего дифференциального уравнения. Найти из него y мы, правда, не умеем, но, как уже отмечалось, мы считаем предложенное дифференциальное уравнение решенным. Изложенный прием перемены ролей x и y рекомендуется запомнить.

n° 6. Обобщенное линейное уравнение (уравнение Я. Бернулли). Изложенный в n° 5 прием с успехом применяется и к так называемому *уравнению Якова Бернулли*

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x)y^a,} \tag{32}$$

представляющему обобщение линейного уравнения [последнее получается из (32) при $a=0$]. Не рассматривая вопроса в общем виде (это легко сделает читатель), ограничимся решением примера

$$y' - \frac{y}{x} = e^x y^2.$$

Подставляя сюда $y = uv$, получим

$$u'v + u\left[v' - \frac{v}{x}\right] = e^x u^2 v^2. \tag{33}$$

Полагая

$$v' - \frac{v}{x} = 0,$$

находим $v = x$, и (33) принимает вид

$$u'x = e^x u^2 x^2,$$

откуда

$$\frac{du}{u^2} = xe^x dx.$$

Значит,

$$\int \frac{du}{u^2} = \int xe^x\,dx$$

или

$$-\frac{1}{u} = xe^x - e^x + C.$$

Это дает *)

$$u = \frac{1}{C + e^x - xe^x}$$

и окончательно

$$y = \frac{x}{C + e^x - xe^x}.$$

n° 7. Однородные функции и однородное дифференциальное уравнение.

Определение. Функция нескольких аргументов называется *однородной степени n*, если умножение всех ее аргументов на одно и то же число t равносильно умножению функции на t^n. В частности,

---

*) Мы заменяем C на $-C$.

для функции двух аргументов $F(x, y)$ это означает, что

$$\boxed{F(tx, ty) = t^n F(x, y).} \tag{34}$$

Например, функции

$$x^3 + 2x^2y - 5y^3, \quad 3x + 2y, \quad \frac{x - y}{2x + 3y},$$
$$x^2 \sin\frac{y}{x}, \quad \sqrt[3]{x^2 + y^2}, \quad \frac{1}{x + y}$$

все однородны, а степени их соответственно равны 3, 1, 0, 2, $\frac{2}{3}$, -1.

Лемма. Всякая однородная функция $F(x, y)$ степени n представима в виде

$$\boxed{F(x, y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right),} \tag{35}$$

где $f(z)$ — функция одного аргумента z. Действительно, для $F(x, y)$ справедливо тождество (34). Полагая в нем $t = \frac{1}{x}$, находим

$$F\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} F(x, y),$$

откуда

$$F(x, y) = x^n F\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

а это равносильно (35), ибо $F\left(1, \frac{y}{x}\right)$ есть функция одного аргумента $\frac{y}{x}$.

Например,

$$x^3 + 2x^2y - 5y^3 = x^3\left[1 + 2\frac{y}{x} - 5\left(\frac{y}{x}\right)^3\right],$$
$$\sqrt[3]{x^2 + y^2} = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Перейдем теперь к однородным дифференциальным уравнениям. Существуют два определения таких дифференциальных уравнений.

Определение 1. Дифференциальное уравнение называется *однородным*, если оно имеет вид

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right).} \tag{36}$$

Это уравнение решается при помощи введения новой неизвестной функции

$$\boxed{z = \frac{y}{x}.} \tag{37}$$

В самом деле, из (37) следует, что $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. Подставляя эти выражения в (36), получим

$$z'x+z=f(z)$$

или

$$x\frac{dz}{dx}=f(z)-z.$$

В этом уравнении переменные отделяются:

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя и обозначая $\int\frac{dz}{f(z)-z}$ через $F(z)$, находим

$$F(z)=\ln x+C$$

или, возвращаясь к старой неизвестной функции y,

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\ln x+C.$$

Это общий интеграл нашего дифференциального уравнения.

Пример. Дифференциальное уравнение

$$y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

однородное. Подстановка $y=zx$ дает

$$z'x+z=z+\operatorname{tg} z,$$

откуда

$$\frac{dz}{\operatorname{tg} z}=\frac{dx}{x}$$

или

$$\frac{\cos z\,dz}{\sin z}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $\ln\sin z=\ln x+\ln C$, т. е. $\sin z=Cx$. Отсюда $z=\arcsin Cx$ и $y=x\arcsin Cx$.

Иногда однородное дифференциальное уравнение определяется иначе.

Определение II. Если в дифференциальном уравнении

$$\boxed{P(x,\,y)\,dx+Q(x,\,y)\,dy=0} \tag{38}$$

коэффициенты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени, то уравнение (38) называется *однородным*.

Легко видеть, что уравнение (38) приводится к виду (36). Действительно, если степень $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ равна n, то по лемме

$$P(x, y) = x^n p\left(\frac{y}{x}\right), \quad Q(x, y) = x^n q\left(\frac{y}{x}\right),$$

и (38) после сокращения на x^n принимает вид

$$p\left(\frac{y}{x}\right) dx + q\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0;$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p\left(\frac{y}{x}\right)}{q\left(\frac{y}{x}\right)},$$

а это уравнение вида (36).

Для решения уравнения (38) можно поступить двояко: или привести его предварительно к виду (36), или же сразу применить подстановку (37).

П р и м е р.

$$(7x^2 - 2xy + 6y^2)\,dx + (x^2 - 4xy)\,dy = 0. \tag{39}$$

П е р в о е р е ш е н и е. Переписываем уравнение (39) так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7x^2 - 2xy + 6y^2}{4xy - x^2}$$

или, деля числитель и знаменатель на x^2,

$$y' = \frac{7 - 2\frac{y}{x} + 6\left(\frac{y}{x}\right)^2}{4\frac{y}{x} - 1}.$$

Это дифференциальное уравнение вида (36), и мы полагаем

$$y = zx. \tag{40}$$

Тогда

$$z'x + z = \frac{6z^2 - 2z + 7}{4z - 1}, \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{6z^2 - 2z + 7}{4z - 1} - z = \frac{2z^2 - z + 7}{4z - 1},$$

откуда

$$\frac{4z - 1}{2z^2 - z + 7}\,dz = \frac{dx}{x}. \tag{41}$$

Интегрируя, находим

$$\ln(2z^2 - z + 7) = \ln x + \ln C$$

и

$$2z^2 - z + 7 = Cx.$$

Заменяя z на $\frac{y}{x}$ и умножая на x^2, находим окончательно

$$2y^2 - xy + 7x^2 = Cx^3$$

Это общий интеграл нашего дифференциального уравнения.

Второе решение. Делаем подстановку (40) непосредственно в уравнении (39). Так как $dy = x\,dz + z\,dx$, то получим

$$(7x^2 - 2x^2z + 6x^2z^2)\,dx + (x^2 - 4x^2z)(x\,dz + z\,dx) = 0.$$

Сокращая на x^2 и делая перегруппировку, имеем

$$(7 - z + 2z^2)\,dx + (1 - 4z)\,x\,dz = 0.$$

Отсюда

$$\frac{(4z-1)\,dz}{2z^2 - z + 7} = \frac{dx}{x}.$$

Мы снова пришли к (41). Дальнейшие выкладки те же, что и выше.

п° 8. Уравнения в полных дифференциалах. *Уравнением в полных дифференциалах* *) называется дифференциальное уравнение

$$\boxed{P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,} \tag{42}$$

левая часть которого есть полный дифференциал **). Для решения этого дифференциального уравнения надо найти первообразную $F(x, y)$ левой части уравнения. Тогда равенство

$$F(x, y) = C \tag{43}$$

будет общим интегралом нашего дифференциального уравнения. В самом деле, допустим, что $y = \varphi(x, C)$ — результат решения уравнения (43) относительно y. Если это значение y обратно подставить в (43), то получится тождество относительно x (и C):

$$F[x, \varphi] \equiv C.$$

Дифференцируя это тождество по x (причем для этого придется применить правило дифференцирования сложной функции), находим тождество

$$F'_x(x, \varphi) + F'_y(x, \varphi)\,\varphi'(x) \equiv 0. \tag{44}$$

Но ведь $F(x, y)$ есть первообразная для $P dx + Q dy$. Стало быть,

$$F'_x = P,\ F'_y = Q.$$

Поэтому тождество (44) допускает запись

$$P(x, \varphi) + Q(x, \varphi)\,\varphi' \equiv 0$$

или, что то же самое,

$$P(x, \varphi)\,dx + Q(x, \varphi)\,d\varphi \equiv 0.$$

Таким образом, функция $y = \varphi(x, C)$, найденная из (43), оказывается общим (поскольку зависит от C) решением дифференциального уравнения (42), а это и значит, что (43) есть общий интеграл (42).

---

*) Или *тотальным* (от лат. totus — полный).

**) Напомним, что это обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(3x^2y+y^2)\,dx+(x^2+2xy+10y)dy=0.$$

Здесь $P=3x^2y+y^2$, $Q=x^2+2xy+10y$. Значит,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

и левая часть нашего дифференциального уравнения есть полный дифференциал. Первообразная имеет вид

$$F(x,\ y)=\int(3x^2y+y^2)\,dx=x^2y+xy^2+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ находится из условия

$$F'_y=Q,$$

т. е.

$$x^2+2xy+\varphi'(y)=x^2+2xy+10y.$$

Отсюда

$$\varphi'(y)=10y$$

и $\varphi(y)=5y^2+C$. Так как нас интересует какая-нибудь одна первообразная, то можно положить, например, $C=0$, что дает

$$F(x,y)=x^2y+xy^2+5y^2.$$

Поэтому общий интеграл нашего дифференциального уравнения

$$x^2y+xy^2+5y^2=C.$$

n°9. Геометрический смысл дифференциального уравнения и связанных с ним понятий. Пусть $\varphi(x)$ — какое-нибудь решение некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка. Равенство $y=\varphi(x)$ можно считать уравнением некоторой линии. Эта линия (т.е. график решения дифференциального уравнения) называется *интегральной кривой* упомянутого дифференциального уравнения. Таким образом, каждое отдельное решение дифференциального уравнения геометрически представляет собой некоторую линию — интегральную кривую. Поскольку общее решение $y=\varphi(x,C)$ нашего дифференциального уравнения является собранием бесконечного множества частных его решений, то геометрически оно представляет собой собрание (или, как чаще говорят, *семейство*) интегральных кривых. Одна кривая этого семейства отличается от другой численным значением одного параметра — постоянной C. Поэтому общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения 1-го порядка геометрически представляет собой однопараметрическое семейство интегральных кривых.

Примеры. 1) Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x\,dx+y\,dy=0.$$

Интегрируя, найдем

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C,$$

т.е. $x^2+y^2=2C$. Поскольку здесь левая часть положительна, то такова же и правая. Заменяя $2C$ через C^2, получаем

$$\boxed{x^2+y^2=C^2.}$$

Ясно, что это семейство окружностей с центром в начале координат. Параметр C является радиусом окружности (рис. 326).

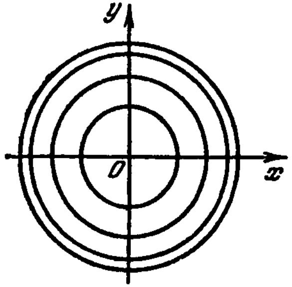


Рис. 326.

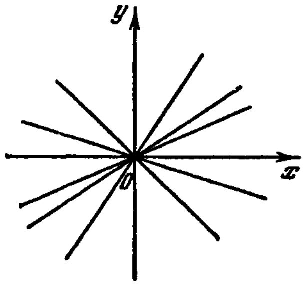


Рис. 327.

2) Дифференциальное уравнение $x\,dy-y\,dx=0$ преобразуется к виду $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, откуда $\ln y=\ln x+\ln C$ и

$$\boxed{y=Cx.}$$

Это семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 327).

3) Дифференциальное уравнение $y'=2\sqrt{y}$ преобразуется к виду $\frac{dy}{2\sqrt{y}}=dx$, откуда $\sqrt{y}=x+C$ или

$$\boxed{y=(x+C)^2.}$$

Это семейство парабол*), вершины которых лежат на оси Ox (рис. 328). Все эти параболы лежат в верхней полуплоскости.

Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла начального условия

$$y|_{x=a}=b. \tag{45}$$

---

*) Строго говоря, если под $\sqrt{y}$ понимать арифметическое значение корня, то $y'\geqslant 0$ и надо было бы говорить о семействе восходящих (при движении слева направо) ветвей упомянутых парабол. Семейство нисходящих ветвей изображает общее решение дифференциального уравнения $y'=-2\sqrt{y}$, а семейство, изображенное на рис. 328, отвечает уравнению $y'^2=4y$.

Ясно, что задание такого условия равносильно заданию точки (a, b), а подбор частного решения, удовлетворяющего условию (45), равносилен выбору той интегральной кривой, которая проходит через упомянутую точку. Отсюда, кстати сказать, ясно, что не всякое начальное условие оказывается допустимым. Например, для дифференциального уравнения, рассмотренного в первом из наших примеров, условие $y|_{x=0}=0$ невозможно, так как ни одна интегральная кривая не проходит через начало координат. Для второго примера то же начальное условие возможно, но бессодержательно, ибо все интегральные кривые проходят через начало координат и потому наше условие не выделяет ни одной из них. Наконец, в третьем примере невозможно ни одно условие (45), в котором $b<0$, ибо точка (a, b), где $b<0$, лежит в нижней полуплоскости, куда не заходит ни одна интегральная кривая.

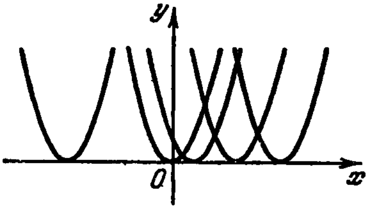


Рис. 328.

Перейдем, наконец, к геометрическому смыслу самого дифференциального уравнения. Мы будем предполагать, что это дифференциальное уравнение разрешено относительно производной y', т. е. имеет вид

$$\boxed{y'=f(x, y).} \tag{46}$$

Пусть, например, речь идет об уравнении Риккати

$$y'=2x^2-y^2, \tag{47}$$

которое не принадлежит ни к одному из рассмотренных нами типов и для которого мы поэтому не умеем найти решений. Возьмем на плоскости какую-либо точку. Пусть, например, мы взяли точку (1,1). Если $y=\varphi(x)$, — то частное решение, которое удовлетворяет начальному условию $y|_{x=1}=1$, т. е. график которого проходит через точку (1,1), то для него $\varphi(1)=1$ и

$$\varphi'(1)=2\cdot 1^2-\varphi^2(1)=2-1=1.$$

Но $\varphi'(1)$ — угловой коэффициент касательной к кривой $y=\varphi(x)$, проведенной в точке $(1, \varphi(1))=(1,1)$. Таким образом, этот угловой коэффициент равен 1, и это нам удалось найти, даже не зная самого решения $y=\varphi(x)$. Аналогично обстоит дело с любой точкой (a, b). Угловой коэффициент касательной, проведенной в этой точке, к той интегральной кривой, которая проходит через упомянутую точку, равен [для дифференциального уравнения (47)]

$$\varphi'(a)=2a^2-b^2.$$

Таким образом, задание дифференциального уравнения позволяет для любой точки плоскости указывать направление (т. е. угловой коэффициент касательной) той интегральной кривой дифференциального уравнения, которая проходит через эту точку *). Для общего случая дифференциального уравнения (46) дело обстоит совершенно так же. Направление [в точке (a, b)] той интегральной кривой $y=\varphi(x)$, которая проходит через (a, b), будет

$$\varphi'(a)=f(a, b).$$

Эту величину мы находим, зная только само дифференциальное уравнение и точку (a, b) и не зная решения. Таким образом, геометрически задание дифференциального уравнения означает задание семейства направлений интегральных кривых во всех точках плоскости.

п° 10. **Приближенное решение дифференциального уравнения методом Эйлера — Коши.** Мы познакомились с методами точного решения некоторых типов дифференциального уравнения: с отделяющимися переменными, линейного и др. Однако громадное большинство дифференциальных уравнений не принадлежит к этим типам. Для решения таких дифференциальных уравнений приходится прибегать к приближенным методам. Мы изложим здесь простейший из них, так называемый метод Эйлера — Коши.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y'=f(x, y), \tag{48}$$

сопровождаемое начальным условием

$$y|_{x=x_0}=y_0. \tag{49}$$

Мы будем интересоваться тем частным решением дифференциального уравнения (48), которое удовлетворяет условию (49). Поставим перед собой прежде всего задачу найти значение y_1 интересующего нас решения в точке x_1, *весьма близкой* к x_0.

Поскольку значение y_0 упомянутого решения, отвечающее значению x_0, нам известно, то дело сводится к нахождению разности y_1-y_0, т. е. приращения Δy, вызванного приращением $\Delta x=x_1-x_0$. Но ведь Δx весьма мало. А тогда Δy с большой точностью представимо *дифференциалом* $dy=y'\Delta x$. При этом производная y' должна быть вычислена в той точке x_0, исходя из которой аргумент x получил приращение. Ввиду того, что интересующая нас

*) Разумеется, все это предполагает, что мы имеем дело с общим случаем, т. е. что речь идет о точке, через которую действительно проходит интегральная кривая. Дифференциальное уравнение $x\,dx+y\,dy=0$, будучи разрешено относительно y', имеет вид $y'=-\frac{x}{y}$ и подставлять сюда $x=0$, $y=0$ нельзя.

функция y есть решение уравнения (48), то для каждого x имеем $y'=f(x, y)$, где y, написанное справа, представляет собой то значение функции, которое отвечает именно этому x. В частности, для $x=x_0$ будет

$$y'=f(x_0, y_0)$$

и потому

$$\Delta y \cong f(x_0, y_0)\,\Delta x.$$

Стало быть, заменяя Δy и Δx на y_1-y_0 и x_1-x_0, находим

$$\boxed{y_1 \cong y_0+f(x_0, y_0)\,(x_1-x_0).} \tag{50}$$

Это основная расчетная формула метода Эйлера — Коши. Ее точность тем выше, чем меньше разность x_1-x_0.

Совершенно так же, как с помощью формулы (50) мы перешли от значения y_0 к значению y_1, мы можем перейти от значения y_1 к значению y_2 нашего решения, отвечающему аргументу x_2, близкому к x_1. Продвигаясь подобными маленькими шажками, мы сможем перейти от значения y_0 к значению y^*, отвечающему $x=x^*$, где x^* уже не будет близким к x_0*).

Иллюстрируем изложенное тремя примерами.

1) Пусть $y=y(x)$ — то решение дифференциального уравнения

$$y'=2\frac{y}{x}, \tag{51}$$

которое удовлетворяет условию

$$y\,|_{x=1}=1. \tag{52}$$

Найдем $y(2)$.

Так как промежуток от $x=1$ до $x=2$ не может считаться малым, то мы разделим его на 10 равных частей точками $x_1=1{,}1$, $x_2=1{,}2$, ...

По формуле (50)

$$y_1=1+2\cdot\frac{1}{1}\cdot 0{,}1=1{,}2.$$

---

*) Здесь надо обратить внимание на одну особенность. Дело в том, что для перехода от x_0 к x^* нам придется вставить между x_0 и x^* много промежуточных значений $x_0, x_1, x_2, \ldots, x^*$ и осуществить много шагов: переход от x_0 к x_1, от x_1 к x_2 и т. д. Каждый шаг, заключающийся в применении формулы (50), сопровождается маленькой ошибкой, но большое количество маленьких ошибок может привести к большой ошибке. Возникающие в связи с этим вопросы рассматриваются ниже.

Аналогично находятся остальные значения функции $y(x)$, причем вычисления удобно расположить в следующую таблицу, строение которой не потребует других пояснений, кроме указания, что за Δy принято $y'\Delta x$.

x	y	y'	Δy	x	y	y'	Δy
1	1	2	0,2	1,6	2,472	3,09	0,309
1,1	1,2	2,18	0,218	1,7	2,781	3,27	0,327
1,2	1,418	2,36	0,236	1,8	3,108	3,45	0,345
1,3	1,654	2,54	0,254	1,9	3,453	3,63	0,363
1,4	1,908	2,73	0,273	2	3,816		
1,5	2,181	2,91	0,291				

Эта таблица показывает, что

$$y(2)=3,816.$$

Уравнение (51) легко решается отделением переменных, которое дает

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x},$$

откуда $\ln y=2\ln x+\ln C$, т. е. $y=Cx^2$. Чтобы удовлетворить условию (52), надо взять $C=1$. Таким образом, интересующее нас частное решение есть $y=x^2$. Стало быть, точное значение величины $y(2)$ равно 4. Абсолютная ошибка значения $y(2)=3,816$, получаемого методом Эйлера — Коши, равна 0,184, а относительная

$$\delta=\frac{0,184}{4}=0,046=4,6\%.$$

2) Применим метод к нахождению $y(2)$, если $y(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{10}, \tag{53}$$

удовлетворяющее условию

$$y|_{x=1}=0,1. \tag{54}$$

Как и в предыдущем примере, разделим отрезок от $x=1$ до $x=2$ на 10 равных частей и составим таблицу.

x	y	y'	Δy	x	y	y'	Δy
1	0,1	0,2	0,02	1,6	0,250	0,316	0,032
1,1	0,12	0,219	0,022	1,7	0,282	0,336	0,034
1,2	0,142	0,238	0,024	1,8	0,316	0,356	0,036
1,3	0,166	0,258	0,026	1,9	0,352	0,375	0,038
1,4	0,192	0,277	0,028	2	0,39	—	—
1,5	0,220	0,297	0,030				

Из таблицы вытекает, что $y(2)=0{,}39$. С другой стороны, решая дифференциальное уравнение (53) (оно линейное!) подстановкой $y=uv$, имеем

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=\frac{x}{10}.$$

Отсюда сначала находим $v=x$, а затем $u=\frac{x}{10}+C$. Значит, общее решение нашего дифференциального уравнения есть

$$y=\frac{x^2}{10}+Cx,$$

а условие (54) дает $C=0$. Стало быть, интересующее нас частное решение

$$y=\frac{x^2}{10}.$$

Но тогда $y(2)=0{,}4$. Абсолютная ошибка значения $y(2)=0{,}39$, найденного методом Эйлера — Коши, равна 0,01, а относительная ошибка

$$\delta=\frac{0{,}01}{0{,}4}=0{,}025=2{,}5\%.$$

Порядок ошибки примерно тот же, что и в первом примере.

3) В рассмотренных примерах мы могли найти и точные решения наших дифференциальных уравнений. Рассмотрим теперь уравнение Риккати

$$y'=x-y^2,$$

которое даже не интегрируется в квадратурах. Пусть $y=y(x)$ — то его частное решение, для которого $y(1)=1$. Найдем $y(1{,}5)$ по методу Эйлера — Коши, разделив отрезок $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ точками $1, 1\frac{1}{10}, 1\frac{2}{10}, 1\frac{3}{10}, 1\frac{4}{10}, 1\frac{5}{10}$ на 5 частей. Результаты видны из таблицы.

x	y	y'	Δy
1	1	0	0
1,1	1	0,1	0,01
1,2	1,01	0,18	0,018
1,3	1,028	0,24	0,024
1,4	1,052	0,30	0,030
1,5	1,082		

Итак, $y(1,5) = 1,082$. В п° 10 § 1 гл. XIII мы увидим, что на самом деле $y(1,5) = 1,091\ \ldots$ Стало быть, абсолютная ошибка найденного значения y равна 0,009, а относительная

$$\delta = \frac{0,009}{1,091} < 0,009 = 0,9\%.$$

Остановимся теперь на вопросе о **н а к о п л е н и и о ш и б о к** в методе Эйлера—Коши.

Ошибка формулы (50) происходит от замены Δy на $y'\Delta x$. Если к $y(x_0 + \Delta x)$ применить формулу Тейлора с остаточным членом, то мы получим

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}y''(\bar{x})(\Delta x)^2,$$

где $\bar{x}$ лежит между x_0 и $x_0 + \Delta x$. Отсюда, полагая $y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \Delta y$, находим

$$\Delta y - y'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2}y''(\bar{x})(\Delta x)^2.$$

Мы видим, что эта разность есть величина порядка $(\Delta x)^2$. Иными словами, ошибка формулы (50) при уменьшении Δx в n раз уменьшается примерно в n^2 раз. Заметив это, предположим, что мы, зная $y(x_0)$, хотим найти $y(x^*)$, где x^* удалено от x_0. Допустим, что мы решили (разумеется, приближенно!) эту задачу, вставив между x_0 и x^* некоторое количество промежуточных точек, разбивающих отрезок $[x_0, x^*]$ на равные части. Если, проделав это, мы затем увеличим число промежуточных точек в n раз, то (согласно сказанному выше) ошибка при каждом отдельном переходе от одной промежуточной точки к соседней уменьшится в n^2 раз. Однако число сделанных таким образом ошибок увеличится всего в n раз. Стало быть, суммарная ошибка **у м е н ь ш и т с я** в n раз. Отсюда видно, что *увеличение числа промежуточных точек влечет за собой уменьшение суммарной ошибки*. Более того, если $n \to \infty$, то суммарная ошибка стремится к нулю.

На практике, найдя приближенное значение $y(x^*)$ при некотором x^* с помощью выбранного количества промежуточных точек и желая отдать себе отчет в достигнутой точности, **у в е л и ч и в а ю т** это количество и снова находят $y(x^*)$. Если при этом $y(x^*)$ в пределах интересующей нас точности не изменится, то удовлетворяются найденным его значением.

В заключение отметим, что существуют гораздо более совершенные методы приближенного решения дифференциальных уравнений, но эти методы сложнее, а основная их идея *) та же, что и у метода Эйлера — Коши. Поэтому мы их не рассматриваем.

Упражнения. 1) Способом Эйлера — Коши найти $y|_{x=0,4}$, если $y'=\frac{2xy}{x^2+1}$ и $y|_{x=0}=1$. Отрезок [0; 0,4] разбить на 4 равные части.
Ответ: 1,12.

2) Найти относительную ошибку решения предыдущей задачи.
Ответ: 3,4%.

3) Способом Эйлера — Коши найти $y|_{x=1,4}$, если $y'=\frac{2y}{x}+x^2$, $y|_{x=1}=1$. Отрезок [1; 1,4] разбить на 4 равные части.
Ответ: 2,57.

4) Найти относительную ошибку решения предыдущей задачи.
Ответ: 6,2%.

5) Способом Эйлера — Коши найти $y|_{x=2,4}$, если $y'=\frac{2x+y^2-5}{2}$, $y|_{x=2}=1$. Отрезок [2; 2,4] разбить на 4 равные части.
Ответ: 1,06.

6) Решить ту же задачу, разбив [2; 2,4] на 8 равных частей.
Ответ **): 1,077.

n° 11. Некоторые применения дифференциальных уравнений 1-го порядка.

1. *Трос равного сопротивления растяжению.* Рассмотрим вертикально висящий трос, к нижнему концу которого подвешен некоторый груз P. Рассечем (мысленно) этот трос на расстоянии x от его нижнего конца, и пусть (рис. 329) F_x и P_x — соответственно площадь произведенного сечения и приложенная к нему нагрузка ***). Тогда отношение

$$\frac{P_x}{F_x},$$

т. е. нагрузка, приходящаяся на единицу площади сечения, называется *напряжением* троса в рассматриваемом сечении. Это напряжение не может быть чрезмерно велико, ибо иначе трос оборвется. Самое большое напряжение, которое может выдержать трос, зависит от его материала. Оно называется *допускаемым напряжением* и обозначается через R. Например, для стального троса R будет величиной порядка 1500—2000 $\frac{кг}{см^2}$. Ясно, что боль-

*) Кроме методов, основанных на теории рядов. Об этих последних методах мы дадим представление в гл. XIII.

**) Пользуясь методами гл. XIII, читатель убедится, что $y|_{x=2,4}=1,092$. Таким образом, относительные ошибки значений 1,06 и 1,077 соответственно равны 2,9% и 1,3%. Увеличение числа шагов вдвое повлекло уменьшение ошибки в два раза.

***) Она складывается из груза P, подвешенного к тросу, и веса той части троса, которая находится ниже нашего сечения.

ше R напряжение ни в одном сечении быть не может. Однако и меньшие R напряжения нежелательны: если бы в каком-либо сечении напряжение оказалось меньше R, то можно было бы, уменьшив площадь сечения, повысить напряжение (до допускаемого), т. е., сохраняя безопасность, сэкономить материал троса. Таким образом, целесообразно употреблять трос с переменной площадью сечения, подобрав эту площадь так, чтобы во всех сечениях напряжение равнялось R. Такой трос называется *тросом равного сопротивления растяжению*.

Найдем закон изменения площади F_x, если при всех x будет

$$\frac{P_x}{F_x} = R. \tag{55}$$

В частности, при $x = 0$ из (55) следует

$$F_0 = \frac{P}{R}. \tag{56}$$

Пусть V_x — объем той части троса, которая находится ниже сечения x (т. е. сечения, находящегося на расстоянии x от нижнего конца троса). Тогда вес этой части равен γV_x, где γ — удельный вес троса, и

$$P_x = P + \gamma V_x.$$

Значит, (55) принимает вид

$$\frac{P+\gamma V_x}{F_x} = R,$$

откуда

$$F_x = \frac{P+\gamma V_x}{R}. \tag{57}$$

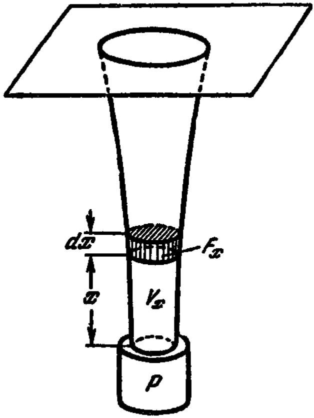


Рис. 329.

Если мы произведем сечение не на расстоянии x, а на расстоянии $x + dx$ от нижнего края троса, то в равенстве (57) надо будет заменить F_x и V_x соответственно на $F_x + dF_x$ и $V_x + dV_x$. Если из полученного таким образом нового равенства вычесть (57), то мы найдем *)

$$dF_x = \frac{\gamma}{R} dV_x. \tag{58}$$

Но $dV_x = F_x dx$, ибо это объем элементарного слоя с площадью F_x и высотой dx. Значит,

$$dF_x = \frac{\gamma}{R} F_x dx, \tag{59}$$

т. е. мы получили дифференциальное уравнение с неизвестной функцией F_x. Из (59) следует, что

$$\frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma}{R} dx.$$

Интегрируя, находим

$$\ln F_x = \frac{\gamma}{R} x + \ln C$$

или

$$F_x = Ce^{\frac{\gamma}{R} x}.$$

*) Еще проще получить (58), дифференцируя (57).

Полагая $x=0$ и учитывая начальное условие (56), получаем $C=\frac{P}{R}$, откуда вытекает решение задачи

$$F_x=\frac{P}{R}e^{\frac{\gamma}{R}x}. \tag{60}$$

Найдем вес Q троса, сечение которого удовлетворяет условию (60). Если l — длина троса, а V — его объем, то

$$V=\int_0^l F_x\,dx=\frac{P}{R}\int_0^l e^{\frac{\gamma}{R}x}\,dx=\frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{\gamma}{R}l}-1\right).$$

Но $Q=\gamma V$, т. е.

$$Q=P\left(e^{\frac{\gamma}{R}l}-1\right). \tag{61}$$

Величина $\frac{\gamma l}{R}$ обычно весьма мала, а для малых x можно приближенно принять *)

$$e^x-1\cong x. \tag{62}$$

Отсюда

$$e^{\frac{\gamma}{R}l}-1\cong\frac{\gamma l}{R}$$

и (61) дает

$$Q\cong\frac{P\gamma l}{R}. \tag{63}$$

Интересно выяснить, какую экономию дает применение рассматриваемого троса. Если бы вместо него мы применили трос постоянного сечения F, то объем такого троса равнялся бы Fl, а его вес $Q^*=\gamma Fl$. К верхнему (т. е. наиболее загруженному) сечению троса была бы приложена нагрузка $P+\gamma Fl$, откуда напряжение в этом сечении равнялось бы

$$\frac{P+\gamma Fl}{F}.$$

Приравнивая это напряжение допускаемому R, находим

$$F=\frac{P}{R-\gamma l},$$

откуда

$$Q^*=\frac{P\gamma l}{R-\gamma l}. \tag{64}$$

Из (64) и (63) следует, что

$$\frac{Q}{Q^*}\cong 1-\frac{\gamma l}{R}.$$

Стало быть, экономия от применения троса равного сопротивления растяжению составляет около $100\,\frac{\gamma l}{R}\,\%$.

---

*) Ведь по формуле Тейлора $e^x=1+x+\frac{e^{\bar{x}}}{2}x^2$, где $0\leqslant\bar{x}\leqslant x$. Значит, ошибка равенства (62) является величиной порядка x^2.

Пусть, например,

$$R = 1500\,\frac{кг}{см^2},\qquad \gamma = 8\,\frac{г}{см^3},\quad l = 300\ м.$$

Выражая вес в *кг*, а длину в *м*, находим

$$R = 15\cdot 10^6\,\frac{кг}{м^2},\qquad \gamma = 8\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3},\quad l = 300\ м,$$

откуда

$$\frac{\gamma l}{R} = 0{,}16 = 16\%.$$

Для груза $P = 42\,000$ *кг* будет [согласно (64)]

$$Q^* = \frac{P\frac{\gamma l}{R}}{1-\frac{\gamma l}{R}} = \frac{0{,}16P}{1-0{,}16} = \frac{16}{84}P = 8000\ кг.$$

Экономия металла от применения троса равного сопротивления растяжению, составляющая 16% от Q^*, будет равна 1280 *кг*.

11. *Регулятор угловой скорости вертикального вала.* Если полый вертикальный цилиндр, содержащий некоторое количество жидкости, будет приведен во вращение вокруг своей оси, то свободная поверхность жидкости примет вогнутую форму. Исследуем эту форму, предполагая, что угловая скорость ω цилиндра (и налитой в него жидкости) постоянна. По соображениям симметрии ясно, что интересующая нас поверхность представляет собой поверхность вращения. Поэтому достаточно изучить кривую, являющуюся пересечением поверхности жидкости с вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения. Для изучения этой кривой введем в упомянутой плоскости оси координат, приняв за ось Oy ось вращения и направив ее вверх. Начало координат поместим в самой низкой точке поверхности жидкости (рис. 330).

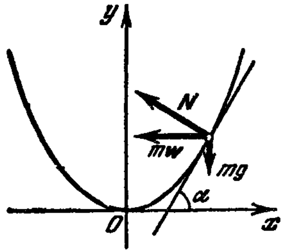


Рис. 330.

Выделим на рассматриваемой кривой частицу жидкости. Пусть m — масса этой частицы, w — ее ускорение, а F — приложенная к ней сила. По основному закону динамики точки эти величины связаны (векторным!) соотношением

$$mw = F. \tag{65}$$

Сила F складывается из веса mg частицы, направленного вниз, и реакции N поверхности жидкости. Эта реакция направлена п о н о р м а л и к рассматриваемой кривой (ибо иначе частица соскользнула бы вдоль этой кривой). Выделенная нами частица описывает окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси вращения Oy. Центр этой окружности находится на оси Oy, а ее радиус равен абсциссе *) x частицы. Из кинематики известно, что при равномерном движении по такой траектории ускорение w направлено к центру окружности и численно равно $x\omega^2$. Заметив все это, спроектируем обе части равенства (65) на оси Ox и Oy. Если через

*) Для простоты мы принимаем $x > 0$.

α обозначить угол между касательной к нашей кривой и осью Ox, то упомянутые проектирования приводят к равенствам *)

$$-mx\omega^2 = -N\sin\alpha, \qquad 0 = -mg + N\cos\alpha.$$

Отсюда $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$ и

$$g\operatorname{tg}\alpha = \omega^2 x. \tag{66}$$

Но, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx}$, где x и y — координаты точек рассматриваемой кривой. Стало быть, (66) дает нам дифференциальное уравнение

$$dy = \frac{\omega^2}{g} x\,dx.$$

Интегрируя, находим

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C.$$

Поскольку, однако, интересующая нас линия проходит через начало координат, то $C = 0$ и решением задачи служит парабола

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2. \tag{67}$$

Поверхность жидкости оказывается, таким образом, параболоидом вращения.

Пусть радиус цилиндра, в который налита жидкость, равен r, а высота подъема жидкости у стенок цилиндра есть h. Из (67) следует, что

$$h = \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2gh},$$

т. е. наблюдение высоты h позволяет найти и угловую скорость ω. Обычно цилиндр делается прозрачным, а на его поверхности вытравлены деления, позволяющие наблюдать высоту h. Это дает возможность измерять и регулировать скорость вращения вертикального вала, в который вмонтирован цилиндр.

Рис. 331.

III. *Барометрическое нивелирование.* Хорошо известно, что при подъеме на возвышенности атмосферное давление уменьшается, так как в каждом месте оно обусловлено весом столба воздуха, находящегося над этим местом. Исследуем этот вопрос подробнее. Рассмотрим вертикальный цилиндрический столб воздуха (рис. 331), имеющий площадь поперечного сечения, равную единице. Пусть P_x — вес той части этого столба, которая лежит выше сечения, удаленного на x метров от уровня моря. Тогда P_x и будет представлять собою атмосферное давление в упомянуом сечении. Если взять 1 *кг* воздуха и дать ему заполнить некоторый объем V, то по закону

*) Из рис. 330 видно, что реакция N составляет с положительными направлениями осей Ox и Oy углы, соответственно равные $\alpha + 90°$ и α.

Бойля — Мариотта давление P в этом объеме будет удовлетворять соотношению

$$PV = k,$$

где k — некоторая постоянная. Отсюда следует, что объем 1 *кг* воздуха, находящегося под давлением P, равен

$$V = \frac{k}{P}.$$

Заметив это, выделим из упомянутого цилиндрического столба слой воздуха, лежащий между высотами x и $x + dx$ (в метрах над уровнем моря). Объем этого слоя равен dx (ибо площадь сечения $= 1$). Считая, что в пределах слоя давление не меняется и равно P_x, мы легко найдем вес нашего слоя: он равен стольким килограммам, какое количество раз величина $V = \frac{k}{P_x}$ содержится в dx. Иными словами, этот вес будет

$$\frac{dx}{V} = \frac{P_x dx}{k}.$$

С другой стороны, именно на эту величину уменьшается атмосферное давление при подъеме от высоты x к высоте $x + dx$. Стало быть,

$$\frac{P_x dx}{k} = P_x - P_{x+dx}$$

или, заменяя, как обычно, приращение функции P_x ее дифференциалом,

$$\frac{P_x dx}{k} = -dP_x.$$

Таким образом, мы пришли к дифференциальному уравнению, связывающему x и P_x. Отделяя переменные, находим

$$\frac{dP_x}{P_x} = -\frac{dx}{k},$$

откуда

$$\ln P_x = -\frac{x}{k} + \ln C$$

или

$$P_x = Ce^{-\frac{x}{k}}.$$

Обозначая через P давление на уровне моря, т. е. полагая $P_0 = P$, находим $P = C$, откуда

$$P_x = Pe^{-\frac{x}{k}}. \tag{68}$$

На практике высота x бывает неизвестна, а давление P_x легко измеряется при помощи барометра. Из (68) находим

$$\ln P_x = \ln P - \frac{x}{k},$$

т. е.

$$x = k \ln \frac{P}{P_x}. \tag{69}$$

Эта формула позволяет по наблюденному давлению P_x определять высоту x

места, где мы находимся. Чтобы избежать всяких вычислений, удобно с самого начала так проградуировать барометр, чтобы на его шкале были надписаны не давления P_x, а прямо высоты x, соответствующие им по формуле (69) *).

§ 2. Уравнения высших порядков

n° 1. Простейшие дифференциальные уравнения высшего порядка. Общий вид дифференциального уравнения n-го порядка есть

$$\boxed{F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0.} \tag{1}$$

Здесь $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ может на самом деле не зависеть от некоторых из величин $x, y, y', \ldots$ Однако если (1) — уравнение именно n-го порядка, то функция F обязательно зависит от $y^{(n)}$. Наиболее простым дифференциальное уравнение (1) оказывается тогда, когда оно имеет вид

$$\boxed{y^{(n)}=f(x),} \tag{2}$$

где $f(x)$ — заданная функция. Примером такого *простейшего* уравнения служит хотя бы дифференциальное уравнение

$$y^{(4)}=-\frac{1}{x^2}. \tag{3}$$

Из этого уравнения сразу видно, что

$$y'''=-\int\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{x}+C, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная. В свою очередь из (4) следует, что

$$y''=\int\left(\frac{1}{x}+C\right)dx=\ln x+Cx+C',$$

где C' — опять-таки произвольная постоянная, никак не связанная с постоянной C. Новое интегрирование дает **)

$$y'=\int(\ln x+Cx+C')\,dx=x\ln x-x+C\frac{x^2}{2}+C'x+C'',$$

где C'' — новая произвольная постоянная. Еще одно интегрирование

*) Разумеется, все рассуждение имеет схематический характер: не учитывается широта места, влажность воздуха и т. п.

**) Интеграл $\int\ln x\,dx$ берется по частям. Надо положить $\ln x=u$, $dx=dv$.

приводит *) к окончательному результату

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+C\frac{x^3}{6}+C'\frac{x^2}{2}+C''x+C'''.$$

Приведем подобные члены и положим

$$\frac{C}{6}=C_1,\quad \frac{C'}{2}-\frac{3}{4}=C_2,\quad C''=C_3,\quad C'''=C_4.$$

Тогда решение нашего дифференциального уравнения запишется в форме

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4. \tag{5}$$

Ясно, что это самое общее решение дифференциального уравнения (3). Читатель должен обратить внимание на то, что найденное решение зависит от четырех произвольных постоянных, и сопоставить это с тем, что исходное дифференциальное уравнение (3) было уравнением четвертого порядка.

Совершенно аналогично посредством n последовательных интегрирований решается любое уравнение (2). Так как при каждом интегрировании будет вводиться своя произвольная постоянная, то искомое решение уравнения (2) будет зависеть от n произвольных постоянных. Иными словами, число произвольных постоянных, входящих в самое общее решение простейшего уравнения (2), в точности равно порядку уравнения. В связи с этим вводится

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения n-го порядка (1) называется функция

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n), \tag{6}$$

существенно зависящая от n произвольных постоянных и обращающая уравнение (1) в тождество при любых значениях этих постоянных. Решения, получаемые из общего при закреплении постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, называются *частными*.

Замечания. 1) В данном определении употреблено выражение „существенно". Это означает, что число постоянных нельзя снизить за счет введения новых обозначений. Например, функция

$$y=(C_1^2+2C_2+C_3)x+C_4+6C_5$$

существенно зависит лишь от двух постоянных

$$C'=C_1^2+2C_2+C_3,\quad C''=C_4+6C_5$$

и может быть записана в виде

$$y=C'x+C''.$$

---

*) Положив $\ln x=u$, $x\,dx=dv$ и интегрируя по частям, находим

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C'''.$$

2) По отношению к простейшему дифференциальному уравнению (2) мы сказали, что при помощи n последовательных интегрирований мы находим „самое общее решение" этого дифференциального уравнения. Это означает, что никаких других решений, кроме получающихся из найденного при определенных значениях констант C_1, C_2, ..., C_n, наше дифференциальное уравнение не имеет. По отношению к общему случаю уравнения (1) дело обстоит не так. Оно может иметь и такие решения, которые не получаются из общего решения (6) ни при каких значениях констант C_1, C_2, ..., C_n. Подобное явление мы наблюдали уже в случае уравнений 1-го порядка: они могут иметь *особые* решения. Однако даже для уравнений 1-го порядка мы не занимались отысканием особых решений. Тем более мы не будем заниматься этим вопросом для уравнений высших порядков. Уравнение (1) мы будем считать решенным, если будет найдено его общее решение (6).

n°2. Начальные условия. В прикладных вопросах часто приходится искать такое решение дифференциального уравнения n-го порядка, которое удовлетворяет n условиям: при заданном значении $x = x_0$ сама искомая функция y и ее первые $n-1$ производных y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ должны принимать заданные значения

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{7}$$

Вообще говоря, условия (7) (называемые *начальными*) выделяют из общего решения

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

единственное частное решение. Действительно, равенства (7) представляют собой систему n уравнений, из которых, вообще говоря, и удается найти n неизвестных C_1, C_2, ..., C_n.

Пример. Найти то решение дифференциального уравнения

$$y''' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \tag{8}$$

у которого

$$y|_{x=0} = 5, \quad y'|_{x=0} = 2, \quad y''|_{x=0} = 7. \tag{9}$$

Интегрируя (8), найдем

$$y'' = -\int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + C_1.$$

Последнее из условий (9) дает $C_1 = 6$. Значит,

$$y'' = \frac{1}{1+x^2} + 6.$$

Отсюда

$$y' = \operatorname{arctg} x + 6x + C_2.$$

Второе из условий (9) дает $C_2=2$ и потому

$$y'=\operatorname{arctg} x+6x+2.$$

Интегрируя, получим *)

$$y=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+3x^2+2x+C_3.$$

Отсюда и из первого условия (9) находим $C_3=5$.

п° 3. Некоторые случаи понижения порядка дифференциального уравнения. Общий вид дифференциального уравнения 2-го порядка таков:

$$\boxed{F(x, y, y', y'')=0.} \tag{10}$$

Отметим 3 частных вида уравнения (10), когда решение его сводится к последовательному решению двух дифференциальных уравнений 1-го порядка.

I. *Уравнение не содержит искомой функции y,* т. е. имеет вид

$$\boxed{F(x, y', y'')=0.} \tag{11}$$

В этом случае надо ввести новую неизвестную функцию z, положив

$$y'=z.$$

Тогда $y''=z'$ и (11) принимает вид

$$F(x, z, z')=0,$$

т. е. оказывается уравнением первого порядка относительно z. Решив его, найдем

$$z=\varphi(x, C_1),$$

т. е.

$$y'=\varphi(x, C_1),$$

а тогда

$$y=\int\varphi(x, C_1)\,dx+C_2.$$

Пример. $y''-\frac{y'}{x}=xe^x$. Положив $y'=z$, получим линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$z'-\frac{z}{x}=xe^x.$$

---

*) Интеграл $\int\operatorname{arctg} x\,dx$ берется по частям, если положить $\operatorname{arctg} x=u$, $dx=dv$.

Решив его, найдем

$$z=(e^x+C_1)x.$$

Отсюда

$$y=\int (e^x+C_1)x\,dx=xe^x-e^x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2.$$

II. *Уравнение не содержит независимой переменной* x, т. е. имеет вид

$$\boxed{F(y,\ y',\ y'')=0.} \tag{12}$$

В этом случае также надо за новую неизвестную функцию принять $y'=z$, а за новую независимую переменную принять y. Тогда

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}z.$$

Таким образом, уравнение (12) преобразуется в уравнение 1-го порядка

$$F\left(y,\ z,\ z\frac{dz}{dy}\right)=0.$$

Решив его, мы получим

$$z=\varphi(y,\ C_1),$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(y,\ C_1),$$

откуда

$$\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=dx$$

и

$$\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

Это общий интеграл *) нашего дифференциального уравнения.

Пример. $yy''-2y'^2=0$. Полагая $y'=z$, $y''=z\frac{dz}{dy}$, получим

$$yz\frac{dz}{dy}-2z^2=0$$

или

$$z\left(y\frac{dz}{dy}-2z\right)=0.$$

Это дифференциальное уравнение распадается на два:

$$z=0,\qquad y\frac{dz}{dy}-2z=0.$$

---

*) То есть такое уравнение между x, y, C_1, C_2, что найденная из него функция $y=\psi(x,\ C_1,\ C_2)$ будет общим решением дифференциального уравнения.

Первое из них дает $y'=0$, т. е. $y=C$. Во втором переменные отделяются:

$$\frac{dz}{z}=\frac{2dy}{y},$$

откуда

$$\ln z=2\ln y+\ln C_1,$$

т. е.

$$z=C_1y^2.$$

Вспоминая, что $z=\frac{dy}{dx}$, получаем

$$\frac{dy}{y^2}=C_1\,dx$$

и

$$-\frac{1}{y}=C_1x+C_2,$$

т. е. (заменяя C_1 и C_2 на $-C_1$ и $-C_2$)

$$y=\frac{1}{C_1x+C_2}. \tag{13}$$

Это общее решение нашего дифференциального уравнения. Кстати сказать, найденное раньше решение $y=C$ содержится в (13), ибо получается из (13) при $C_1=0$.

III. *Уравнение имеет вид*

$$\boxed{y''=f(y).} \tag{14}$$

Это частный случай уравнения (12), и потому оно решается заменой

$$y''=z\frac{dz}{dy},$$

где $z=y'_x$. В результате этой замены дифференциальное уравнение (14) преобразуется в уравнение*)

$$z\frac{dz}{dy}=f(y), \tag{15}$$

дающее

$$\frac{z^2}{2}=\int f(y)\,dy+C_1.$$

---

*) Другой способ получения (15) из (14) состоит в умножении (14) на dy, причем в левой части dy заменяется на $y'\,dx$. В результате получим

$$y'y''\,dx=f(y)\,dy,$$

а это равносильно (15), ибо $y''\,dx=dy'$.

Отсюда

$$z = \pm\sqrt{2\left[C_1 + \int f(y)\,dy\right]}$$

или

$$\frac{dy}{\sqrt{2\left[C_1 + \int f(y)\,dy\right]}} = \pm dx, \tag{16}$$

и еще одно интегрирование приводит к общему интегралу уравнения (14). В тех случаях, когда дифференциальное уравнение (14) сопровождается начальными условиями, обычно выясняется, какой знак надо брать в правой части (16).

Пример. $y'' = \frac{3}{2}y^2$, $y|_{x=3} = 1$, $y'|_{x=3} = 1$. Делая замену $y'' = z\frac{dz}{dy}$, находим

$$2z\,dz = 3y^2\,dy,$$

откуда

$$z^2 = y^3 + C_1$$

и

$$z = \pm\sqrt{y^3 + C_1}.$$

Полагая здесь $x = 3$ и учитывая, что при этом будет $y' = z = 1$, видим, что перед радикалом надо выбрать знак $+$ и что $C_1 = 0$. Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^3}.$$

Значит,

$$y^{-\frac{3}{2}}\,dy = dx$$

и

$$-2y^{-\frac{1}{2}} = x + C_2.$$

При $x = 3$ находим $-2 = 3 + C_2$, откуда $C_2 = -5$. Стало быть

$$\frac{2}{\sqrt{y}} = 5 - x$$

и окончательно

$$y = \frac{4}{(x-5)^2}.$$

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

n° 1. Линейное дифференциальное уравнение высшего порядка. *Линейным* дифференциальным уравнением (любого порядка) называется такое дифференциальное уравнение, в которое неизвестные элементы $y, y', y'', \ldots$ входят в первых степенях, не перемножаясь между собой. Иными словами, это уравнение вида

$$A(x)y^{(n)}+B(x)y^{(n-1)}+\ldots+K(x)y'+L(x)y=M(x), \tag{1}$$

где $A(x)$, $B(x)$, ..., $K(x)$, $L(x)$, $M(x)$ — заданные функции от x. Если речь идет об уравнении n-го порядка, то $A(x)\not\equiv 0$ и уравнение (1) можно разделить на $A(x)$, что приводит его к виду

$$y^{(n)}+b(x)y^{(n-1)}+\ldots+k(x)y'+l(x)y=m(x), \tag{2}$$

где положено

$$b(x)=\frac{B(x)}{A(x)}, \quad \ldots, \quad m(x)=\frac{M(x)}{A(x)}.$$

Впредь мы будем записывать линейное дифференциальное уравнение в упрощенной форме (2). Функция $m(x)$ называется *свободным членом* уравнения. Если $m(x)\equiv 0$, то уравнение (2) называется *однородным* уравнением. Если же $m(x)\not\equiv 0$, то уравнение (2) *неоднородное*.

Мы будем вести изложение теории для уравнений второго порядка, так как здесь можно увидеть все основные интересующие нас закономерности. Таким образом, в дальнейшем речь пойдет об уравнениях

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x). \tag{3}$$

В качестве же иллюстрирующих примеров мы будем рассматривать и уравнения более высоких порядков.

n°2. Структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения. Остановимся прежде всего на однородном линейном дифференциальном уравнении, т. е. на уравнении

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0.} \tag{4}$$

Позже мы увидим, что для решения дифференциального уравнения (3), в котором $f(x)\neq 0$, также надо уметь решать (4).

Лемма 1. Если y_0 — какое-либо решение уравнения (4), *а C — постоянная, то функция*

$$Y=Cy_0$$

*также является решением**) *дифференциального уравнения* (4).

Доказательство. Подставим Y в левую часть (4). Так как

$$Y'=Cy_0', \qquad Y''=Cy_0'',$$

*) Если можно так выразиться, решение „не портится" от умножения на постоянную. Разумеется, не все дифференциальные уравнения обладают этим свойством. Например, $y_0=x^2$ является решением дифференциального уравнения $y'=2x$, а $Y=5x^2$ нет.

то результат подстановки будет таков:

$$Cy_0'' + p(x)\,Cy_0' + q(x)\,Cy_0$$

или, что то же самое,

$$C[y_0'' + p(x)\,y_0' + q(x)\,y_0].$$

Поскольку, однако, y_0 является решением дифференциального уравнения (4), то выражение, стоящее в квадратных скобках, тождественно равно нулю. Поэтому и

$$Y'' + p(x)\,Y' + q(x)\,Y \equiv 0,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Если y_1 и y_2 — решения дифференциального уравнения* (4), *то и сумма их*

$$Y = y_1 + y_2$$

также является решением дифференциального уравнения (4) *).

Доказательство. Так как

$$Y' = y_1' + y_2', \qquad Y'' = y_1'' + y_2'',$$

то результат подстановки Y в левую часть (4) будет таков:

$$y_1'' + y_2'' + p(x)(y_1' + y_2') + q(x)(y_1 + y_2)$$

или, что то же самое,

$$[y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1] + [y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2].$$

Так как y_1 — решение дифференциального уравнения (4), то выражение, стоящее в первых квадратных скобках, тождественно равно нулю. То же относится и к выражению во вторых скобках. Значит,

$$Y'' + p(x)\,Y' + q(x)\,Y \equiv 0$$

и лемма доказана.

Определение. Две функции y_1 и y_2 называются *линейно независимыми*, если их отношение не является постоянной величиной

$$\boxed{\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}.}$$

Основная теорема. *Если y_1 и y_2 — два линейно независимых решения дифференциального уравнения* (4), *то функция*

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2,} \tag{5}$$

*) И эта лемма не распространяется на любые дифференциальные уравнения. Например, каждая из функций $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^2 + 7$ будет решением дифференциального уравнения $y' = 2x$, а сумма их нет.

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением уравнения (4).

Доказательство. То, что каждая из функций C_1y_1 и C_2y_2 будет решением (4), доказано в лемме 1. Но тогда (по лемме 2) их сумма (5) также будет решением (4). Остается проверить, что это решение общее. Но ведь оно зависит от двух произвольных постоянных, в то время как порядок уравнения (4) второй. Иными словами, число произвольных постоянных, входящих в решение, равно порядку уравнения, а тогда решение оказывается общим.

Замечание. Если откинуть условие линейной независимости функций y_1 и y_2, то функция (5) хотя и остается решением дифференциального уравнения (4), но уже не будет его общим решением. Пусть, например,

$$\frac{y_1}{y_2}=7.$$

Тогда $y_1=7y_2$ и

$$y=C_1y_1+C_2y_2=7C_1y_2+C_2y_2=(7C_1+C_2)y_2=Cy_2,$$

где положено $7C_1+C_2=C$. Иначе говоря, при наличии линейной зависимости функций y_1 и y_2 число произвольных постоянных, входящих в (5), за счет введения новых обозначений может быть снижено до одной, а это противоречит определению общего решения уравнения 2-го порядка.

Смысл доказанной теоремы в том, что она сводит задачу нахождения общего решения дифференциального уравнения (4) к более простой задаче нахождения двух линейно независимых его частных решений. Этой последней задачей мы займемся, однако, лишь для простейшего случая, когда коэффициенты уравнения $p(x)$ и $q(x)$ постоянны.

п° 3. Характеристическое уравнение. Итак, мы будем изучать дифференциальное уравнение

$$\boxed{y''+py'+qy=0,} \tag{6}$$

где p и q — постоянные числа. Чтобы разобраться в существе дела, начнем с примера

$$y''-5y'+6y=0. \tag{7}$$

Решением этого дифференциального уравнения должна быть такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество. Но левая часть уравнения представляет собой сумму самой функции y и ее производных y' и y'', взятых с некоторыми постоянными коэффициентами. Чтобы такая сумма оказалась тождественным нулем, надо, чтобы y, y' и y'' были подобны между собой. Поэтому, например, ни одна из функций

$$y = x^3, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \ln x$$

очевидным образом не может оказаться решением уравнения (7). Напрашивается мысль, что решением дифференциального уравнения (7) будет функция $y = e^x$. Однако, подставляя ее в уравнение, мы немедленно убеждаемся, что и она не будет его решением. Но ведь не только $y = e^x$, но и каждая из функций $y = e^{2x}, y = e^{3x}, y = e^{-x}, \ldots$ также будет подобна своим производным. Чтобы избежать бесконечного множества проб, рассмотрим функцию

$$y = e^{kx} \tag{8}$$

и постараемся подобрать k так, чтобы эта функция удовлетворила (7). Так как

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx},$$

то, подставляя (8) в левую часть (7), получим

$$k^2 e^{kx} - 5ke^{kx} + 6e^{kx}$$

или, что то же самое,

$$e^{kx}(k^2 - 5k + 6).$$

Чтобы это выражение было нулем, надо чтобы было

$$k^2 - 5k + 6 = 0. \tag{9}$$

Стало быть, требуемое k мы найдем, решая уравнение (9). Корни уравнения (9) суть

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 3.$$

Таким образом, мы нашли даже два нужных нам значения k. В соответствии с этим нами найдены два решения

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{3x}$$

нашего дифференциального уравнения. Легко видеть, что эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = e^x \neq \text{const}.$$

Стало быть (по основной теореме п° 2), эти решения позволяют построить и общее решение уравнения (7), а именно

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая дифференциального уравнения (6). Здесь также искомая функция y должна быть подобна своим производным y' и y''. Поэтому и здесь естественно заняться подбором такого k, чтобы функция

$$y = e^{kx}$$

оказалась решением дифференциального уравнения (6). Подстановка этой функции в левую часть (6) дает выражение

$$e^{kx}(k^2 + pk + q).$$

Чтобы это выражение оказалось нулем, надо, чтобы k было корнем квадратного уравнения *)

$$\boxed{k^2 + pk + q = 0,} \tag{10}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для дифференциального уравнения (6).

Из алгебры известно, что при решении квадратного уравнения (10) могут встретиться 3 случая:

I. Корни (10) вещественные и различные.

II. Корни (10) вещественные и равные.

III. Корни (10) мнимые.

Случаи II и III мы рассмотрим позже, а в этом n° остановимся на случае I.

Итак, пусть корни (10) суть вещественные числа

$$k_1 = a, \quad k_2 = b, \qquad (a \neq b).$$

Тогда (6) имеет 2 решения

$$y_1 = e^{ax}, \quad y_2 = e^{bx},$$

и ввиду их линейной независимости, так как

$$\frac{e^{ax}}{e^{bx}} \neq \text{const},$$

общее решение (6) таково:

$$\boxed{y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}.} \tag{11}$$

Примеры. 1) $y'' - 12y' + 35y = 0$. Характеристическое уравнение здесь $k^2 - 12k + 35 = 0$. Его корни $k_1 = 5$, $k_2 = 7$ и потому

*) Следует обратить внимание на способ получения (10) из (6): надо в (6) заменить y, y', y'' соответственно на 1, k, k^2. Если бы мы вместо (6) рассматривали дифференциальное уравнение 3-го порядка, то для построения характеристического уравнения надо было бы заменить y''' на k^3. Уравнение оказалось бы кубическим.

общее решение нашего дифференциального уравнения

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{7x}.$$

2) $y'' - 16y = 0$. Здесь характеристическое уравнение $k^2 - 16 = 0$. Его корни $k_{1,2} = \pm 4$ и общее решение

$$y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}.$$

3) $y'' - 2y' = 0$. Здесь характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 2k = 0$. Его корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ и потому

$$y = C_1 + C_2e^{2x}.$$

4) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$. Здесь характеристическое уравнение имеет вид $k^3 - 3k^2 + 2k = 0$ или $k(k^2 - 3k + 2) = 0$. Оно имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Значит,

$$y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{2x}.$$

Общее решение дифференциального уравнения 3-го порядка, как и полагается, зависит от т р е х произвольных постоянных.

5) $y^{(4)} - 29y'' + 100y = 0$. Здесь характеристическое уравнение $k^4 - 29k^2 + 100 = 0$, т. е. это биквадратное уравнение. Полагая $k^2 = z$, находим $z^2 - 29z + 100 = 0$, откуда $z_1 = 4$, $z_2 = 25$. Но тогда $k_{1,2} = \pm 2$, $k_{3,4} = \pm 5$ и

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{5x} + C_4e^{-5x}.$$

n° 4. Случай равных корней характеристического уравнения. Для уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0 \tag{12}$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 - 6k + 9 = 0. \tag{13}$$

У этого квадратного уравнения есть только один корень $k = 3$. Поэтому наша теория приводит только к одному частному решению

$$y_1 = e^{3x} \tag{14}$$

дифференциального уравнения (12), а этого недостаточно для построения его общего решения. Правда, в алгебре говорят, что уравнение (13) имеет не один, а д в а р а в н ы х корня $k_1 = 3$ и $k_2 = 3$, но здесь это оказывается только оборотом речи, который ничего не спасает. Действительно, если вместо одного решения (14) мы рассмотрим их два

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{3x} \tag{15}$$

и положим

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{3x},$$

то y все же не будет общим решением (12), ибо

$$y=(C_1+C_2)e^{3x}=Ce^{3x} \qquad (C=C_1+C_2),$$

т. е. y зависит только от одной произвольной постоянной. Это вполне естественно, ибо „два" решения (15) линейно зависимы. Таким образом, на первый взгляд мы не в состоянии построить общее решение дифференциального уравнения (12). Попробуем, однако, проверить, не будет ли, наряду с (14), решением уравнения (12) и функция

$$y_2=xe^{3x}. \tag{16}$$

Это делается простой подстановкой y_2 в левую часть (12). Так как

$$y_2'=e^{3x}+3xe^{3x}, \quad y_2''=6e^{3x}+9xe^{3x},$$

то результат подстановки таков:

$$6e^{3x}+9xe^{3x}-6(e^{3x}+3xe^{3x})+9xe^{3x},$$

а это тождественно равно нулю. Значит, (16) — тоже решение дифференциального уравнения (12), причем линейная независимость функций (14) и (16) очевидна. Но тогда функция

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$$

будет общим решением уравнения (12).

Рассмотрим теперь случай равных корней характеристического уравнения в общем виде.

Для уравнения

$$y''+py'+qy=0 \tag{17}$$

характеристическим служит уравнение

$$k^2+pk+q=0. \tag{18}$$

Его корни

$$k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Условием совпадения этих корней служит равенство

$$\boxed{\frac{p^2}{4}=q.} \tag{19}$$

Пусть это равенство справедливо. Тогда у (18) есть только один корень

$$k_1=-\frac{p}{2},$$

приводящий к решению

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}$$

дифференциального уравнения (17). Убедимся, что наряду с y_1 решением (17) будет и

$$y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Так как

$$y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}, \quad y_2'' = -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x},$$

то результат подстановки y_2 в левую часть (17) имеет вид

$$-pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4}xe^{-\frac{p}{2}x} + p\left(e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2}xe^{-\frac{p}{2}x}\right) + qxe^{-\frac{p}{2}x}$$

или, что то же самое,

$$\left(q - \frac{p^2}{4}\right)xe^{-\frac{p}{2}x}. \tag{20}$$

В силу (19) это выражение равно нулю, чем и доказано наше утверждение. Значит, y_1 и y_2 — два (очевидно, линейно независимых) решения (17) и общее решение этого дифференциального уравнения

$$y = C_1e^{-\frac{p}{2}x} + C_2xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Полученный вывод полезно формулировать отдельно.

Теорема. *Если характеристическое уравнение* (18) *имеет только один корень*

$$k_1 = a,$$

то наряду с функцией

$$y_1 = e^{ax}$$

решением уравнения (17) *будет и функция*

$$y_2 = xe^{ax}. \tag{21}$$

Заметим, что когда кроме корня $k_1 = a$ характеристическое уравнение (18) имеет и отличный от него корень $k_2 = b$, то функция (21) не будет решением (17). Действительно, подстановка (21) в левую часть (17) дает (20), а это выражение тождественно равно нулю только при условии (19), т. е. при условии, что корни уравнения (18) равные.

Примеры. 1) $y'' - 10y' + 25y = 0$. Здесь характеристическое уравнение $k^2 - 10k + 25 = 0$. Единственный корень этого уравнения $k_1 = 5$. Значит, общее решение нашего дифференциального уравнения таково:

$$y = C_1e^{5x} + C_2xe^{5x}.$$

2) $y''=0$. Здесь характеристическое уравнение таково: $k^2=0$. Оно имеет только один корень $k_1=0$. Значит, общее решение нашего дифференциального уравнения *)

$$y=C_1+C_2x.$$

Добавление. Доказательство теоремы этого n° заключалось в простой проверке высказанного утверждения. Полезно ознакомиться с теми соображениями, которые позволили впервые догадаться (Эйлеру), что эта теорема верна. Если характеристическое уравнение имеет равные корни $k_{1,2}=a$, то это уравнение таково:

$$k^2-2ak+a^2=0. \tag{22}$$

Стало быть, исходное дифференциальное уравнение

$$y''-2ay'+a^2y=0. \tag{23}$$

Попробуем слегка „деформировать" уравнение (23) с тем, чтобы равные корни уравнения (22) немного „раздвинулись", заменившись числами $k_1=a$ и $k_2=a+\Delta a$. Иными словами, мы вместо (23) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''-(2a+\Delta a)\,y'+a\,(a+\Delta a)\,y=0. \tag{24}$$

Уравнение (23) является „предельным" для (24), когда $\Delta a\to 0$. У (24) имеются частные решения

$$y_1=e^{ax},\quad y_2=e^{(a+\Delta a)x}.$$

Если $\Delta a\to 0$, то y_2 стремится совпасть с y_1, и мы не получаем ничего нового. Но ведь если y_1 и y_2 — решения (24), то и разность их

$$y_3=y_2-y_1=e^{(a+\Delta a)x}-e^{ax}$$

тоже будет решением (24). Если $\Delta a\to 0$, то $y_3\to 0$, и мы по-прежнему не получаем ничего нового. Чтобы „затормозить" стремление y_3 к нулю, рассмотрим отношение

$$y_4=\frac{y_3}{\Delta a}=\frac{e^{(a+\Delta a)x}-e^{ax}}{\Delta a},$$

которое также является решением уравнения (24). Естественно ожидать, что предел этого решения при $\Delta a\to 0$ будет решением исходного уравнения (23). Предел же этот

$$\lim_{\Delta a\to 0}\frac{e^{(a+\Delta a)x}-e^{ax}}{\Delta a}$$

есть не что иное, как производная функции e^{ax} по аргументу a, т. е.

$$\frac{\partial\,(e^{ax})}{\partial a}=xe^{ax}.$$

Эти наводящие соображения и привели Эйлера к гипотезе, что xe^{ax} будет решением уравнения (23). Произведенная (при помощи подстановки в уравнение) проверка, как мы видели, подтвердила справедливость этой гипотезы.

n° 5. Формулы Эйлера. В том случае, когда корни характеристического уравнения мнимые (т. е. комплексные числа $k_{1,2}=a\pm bi$,

*) В этом легко убедиться и непосредственно: если $y''=0$, то $y'=C_1$, откуда $y=C_1x+C_2$.

у которых $b \neq 0$), выражения

$$e^{k_1 x}, \quad e^{k_2 x}$$

теряют смысл. Возникает стремление разумным образом обобщить смысл символа e^z и на тот случай, когда z — комплексное число, с тем чтобы развитая выше теория решения линейных дифференциальных уравнений оказалась применимой и тогда, когда корни характеристического уравнения мнимые.

На первый взгляд к нашей задаче нет никакого подхода. Ведь даже при вещественном z степень e^z определяется по-разному в зависимости от того, какова природа числа z: будет ли оно целым положительным, нулем, целым отрицательным, дробным или иррациональным. Например,

$$\begin{aligned} &e^3 = e \cdot e \cdot e, && e^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{e^3}, \\ &e^0 = 1, && e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \\ &e^{-2} = \frac{1}{e^2}, && e^{\pi} = \lim_{k\to\infty} e^{r_k}, \end{aligned} \tag{25}$$

где под $r_1, r_2, r_3, \ldots$ разумеется какая-либо последовательность рациональных чисел, имеющая пределом (иррациональное!) число π.

Поэтому, прежде чем придумывать определение символу e^z при комплексном z, постараемся найти для этого символа единое определение для z вещественного. Эта предварительная задача решается при помощи леммы.

Лемма. *Если z — любое вещественное число, то*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.} \tag{26}$$

В самом деле, если $z = 0$, то доказывать нечего. Если же $z \neq 0$, то

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{z}{n}\right)^{\frac{n}{z}}\right]^z \xrightarrow[n\to\infty]{} e^z.$$

Доказанная лемма позволяет вместо равенств (25) написать, что

$$\begin{aligned} &e^3 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n, && e^{\frac{3}{4}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{4n}\right)^n, \\ &e^0 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n, && e^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n, \\ &e^{-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n, && e^{\pi} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

Эти соображения наводят на мысль и для комплексного z определить символ e^z формулой (26). Чтобы это определение было корректным, надо прежде всего отметить, что для комплексного z выражение

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \tag{26a}$$

при $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ пробежит последовательность комплексных значений *)

$$x_1+y_1 i, \quad x_2+y_2 i, \quad x_3+y_3 i, \ldots$$

Если имеют дело с такой **комплексной переменной** $x_n+y_n i$, у которой x_n и y_n имеют конечные пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n=b,$$

то комплексное число $a+bi$ называют *пределом* последовательности $x_n+y_n i$ и пишут

$$a+bi=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n i).$$

Можно доказать (чего мы делать не будем), что выражение (26a) имеет предел (в только что определенном смысле) при любом комплексном z. А тогда символ e^z оказывается определенным формулой (26) опять-таки для любого комплексного z. Более того, можно доказать (чего мы также делать не будем), что сохраняются привычные нам законы

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2},$$
$$e^{z_1}:e^{z_2}=e^{z_1-z_2},$$
$$(e^z)^m=e^{mz} \quad (m \text{ — целое})$$

и т. п.

Отметив все изложенное, рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=e^{-xi}(\cos x+i\sin x).$$

Дифференцируя ее, находим

$$\varphi'(x)=-ie^{-xi}(\cos x+i\sin x)+e^{-xi}(-\sin x+i\cos x),$$

откуда

$$\varphi'(x)=-e^{-xi}(i^2+1)\sin x.$$

---

*) Например, если $z=i$, то

$$\left(1+\frac{i}{1}\right)^1=1+i, \quad \left(1+\frac{i}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+i, \quad \left(1+\frac{i}{3}\right)^3=\frac{2}{3}+\frac{26}{27}i, \ldots$$

Вообще для нахождения $\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$ надо возвести двучлен $1+\frac{i}{n}$ в степень n по биномиальной формуле Ньютона, а затем учесть, что $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1, \ldots$

Но ведь $i^2 = -1$. Значит, $\varphi'(x) = 0$. А тогда $\varphi(x)$ есть **постоянная** *), значение которой не зависит от x. С другой стороны, непосредственно видно, что $\varphi(0) = 1$. Таким образом, при всех x будет

$$e^{-xi}(\cos x + i \sin x) = 1.$$

Умножая это равенство на e^{xi}, приходим к знаменитой *формуле Эйлера* **)

$$\boxed{e^{xi} = \cos x + i \sin x.} \qquad (27)$$

Эта формула является одной из самых замечательных формул всей математики. Приведем несколько примеров, показывающих, какое громадное идейное богатство содержится в этой формуле.

1) Если в (27) заменить x на $-x$ и учесть, что $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, то мы найдем, что

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x. \qquad (28)$$

Перемножим равенства (27) и (28). Слева получится

$$e^{xi} \cdot e^{-xi} = e^{xi-xi} = e^0 = 1,$$

а справа — произведение суммы на разность, т. е. разность квадратов

$$\cos^2 x - (i \sin x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Стало быть, тригонометрическая формула

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

обычно выводимая из теоремы Пифагора, является немедленным следствием формулы Эйлера.

2) Заменим в (27) x на y и перемножим полученное равенство с (27):

$$e^{xi} \cdot e^{yi} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y).$$

Здесь слева написано $e^{(x+y)i}$, т. е. (на основании формулы Эйлера)

$$\cos(x+y) + i \sin(x+y). \qquad (29)$$

Справа же после раскрытия скобок и замены i^2 на -1 получается

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y). \qquad (30)$$

---

*) Это рассуждение не вполне строго: признак постоянства (как, впрочем, и самое определение производной и правила дифференцирования) был нами установлен лишь для вещественных функций. Можно доказать, однако, что он сохраняется и для функций с комплексными значениями.

**) Другой ее вывод будет дан в гл. XIII, § 1, n° 4.

Два комплексных числа равны друг другу тогда и только тогда, когда равны их вещественные части и равны их мнимые части. Так как (29) и (30) равны друг другу, то

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

Таким образом, теоремы сложения для синуса и косинуса содержатся в формуле Эйлера. Если, в частности, положить $y=x$, то мы получим формулы для синуса и косинуса двойного угла. Иначе можно придти к этим формулам, переписав равенство

$$(e^{xi})^2=e^{2xi}$$

в виде

$$(\cos x+i\sin x)^2=\cos 2x+i\sin 2x$$

и снова приравняв друг другу вещественные части этих чисел, а также их мнимые части.

3) Если n — любое натуральное число, то

$$(e^{xi})^n=e^{nxi},$$

т. е.

$$\boxed{(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx.}$$

Эта формула называется *формулой Моавра.*

4) Для $x=\pi$ формула (27) принимает вид

$$\boxed{e^{\pi i}=-1.} \qquad (31)$$

Это равенство чрезвычайно эффектно! Действительно, ведь три замечательных постоянных e, π, i имеют совершенно различное происхождение: e — основание наипростейшей системы логарифмов, π — отношение длины окружности к длине ее диаметра, а i — квадратный корень из -1. Казалось бы, что эти постоянные не могут быть связаны каким-нибудь соотношением, а на самом деле справедлива изящная формула (31). Но кроме этого, чисто внешнего эффекта, формула (31) имеет и более глубокое значение. Ведь она показывает, что πi — это показатель степени, в которую надо возвести e, чтобы получить -1. Иными словами,

$$\pi i=\ln(-1).$$

А ведь в школьном курсе алгебры утверждается, что о т р и ц а т е л ь н ы е ч и с л а н е и м е ю т л о г а р и ф м о в! Что же, это неверно? Нет, это верно, если искать логарифмы в области в е щ е с т в е н н ы х ч и с е л. Если же перейти в более широкую область комплексных чисел, то там и отрицательные числа обретают логарифмы *).

5) Если в (27) положить $x=2\pi$, то мы получим

$$e^{2\pi i}=1,$$

т. е.

$$2\pi i=\ln 1. \tag{32}$$

Но ведь $\ln 1=0$. Следует ли отсюда, что $2\pi i=0$? Разумеется, нет. Из (32) следует, что, кроме 0, у 1 есть еще один, но уже мнимый логарифм $2\pi i$. Более того, ведь из (27) следует, что при любом целом n будет

$$e^{2n\pi i}=1, \tag{33}$$

т. е.

$$2n\pi i=\ln 1.$$

Значит, у числа 1 не один, а бесконечное множество логарифмов. Этим свойством обладает не только 1, а вообще любое число (кроме нуля, который остается лишенным логарифма даже и после введения комплексных чисел). Если, в частности, A — положительное число и a — его вещественный натуральный логарифм, то

$$e^a=A.$$

Отсюда и из (33) следует, что

$$e^{a+2n\pi i}=A,$$

т. е. логарифм любого $A>0$ бесконечно многозначен. Число a называется его *главным значением*. Обычно только это главное значение обозначается через $\ln A$, а для обозначения всех прочих значений употребляется символ $\operatorname{Ln} A$ (ср. с символами $\arcsin m$ и $\operatorname{Arcsin} m$).

Мы видим, как сильно обогащается теория логарифмов после введения комплексных чисел. Вообще, математика благодаря введению комплексных чисел приобрела ряд глубоких и сильных методов, позволивших решить много важных проблем естествознания. Эти методы изучаются в так называемой теории функций комплексной переменной.

В заключение выведем еще две важные формулы, также принадлежащие Эйлеру.

Если сложить равенства (27) и (28) и результат разделить на 2, то получится

$$\boxed{\cos x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}.} \tag{27*}$$

*) Однако 0 даже и в области комплексных чисел не имеет логарифма.

Если же вычесть (28) из (27) и результат разделить на $2i$, то получится

$$\boxed{\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}.} \qquad (27^{**})$$

n° 6. Случай мнимых корней характеристического уравнения. Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (34)$$

в предположении, что корни соответствующего характеристического уравнения мнимые, т. е.

$$k_{1,2} = a \pm bi. \qquad (35)$$

Тогда у дифференциального уравнения (34) будут два (линейно независимых!) решения:

$$e^{(a+bi)x}, \quad e^{(a-bi)x}.$$

Общее же решение (34) будет иметь вид

$$y = C_1' e^{(a+bi)x} + C_2' e^{(a-bi)x},$$

где C_1' и C_2' — произвольные постоянные *). Отсюда

$$y = e^{ax}(C_1' e^{bxi} + C_2' e^{-bxi}). \qquad (36)$$

Но по формуле Эйлера (27)

$$e^{bxi} = \cos bx + i \sin bx, \quad e^{-bxi} = \cos bx - i \sin bx.$$

Подставляя это в (36), находим

$$y = e^{ax}[C_1'(\cos bx + i \sin bx) + C_2'(\cos bx - i \sin bx)],$$

откуда

$$y = e^{ax}[(C_1' + C_2') \cos bx + i(C_1' - C_2') \sin bx].$$

Положив для краткости $C_1' + C_2' = C_1$, $i(C_1' - C_2') = C_2$, получим окончательно

$$\boxed{y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).} \qquad (37)$$

Замечания. 1) Не следует думать, что C_2 обязательно мнимое число из-за того, что $C_2 = i(C_1' - C_2')$. Ведь C_1' и C_2' сами были произвольными постоянными, которые мы могли брать мнимыми. Взяв,

*) Мы обозначаем их через C_1' и C_2' потому, что резервируем буквы C_1 и C_2 для обозначения других постоянных, которые введем позже.

например, $C_1' = 5i$, $C_2' = 8i$, найдем

$$C_2 = i(5i - 8i) = 3.$$

Надо помнить, что C_1 и C_2 — совершенно произвольные постоянные. В частности, мы могли бы придать им и мнимые значения, но обычно этого не делают, поскольку рассматривают уравнения с вещественными коэффициентами.

2) Следует помнить окончательный вид решения дифференциального уравнения (34), даваемый формулой (37). Сопоставляя (37) с (35), мы видим, что решение (37) состоит из двух сомножителей: показательного, который полностью определяется вещественной частью корней характеристического уравнения, и тригонометрического, полностью определяемого мнимой частью упомянутых корней.

Примеры. 1) $y'' - 6y' + 25y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 6k + 25 = 0$. Его корни $k_{1,2} = 3 \pm 4i$ и общим решением будет

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

2) $y'' + 25y = 0$. Решая характеристическое уравнение $k^2 + 25 = 0$, находим $k_{1,2} = \pm 5i$, откуда

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x.$$

3) $y''' - 10y'' + 41y' = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^3 - 10k^2 + 41k = 0$. Его корни $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 5 \pm 4i$ и решением дифференциального уравнения является

$$y = C_1 + e^{5x}(C_2 \cos 4x + C_3 \sin 4x).$$

4) $y^{(4)} - 16y = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $k^4 - 16 = 0$ или $(k^2 + 4)(k^2 - 4) = 0$. Его корни $k_{1,2} = \pm 2i$, $k_{3,4} = \pm 2$. Значит, решением дифференциального уравнения служит

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

n° 7. Уравнение Эйлера. Мы рассмотрели только один тип однородных линейных уравнений: уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения с переменными коэффициентами представляют, вообще говоря, гораздо бóльшие трудности. Остановимся на одном виде таких уравнений, решающихся так же просто, как и уравнения с постоянными коэффициентами. Это дифференциальные уравнения

$$\boxed{x^2y'' + pxy' + qy = 0,} \tag{38}$$

где p и q — постоянные. Уравнения (38) называются *уравнениями Эйлера*.

Идея разыскания решения дифференциального уравнения (38) сходна с примененной для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. У этих последних решение должно было быть подобно своим производным. У дифференциального уравнения (38) производные y' и y'' должны становиться подобными y после умножения соответственно на x и x^2.

Таким свойством обладает функция $y=x^k$. Подставляя ее в левую часть (38), найдем

$$x^k\,[k\,(k-1)+pk+q].$$

Чтобы это выражение было тождественным нулем, надо, чтобы k было корнем квадратного уравнения

$$k\,(k-1)+pk+q=0, \tag{39}$$

являющегося аналогом характеристического уравнения. Если (39) имеет различные вещественные корни $k_1=a$, $k_2=b$, то общее решение (38) таково:

$$y=C_1x^a+C_2x^b. \tag{40}$$

Если корни (39) имеют вид $k_{1,2}=a\pm bi$, то вместо (40) имеем

$$y=C_1'x^{a+bi}+C_2'x^{a-bi}=x^a\,(C_1'x^{bi}+C_2'x^{-bi}), \tag{41}$$

где C_1', C_2' — произвольные постоянные. Так как $x=e^{\ln x}$, то

$$x^{bi}=e^{(b\ln x)\,i}=\cos(b\ln x)+i\sin(b\ln x),$$
$$x^{-bi}=e^{-(b\ln x)\,i}=\cos(b\ln x)-i\sin(b\ln x).$$

Подставляя в (41) и меняя обозначения постоянных, находим

$$y=x^a\,[C_1\cos(b\ln x)+C_2\sin(b\ln x)].$$

Наконец, если у (39) есть только один корень $k=a$, то надо рассмотреть уравнение (38) как предельное при $\Delta a\to 0$ для уравнения с решениями

$$y_1=x^a,\quad y_2=x^{a+\Delta a}.$$

У последнего уравнения решением будет и функция

$$\frac{x^{a+\Delta a}-x^a}{\Delta a}.$$

Стало быть, решением уравнения (38) в интересующем нас случае будет

$$\lim_{\Delta a\to 0}\frac{x^{a+\Delta a}-x^a}{\Delta a}=\frac{\partial\,(x^a)}{\partial a}=x^a\ln x.$$

Отсюда общее решение (38) будет

$$y=C_1x^a+C_2x^a\ln x.$$

П р и м е р ы. 1) $x^2y''-8xy'+20y=0$. Здесь уравнение (39) имеет вид $k\,(k-1)-8k+20=0$, т. е. $k^2-9k+20=0$. Его корни $k_1=4$, $k_2=5$ и общее решение нашего дифференциального уравнения

$$y=C_1x^4+C_2x^5.$$

2) $x^2y''-3xy'+4y=0$. Уравнение (39) будет $k^2-4k+4=0$ с единственным корнем $k=2$. Значит, общее решение нашего дифференциального уравнения

$$y=C_1x^2+C_2x^2\ln x.$$

3) $x^2y''-xy'+2y=0$. Уравнение (39) будет $k^2-2k+2=0$. Его корни мнимы и равны $k_{1,2}=1\pm i$. Значит, общее решение нашего дифференциального уравнения

$$y=x\,(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x).$$

З а м е ч а н и е. Вместо того чтобы изучать дифференциальное уравнение (38) самостоятельно, можно свести его к уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $x=e^z$. Мы не будем останавливаться на этом.

n°8. Структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения. Перейдем теперь к неоднородному линейному дифференциальному уравнению

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).} \tag{42}$$

Условимся однородное линейное уравнение с той же левой частью, т. е. уравнение

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = 0} \tag{43}$$

называть *сопровождающим* для дифференциального уравнения (42).

Теорема. Если $\tilde{y}$ — *какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения* (42), *а* y_0 — *общее решение его сопровождающего уравнения* (43), *то сумма их*

$$\boxed{y = y_0 + \tilde{y}} \tag{44}$$

будет общим решением дифференциального уравнения (42).

Доказательство. Подставим функцию (44) в левую часть уравнения (42). В результате получим

$$y_0'' + \tilde{y}'' + p(x)[y_0' + \tilde{y}'] + q(x)[y_0 + \tilde{y}]$$

или, что то же самое,

$$[y_0'' + p(x)y_0' + q(x)y_0] + [\tilde{y}'' + p(x)\tilde{y}' + q(x)\tilde{y}].$$

Так как y_0 — решение (42), то в первых квадратных скобках стоит 0. Во вторых же скобках стоит $f(x)$. Стало быть, функция (44) действительно является решением дифференциального уравнения. То, что это решение общее, вытекает из того, что оно зависит от тех двух произвольных постоянных, которые входят в состав y_0. Теорема доказана.

Эта теорема сводит задачу нахождения общего решения дифференциального уравнения (42) к двум более простым задачам: 1) нахождению частного решения дифференциального уравнения (42) и 2) нахождению общего решения сопровождающего уравнения (43).

Вторую из этих задач мы умеем решать для случая, когда коэффициенты уравнения $p(x)$ и $p(x)$ постоянны*). Займемся же для этого случая и первой из указанных задач.

---

*) А также для уравнения Эйлера.

n° 9. Нахождение частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения для некоторых видов свободного члена. Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где p и q — постоянные, для некоторых видов свободного члена $f(x)$.

В дальнейшем будем употреблять символы $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ для обозначения многочленов степени n:

$$P_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + K,$$

$$Q_n(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + k.$$

I. $$\boxed{f(x) = P_n(x).}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = x^3 - 2. \tag{45}$$

Нетрудно понять, что его решением не может быть функция вида $y = \sin x$, $y = \ln x$, $y = \sqrt{x}$ или $y = e^x$, ибо все эти функции, будучи подставлены в левую часть уравнения, никак не превратят ее в $x^3 - 2$. Напротив, функция вида

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{46}$$

будучи подставлена в левую часть (45), превращает ее в многочлен 3-й степени. Постараемся же подобрать коэффициенты a, b, c, d так, чтобы функция (46) удовлетворяла уравнению (45).

Из (46) следует, что

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y'' = 6ax + 2b.$$

Значит, результат подстановки функции (46) в левую часть (45) имеет вид

$$6ax + 2b - 2(3ax^2 + 2bx + c) + ax^3 + bx^2 + cx + d. \tag{47}$$

Чтобы это выражение было тождественно с $x^3 - 2$, надо чтобы коэффициенты при всех степенях x в (47) совпадали с коэффициентами при тех же степенях в $x^3 - 2$, т. е. чтобы было

$$\begin{array}{r|l} x^3 & a = 1, \\ x^2 & b - 6a = 0, \\ x & c - 4b + 6a = 0, \\ 1 & d - 2c + 2b = -2. \end{array}$$

Из этих соотношений находим

$$a = 1, \; b = 6, \quad c = 18, \; d = 22.$$

Стало быть, функция

$$\tilde{y}=x^3+6x^2+18x+22$$

будет частным решением дифференциального уравнения (45). Сопровождающее уравнение для (45) имеет вид

$$y''-2y'+y=0. \tag{48}$$

Его характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет равные корни $k_{1,2}=1$ и потому общее решение (48) есть

$$y_0=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Согласно теореме п° 8 общее решение исходного дифференциального уравнения (45) таково:

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+x^3+6x^2+18x+22.$$

Рассмотренный пример наводит на мысль, что частное решение дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=P_n(x)$$

всегда следует искать в виде $\tilde{y}=Q_n(x)$, т. е. в виде многочлена той же степени, что и правая часть дифференциального уравнения. Это, однако, не так. В самом деле, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''-2y'=12x^2+16x+8. \tag{49}$$

Ясно, что при y, равном многочлену второй степени, левая часть (49) будет многочленом только первой степени и не сможет оказаться тождественной правой части. Чтобы левая часть (49) была многочленом второй степени, надо за y взять многочлен третьей степени

$$y=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Сделав это и подставив y в левую часть (49), надо будет приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного равенства и найти отсюда a, b, c, d. Еще до проведения этой программы ясно, что коэффициента d нам не найти, ибо он вообще не войдет в левую часть (49). Иными словами, этот коэффициент есть произвольная постоянная, которую можно взять по желанию. Так как сейчас мы ищем лишь частное решение дифференциального уравнения (49), то проще всего взять $d=0$, т. е. искать решение в виде

$$\tilde{y}=ax^3+bx^2+cx.$$

Находя $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ и подставляя в (49), получим

$$6ax+2b-2(3ax^2+2bx+c)=12x^2+16x+8.$$

Приравнивая коэффициенты, находим

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -6a=12, \\ x & -4b+6a=16, \\ 1 & -2c+2b=8, \end{array}$$

откуда $a=-2$, $b=-7$, $c=-11$. Значит,

$$\tilde{y}=-2x^3-7x^2-11x.$$

Общее решение сопровождающего уравнения

$$y''-2y'=0$$

имеет вид

$$y_0=C_1+C_2e^{2x}.$$

Сумма *) $y_0+\tilde{y}$ будет общим решением (49).

Если в дифференциальном уравнении

$$y''+py'+qy=P_n(x) \tag{50}$$

будет не только $q=0$, но и $p=0$, то частное решение придется искать в виде

$$\tilde{y}=Q_{n+2}(x),$$

что видно из соображений, подобных только что изложенным. Более того, ни свободный член многочлена $Q_{n+2}(x)$, ни коэффициент при x в левую часть (50) не войдут и потому являются произвольными постоянными. Поскольку мы сейчас интересуемся лишь частным решением дифференциального уравнения (50), то возьмем за значения этих постоянных нули, т. е. положим

$$\tilde{y}=ax^{n+2}+bx^{n+1}+\ldots+kx^3+lx^2.$$

Иными словами, мы будем искать $\tilde{y}$ в виде

$$\tilde{y}=x^2Q_n(x).$$

Все сказанное можно резюмировать следующим образом:

Правило I. *Частное решение $\tilde{y}$ уравнения*

$$y''+py'+qy=P_n(x) \tag{50}$$

надо искать в виде

$$\tilde{y}=\begin{cases} Q_n(x), & \textit{если } q\neq 0, \\ xQ_n(x), & \textit{если } q=0,\ p\neq 0, \\ x^2Q_n(x), & \textit{если } q=p=0. \end{cases}$$

*) Слагаемое C_1 представляет собой упомянутый выше коэффициент d.

Во всех случаях за $Q_n(x)$ надо взять многочлен с буквенными коэффициентами, которые находятся после подстановки $\tilde{y}$ в уравнение.

Это правило применимо и тогда, когда мы имеем дело с уравнением и более высокого порядка.

Пример. $y^{(4)}+y'''=12$. Согласно правилу I надо взять $Q_n(x)=a$, т. е. положить

$$\tilde{y}=ax^3.$$

Тогда $\tilde{y}'=3ax^2$, $\tilde{y}''=6ax$, $\tilde{y}'''=6a$, $\tilde{y}^{(4)}=0$ и подстановка в уравнение дает $6a=12$, откуда $a=2$, т. е. $\tilde{y}=2x^3$.

Сопровождающее уравнение имеет вид

$$y^{(4)}+y'''=0.$$

Здесь характеристическое уравнение $k^4+k^3=0$ имеет корни $k_{1,2,3}=0$ (этот корень заменяет три корня и потому называется *тройным*) и $k_4=-1$. Значит,

$$y_0=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}.$$

Общее решение нашего дифференциального уравнения есть

$$y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+2x^3.$$

Рассмотрим теперь более общий вид свободного члена

II. $$\boxed{f(x)=e^{ax}P_n(x).}$$

Рассмотренный выше случай $f(x)=P_n(x)$ получается отсюда при $a=0$.

Для решения дифференциального уравнения

$$y''+py'+qy=e^{ax}P_n(x) \tag{51}$$

применим подстановку

$$y=e^{ax}z,$$

где z — новая неизвестная функция. Так как

$$y'=ae^{ax}z+e^{ax}z', \quad y''=a^2e^{ax}z+2ae^{ax}z'+e^{ax}z'',$$

то в результате нашей подстановки (после сокращения на e^{ax}) уравнение (51) примет вид

$$z''+(2a+p)z'+(a^2+pa+q)z=P_n(x). \tag{52}$$

Но ведь это уравнение вида (50) и к нему применимо правило I. Значит, частное решение $\tilde{z}$ уравнения (52) надо искать в виде

$$\tilde{z}=\begin{cases} Q_n(x), & \text{если } \alpha^2+p\alpha+q\neq 0, \\ xQ_n(x), & \text{если } \alpha^2+p\alpha+q=0,\ 2\alpha+p\neq 0, \\ x^2Q_n(x), & \text{если } \alpha^2+p\alpha+q=0,\ 2\alpha+p=0. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что соотношение

$$\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$$

означает, что число α — не корень характеристического уравнения

$$k^2+pk+q=0. \tag{53}$$

Соотношение же $\alpha^2+p\alpha+q=0$ означает, что α — корень этого уравнения, т. е. что

$$\alpha=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{или} \quad \alpha=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}.$$

Если

$$\frac{p^2}{4}\neq q,$$

то оба корня характеристического уравнения (53) различны и ни один из них не равен числу $-\frac{p}{2}$. Значит, и

$$\alpha\neq-\frac{p}{2},$$

т. е.

$$2\alpha+p\neq 0.$$

Напротив, если α — корень уравнения (53) и $2\alpha+p=0$, то обязательно $\frac{p^2}{4}=q$ и α — *двойной* корень упомянутого уравнения.

Сопоставляя все сказанное и учитывая, что $\tilde{y}=e^{\alpha x}z$, мы получаем

Правило II. *Частное решение $\tilde{y}$ уравнения*

$$y''+py'+qy=e^{\alpha x}P_n(x) \tag{50}$$

надо искать в виде

$$\tilde{y}=\begin{cases} e^{\alpha x}Q_n(x), & \textit{если } \alpha \textit{ — не корень характеристического уравнения}, \\ e^{\alpha x}xQ_n(x), & \textit{если } \alpha \textit{ — простой корень характеристического уравнения}, \\ e^{\alpha x}x^2Q_n(x), & \textit{если } \alpha \textit{ — двойной корень характеристического уравнения}. \end{cases}$$

Во всех случаях за $Q_n(x)$ надо взять многочлен с буквенными коэффициентами, которые определятся после подстановки $\tilde{y}$ в уравнение. Примеры. 1) $y'' - 2y' + y = e^{3x}x$. Здесь корни характеристического уравнения $k_{1,2} = 1$. Так как $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$\tilde{y} = e^{3x}(ax + b).$$

Отсюда $\tilde{y}' = 3e^{3x}(ax + b) + e^{3x}a$, $\tilde{y}'' = 9e^{3x}(ax + b) + 6e^{3x}a$ и подстановка $\tilde{y}$ в уравнение дает (после сокращения на e^{3x})

$$9(ax + b) + 6a - 2[3(ax + b) + a] + ax + b = x,$$

т. е.

$$4(ax + b) + 4a = x.$$

Приравнивая коэффициенты, находим: $4a = 1$, $4b + 4a = 0$. Стало быть, $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ и

$$\tilde{y} = \frac{e^{3x}}{4}(x - 1).$$

Так как корни характеристического уравнения $k_{1,2} = 1$, то общее решение сопровождающего уравнения будет

$$y_0 = C_1e^x + C_2xe^x,$$

а общее решение интересующего нас уравнения

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{e^{3x}}{4}(x - 1).$$

2) $y'' - y = 2e^x$. Здесь корни характеристического уравнения $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Так как $\alpha = 1$ совпадает с одним (но не с обоими!) из этих чисел, то α — простой корень характеристического уравнения. Поэтому

$$\tilde{y} = e^xxa,$$

где a — неизвестная постоянная (ведь у нас $P_n(x) = 2$, т. е. $P_n(x)$ — многочлен нулевой степени). Тогда

$$\tilde{y}' = ae^x + axe^x, \quad \tilde{y}'' = 2ae^x + axe^x$$

и подстановка $\tilde{y}$ в дифференциальное уравнение дает (после сокращения на e^x) $2a = 2$. Отсюда $a = 1$, $\tilde{y} = xe^x$ и, так как $y_0 = C_1e^x + C_2e^{-x}$, то

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x.$$

3) $y'' - 2y' + y = xe^x$. Здесь $k_{1,2} = 1$ и потому $\alpha = 1$ — двойной корень характеристического уравнения. Значит,

$$\tilde{y} = e^xx^2(ax + b) = e^x(ax^3 + bx^2).$$

Отсюда

$$\tilde{y}' = e^x(ax^3 + bx^2) + e^x(3ax^2 + 2bx),$$
$$\tilde{y}'' = e^x(ax^3 + bx^2) + 2e^x(3ax^2 + 2bx) + e^x(6ax + 2b).$$

Подставляя эти выражения $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в дифференциальное уравнение и сокращая на e^x, находим

$$ax^3 + bx^2 + 2(3ax^2 + 2bx) + (6ax + 2b) - \\ - 2[(ax^3 + bx^2) + (3ax^2 + 2bx)] + ax^3 + bx^2 = x$$

или

$$6ax + 2b = x.$$

Значит, $6a = 1$, $2b = 0$, т. е. $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$ и

$$\tilde{y} = \frac{x^3}{6}e^x.$$

Окончательно

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{x^3}{6}e^x.$$

III. Принцип наложения.

Теорема. *Если y_1 — решение дифференциального уравнения*

$$y'' + py' + qy = f_1(x), \tag{54}$$

а y_2 — решение дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = f_2(x), \tag{55}$$

имеющего ту же левую часть, что и (54), *то сумма $y_1 + y_2$ является решением дифференциального уравнения*

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x), \tag{56}$$

имеющего ту же левую часть, что и (54) *и* (55), *а правая часть которого равна сумме правых частей этих уравнений.*

В силу некоторых механических соображений *) эта теорема называется „принципом наложения". Доказательство этого принципа не вызывает затруднений. Действительно, результат подстановки суммы $y_1 + y_2$ в левую часть (56) имеет вид

$$(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2)$$

или, что то же самое,

$$(y_1'' + py_1' + qy_1) + (y_2'' + py_2' + qy_2).$$

Но так как y_1 — решение уравнения (54), то выражение в первых скобках тождественно равно $f_1(x)$. По аналогичной причине выражение во вторых скобках тождественно равно $f_2(x)$. Остальное ясно **).

---

*) Они будут изложены ниже.

**) Из проведенного рассуждения видно, что теорема верна и тогда, когда коэффициенты p и q зависят от x.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 5 + e^x.$$

Согласно принципу наложения надо решить два уравнения:

$$y'' - 3y' + 2y = 5, \quad y'' - 3y' + 2y = e^x. \tag{57}$$

Все эти уравнения имеют одно и то же сопровождающее уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение будет $k^2 - 3k + 2 = 0$ и корни его $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Значит,

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Частное решение первого из уравнений (57) будет

$$\tilde{y}_1 = a.$$

Подстановка в уравнение дает $2a = 5$ и $a = \frac{5}{2}$. Значит,

$$\tilde{y}_1 = \frac{5}{2}.$$

Частное решение второго из уравнений (57) будет

$$\tilde{y}_2 = axe^x.$$

Отсюда

$$\tilde{y}_2' = ae^x + axe^x, \quad \tilde{y}_2'' = 2ae^x + axe^x$$

и подстановка $\tilde{y}_2$ в уравнение дает (по сокращении на e^x)

$$2a + ax - 3(a + ax) + 2ax = 1,$$

откуда $a = -1$. Стало быть,

$$\tilde{y}_2 = -xe^x.$$

Окончательно

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{2} - xe^x.$$

IV. $\boxed{f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x.}$

В теории колебаний весьма важны уравнения, свободный член которых имеет указанный здесь вид.

Для решения таких уравнений используем формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i},$$

выведенные в п° 5. При помощи этих формул дифференциальнее уравнение

$$y'' + py' + qy = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

можно переписать так:

$$y'' + py' + qy = A\frac{e^{\omega xi} + e^{-\omega xi}}{2} + B\frac{e^{\omega xi} - e^{-\omega xi}}{2i} \tag{58}$$

или

$$y'' + py' + qy = A_1 e^{\omega xi} + B_1 e^{-\omega xi},$$

где положено для краткости

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2i} = A_1, \quad \frac{A}{2} - \frac{B}{2i} = B_1.$$

Согласно принципу наложения решение нашего дифференциального уравнения является суммой решений уравнений

$$y'' + py' + qy = A_1 e^{\omega xi}, \quad y'' + py' + qy = B_1 e^{-\omega xi}. \tag{59}$$

Частное решение первого из этих уравнений имеет вид

$$\tilde{y}_1 = \begin{cases} Me^{\omega xi}, & \text{если } \omega i \text{ — не корень характеристического уравнения,} \\ Mxe^{\omega xi}, & \text{если } \omega i \text{ — корень характеристического уравнения.} \end{cases}$$

Важно, что мнимое число ωi не может быть двойным корнем квадратного уравнения

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{60}$$

коэффициенты p и q которого вещественны.

Точно так же частное решение $\tilde{y}_2$ второго из уравнений (59) будет

$$\tilde{y}_2 = \begin{cases} Ne^{-\omega xi}, & \text{если } -\omega i \text{ — не корень характеристического уравнения,} \\ Nxe^{-\omega xi}, & \text{если } -\omega i \text{ — корень характеристического уравнения.} \end{cases}$$

Но ведь числа ωi и $-\omega i$ либо оба будут корнями уравнения (60), либо оба не будут его корнями. Стало быть, частное решение уравнения (58) будет

$$\tilde{y} = \begin{cases} Me^{\omega xi} + Ne^{-\omega xi}, & \text{если } \pm\omega i \text{ — не корни характеристического уравнения,} \\ x(Me^{\omega xi} + Ne^{-\omega xi}), & \text{если } \pm\omega i \text{ — корни характеристического уравнения.} \end{cases}$$

По формуле Эйлера

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x$$

будет

$$Me^{\omega xi}+Ne^{-\omega xi}=(M+N)\cos\omega x+i(M-N)\sin\omega x.$$

Полагая для краткости

$$M+N=a, \quad i(M-N)=b,$$

получаем

Правило III. *Частное решение $\tilde{y}$ уравнения*

$$y''+py'+qy=A\cos\omega x+B\sin\omega x \tag{61}$$

надо искать в виде

$$\tilde{y}=\begin{cases} a\cos\omega x+b\sin\omega x, & \text{если } \omega i \text{ — не корень характеристического уравнения,}\\ x(a\cos\omega x+b\sin\omega x), & \text{если } \omega i \text{ — корень характеристического уравнения.}\end{cases}$$

Числа a и b определятся после подстановки $\tilde{y}$ в уравнение.

Примеры. 1) $y''+4y'+13y=80\cos 3x$. Характеристическое уравнение $k^2+4k+13=0$ имеет корни $k_{1,2}=-2\pm 3i$ и потому $y_0=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. Так как $\omega i=3i$ не является корнем характеристического уравнения, то *)

$$\tilde{y}=a\cos 3x+b\sin 3x.$$

Тогда

$$\tilde{y}'=-3a\sin 3x+3b\cos 3x, \quad \tilde{y}''=-9a\cos 3x-9b\sin 3x.$$

Подстановка $\tilde{y}$ в дифференциальное уравнение дает

$$-9a\cos 3x-9b\sin 3x+4(-3a\sin 3x+3b\cos 3x)+$$
$$+13(a\cos 3x+b\sin 3x)=80\cos 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$, находим

$$4a+12b=80, \quad -12a+4b=0.$$

Отсюда $a=2$, $b=6$ и

$$\tilde{y}=2\cos 3x+6\sin 3x.$$

Общее решение, как всегда, есть сумма $y=y_0+\tilde{y}$.

2) $y''+9y=6\cos 3x-30\sin 3x$. Здесь корни характеристического уравнения $k_{1,2}=\pm 3i$, т. е. $\omega i=3i$ является корнем характеристического уравнения. Значит,

$$\tilde{y}=(a\cos 3x+b\sin 3x)x.$$

---

*) Предостерегаем читателя от распространенной ошибки. В правой части дифференциального уравнения нет члена $B\sin\omega x$. Не следует думать, что и в решении такой член должен отсутствовать. Ведь b не обязано равняться B, и потому из того, что $B=0$, не вытекает, что и $b=0$.

Отсюда

$$\tilde{y}' = 3(-a \sin 3x + b \cos 3x)\,x + (a \cos 3x + b \sin 3x),$$

$$\tilde{y}'' = -9(a \cos 3x + b \sin 3x)\,x + 6(-a \sin 3x + b \cos 3x).$$

Подстановка в дифференциальное уравнение дает

$$6(-a \sin 3x + b \cos 3x) = 6 \cos 3x - 30 \sin 3x.$$

Сравнивая коэффициенты, находим $a = 5$, $b = 1$, откуда

$$\tilde{y} = x(5 \cos 3x + \sin 3x).$$

3) $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$. Для решения этого уравнения надо применить принцип наложения и решить два других уравнения:

$$y'' + 4y = \sin 2x, \qquad y'' + 4y = \cos 7x.$$

Для первого из них

$$\tilde{y}_1 = x(a_1 \cos 2x + b_1 \sin 2x),$$

а для второго

$$\tilde{y}_2 = a_2 \cos 7x + b_2 \sin 7x.$$

Дальнейшее предоставляем читателю.

n° 10. Метод вариации произвольных постоянных. Мы научились решать неоднородные линейные дифференциальные уравнения лишь для некоторых простейших видов свободного члена (и притом только для случая дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами!). Лагранжу принадлежит общий метод нахождения решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений, применимый всякий раз, когда известно решение сопровождающего однородного дифференциального уравнения*). Этот метод называется *методом вариации произвольных постоянных*. Мы изложим его для дифференциального уравнения 2-го порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x) \tag{62}$$

и сопровождающее его однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \tag{63}$$

Пусть y_1 и y_2 — два линейно независимых решения уравнения (63). Тогда общее решение этого дифференциального уравнения

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{64}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Постараемся подобрать такие две функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$, чтобы при замене C_1 на $C_1(x)$ и C_2 на $C_2(x)$ выражение (64) удовлетворило бы интересующему нас неоднородному уравнению (62). Так как искомых функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ две, а мы наложили на них лишь одно требование: чтобы (64) было решением (62), то можно подчинить $C_1(x)$ и $C_2(x)$ еще одному условию. За такое условие

---

*) Таким образом, метод Лагранжа заведомо применим к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами (а также к уравнениям $x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$, у которых сопровождающее дифференциальное уравнение представляет собой уравнение Эйлера).

принимается требование: *производная* y' *выражения* (64) *должна выглядеть так, как если бы* $C_1(x)$ и $C_2(x)$ *были постоянны,* т. е. чтобы было

$$y' = C_1(x)\,y_1' + C_2(x)\,y_2'. \tag{65}$$

Так как на самом деле $C_1(x)$ и $C_2(x)$ не постоянны, а функции от x, то

$$y' = C_1'(x)\,y_1 + C_1(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2 + C_2(x)\,y_2'.$$

Значит, условие (65) можно записать в виде

$$C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 = 0. \tag{66}$$

Из (65) вытекает, что

$$y'' = C_1'(x)\,y_1' + C_1(x)\,y_1'' + C_2'(x)\,y_2' + C_2(x)\,y_2''. \tag{67}$$

Подставляя (64), (65) и (67) в левую часть (62), получим

$$C_1(x)\,[y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1] + C_2(x)\,[y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2] + \\ + C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2'.$$

Так как y_1 и y_2 — решения дифференциального уравнения (63), то выражения, стоящие в квадратных скобках, тождественно равны нулю. Стало быть, результат подстановки (64) в левую часть (62) имеет вид

$$C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2', \tag{68}$$

и, чтобы (64) было решением дифференциального уравнения (62), надо приравнять (68) функции $f(x)$. Таким образом, $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ находятся из системы уравнений

$$\boxed{\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= f(x). \end{aligned}} \tag{69}$$

Найдя C_1' и C_2' и интегрируя их, найдем и самые $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Примеры. 1) $y'' - y = 6e^{2x}$. Общее решение сопровождающего дифференциального уравнения

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Система (69) в нашем случае имеет вид

$$C_1'e^x + C_2'e^{-x} = 0, \quad C_1'e^x - C_2'e^{-x} = 6e^{2x}.$$

Отсюда

$$C_1' = 3e^x, \quad C_2' = -3e^{3x}.$$

Но тогда

$$C_1(x) = 3e^x + C_1, \quad C_2(x) = -e^{3x} + C_2$$

и, стало быть,

$$y = (3e^x + C_1)\,e^x + (-e^{3x} + C_2)\,e^{-x} = 2e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

Здесь написано общее решение нашего дифференциального уравнения.

2) Предшествующий пример мало интересен, так как мы могли бы решить его и не прибегая к методу Лагранжа. Иначе обстоит дело в примере

$$y'' + y = \frac{\sin x\,(2 + \cos^2 x)}{\cos^3 x}.$$

Здесь общее решение сопровождающего дифференциального уравнения

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{70}$$

Значит, система (69) такова:

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0,$$
$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{\sin x\,(2+\cos^2 x)}{\cos^3 x}.$$

Решая эту систему, находим

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x\,(2+\cos^2 x)}{\cos^2 x}, \quad C_2' = \frac{\sin x\,(2+\cos^2 x)}{\cos^2 x}.$$

Отсюда

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x\,(2+\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,dx, \quad C_2(x) = \int \left(\frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \sin x\right) dx.$$

Второй интеграл вычисляется сразу:

$$C_2(x) = \frac{2}{\cos x} - \cos x + C_2.$$

Первый интеграл перепишем иначе:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x\,(3-\sin^2 x)}{\cos^4 x}\, d(\sin x).$$

Подстановка $\sin x = z$ дает

$$C_1(x) = \frac{(z^2-3)\,z^2\,dz}{(z^2-1)^2}.$$

Выделяя из подынтегральной дроби целую часть, находим

$$\begin{array}{l|l} z^4-3z^2 & z^4-2z^2+1\,; \\ \underline{z^4-2z^2+1} & 1 \\ -z^2-1 & \end{array} \qquad \frac{z^4-3z^2}{(z^2-1)^2} = 1 - \frac{z^2+1}{(z^2-1)^2}.$$

Стало быть,

$$C_1(x) = \sin x - \int \frac{z^2+1}{(z^2-1)^2}\,dz \qquad (z = \sin x).$$

Разлагая дробь на простые, получим

$$\frac{z^2+1}{(z^2-1)^2} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z+1)^2} + \frac{D}{z+1}.$$

Отсюда

$$z^2+1 = A(z+1)^2 + B(z+1)^2(z-1) + C(z-1)^2 + D(z-1)^2(z+1).$$

Полагая $z = \pm 1$, найдем $A = C = \frac{1}{2}$. Сравнение коэффициентов при z^2 и z^0 дает

$$B + D = 0, \quad A - B + C + D = 1, \text{ откуда } B = D = 0.$$

Значит,

$$C_1(x) = \sin x - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z-1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{(z+1)^2} =$$
$$= \sin x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) + C_1,$$

или

$$C_1(x) = \sin x + \frac{z}{z^2-1} + C_1 = \sin x - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + C_1.$$

Подставляя $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (70), найдем

$$y=\left(\sin x-\frac{\sin x}{\cos^2 x}+C_1\right)\cos x+\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x+C_2\right)\sin x$$

и окончательно

$$y=\operatorname{tg} x+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

3)
$$x^2y''-2xy'+2y=2x^2. \tag{71}$$

Сопровождающее дифференциальное уравнение есть уравнение Эйлера. Его общее решение

$$y=C_1x+C_2x^2.$$

Значит, система (69) имеет вид

$$C_1'x+C_2'x^2=0, \qquad C_1'+C_2'2x=2x^2.$$

Умножим второе уравнение на x и из результата вычтем первое. Это дает $C_2'x^2=2x^4$. Значит, $C_2'=2x^2$ и $C_1'=-2x^3$. Отсюда $C_1(x)=-\frac{x^4}{2}+C_1$, $C_2(x)=\frac{2x^3}{3}+C_2$ и

$$y=\left(-\frac{x^4}{2}+C_1\right)x+\left(\frac{2x^3}{3}+C_2\right)x^2=\frac{x^5}{6}+C_1x+C_2x^2.$$

Подставляя y в (71), мы немедленно убеждаемся, что тождества не получаем! В чем же ошибка? Ошибка заключается в том, что вся теория изложена нами для уравнения, у которого коэффициент при y'' равен 1, а в дифференциальном уравнении (71) этот коэффициент равен x^2. Значит, до составления системы (69) надо было разделить наше уравнение на x^2. Тогда свободный член уравнения превращается в $2x$, и потому система (69) будет такова:

$$C_1'x+C_2'x^2=0, \qquad C_1'+C_2'2x=2x.$$

Решая эту систему, находим: $C_1'=-2x$, $C_2'=2$. Отсюда $C_1(x)=-x^2+C_1$, $C_2(x)=2x+C_2$ и

$$y=(-x^2+C_1)x+(2x+C_2)x^2=x^3+C_1x+C_2x^2.$$

Сделанную выше ошибку учащиеся допускают довольно часто.

§ 4. Элементы теории колебаний

n° 1. Гармонические колебания. Теория линейных дифференциальных уравнений находит важные применения при исследовании колебаний упругих систем. В этом параграфе мы изложим простейшие сведения из этой области.

Начнем с выяснения некоторых кинематических понятий. Пусть (рис. 332) точка P равномерно движется по окружности радиуса A, а точка Q является проекцией точки P на некоторый закрепленный диаметр упомянутой окружности. Изучим движение точки Q. Для этого возьмем начало координат O в центре окружности и направим ось Ox по тому диаметру, по которому движется точка Q. Пусть в начальный момент $t=0$ радиус OP образует угол α с осью Ox и пусть скорость вращения этого радиуса (т. е. угол, на который радиус поворачивается за единицу времени) равна ω. Тогда за время t радиус повернется на угол ωt и в момент t (т. е. в момент, отделенный от начального момента промежутком времени в t единиц) радиус OP составит с осью Ox угол $\alpha+\omega t$. Отсюда следует (рис. 332), что абсцисса x точки P (и точки Q!) в момент t равна

$$\boxed{x=A\cos(\omega t+\alpha).} \tag{1}$$

Непосредственно ясно, что точка Q совершает по оси Ox колебательное движение. Это колебание называется *гармоническим*. Величина A называется *амплитудой* колебания (1), а угол α — его *начальной фазой*. Коэффициент ω называется *частотой* колебания (1). Это название очень удачно. Действительно, если ω велико, то точка P быстро движется по окружности, а ее проекция Q быстро совершает свои колебания. Наконец, отношение

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

называется *периодом* колебания. Это время, за которое точка P совершает один оборот, т. е. время, за которое точка Q совершает одно колебание. Чем больше T, тем меньше ω и тем медленнее движутся точки P и Q.

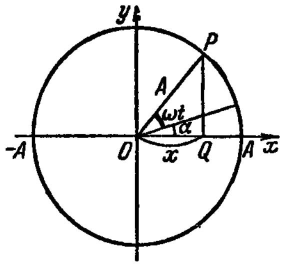


Рис. 332.

Гармоническое колебание (1) часто задают таким уравнением:

$$\boxed{x=M\cos\omega t+N\sin\omega t.} \tag{2}$$

Чтобы привести (2) к виду (1), надо взять на плоскости точку с координатами $(M, -N)$. Пусть A и α — полярные координаты этой точки. Тогда

$$M=A\cos\alpha, \quad N=-A\sin\alpha,$$

и потому (2) принимает вид

$$x=A(\cos\alpha\cos\omega t-\sin\alpha\sin\omega t),$$

что равносильно (1). Из этого видно, что амплитуда A гармонического колебания, заданного в форме (2),

$$A=\sqrt{M^2+N^2} \tag{3}$$

и что начальная фаза α также определяется числами M и N.

n°2. Свободные колебания материальной точки. Пусть материальная точка M движется по оси Ox под действием силы F, притягивающей точку M к началу координат O, причем величина F этой силы пропорциональна расстоянию OM

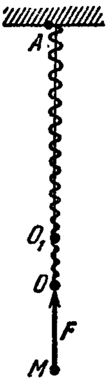


Рис. 333.

$$F=c\cdot OM. \tag{4}$$

Сила F как бы стремится восстановить равновесие, наступающее, когда точка M (не имея скорости!) находится в начале координат O. По этой причине F называют «восстанавливающей силой».

Ситуация, подобная рассмотренной, имеет место при подвешивании некоторого груза M с помощью упругой пружины к неподвижной точке A (рис. 333).

Когда вес груза и реакция пружины *) уравновешивают друг друга, груз занимает некоторое положение O **). Если же груз M вывести из этого положения, то его вес и реакция пружины уже не будут взаимно уравновешиваться, а дадут некоторую равнодействующую F, направленную от груза M к упомянутому равновесному положению O, причем ее величина будет пропорциональна расстоянию OM ***), т. е. как раз и выразится формулой (4). В этом примере коэффициент c называют «жесткостью» пружины: если он велик, то даже малая деформация пружины вызывает большую реакцию ее.

Займемся изучением движения точки M по оси Ox под действием восстанавливающей силы F, предполагая известными абсциссу x_0 и скорость x'_0 точки M в начальный момент $t=0$.

Если m — масса точки M, а w — ее ускорение, то по основному уравнению динамики

$$mw=F.$$

Проектируя это векторное равенство на ось Ox, находим

$$mw_x=F_x.$$

Но $w_x=x''$, где штрихи обозначают результат двукратного дифференцирования абсциссы x по времени t:

$$x''=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

С другой стороны, $F_x=-cx$. В самом деле, если абсцисса x точки M положительна, то проекция F_x восстанавливающей силы F отрицательна и наоборот, ибо сила направлена от точки M к началу O.

Таким образом,

$$mx''=-cx,$$

откуда

$$x''+a^2x=0, \tag{5}$$

где положено для краткости

$$\frac{c}{m}=a^2. \tag{6}$$

Иными словами, дело свелось к решению линейного однородного дифференциального уравнения (5). Соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2+a^2=0$$

имеет чисто мнимые корни

$$k_{1,2}=\pm ai,$$

и потому общее решение уравнения (5) таково:

$$x=C_1\cos at+C_2\sin at, \tag{7}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Однако нас интересует не общее решение уравнения (5), а то его частное решение, которое

*) По закону Гука реакция пружины пропорциональна ее деформации.

**) Таким образом, AO — это уже растянутая пружина. Если AO_1 — нерастянутая пружина, то удлинение O_1O вызывает реакцию $c\cdot O_1O$, где c — упомянутый выше коэффициент пропорциональности. Эта реакция направлена от O к O_1 (т. е. вверх) и равна весу груза.

***) Действительно, пусть для определенности $AM>AO$. Тогда удлинение пружины равно $O_1M=O_1O+OM$, а ее реакция (направленная вверх, т. е. от M к O) равна сумме $c\cdot O_1O+c\cdot OM$. Первое слагаемое уравновешивается весом груза, и остается равнодействующая $F=c\cdot OM$.

удовлетворяет начальным условиям

$$x\big|_{t=0}=x_0,\quad x'\big|_{t=0}=x'_0. \tag{8}$$

Дифференцируя (7), находим

$$x'=a(-C_1\sin at+C_2\cos at).$$

Значит, условия (8) дают

$$x_0=C_1,\qquad x'_0=aC_2,$$

откуда

$$C_1=x_0,\qquad C_2=\frac{x'_0}{a}.$$

Подставляя это в (7), получим

$$x=x_0\cos at+\frac{x'_0}{a}\sin at$$

или, что то же самое,

$$x=A\cos(at+\alpha), \tag{9}$$

где

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{x'_0}{a}\right)^2},$$

причем α также определяется по x_0 и x'_0. Итак, точка M совершает гармонические колебания (9), амплитуда A и начальная фаза α которых зависят от начальных данных. Частота же a колебания (9) дается формулой (6) и от начальных данных не зависит, а полностью определяется массой m и жесткостью c. Из (6) видно, что увеличение массы m уменьшает частоту колебания, а увеличение жесткости c увеличивает ее.

Колебания (9), совершаемые точкой M под действием восстанавливающей силы, называются *свободными колебаниями* этой точки.

n° 3. Вынужденные колебания точки. Резонанс. Допустим теперь, что на точку M, кроме восстанавливающей силы F, рассмотренной выше, действует еще некоторая направленная по оси Ox сила F_1, зависящая уже не от положения точки, а от времени. Эта сила будет изменять движение точки, и потому ее называют „возмущающей“ силой. Предположим, что величина возмущающей силы является простейшей периодической функцией времени

$$F_1=H\cos(pt+\beta). \tag{10}$$

Коэффициент H *) представляет собой наибольшее значение силы F_1. Число p называется частотой силы.

Поскольку к точке M теперь приложены две силы F и F_1, то уравнение движения точки будет иметь вид

$$mx''=-cx+H\cos(pt+\beta)$$

или

$$x''+a^2x=\frac{H}{m}\cos(pt+\beta). \tag{11}$$

Так как $\cos(pt+\beta)=\cos\beta\cos pt-\sin\beta\sin pt$, то, полагая

$$\frac{H}{m}\cos\beta=M,\qquad -\frac{H}{m}\sin\beta=N,$$

перепишем уравнение (11) в виде

$$x''+a^2x=M\cos pt+N\sin pt. \tag{12}$$

---

*) Проекция силы F_1 на ось Ox либо равна величине силы, либо отличается от нее знаком. Мы предполагаем, что (10) представляет собой именно проекцию F_1 на Ox и что $H>0$.

Это уравнение принадлежит к изученному нами типу. Его общее решение имеет вид

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \tilde{x},$$

где $C_1 \cos at + C_2 \sin at$ — общее решение сопровождающего уравнения (5), а $\tilde{x}$ — какое-нибудь частное решение самого уравнения (11).

Так как корни характеристического уравнения равны $\pm ai$, то согласно теории, изложенной в п° 9 § 3, при $p \neq a$ будет

$$\tilde{x} = \lambda \cos pt + \mu \sin pt, \tag{13}$$

где λ и μ — постоянные, определяемые с помощью подстановки $\tilde{x}$ в уравнение (12). Если же $p = a$, то

$$\tilde{x} = t\,(\lambda \cos pt + \mu \sin pt). \tag{14}$$

Движение $\tilde{x}$, определяемое уравнением (13), представляет собою гармонические колебания. Их частота равна частоте p возмущающей силы, а амплитуда и начальная фаза полностью определяются числами λ и μ, т. е. самим дифференциальным уравнением (12), а никак не начальными условиями. Эти колебания называются *вынужденными*. Таким образом, в случае $p \neq a$, т. е. когда частота возмущающей силы не совпадает с частотой свободных колебаний, составное движение точки M слагается из свободных и вынужденных гармонических колебаний

$$x = (C_1 \cos at + C_2 \sin at) + (\lambda \cos pt + \mu \sin pt).$$

Постоянные C_1 и C_2, как всегда, определяются из начальных условий (8).

Если же $p = a$, т. е. частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний, то на свободные колебания налагается движение (14). Оно также имеет колебательный характер, но его „размахи" *) безгранично растут с течением времени. Это явление называется *резонансом*.

п° 4. Учет сопротивления среды. Затухающие колебания. Рассмотренные выше типы колебаний на практике не встречаются. Во-первых, по изложенной теории свободные колебания должны без всякого изменения продолжаться вечно, чего, разумеется, не наблюдается. Во-вторых, не наблюдается безгранично возрастающих размахов вынужденных колебаний, что по нашей теории должно иметь место при резонансе.

Причина этих отклонений теории от того, что на самом деле имеет место, заключается в том, что нами никак не учитывалось с о п р о т и в л е н и е с р е д ы, в которой происходит движение точки. Рассмотрим теперь, каким будет движение точки M под действием восстанавливающей силы, если, кроме этой силы, на M действует сопротивление R среды, в которой происходит движение, причем это сопротивление пропорционально скорости точки

$$R = -qx' \qquad (q > 0).$$

Здесь сразу написана проекция силы сопротивления на ось Ox. Знак минус поставлен потому, что направление сопротивления противоположно направлению скорости точки M.

Уравнение движения точки M будет

$$mx'' = -cx - qx'$$

или

$$x'' + 2hx' + a^2 x = 0, \tag{15}$$

где положено

$$\frac{q}{m} = 2h, \qquad \frac{c}{m} = a^2.$$

---

*) *Размахами* точки мы называем ее расстояния от начала координат в те моменты, когда точка меняет направление скорости.

Корни характеристического уравнения

$$k^2+2hk+a^2=0$$

таковы:

$$k_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-a^2}.$$

Наиболее интересен случай малого сопротивления, когда

$$h<a.$$

В этом случае можно положить $h^2-a^2=-\omega^2$, т. е. $k_{1,2}=-h\pm\omega i$. Тогда

$$x=e^{-ht}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t), \tag{16}$$

где C_1 и C_2 определяются по начальным условиям (8). Движение (16) носит название *затухающих* колебаний, так как „размахи" *) этих колебаний стремятся к нулю при $t\to+\infty$.

Рассмотрим, наконец, случай движения точки M в сопротивляющейся среде под действием восстанавливающей силы $F=-cx$ и возмущающей силы $F_1=H\cos(pt+\beta)$. Сопротивление среды считаем по-прежнему пропорциональным скорости, $R=-qx'$.

Уравнение движения будет

$$mx''=-cx-qx'+H\cos(pt+\beta)$$

или (в прежних обозначениях)

$$x''+2hx'+a^2x=M\cos pt+N\sin pt. \tag{17}$$

Предполагая, как и раньше, сопротивление малым, т. е. считая $h^2-a^2=-\omega^2<0$, находим

$$x=e^{-ht}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)+\lambda\cos pt+\mu\sin pt.$$

Стало быть, движение точки будет слагаться из затухающих и вынужденных колебаний. По истечении некоторого времени затухающие колебания станут настолько малыми, что ими можно будет пренебречь и дело сведется к одним вынужденным колебаниям.

Остановимся на этих последних. Полагая

$$\tilde{x}=\lambda\cos pt+\mu\sin pt,$$

находим результат подстановки $\tilde{x}$ в левую часть уравнения (17):

$$-p^2(\lambda\cos pt+\mu\sin pt)+2hp(-\lambda\sin pt+\mu\cos pt)+a^2(\lambda\cos pt+\mu\sin pt).$$

Приравнивая коэффициенты, стоящие здесь при $\cos pt$ и $\sin pt$, числам M и N, получим

$$2hp\mu+(a^2-p^2)\lambda=M,$$
$$(a^2-p^2)\mu-2hp\lambda=N.$$

Отсюда

$$\lambda=\frac{(a^2-p^2)M-2hpN}{(a^2-p^2)^2+4h^2p^2},\quad \mu=\frac{2hpM+(a^2-p^2)N}{(a^2-p^2)^2+4h^2p^2}. \tag{18}$$

---

*) Из (16) следует, что $x'=e^{-ht}[-h(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)+\omega(-C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t)]$. Полагая $x'=0$, находим

$$\operatorname{tg}\omega t=\frac{\omega C_2-hC_1}{\omega C_1+hC_2}.$$

Если $t_1<t_2<t_3<\ldots$ — корни этого уравнения, то в моменты $t=t_k$ скорость точки M меняет направление и расстояния точки M от начала координат в эти моменты являются ее размахами.

Если считать сопротивление очень малым и соответственно этому пренебречь членами, содержащими множители h и h^2, то из (18) получим приближенные значения λ и μ:

$$\lambda \cong \frac{M}{a^2-p^2}, \quad \mu \cong \frac{N}{a^2-p^2}.$$

Отсюда следует приближенное выражение для амплитуды A вынужденного колебания

$$A=\sqrt{\lambda^2+\mu^2} \cong \frac{\sqrt{M^2+N^2}}{|a^2-p^2|}.$$

Но ведь

$$M^2+N^2=\frac{H^2}{m^2},$$

где H — наибольшее значение возмущающей силы. Стало быть,

$$A \cong \frac{H}{m|a^2-p^2|}.$$

Отсюда видно, что при p, близком к a *) (и при малом сопротивлении!), амплитуда A вынужденных колебаний даже при небольшой возмущающей силе будет весьма значительна. Это явление, как и в п° 3, называется резонансом.

В заключение отметим, что соображения, изложенные в этом параграфе, объясняют происхождение термина „принцип наложения". Действительно, если возмущающая сила F_1 есть равнодействующая (т. е. результат „наложения") двух сил F_2 и F_3:

$$F_1=F_2+F_3,$$

то дифференциальное уравнение движения точки будет иметь вид

$$mx''+qx'+cx=F_{2x}+F_{3x}$$

и его решение как раз и придется искать согласно упомянутому принципу.

§ 5. Понятие о системах дифференциальных уравнений

п° 1. Нормальные системы дифференциальных уравнений. На практике иногда приходится разыскивать несколько функций, удовлетворяющих с и с т е м е дифференциальных уравнений. В этом п° мы рассмотрим случай, когда каждое из уравнений содержит только первую производную одной из функций. Предполагая, что все эти уравнения разрешены относительно упомянутых производных (что, вообще говоря, может быть достигнуто) и ограничиваясь для простоты

---

*) Напомним, что p — частота возмущающей силы, а a — частота свободных колебаний, которые совершала бы точка при полном отсутствии сопротивления, т. е. $a=\sqrt{\frac{c}{m}}$.

тремя функциями x, y, z одной переменной t, приходим к системе

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi(x, y, z, t); \\ \frac{dy}{dt} &= \psi(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= \omega(x, y, z, t). \end{aligned}} \tag{1}$$

Системы этого вида носят название *нормальных*. Решение такой системы сводится к решению одного дифференциального уравнения, порядок которого равен числу уравнений системы. Покажем, как это делается, на примере системы

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= x + z, \\ z' &= x + z - 4t. \end{aligned} \tag{2}$$

Дифференцируя последнее из уравнений (2), находим $z'' = x' + z' - 4$. Заменим здесь x' и z' их выражениями (2). Это дает

$$z'' = (x - y) + (x + z - 4t) - 4,$$

т. е.

$$z'' = 2x - y + z - 4t - 4. \tag{3}$$

Дифференцируя (3), получим $z''' = 2x' - y' + z' - 4$. Снова заменяя x', y' и z' их выражениями (2), находим

$$z''' = 2(x - y) - (x + z) + (x + z - 4t) - 4$$

или

$$z''' = 2x - 2y - 4t - 4. \tag{4}$$

Исключим теперь x и y из (3), (4) и последнего уравнения (2). Для этого вычтем из (4) уравнение (3), умножив его предварительно на 2. Это дает

$$z''' - 2z'' = -2x - 2z + 4t + 4.$$

Прибавим к этому равенству последнее из уравнений (2), умножив его предварительно на 2. В результате получим

$$z''' - 2z'' + 2z' = -4t + 4. \tag{5}$$

Мы пришли к уравнению 3-го порядка относительно z. Характеристическое уравнение

$$k^3 - 2k^2 + 2k = 0$$

имеет корни $k_1=0$ и $k_{2,3}=1\pm i$. Значит, общим решением уравнения, сопровождающего дифференциальное уравнение (5), будет

$$z_0=C_1+e^t(C_2\cos t+C_3\sin t).$$

Частное решение $\tilde{z}$ дифференциального уравнения (5) надо искать в виде

$$\tilde{z}=(at+b)t=at^2+bt.$$

Подставляя это выражение в (5), получим

$$-4a+2(2at+b)=-4t+4,$$

откуда $a=-1$, $b=0$. Итак, $\tilde{z}=-t^2$, а общее решение уравнения (5)

$$z=C_1+e^t(C_2\cos t+C_3\sin t)-t^2. \tag{6}$$

Отсюда

$$z'=e^t[(C_2+C_3)\cos t+(C_3-C_2)\sin t]-2t. \tag{7}$$

Равенства (6), (7) и последнее из уравнений (2) дают

$$x=z'-z+4t=-C_1+e^t(C_3\cos t-C_2\sin t)+t^2+2t. \tag{8}$$

Отсюда

$$x'=e^t[(C_3-C_2)\cos t-(C_2+C_3)\sin t]+2t+2. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в первое из уравнений (2), находим

$$y=x-x'=-C_1+e^t(C_2\cos t+C_3\sin t)+t^2-2.$$

Прием, с помощью которого мы решили систему (2), имеет общий характер. Именно, пусть надо решить нормальную систему (1). Дифференцируя последнее из уравнений по t, находим

$$z''=\omega'_x x'+\omega'_y y'+\omega'_z z'+\omega'_t.$$

Заменяя здесь x', y', z' их выражениями (1), получим равенство вида

$$z''=f(x,\ y,\ z,\ t). \tag{10}$$

Дифференцируя (10) и снова заменяя x', y', z' их выражениями, получим

$$z'''=g(x,\ y,\ z,\ t). \tag{11}$$

Найдя x и y из (10) и (11), подставим их в последнее уравнение (1), что приводит к равенству *)

$$z'=h(t,\ z,\ z'',\ z'''), \tag{12}$$

---

*) Как мы видели на примере, находить x и y не обязательно. Нужно лишь исключить их из (10), (11) и последнего уравнения (1). В связи с этим выражения для x и y через t и C_1, C_2, C_3 можно получать не из (10) и (11), а, например, из (10) и последнего уравнения (1).

т. е. к одному уравнению 3-го порядка. Его решение имеет вид

$$z = F(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3).$$

Если мы найдем отсюда z'' и z''' и подставим их в найденные ранее выражения x и y, то выразим последние через t и те же постоянные C_1, C_2, C_3, которые входят в z.

Иллюстрируем изложенную теорию еще двумя примерами.

1) Пусть дана система

$$x' = y, \qquad y' = z, \qquad z' = x. \tag{13}$$

Последнее уравнение дает $z'' = x'$, т. е.

$$z'' = y. \tag{14}$$

Отсюда $z''' = y'$, т. е.

$$z''' = z. \tag{15}$$

Характеристическое уравнение $k^3 - 1 = 0$ можно записать в виде

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0,$$

и потому его корни $k_1 = 1$, $k_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. Значит, решение уравнения (15) записывается так:

$$z = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Отсюда

$$z' = C_1 e^t + \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}\left[(\sqrt{3}\,C_3 - C_2)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - (\sqrt{3}\,C_2 + C_3)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]. \tag{16}$$

Согласно последнему уравнению (13), выражение для z' дает нам x. Дифференцируя x, т. е. найдя из (16) выражение x', получим и y.

2) Решить (нелинейную!) систему

$$\frac{dy}{dt} = x + y^2, \qquad \frac{dx}{dt} = y. \tag{17}$$

Второе из уравнений (17) дает $x'' = y'$, т. е. $x'' = x + y^2$. Заменяя y его выражением, получим уравнение 2-го порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{18}$$

Поскольку в это уравнение не входит независимая переменная t, то его порядок понижается при помощи подстановки

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = z\frac{dz}{dx}.$$

Эта подстановка превращает уравнение (18) в уравнение Я. Бернулли

$$\frac{dz}{dx}-z=\frac{x}{z}. \qquad (19)$$

Применяя к нему известный прием, положим

$$z=uv.$$

Тогда (19) примет вид

$$\frac{du}{dx}\cdot v+u\left(\frac{dv}{dx}-v\right)=\frac{x}{uv}.$$

Приравнивая выражение в скобках нулю, находим

$$v=e^x.$$

Значит,

$$e^x\frac{du}{dx}=\frac{x}{ue^x},$$

т. е.

$$u\,du=xe^{-2x}\,dx.$$

Интегрируя, получим

$$u^2=C_1-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Значит,

$$u=\sqrt{C_1-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}},$$

откуда

$$z=uv=\sqrt{C_1e^{2x}-x-\frac{1}{2}}.$$

Итак,

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{C_1e^{2x}-x-\frac{1}{2}}. \qquad (20)$$

Это соотношение и второе из уравнений (17) позволяют выразить y через x:

$$y=\sqrt{C_1e^{2x}-x-\frac{1}{2}}.$$

Что же касается выражения x через t, то мы можем написать лишь связывающее их соотношение

$$\int\frac{dx}{\sqrt{C_1e^{2x}-x-\frac{1}{2}}}=t+C_2, \qquad (21)$$

непосредственно вытекающее из (20) и представляющее общий интеграл уравнения (18). Входящий в (21) неопределенный интеграл не берется в конечном виде.

Замечание. Иногда встречаются некоторые отклонения от изложенной теории. Рассмотрим, например, систему

$$x' = \frac{x+y}{z-4t}, \quad y' = \frac{x+y}{4t-z}, \quad z' = x+y+4.$$

Дифференцируя третье уравнение, находим

$$z'' = x' + y',$$

т. е. $z'' = 0$. Значит, $z = C_1 t + C_2$. Отсюда и из третьего уравнения системы вытекает $x + y = C_1 - 4$. Подстановка найденных выражений для $x+y$ и z в первое уравнение системы дает

$$x' = \frac{C_1 - 4}{(C_1 - 4)\,t + C_2},$$

откуда

$$x = \ln\left[(C_1 - 4)t + C_2\right] + C_3.$$

Наконец, $y = C_1 - 4 - x$.

Таким образом, в этом примере дело свелось не к одному уравнению 3-го порядка, а к одному уравнению 2-го и к одному уравнению 1-го порядка. Число произвольных постоянных все же оказалось равным трем!

n° 2. Канонические системы. До сих пор мы рассматривали случай уравнений 1-го порядка. К этому случаю сводятся и системы уравнений высших порядков. Покажем это на примере *канонической* системы уравнений, т. е. такой системы, в которой старшая производная каждой из функций входит только в одно уравнение, причем последнее разрешено относительно этой производной. Ограничиваясь случаем трех функций x, y, z аргумента t, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \varphi(x, y, z, x', z', t), \\ \frac{dy}{dt} &= \psi(x, y, z, x', z', t), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \omega(x, y, z, x', z', t). \end{aligned} \tag{22}$$

Введя новые неизвестные функции

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = v,$$

сведем систему (22) к нормальной системе пяти уравнений с пятью неизвестными функциями x, y, z, u, v аргумента t:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = \psi(x, y, z, u, v, t), \quad \frac{dz}{dt} = v,$$

$$\frac{du}{dt} = \varphi(x, y, z, u, v, t), \quad \frac{dv}{dt} = \omega(x, y, z, u, v, t).$$

Таким образом, изложенный в п° 1 прием сведения нормальной системы к одному уравнению применим и к любой канонической системе. Проще, впрочем, не вводить новых неизвестных, а применять упомянутый прием непосредственно к данной системе.

Пример. Рассмотрим систему

$$x' = \frac{x+y}{2}, \quad y' = x. \tag{23}$$

Дифференцируя первое уравнение системы, получнм $x'' = \frac{x'+y'}{2}$. Отсюда

$$2x'' - x' - x = 0. \tag{24}$$

Это однородвое линейное уравнение 2-го порядка. Характеристическое уравнение

$$2k^2 - k - 1 = 0$$

имеет корни $k_1 = 1$, $k_{2,3} = \frac{-1 \pm i}{2}$, и потому общее решение дифференциального уравнения (24) имеет вид

$$x = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(C_2 \cos \frac{t}{2} + C_3 \sin \frac{t}{2} \right).$$

Остается заметить, что согласно первому из уравнений (23) будет

$$y = 2x' - x.$$

ГЛАВА XII

ДВОЙНЫЕ, ТРОЙНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойной интеграл

n° 1. Задача о массе пластинки. Рассмотрим одну механическую задачу, которая приведет нас к важному понятию двойного интеграла.

Пусть на некоторой плоской фигуре A непрерывным образом распределена масса M. Такое положение вещей имеет место, например, если A представляет собой материальную пластинку. Средней плотностью пластинки (или, вообще, фигуры A) называется отношение ее массы к ее площади F:

$$p_{\text{ср}} = \frac{M}{F},$$

т. е. количество массы, которое в среднем приходится на единицу площади. Знание средней плотности фигуры не дает представления о том, как распределена ее масса вблизи определенной точки фигуры. Однако средняя плотность весьма малой площадки, содержащей упомянутую точку, уже дает такое представление. Желая уточнить его, вводят понятие истинной плотности фигуры в данной ее точке (x, y), понимая под этим п р е д е л средней плотности бесконечно малой площадки, стягивающейся в точку (x, y). Для дальнейшего нам потребуется понятие *диаметра* плоской фигуры. Под этим термином разумеется н а и б о л ь ш а я и з х о р д фигуры (точнее, наибольшее из р а с с т о я н и й между двумя точками фигуры). Когда мы говорим о бесконечно малой площадке, мы имеем в виду, что ее диаметр стремится к нулю.

Если равные по площади части фигуры имеют и равные массы, то фигура называется однородной. У такой фигуры плотность во всех ее точках одна и та же и равна средней плотности всей фигуры *). Если же фигура неоднородна, то ее плотность p меняется от точки к точке, т. е.

$$p = p(x, y),$$

где x, y — координаты точки, в которой вычисляется плотность.

---

*) См. сноску на стр. 308, где речь шла о плотности стержня.

Задача. Зная фигуру A и функцию $p(x, y)$ (которая предполагается непрерывной), найти массу M фигуры.

Решение. С помощью произвольно выбранной сети каких-нибудь линий (рис. 334) разложим фигуру A на n частей $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть площади и диаметры этих частей равны соответственно $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Наибольший из диаметров d_k обозначим через λ. Эта величина, называемая рангом произведенного дробления фигуры, характеризует „мелкость" „ячеек" A_k.

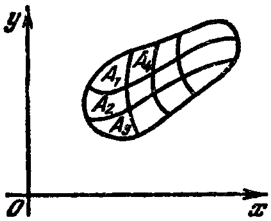


Рис. 334.

Если λ мало, то в пределах малой ячейки A_k (непрерывная!) плотность $p(x, y)$ не успевает сколько-нибудь значительно измениться и приближенно может быть принята за постоянную. Значением этой постоянной можно считать значение $p(x_k, y_k)$ плотности $p(x, y)$ в произвольно выбранной точке (x_k, y_k) ячейки A_k. Иными словами, мы считаем ячейку A_k однородной со средней плотностью $p(x_k, y_k)$. Но в таком случае масса ячейки A_k будет равна произведению

$$p(x_k, y_k)\ F_k,$$

а масса всей фигуры A — сумме

$$\sum_{k=1}^{n} p(x_k, y_k) F_k.$$

Однако полученное выражение массы является лишь приближенным. Точность его тем выше, чем меньше λ и потому

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} p(x_k, y_k) F_k. \tag{1}$$

Пределы подобного рода и называются двойными интегралами.

n°2. Определение двойного интеграла. Его механический и геометрический смысл. Пусть в плоской области A задана функция $f(x, y)$. Проделаем следующие 5 операций:

1. Раздробим область A с помощью сети каких-либо линий на части („ячейки") $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с площадями $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Пусть наибольшее из чисел d_k („ранг дробления") будет λ.

2. Выбираем на каждой ячейке A_k по точке (x_k, y_k) и вычисляем в этой точке значение нашей функции.

3. Умножаем $f(x_k, y_k)$ на площадь F_k ячейки A_k.

4. Находим сумму всех таких произведений

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) F_k.$$

5. Измельчаем дробление и ищем конечный предел *) I суммы σ

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

Этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области A и обозначается одним из двух символов

$$\iint_A f(x, y)\, dF, \qquad \iint_A f(x, y)\, dx\, dy.$$

Сумма σ называется интегральной суммой или суммой Римана. Поэтому коротко данное выше определение можно формулировать так: „двойной интеграл есть предел интегральной суммы". Читателю следует ясно видеть глубокое тождество понятий обыкновенного определенного интеграла и двойного интеграла: в обоих случаях рассматривается некоторая функция f, только в первом случае это функция одной переменной, заданная на отрезке $[a, b]$ оси, а во втором случае это функция двух переменных, заданная на куске A плоскости. В обоих случаях область задания функции разбивается на мелкие части и в каждой из этих частей выбирается по точке, в которой вычисляется значение функции. После этого вычисленное значение функции умножается на м е р у соответствующей части области задания функции. В случае одной переменной такой мерой была д л и н а $x_k - x_{k-1}$ отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, а в случае двух переменных — п л о щ а д ь F_k ячейки A_k. Дальнейшие шаги опять-таки были одинаковы: составлялись интегральные суммы и искался их предел при измельчении дробления. Ниже мы увидим, что по этому же образцу строится определение и т р о й н о г о интеграла, т. е. интеграла от функции $f(x, y, z)$ трех переменных по некоторому телу T. Рекомендуем, однако, читателю уже сейчас постараться дать это определение.

Возвращаясь к задаче, рассмотренной в n° 1, мы можем найденную там формулу (1) записать в виде

$$M = \iint_A p(x, y)\, dF. \tag{2}$$

---

*) Он может и не существовать. Однако если $f(x, y)$ н е п р е р ы в н а, то I обязательно существует. Мы примем это без доказательства.

Поскольку всякую функцию $f(x, y)$ можно истолковать как плотность *), то формула (2) дает нам

Механический смысл двойного интеграла. *Двойной интеграл*

$$\iint_A f(x, y)\,dF \tag{3}$$

представляет собой массу фигуры A, если подынтегральную функцию $f(x, y)$ считать плотностью этой фигуры в точке (x, y).

Остановимся еще на геометрическом смысле интеграла (3), предполагая, что $f(x, y)>0$ и непрерывна.

Теорема. *Если $f(x, y)>0$, то*

$$\iint_A f(x, y)\,dF = V, \tag{4}$$

где V — объем тела T, ограниченного снизу плоскостью $z=0$, сверху поверхностью $z=f(x, y)$, а с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур фигуры A **) (рис. 335).

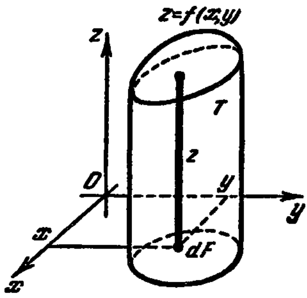


Рис. 335.

Доказательство. Соответствующее рассуждение мы проведем с помощью того сокращенного языка, который мы изучали в главе, посвященной определенному интегралу, и который, как мы надеемся, не затруднит читателя и в настоящей, новой обстановке. Именно, выделим из фигуры A элементарную площадку с координатами (x, y) и площадью dF. Если представить себе элементарный столбик, параллельный оси Oz, имеющий эту площадку своим основанием и ограниченный сверху поверхностью $z=f(x, y)$, то его можно будет принять за цилиндр с площадью основания dF и высотой $f(x, y)$. Но тогда объем dV этого столбика будет равен

$$dV=f(x, y)\,dF. \tag{5}$$

---

*) Для положительной функции это утверждение не требует разъяснений. Если же $f(x, y)$ принимает и отрицательные значения, то можно говорить, например, что $f(x, y)$ есть плотность электричества, распределенного на фигуре A, т. е. ввести в рассмотрение и отрицательные массы. Правда, в этом случае может быть было бы уместнее говорить не о „механическом", а о физическом смысле интеграла.

**) Такое тело иногда называется *цилиндроидом.*

Полный же объем V получится отсюда суммированием всех элементов (5), что и приводит к формуле (4) *).

Если это краткое рассуждение изложить более подробно (чего мы впредь уже делать не будем!), то оно будет выглядеть так. Мы разбиваем фигуру с помощью сети линий на ячейки A_k. Контур каждой такой ячейки принимается за направляющую цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz. Эти поверхности разбивают цилиндроид T на отдельные столбики, приближенно принимаемые за цилиндры. Но тогда объем одного столбика выразится (опять-таки приближенно) произведением

$$f(x_k, y_k) F_k,$$

где (x_k, y_k) — точка из A_k, а F_k — площадь A_k. Дальнейшее ясно.

n°3. Вычисление двойного интеграла. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \iint_A f(x, y)\, dF,$$

где (рис. 336) фигура A ограничена линиями $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = \underline{y}(x)$, $y = \bar{y}(x)$, причем $\underline{y}(x)$ и $\bar{y}(x)$ — две непрерывные функции, заданные при $a \leqslant x \leqslant b$ и удовлетворяющие неравенству

$$\underline{y}(x) \leqslant \bar{y}(x).$$

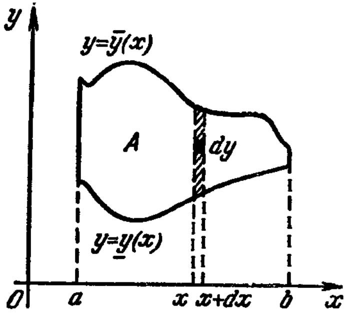


Рис. 336.

Задача решается при помощи некоторой формулы, которую мы выведем хотя и не строгим аналитическим путем, но зато весьма наглядно. Именно, будем считать подынтегральную функцию $f(x, y)$ плотностью фигуры A в точке (x, y). Тогда, как мы знаем, интеграл I представит собой массу фигуры A. Эту массу мы найдем следующим образом. Выделим из фигуры A элементарную полоску ширины dx, отстоящую от оси Oy на расстояние x, и найдем массу этой полоски. Для этой цели из полоски выделим элементарную площадку высоты dy, отстоящую от оси Ox на расстояние y. Координаты площадки суть (x, y), а ее площадь равна $dx\,dy$. Стало быть, масса этой площадки равна

$$f(x, y)\, dx\, dy. \tag{6}$$

*) Напомним, что здесь имеется в виду не только суммирование, но и последующий предельный переход (при безграничном измельчении площадок), чем обеспечивается абсолютная точность формулы (4).

Чтобы получить отсюда массу упомянутой элементарной полоски, надо „просуммировать" все произведения (6), считая x (и dx!) закрепленными, а изменяющимся аргумент y. В пределах нашей полоски y меняется от $\underline{y}(x)$ до $\bar{y}(x)$, и потому масса полоски будет равна интегралу

$$\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{7}$$

Чтобы более отчетливо подчеркнуть, что здесь dx закреплен, а интегрирование производится по аргументу y, перепишем интеграл (7) в виде

$$\left(\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x, y)\,dy\right)dx. \tag{8}$$

Выражение, стоящее в скобках, является функцией одного x, что вполне естественно, ибо масса полоски и должна зависеть только от положения этой полоски (и ее ширины dx). Чтобы найти полную массу I фигуры A, надо „просуммировать" массы всех полосок, т. е. все произведения (8), что дает

$$I = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x, y)\,dy\right)dx.$$

Это и есть та формула, которую мы хотели вывести. Обычно ее записывают в виде

$$\boxed{\iint\limits_A f(x, y)\,dF = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x, y)\,dy.} \tag{9}$$

Выражение, стоящее в правой части этой формулы, называется *повторным интегралом*. Для его вычисления надо последовательно произвести два обыкновенных интегрирования: 1) найти „внутренний интеграл"

$$\int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} f(x, y)\,dy, \tag{10}$$

в котором аргумент x (как под знаком $f(x, y)$, так и в пределах интегрирования) закреплен; 2) проинтегрировать функцию (10) (зависящую уже только от x) между постоянными пределами a и b. Это интегрирование называют „внешним".

Примеры. 1) Найти $I=\iint\limits_A x^3y\,dF$, если A — фигура, ограниченная линиями $x=0$, $y=0$, $x^2+y^2=R^2$, причем $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

Прежде всего сделаем чертеж (рис. 337). Мы настоятельно рекомендуем начинать решение задач именно с этого. Ясно, что A есть четверть круга с центром $(0, 0)$ и радиусом R, лежащая в первом координатном угле. Отсюда следует, что числа a и b, фигурирующие в формуле (9), таковы:

$$a=0,\quad b=R.$$

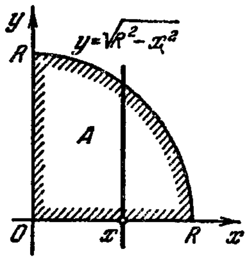


Рис. 337.

Чтобы найти пределы интегрирования по y, надо между 0 и R закрепить какую-либо точку x и провести через эту точку прямую, параллельную оси Oy. Тогда $\underline{y}(x)$ будет тем значением ординаты y, при котором эта прямая „входит" в фигуру A, а $\bar{y}(x)$ — тем значением y, при котором она „выходит" из A. Короче говоря, $\underline{y}(x)$ — это „y входа", а $\bar{y}(x)$ — „y выхода" прямой. Все эти объяснения необходимо тщательно понять, ибо начинающие очень часто, глядя на чертеж, „рассуждают" так: „ведь y ничем не хуже (и не лучше), чем x, значит, и при интегрировании по y пределы должны быть 0 и R". На самом же деле, как мы видим, в нашем примере будет

$$\underline{y}(x)=0,\quad \bar{y}(x)=\sqrt{R^2-x^2}.$$

Стало быть,

$$I=\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^3y\,dy.$$

Вычисление внутреннего интеграла дает

$$\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^3y\,dy=x^3\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy=x^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{x^3(R^2-x^2)}{2}.$$

Отсюда

$$I=\int\limits_0^R \frac{x^3(R^2-x^2)}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left[R^2\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^R=\frac{1}{24}R^6.$$

2) Найти $I=\iint\limits_A (x-2y)\,dx\,dy$, если A — фигура, ограниченная линиями $y=x$, $y=x^2$.

Найдем точки пересечения линий $y=x$, $y=x^2$. Совместное решение этих уравнений дает $x_1=0$, $x_2=1$. Так как $y=x$ — прямая, а $y=x^2$ — парабола, то фигура A имеет вид, изображенный на рис. 338. Проведя параллель оси Oy через точку x, лежащую между O и 1, видим, что эта параллель входит в A при $y=x^2$ и выходит из A при $y=x$. Значит,

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(x-2y)\,dy.$$

Но

$$\int_{x^2}^{x}(x-2y)\,dy=[xy-y^2]_{y=x^2}^{y=x}=x^4-x^3$$

и потому

$$I=\int_0^1 (x^4-x^3)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{20}.$$

3) Найти $I=\iint\limits_A (x+y)\,dF$, если A ограничена линиями $y=x$, $y=0$, $x+y=2$.

Из рис. 339 усматриваем, что A есть заштрихованный треугольник, и поэтому $\underline{y}(x)=0$, а линия $y=\bar{y}(x)$ состоит из прямолинейных „кусков" $y=x$ (при $0\leqslant x\leqslant 1$) и $y=2-x$ (при $1\leqslant x\leqslant 2$).

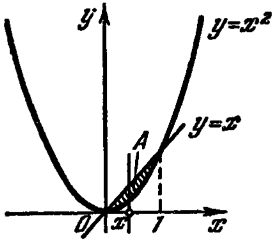


Рис. 338.

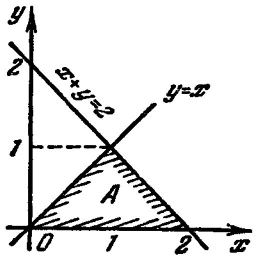


Рис. 339.

Чтобы применить формулу (9), надо отрезок [0, 2] разбить на отрезки [0, 1] и [1, 2], т. е. представить I в виде суммы **двух** повторных интегралов

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x (x+y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}(x+y)\,dy.$$

Гораздо проще, однако, изменить роли переменных x и y, т. е. вести внешнее интегрирование по y, а внутреннее по x. Это дает

$$I=\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x+y)\,dx.$$

Читатель обратит внимание на то, что теперь пределы внутреннего интеграла зависят уже не от x, а от y (это абсциссы точек входа и выхода в фигуру A прямой, параллельной оси Ox). Дальнейшее ясно:

$$I=\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}+xy\right]_{x=y}^{x=2-y}dy=\int_0^1(2-2y^2)\,dy=\frac{4}{3}.$$

4) Найти $I=\iint\limits_A(2x+y)\,dF$, если A — прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=1$, $y=1$, $y=3$. Предоставляем читателю сделать чертеж. Тогда станет ясно, что

$$I=\int_0^1 dx\int_1^3(2x+y)\,dy=\int_0^1\left[2xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=3}dx=\int_0^1(4x+4)\,dx=6.$$

Этот пример интересен тем, что здесь пределы внутреннего интеграла постоянны (т. е. не зависят от x). Легко понять, что дело обстоит так всякий раз, когда область интегрирования A представляет собой прямоугольник, стороны которого параллельны осям, и что во всех остальных случаях хоть один из пределов внутреннего интеграла переменный.

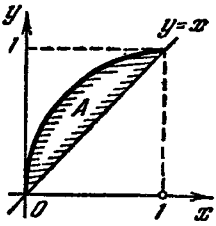


Рис. 340.

5) Переставить порядок интегрирований в повторном интеграле

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,\ y)\,dy.$$

Чтобы решить задачу, заметим, что I представляет собой результат вычисления двойного интеграла

$$I=\iint\limits_A f(x,\ y)\,dF,$$

в котором областью интегрирования A служит фигура, ограниченная линиями

$$x=0,\quad x=1,\quad y=x,\quad y=\sqrt{2x-x^2}.$$

Последнее из этих уравнений допускает запись $y^2=2x-x^2$, или $x^2-2x+y^2=0$, или, наконец,

$$(x-1)^2+y^2=1, \tag{11}$$

откуда видно, что линия $y=\sqrt{2x-x^2}$ есть дуга окружности с центром $(1,\ 0)$ и радиусом 1. Значит, фигура A имеет вид, изображенный на рис. 340. Но тогда двойной интеграл I' допускает запись *)

$$I'=\int_0^1 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,\ y)\,dy.$$

Это и решает задачу, ибо $I=I'$.

n° 4. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Формула вычисления двойного интеграла позволяет найти интеграл, указанный в заголовке. Отметим, что неопределенный интеграл $\int\frac{\sin x}{x}\,dx$ неэлементарен.

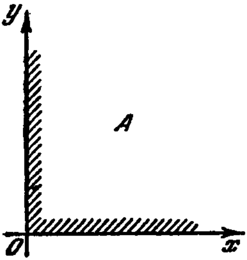


Рис. 341.

Пусть

$$H=\iint\limits_A e^{-xy}\sin x\,dx\,dy,$$

где A — первый координатный угол **) (рис. 341). Тогда

$$H=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,dy.$$

Но при $x>0$ будет

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,dy=\sin x\int_0^{+\infty}e^{-xy}\,dy=\sin x\left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_{y=0}^{y=+\infty}=\frac{\sin x}{x}.$$

Значит,

$$H=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Если же внешнее интегрирование произвести по y, а внутреннее по x, то мы получим

$$H=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,dx.$$

По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\,dx=\int_0^{+\infty}e^{-xy}d(-\cos x)=[-e^{-xy}\cos x]_{x=0}^{x=+\infty}-y\int_0^{+\infty}e^{-xy}\cos x\,dx,$$

---

*) Уравнение (11) можно переписать так: $x=1\pm\sqrt{1-y^2}$. Так как нас интересует та часть окружности (11), которая лежит левее прямой $x=1$, то перед радикалом мы выбрали знак „$-$".

**) Таким образом, H — несобственный двойной интеграл. Тем не менее мы будем применять к нему ту же формулу, что и для обыкновенного двойного интеграла. Строгое обоснование законности этого оставляем в стороне.

т. е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = 1 - y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx.$$

Снова интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-xy}d(\sin x) =$$

$$= [e^{-xy}\sin x]_{x=0}^{x=+\infty} + y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = 1 - y^2\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx.$$

Отсюда

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2}.$$

Подставляя это в выражение H, получаем

$$H = \int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = [\operatorname{arctg} y]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно имеем

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.}$$

n° 5. Механические приложения двойных интегралов. Пусть на плоской фигуре A распределена масса, причем плотность ее в точке (x, y) равна $p(x, y)$. Как мы уже видели, общее количество M массы равно

$$M = \iint_A p(x, y)\,dF.$$

При этом масса dM элементарной площадки dA, координаты которой суть (x, y), а площадь dF, равна

$$dM = p(x, y)\,dF. \tag{12}$$

Это замечание позволяет найти статические моменты S_x и S_y массы фигуры A относительно осей координат, а также моменты инерции J_x, J_y, J_0 той же массы относительно осей и начала координат.

Действительно, момент dS_x упомянутой выше площадки dA относительно оси Ox, очевидно, равен

$$dS_x = y\,dM,$$

откуда

$$S_x = \iint_A y\,dM. \tag{13}$$

Аналогичным образом

$$\begin{gathered} S_y = \iint_A x\,dM, \quad J_x = \iint_A y^2\,dM, \\ J_y = \iint_A x^2\,dM, \quad J_0 = \iint_A (x^2 + y^2)\,dM. \end{gathered} \tag{14}$$

Во всех случаях для фактического вычисления моментов dM надо заменить по формуле (12) через $p(x, y)\,dF$.

Сопоставляя последние три формулы (14), находим

$$\boxed{J_0 = J_x + J_y,}$$

т. е. *момент инерции плоской фигуры относительно какой-либо точки O, лежащей в плоскости фигуры, равен сумме моментов инерции той же фигуры относительно двух взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке O и также лежащих в упомянутой плоскости.*

Заметим, что формулы

$$x_C = \frac{S_y}{M}, \quad y_C = \frac{S_x}{M} \tag{15}$$

позволяют с помощью двойных интегралов находить и центр тяжести (x_C, y_C) фигуры A.

В частном случае однородной фигуры с плотностью 1 в формулах (13) и (14) вместо dM надо писать просто dF, а в (15) заменить M на F.

n° 6. Геометрические приложения двойных интегралов. Мы уже знаем, что объем V цилиндроида, ограниченного снизу плоскостью $z=0$, сверху — поверхностью $z=f(x, y)>0$ и с боков — цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур фигуры A, равен

$$\boxed{V = \iint_A z\,dF.}$$

Пример. Пусть поверхность $z=f(x, y)$, накрывающая цилиндроид сверху, есть плоскость. Так как уравнение плоскости должно иметь первую степень, то

$$z = ax + by + c.$$

Отсюда

$$V=\iint_A (ax+by+c)\,dF=a\iint_A x\,dF+b\iint_A y\,dF+c\iint_A dF,$$

т. е.

$$V=aS_y+bS_x+cF, \tag{16}$$

где F — площадь фигуры A, а S_x и S_y — статические моменты этой фигуры, принятой за однородную.

Из (16) следует, что

$$V=F\left(a\frac{S_y}{F}+b\frac{S_x}{F}+c\right),$$

т. е. [см. (15)]

$$V=F(ax_C+by_C+c).$$

Заметим теперь, что если из центра тяжести (x_C, y_C) фигуры A восставить перпендикуляр к плоскости $z=0$, то он пересечет верхнюю плоскость в точке с апликатой $ax_C+by_C+c=h_C$. Стало быть,

$$\boxed{V=Fh_C,}$$

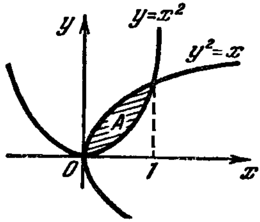


Рис. 342.

т. е. *объем цилиндроида с плоской „крышкой" равен площади его основания, умноженной на высоту, проведенную из центра тяжести основания.* Эта изящная теорема (подобно теоремам Паппа — Гульдина) связывает геометрические свойства тел с их механическими свойствами.

Отметим без доказательства, что площадь L той части поверхности $z=f(x, y)$, которая проектируется в область A плоскости xy, выражается двойным интегралом

$$\boxed{L=\iint_A \sqrt{1+[f'_x(x, y)]^2+[f'_y(x, y)]^2}\,dF.}$$

Наконец, полезно упомянуть, что очевидная формула

$$\boxed{F=\iint_A dF}$$

сводит нахождение площади произвольной плоской фигуры к вычислению некоторого двойного интеграла.

П р и м е р. Найти площадь фигуры A, ограниченной параболами $y=x^3$ и $y^2=x$ (рис. 342).

Ясно, что

$$F=\iint\limits_{A} dF=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\int\limits_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

n° 7. Площадь в криволинейных координатах. Мы знаем, какое большое значение имеет замена переменной для вычисления определенных интегралов. Для нахождения двойных интегралов также часто применяется способ замены переменных. Чтобы изложить его, нужны некоторые предварительные сведения, которые мы и сообщим здесь.

Пусть фигура A плоскости xy и фигура B плоскости uv связаны так, что каждой точке N (u, v) из B сопоставлена одна и только одна точка M (x, y) из A, причем каждая точка M из A оказывается сопоставленной одной и только одной точке N из B (рис. 343). Подобное положение вещей характеризуют, говоря, что между A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*. Наличие такого соответствия означает, что задание чисел u и v, т. е. координат точки N из B, определяет точку M из A. В силу этого

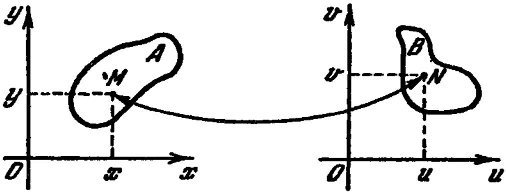


Рис. 343.

числа u и v служат некоторым образом координатами точки M, почему их и называют *криволинейными координатами* этой точки (для точки же N они служат обычными декартовыми координатами). С другой стороны, точка M определяется своими декартовыми координатами x и y, причем и обратно — эта точка определяет свои декартовы координаты. Стало быть, задание чисел u и v определяет числа x и y. Но это значит, что x и y являются функциями от u и v:

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x\,(u,\ v),\\ y&=y\,(u,\ v). \end{aligned}} \tag{17}$$

Равенства (17) называются *формулами преобразования* фигуры B в фигуру A. Задав числа u и v, мы по (17) находим соответствующие им x и y. Ввиду взаимности соответствия между A и B можно, наоборот, задать x и y и по ним найти u и v; для этого надо решить уравнения (17) относительно u и v.

Пример. Формулы

$$x=2u+3v-1,\quad y=u+v \tag{18}$$

задают взаимно однозначное соответствие между всей плоскостью xy (фигура A) и всей плоскостью uv (фигура B). Согласно (18) точке $u=0$, $v=0$ отвечает точка $x=-1$, $y=0$. Аналогично этому точке (1, 3) из B соответствует точка (10, 4) из A. Наоборот, взяв, например, $x=12$, $y=6$, найдем из (18), что $u=5$, $v=1$.

Иногда говорят, что формулы (17) *отображают* фигуру B на фигуру A. При этом точка M из A, соответствующая какой-нибудь точке N из B, называется *образом* этой последней, которая в свою очередь называется *прообразом* точки M. Если из B выделить какую-либо часть B_1, то множество A_1 образов всех точек из B_1 называется образом множества B_1. В частности, вся фигура A служит образом всей фигуры B.

Если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$, являющиеся правыми частями формул преобразования (17), непрерывны, то образом любой непрерывной линии, лежащей на фигуре B, будет служить непрерывная же линия (но находящаяся уже в A).

Возвращаясь к предыдущему примеру, рассмотрим хотя бы прямую $v=2$, лежащую на плоскости uv. Различные точки этой прямой характеризуются своими абсциссами u. Согласно (18) этим точкам отвечают точки (x, y), у которых

$$x=2u+5, \quad y=u+2. \tag{19}$$

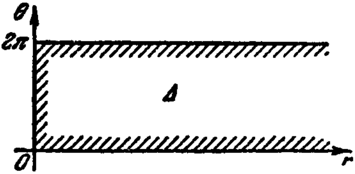


Рис. 344.

Эти уравнения представляют собой параметрические (роль параметра играет u) уравнения некоторой линии плоскости xy. Чтобы получить обыкновенное уравнение этой линии, надо, как всегда, исключить из (19) параметр u. Для этого умножим второе уравнение (19) на 2 и вычтем результат из первого уравнения (19). Это дает

$$x-2y=1, \tag{20}$$

т. е. образом прямой $v=2$ в плоскости xy служит прямая (20).

Аналогично этому, если (в том же примере) на плоскости uv взять линию

$$u=\varphi(t), \quad v=\psi(t), \tag{21}$$

то ее образом в плоскости xy будет служить линия

$$x=2\varphi(t)+3\psi(t)-1, \quad y=\varphi(t)+\psi(t).$$

В общем случае преобразования (17) образом линии (21), лежащей на плоскости uv, служит линия

$$x=x[\varphi(t), \psi(t)], \quad y=y[\varphi(t), \psi(t)].$$

Важным видом преобразования является переход к полярным координатам.

Мы знаем, что полярные координаты r и θ любой точки связаны с ее декартовыми координатами x и y формулами

$$\boxed{x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.} \tag{22}$$

Эти формулы сопоставляют числам r и θ числа x и y. Значит, здесь имеется отображение плоскости $r\theta$ на плоскость xy. Это отображение не взаимно однозначно, так как разным точкам (r, θ) и $(r, \theta+2\pi)$ отвечает одна и та же точка (x, y). Кроме того, целой прямой $r=0$ плоскости $r\theta$ отвечает единственная точка $(0, 0)$ плоскости xy. Наконец, ведь мы еще в гл. I условились не рассматривать отрицательных значений r. Все это показывает, что преобразование (22) обладает некоторыми особенностями, отличающими его от рассмотренного выше типа преобразований (17). Для упрощения дела обычно выделяют из плоскости $r\theta$ полуполосу Δ (рис. 344), определяемую неравенствами

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Формулы (22) отображают эту полуполосу на всю плоскость xy. В частности, всякая фигура B, лежащая в Δ, отображается на некоторую фигуру A плоскости xy. Если B не содержит точек прямой $\theta=2\pi$ (или точек прямой $\theta=0$), а также точек прямой $r=0$ (или содержит только одну такую точку), то отображение B на A будет взаимно однозначно.

Например, если $0<a<b$, $0<\alpha<\beta<2\pi$, то прямоугольник B плоскости $r\theta$, определяемый неравенствами $a\leqslant r\leqslant b$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$, взаимно однозначно отображается на фигуру A плоскости xy, состоящую из точек, для которых r и θ удовлетворяют тем же неравенствам, но служат уже полярными координатами (для точек B они служат координатами прямоугольными!). Обе фигуры A и B изображены на рис. 345.

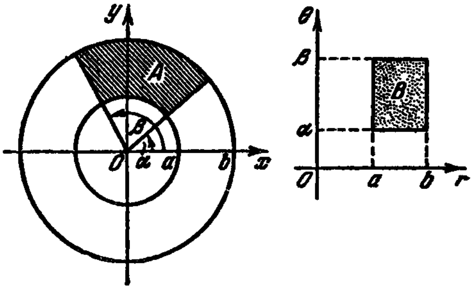


Рис. 345.

Вернемся к общему случаю преобразования (17) и займемся следующим вопросом. Пусть $N(u, v)$ — некоторая точка фигуры B плоскости uv, а $M(x, y)$ — соответствующая ей точка фигуры A. Возьмем на B весьма малую площадку B', содержащую точку N, и пусть A' — образ этой площадки. Предполагая функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ непрерывными, мы можем гарантировать, что и A' будет иметь весьма малые размеры. Пусть F_{uv} и F_{xy} — площади фигур B' и A'. Тогда отношение

$$\frac{F_{xy}}{F_{uv}} \tag{23}$$

показывает, как изменяется площадь вблизи точки N при отображении фигуры B на фигуру A. Указанное отношение, однако, зависит от выбора площадки B'. Чтобы избавиться от элемента случайности, привносимого этим выбором, устремляют диаметр d площадки B' к нулю, заставляя этим стягиваться B' в точку N и рассматривают предел

$$J=\lim_{d\to 0}\frac{F_{xy}}{F_{uv}}. \tag{24}$$

Этот предел называется *коэффициентом искажения площадей* в точке $N(u, v)$ при отображении (17).

Чтобы отдать себе отчет в том, насколько важен этот коэффициент, рассмотрим аналогичную ситуацию, возникающую при взаимно однозначном отображении прямой u в прямую x. Такое отображение, очевидно, задается формулой

$$x=x(u), \tag{25}$$

где функция возрастает или убывает. Если около точки u выделить малый отрезок $[u, u+\Delta u]$ длины Δu, то его образом будет служить отрезок с концами в точках $x(u)$ и $x(u+\Delta u)$. Его длина

$$|\Delta x| = |x(u+\Delta u) - x(u)|,$$

и аналогом отношения (23) является частное

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta u}\right|.$$

Предел же (24) в нашем случае заменяется пределом

$$\lim_{\Delta u \to 0}\left|\frac{\Delta x}{\Delta u}\right|,$$

т. е. модулем производной $x'(u)$. Итак, предел (24) есть аналог такого фундаментального понятия, как производная! Попутно мы получили новый подход к тому, что такое производная: это *коэффициент искажения длин* при преобразовании (25).

Найдем предел (24) для преобразования (22) полярных координат в декартовы. С этой целью рассмотрим в плоскости $r\theta$ прямоугольник с вершинами в точках

$$(r,\ \theta),\ (r+\Delta r,\ \theta),\quad (r,\ \theta+\Delta\theta),\quad (r+\Delta r,\ \theta+\Delta\theta)\quad (\Delta\theta > 0,\ \Delta r > 0)$$

(рис. 346). Его площадь

$$F_{r\theta} = \Delta r\,\Delta\theta.$$

Образом нашего прямоугольника при преобразовании (22) будет заштрихованный на рис. 347 криволинейный четырехугольник. Длины его прямолинейных сторон равны Δr, а длина дуги радиуса r равна $r\Delta\theta$.

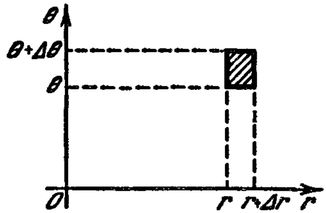


Рис. 346.

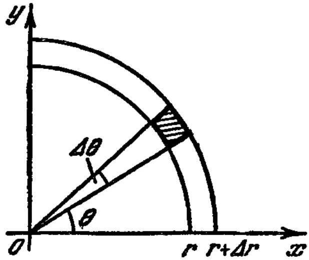


Рис. 347.

Принимая приближенно указанный четырехугольник за прямоугольник со сторонами Δr и $r\Delta\theta$, получаем

$$F_{xy} \cong r\,\Delta r\,\Delta\theta.$$

Отсюда вытекает приближенное равенство

$$\frac{F_{xy}}{F_{r\theta}} \cong r,$$

тем более точное, чем меньше Δr и $\Delta\theta$. Устремляя Δr и $\Delta\theta$ к нулю, находим

$$\lim \frac{F_{xy}}{F_{r\theta}} = r,$$

т. е.

$$\boxed{J = r.} \tag{26}$$

Значит, *коэффициент искажения площадей при переходе от полярных координат к декартовым равен r*. Этот результат рекомендуется запомнить.

Теперь мы рассмотрим вопрос о нахождении J в общем случае любого *) преобразования (17). Для этого возьмем в плоскости uv прямоугольный треугольник (рис. 348) с вершинами

$$N_1(u, v), \quad N_2(u+\Delta u, v), \quad N_3(u, v+\Delta v) \quad (\Delta u > 0,\ \Delta v > 0).$$

Его площадь, очевидно, такова:

$$F_{uv} = \frac{1}{2}\Delta u\,\Delta v.$$

Преобразование (17) переводит точки N_1, N_2, N_3 в точки

$$M_1[x(u, v),\ y(u, v)], \quad M_2[x(u+\Delta u, v),\ \ y(u+\Delta u, v)],$$
$$M_3[x(u, v+\Delta v),\ \ y(u, v+\Delta v)],$$

а прямолинейные отрезки N_1N_2, N_2N_3, N_3N_1 — в дуги $\overset{\frown}{M_1M_2}$, $\overset{\frown}{M_2M_3}$, $\overset{\frown}{M_3M_1}$, т. е. треугольник $N_1N_2N_3$ переходит в криволинейный треугольник $M_1M_2M_3$ (рис. 349). Если Δu и Δv весьма малы, то дуги $\overset{\frown}{M_1M_2}$, $\overset{\frown}{M_2M_3}$, $\overset{\frown}{M_3M_1}$ тоже

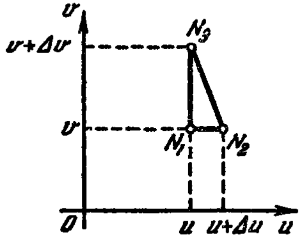


Рис. 348.

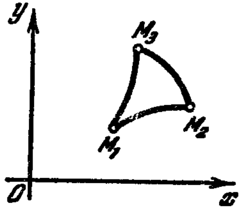


Рис. 349.

очень малы и можно приближенно считать их прямолинейными. Кроме того, при малом Δu с большой степенью точности можно принять

$$x(u+\Delta u, v) - x(u, v) = x'_u\,\Delta u.$$

Аналогично этому будет $x(u, v+\Delta v) = x(u, v) + x'_v\Delta v$, $y(u+\Delta u, v) = y(u, v) + y'_u\Delta u$, $y(u, v+\Delta v) = y(u, v) + y'_v\,\Delta v$.

Таким образом, полагая для краткости

$$x(u, v) = x, \quad y(u, v) = y,$$

получаем приближенные выражения координат точек M_1, M_2, M_3:

$$M_1(x, y), \quad M_2(x+x'_u\,\Delta u,\ y+y'_u\,\Delta u), \quad M_3(x+x'_v\,\Delta v,\ y+y'_v\,\Delta v).$$

Чтобы найти площадь F_{xy} треугольника $M_1M_2M_3$, перенесем начало координат в точку M_1. Тогда новые координаты наших точек будут

$$M_1(0, 0), \quad M_2(x'_u\,\Delta u,\ y'_u\,\Delta u), \quad M_3(x'_v\,\Delta v,\ y'_v\,\Delta v).$$

---

*) Впрочем, мы предполагаем существование непрерывных x'_u, x'_v, y'_u, y'_v.

По известному из аналитической геометрии правилу [см. гл. I, § 1, п° 5, формула (6)] для нахождения F_{xy} выписываем в столбец координаты точек M_1, M_2, M_3, M_1:

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ x'_u\,\Delta u & y'_u\,\Delta u \\ x'_v\,\Delta v & y'_v\,\Delta v \\ 0 & 0 \end{array}$$

Перемножая эти числа по схеме, указанной стрелками, найдем

$$F_{xy}=\frac{1}{2}\left(x'_u y'_v-x'_v y'_u\right)\Delta u\,\Delta v.$$

Отсюда

$$\frac{F_{xy}}{F_{uv}}=x'_u y'_v-x'_v y'_u.$$

Из самого вывода, однако, видно, что это равенство лишь приближенное, но тем более точное, чем меньшими взяты Δu и Δv. Стало быть, устремляя Δu и Δv к нулю, находим

$$J=\lim\frac{F_{xy}}{F_{uv}}=x'_u y'_v-x'_v y'_u.$$

Последнее равенство можно записать и так:

$$\boxed{J=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.} \tag{27}$$

Определитель, стоящий в правой части, называется *определителем Якоби* или *якобианом*. Следует, впрочем, вспомнить, что вычисление площади треугольника по использованному нами правилу иногда приводит к отрицательному результату и что в этом случае знак минус просто отбрасывается. Поэтому *коэффициент искажения площадей J равен абсолютной величине якобиана* (27).

Пример. Если

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

то

$$x'_r=\cos\theta,\quad x'_\theta=-r\sin\theta,\quad y'_r=\sin\theta,\quad y'_\theta=r\cos\theta$$

и поэтому

$$J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r,$$

т. е. мы снова получаем формулу (26).

п° 8. Замена переменных в двойном интеграле. Пусть требуется найти интеграл

$$I=\iint\limits_A f(x,\,y)\,dx\,dy.$$

Предположим, что фигура A связана взаимно однозначно с фигурой B плоскости uv при помощи формул

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{17}$$

Будем предполагать, что у функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ существуют непрерывные частные производные по u и v.

Составим интегральную сумму, пределом которой служит интеграл I. Для этого раздробим фигуру A сетью каких-то линий на ячейки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ввиду взаимно однозначного соответствия между A и B каждой из упомянутых линий будет отвечать некоторая линия на фигуре B. В связи с этим

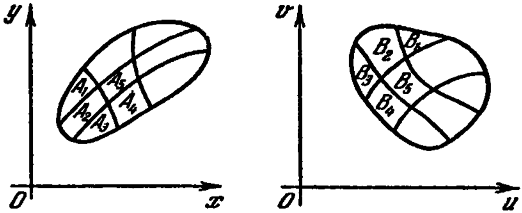


Рис. 350.

и B разобьется на ячейки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (рис. 350). Выбор точки (x_k, y_k) на ячейке A_k равносилен выбору точки (u_k, v_k) на соответствующей ячейке B_k, причем

$$x_k = x(u_k, v_k), \quad y_k = y(u_k, v_k).$$

Пусть $J(u, v)$ — коэффициент искажеиия площадей при преобразовании (17). Если диаметр ячейки B_k мал, то мал диаметр и соответствующей ячейки A_k. Отношеиие площадей $F_{xy}^{(k)}$ и $F_{uv}^{(k)}$ этих ячеек при стягивании ячейки B_k в какую-либо точку стремится к значению коэффициента $J(u, v)$ в этой точке. Значит, прн малом диаметре B_k приближенное равенство

$$\frac{F_{xy}^{(k)}}{F_{uv}^{(k)}} \cong J(u_k, v_k)$$

будет обладать хорошей точностью.

Стало быть, когда рангн дроблений обеих фигур A и B малы, интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) F_{xy}^{(k)}$$

можно приближенно заменить суммой

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n} f[x(u_k, v_k), y(u_k, v_k)] J(u_k, v_k) F_{uv}^{(k)}.$$

Но эта последняя сумма есть не что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$I' = \iint_B f[x(u, v), y(u, v)] J(u, v)\, du\, dv$$

и при малом ранге дробления фигуры B почти равна этому интегралу. Итак, если ранги дробления обеих фигур A и B малы, то справедлива цепь приближенных равенств

$$I \cong \sigma \cong \sigma' \cong I'.$$

Отсюда верно приближенное равенство

$$I \cong I', \tag{28}$$

причем его точность тем лучше, чем меньше упомянутые ранги. Но (внимание!) ведь I и I' — некоторые постоянные числа, совершенно не зависящие ни от каких дроблений. Значит, равенство (28) абсолютно точное. Таким образом, мы пришли к формуле замены переменных в двойном интеграле

$$\boxed{\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_B f[x(u, v), y(u, v)]\,J(u, v)\,du\,dv.} \tag{29}$$

Формулу (29) легко запомнить. Для этого замечаем, что ее правая часть получается из левой в результате трех процедур: 1) x и y заменяются их выражениями (17), 2) $dx\,dy$ заменяется на $J(u, v)\,du\,dv$, 3) область A заменяется областью B. Упомянем еще, что $J(u, v)$ — абсолютная величина якобиана

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

и что выражение

$$J(u, v)\,du\,dv$$

называют „элементом площади в криволинейных координатах".

Если, в частности, преобразование состоит в переходе к полярным координатам, то формула (29) принимает вид

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{30}$$

Ввиду того, что переход к полярным координатам обладает некоторыми особенностями, связанными с возможными нарушениями взаимной однозначности соответствия, строгое обоснование формулы (30) потребовало бы небольших дополнительных разъяснений, но мы не будем на них останавливаться. Заметим, что, применяя формулу (30), обычно не чертят фигуры B плоскости uv, а пределы изменения переменных r и θ устанавливают непосредственно по фигуре A. В связи с этим и саму формулу (30) часто пишут в виде

$$\boxed{\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_A f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.} \tag{31}$$

При этом надо помнить, что для правой части формулы (31) числа r и θ суть уже не декартовы [как в (30) для фигуры B], а полярные координаты точек фигуры A.

Примеры. 1) Найти

$$I=\iint\limits_{A} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

где область A ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $x+y=a$, $x+y=b$, причем $0<a<b$ (рис. 351).

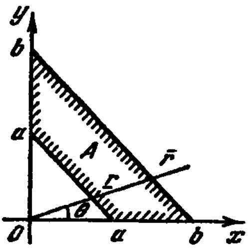


Рис. 351.

Решение. Перейдем к полярным координатам. Так как из формул

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$$

следует, что $x^2+y^2=r^2$, то

$$I=\iint\limits_{A} \frac{r\,dr\,d\theta}{r^3}=\iint\limits_{A} \frac{dr\,d\theta}{r^2}.$$

Запишем I в виде повторного интеграла

$$I=\int\limits_{?}^{?} d\theta \int\limits_{?}^{?} \frac{dr}{r^2}.$$

Непосредственно из рисунка видно, что в области A полярный угол θ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Это и будут пределы внешнего интеграла. Чтобы найти пределы внутреннего интеграла, проведем из начала координат луч под углом θ к оси Ox и найдем, при каких значениях r этот луч войдет в область A и выйдет из нее. Ясно, что на прямой $x+y=a$ координаты r и θ связаны соотношением

$$r\cos\theta+r\sin\theta=a.$$

Значит, „r входа" будет

$$\underline{r}=\frac{a}{\cos\theta+\sin\theta}.$$

Точно так же „r выхода" будет

$$\bar{r}=\frac{b}{\cos\theta+\sin\theta}.$$

Отсюда

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_{\underline{r}}^{\bar{r}} \frac{dr}{r^2}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{r}\right]_{\underline{r}}^{\bar{r}} d\theta.$$

Но

$$\left[-\frac{1}{r}\right]_{\underline{r}}^{\bar{r}}=\frac{1}{\underline{r}}-\frac{1}{\bar{r}}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{a}-\frac{\cos\theta+\sin\theta}{b}=\frac{b-a}{ab}(\sin\theta+\cos\theta).$$

Стало быть,

$$I=\frac{b-a}{ab}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta=2\,\frac{b-a}{ab}.$$

2) Найти

$$I=\iint\limits_A (x+y)\,dx\,dy,$$

где A — фигура, ограниченная линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=0$, причем всюду в A $y>0$ (рис. 352).

Решение. Переходя к полярным координатам, находим

$$I=\iint\limits_A (r\cos\theta+r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Отсюда

$$I=\int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_1^2 r^2(\sin\theta+\cos\theta)\,dr=\frac{7}{3}\int\limits_0^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta=\frac{14}{3}.$$

Отдадим себе отчет в том, почему в рассмотренных примерах переход к полярным координатам упростил вычисления. Дело в том, что в первом примере подынтегральная функция

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

в результате этого перехода приняла вид $\frac{1}{r^3}$ и после умножения на якобиан r превратилась в $\frac{1}{r^2}$. Иными словами, переход к полярным координатам упростил подынтегральную функцию и при этом не усложнил существенно области интегрирования. Полезно запомнить, что переход к полярным координатам всегда упрощает подынтегральную функцию вида

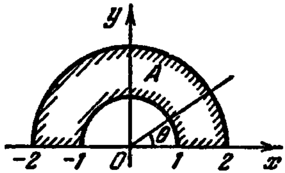


Рис. 352.

$$f(x^2+y^2). \tag{32}$$

Во втором примере подынтегральная функция не имела указанного вида и не упростилась. Но она и не очень усложнилась, а зато область интегрирования превратилась в прямоугольник $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $1\leqslant r\leqslant 2$, т. е. упростилась. Так обстоит дело всегда, когда областью интегрирования служит круг $x^2+y^2\leqslant R^2$, или кольцо $R_1^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R_2^2$, или часть такого кольца, ограниченная лучами $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ и т. п.

Особенно полезен бывает переход к полярным координатам, когда и подынтегральная функция имеет вид (32) и область интегрирования принадлежит указанному выше типу.

3) Найти

$$I=\iint\limits_A \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2},$$

если A — круг $x^2+y^2\leqslant 1$.

Здесь мы имеем дело именно с интегралами только что указанного вида. Переходя к полярным координатам, находим

$$I=\iint\limits_A \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2}=\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \frac{r\,dr}{1+r^2}.$$

Но

$$\int_0^1 \frac{r\,dr}{1+r^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Значит, $I = \pi \ln 2$.

В заключение рассмотрим пример применения криволинейных координат, отличных от полярных.

4) Найти

$$I = \iint_A x^2 y\,dx\,dy,$$

если область A лежит в первом координатном угле и ограничена прямыми $y = ax$, $y = bx$ $(0 < a < b)$ и гиперболами $xy = p$, $xy = q$ $(0 < p < q)$ (рис. 353).

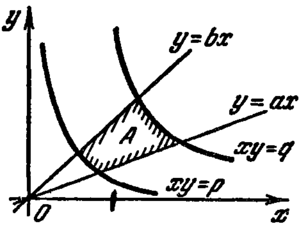


Рис. 353.

Решение. Через каждую точку фигуры A проходит одна и только одна прямая $y = ux$, а также одна и только одна гипербола $xy = v$. Задание этих прямой и гиперболы, т. е. значений u и v, определяет точку фигуры A. Значит, числа u и v можно принять за криволинейные координаты точек фигуры A. Областью изменения u и v в плоскости uv будет при этом служить прямоугольник

$$B\,(a \leqslant u \leqslant b,\ p \leqslant v \leqslant q),$$

т. е. фигура гораздо более простая, чем A. Поэтому переход к координатам u и v целесообразен.

Для того чтобы произвести этот переход, выразим x и y через u и v из уравнений

$$y = ux, \quad xy = v. \tag{33}$$

Перемножая эти равенства, получаем

$$xy^2 = xuv,$$

откуда (ведь $x \neq 0$) $y^2 = uv$ и (поскольку $y > 0$)

$$y = \sqrt{uv}.$$

Подставляя это во второе из уравнений (33), найдем

$$x\sqrt{uv} = v, \text{ т. е. } x = \sqrt{\frac{v}{u}}.$$

Итак, формулы преобразования таковы:

$$x = u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}, \quad y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}.$$

Подынтегральная функция $x^2 y$ при переходе к новым координатам примет вид

$$u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}}.$$

Найдем теперь якобиан преобразования. Так как

$$x'_u = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}}, \qquad x'_v = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}},$$

$$y'_u = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}, \qquad y'_v = \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}},$$

то

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}} & u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \\ u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2u}.$$

Это величина отрицательная. Коэффициент же искажения площадей J равен модулю якобиана, т. е.

$$J = \frac{1}{2u}.$$

Сопоставляя все сказанное, получим

$$I = \iint_B u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{du\,dv}{2u} = \frac{1}{2}\iint_B u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}\,du\,dv,$$

т. е.

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b du \int_p^q u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{3}{2}}\,dv = \frac{2}{5}\,\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}\left(\sqrt{q^5}-\sqrt{p^5}\right).$$

n° 9. Интеграл Эйлера. В теории вероятностей большое значение имеет интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx, \tag{34}$$

вычисленный впервые Эйлером. Задача нахождения этого интеграла сложна потому, что неопределенный интеграл

$$\int e^{-x^2}\,dx \tag{35}$$

неэлементарен. В настоящее время существует много способов вычисления интеграла (34). Мы изложим способ Пуассона.

Пусть

$$H = \iint_A e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

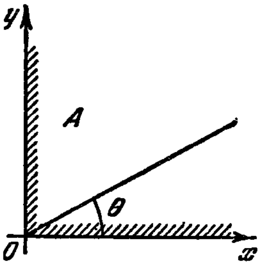


Рис. 354.

где A — весь первый координатный угол *) (рис. 354). Если записать H в виде повторного интеграла, то мы получим

$$H = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy.$$

*) См. вторую сноску на стр. 599.

Но

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy = \int_0^{+\infty} (e^{-x^2})(e^{-y^2})\,dy = e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy.$$

Так как определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, то

$$\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = I,$$

и потому

$$H = \int_0^{+\infty} Ie^{-x^2}\,dx = I\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = I^2. \tag{36}$$

Если же перейти к полярным координатам, то

$$H = \iint_A re^{-r^2}\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr.$$

Благодаря наличию множителя r в составе подынтегральной функции интеграл

$$\int re^{-r^2}\,dr$$

в отличие от (35) берется в конечном виде. Именно,

$$\int re^{-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int e^{-r^2}\,d(-r^2) = -\frac{1}{2}e^{-r^2} + C.$$

Значит,

$$\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr = \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Сопоставляя это с (36), находим

$$I^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Но ведь $I > 0$, так как это интеграл от положительной функции и нижний предел интегрирования меньше верхнего. Поэтому

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

т. е.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.} \tag{37}$$

Заметим, что интеграл (34) представляет собой площадь фигуры, ограниченной слева прямой $x=0$, снизу прямой $y=0$, сверху лннией $y=e^{-x^2}$ и ничем не ограниченной справа (эта фигура заштрихована на рис. 355).

Так как вся фнгура, нзображениая на рис. 355, симметрнчна относительно оси Oy (ибо в уравнение $y=e^{-x^2}$ координата x входнт только в квадрате), то площадь этой фнгуры вдвое больше площадн ее заштрихованной части. Из этого и из (37) следует, что

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.}$$

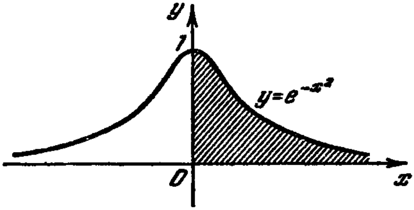


Рис. 355.

§ 2. Тройной интеграл

n° 1. Определение тройного интеграла. Его механический смысл. Выше мы уже упоминали, что тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ по некоторому телу T определяется по той же схеме, что и обыкновенный определенный интеграл или двойной интеграл. Именно, тело T с помощью сети поверхностей разбивается на n „ячеек“ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ с объемами $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и диаметрами $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Наибольший из диаметров d_k обозначается через λ и называется рангом произведенного дробления. В каждой ячейке T_k берется по точке (x_k, y_k, z_k) и составляется интегральная сумма

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,V_k.$$

Конечный предел этой суммы при $\lambda \to 0$ (он заведомо существует, если $f(x, y, z)$ непрерывна, но мы этого не доказываем) называется *тройным интегралом* и обозначается одним из символов

$$\iiint\limits_T (x, y, z)\,dV, \quad \iiint\limits_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Если по телу T распределена масса M с плотностью $p(x, y, z)$ в точке (x, y, z), то

$$M=\iiint\limits_T p(x, y, z)\,dV.$$

Поскольку всякую *) функцию $f(x, y, z)$ можно считать плотностью некоторого распределения массы, то на любой интеграл

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)\,dV$$

*) Мы уже говорили, что функцию, принимающую отрицательные значения, можно рассматривать хотя бы как плотность электричества.

можно смотреть, как на массу. Это замечание мы используем для вывода формулы вычисления тройного интеграла.

п° 2. Вычисление тройного интеграла. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I=\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dV$$

по телу T, ограниченному снизу поверхностью $z=\underline{z}(x, y)$, а сверху поверхностью $z=\bar{z}(x, y)$, где $\underline{z}(x, y)$ и $\bar{z}(x, y)$ — две непрерывные функции, заданные в некоторой области A плоскости xy, причем $\underline{z}(x, y)\leqslant\bar{z}(x, y)$. Пусть, наконец, с боков тело T ограничено цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит контур области A (рис. 356).

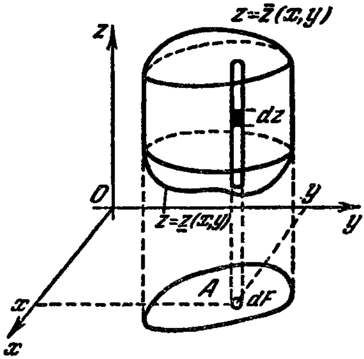


Рис. 356.

Мы будем считать $f(x, y, z)$ плотностью тела T в точке (x, y, z), а интеграл I — массой этого тела. Для вычисления этой массы выделим из фигуры A элементарную площадку с координатами (x, y) и площадью dF. Сделав это, вообразим себе вертикальную трубочку, ограниченную цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит контур нашей элементарной площадки. Эта трубочка пронизывает тело T и вырезает из него элементарный столбик (см. рис. 356). Выделим из этого столбика отрезок, находящийся на высоте z от плоскости xy и имеющий длину dz. Этот отрезок имеет координаты (x, y, z) и объем $dF\,dz$. Значит, масса отрезка равна произведению

$$f(x, y, z)\,dF\,dz. \tag{1}$$

Чтобы найти массу всего элементарного столбика, надо просуммировать все произведения (1), сохраняя постоянными координаты x и y и площадь dF и меняя z от $\underline{z}(x, y)$ до $\bar{z}(x, y)$. Стало быть, масса столбика выразится интегралом

$$\int\limits_{\underline{z}(x, y)}^{\bar{z}(x, y)} f(x, y, z)\,dF\,dz. \tag{2}$$

Чтобы ярче подчеркнуть, что dF здесь п о с т о я н н о, перепишем интеграл (2) в виде

$$\left(\int\limits_{\underline{z}(x,\, y)}^{\bar{z}(x,\, y)} f(x, y, z)\, dz \right) dF. \tag{3}$$

Для нахождения массы всего тела T, т. е. интересующего нас тройного интеграла I, надо просуммировать выражения (3) для всех площадок dF. Это приводит к равенству

$$\boxed{\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\, dV = \iint\limits_{A} \left(\int\limits_{\underline{z}(x,\, y)}^{\bar{z}(x,\, y)} f(x, y, z)\, dz \right) dF,} \tag{4}$$

представляющему удобную формулу для вычисления интеграла I. Во многих случаях, однако, формулу (4) можно записать в более простом виде. Действительно, если область A ограничена линиями

$$x = a, \quad x = b, \quad y = \underline{y}(x), \quad y = \bar{y}(x)$$

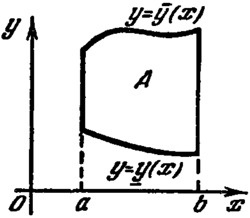


Рис. 357.

(рис. 357), то двойной интеграл от любой функции $\Phi(x, y)$ по области A представим формулой

$$\iint\limits_{A} \Phi(x, y)\, dF = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} \Phi(x, y)\, dy.$$

Применяя эту формулу к правой части (4), получим окончательно

$$\boxed{\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\, dV = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\underline{y}(x)}^{\bar{y}(x)} dy \int\limits_{\underline{z}(x,\, y)}^{\bar{z}(x,\, y)} f(x, y, z)\, dz.} \tag{5}$$

Правая часть (5) называется *повторным* интегралом.

П р и м е р ы. 1) Найти

$$I = \iiint\limits_{T} 48\, xyz\, dV,$$

где T — та часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, которая лежит в первом координатном угле (рис. 358).

Здесь

$$a = \underline{y}(x) = \underline{z}(x, y) = 0,$$

$$b = R, \quad \bar{y}(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \bar{z}(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Значит,

$$I=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 48xyz\,dz.$$

Далее находим

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 48xyz\,dz=24xy\,[z^2]_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=24xy\,(R^2-x^2-y^2).$$

После этого получаем

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} 24xy\,(R^2-x^2-y^2)\,dy=$$
$$=24x\left[(R^2-x^2)\,\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}=6x\,(R^2-x^2)^2.$$

Отсюда

$$I=\int_0^R 6x\,(R^2-x^2)^2\,dx=-3\int_0^R (R^2-x^2)^2\,d\,(R^2-x^2)=R^6.$$

2) Привести к повторному интеграл

$$I=\iiint_T f(x,\ y,\ z)\,dV,$$

где T — тетраэдр, ограниченный плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (рис. 359).

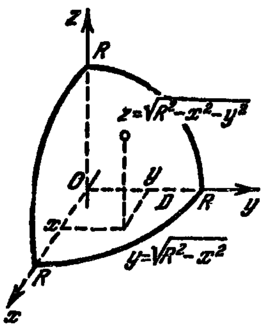


Рис. 358.

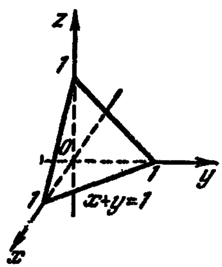


Рис. 359.

Здесь $a=\underline{y}(x)=\underline{z}(x,\ y)=0$, $b=1$, $\bar{y}(x)=1-x$, $\bar{z}(x,\ y)=$ $=1-x-y$. Значит,

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

3) То же, если T ограничено поверхностями $x=2$, $x=3$, $y^2+z^2=1$.

Отметим, что $y^2+z^2=1$ является уравнением цилиндрической поверхности, у которой образующие параллельны оси Ox, а направляющей служит окружность $y^2+z^2=1$, лежащая в плоскости yz (рис. 360). Поэтому

$$I=\int_2^3 dx \int_{-1}^{+1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z)\,dz.$$

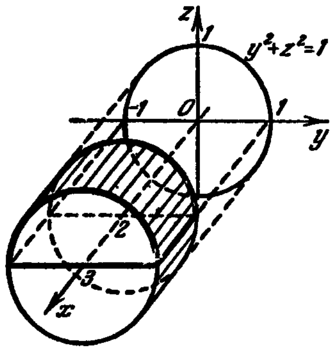


Рис. 360.

n°3. Механические приложения тройных интегралов. Те механические задачи, которые для плоских фигур решались при помощи двойных интегралов, для пространственных тел требуют привлечения уже интегралов тройных. Мы имеем в виду нахождение статических моментов, моментов инерции и центров тяжести.

Пусть $p(x, y, z)$ — плотность материального тела T в точке (x, y, z). Тогда масса dM элементарного объема dV, содержащего точку (x, y, z), будет равна

$$dM=p(x, y, z)\,dV.$$

Отсюда вытекает уже указанное выше значение всей массы M тела T

$$M=\iiint_T dM=\iiint_T p(x, y, z)\,dV.$$

Статические моменты элементарного объема относительно плоскостей $z=0$, $x=0$, $y=0$ („элементарные статические моменты") равны соответственно

$$dS_{xy}=z\,dM,\ dS_{yz}=x\,dM,\ dS_{zx}=y\,dM, \tag{6}$$

откуда следует соотношение

$$\boxed{S_{xy}=\iiint_T z\,dM=\iiint_T zp(x, y, z)\,dV}$$

и аналогичные выражения для S_{yz} и S_{zx}. Координаты центра тяжести тела T находятся по известным формулам

$$x_C=\frac{S_{yz}}{M},\quad y_C=\frac{S_{zx}}{M},\quad z_C=\frac{S_{xy}}{M}. \tag{7}$$

Если тело однородно, то $\rho(x, y, z) = \mathrm{const}$. Этот постоянный множитель выносится за знаки тех тройных интегралов, которые стоят в числителях и знаменателе дробей (7), и сами дроби принимают вид

$$x_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_T x\,dV, \quad y_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_T y\,dV, \quad z_C = \frac{1}{V}\iiint\limits_T z\,dV.$$

Моменты инерции элемента dV, содержащего точку (x, y, z), относительно координатных плоскостей отличаются от выражений (6) тем, что множители z, x, y заменяются их квадратами. Стало быть,

$$\boxed{I_{xy} = \iiint\limits_T z^2\,dM, \quad I_{yz} = \iiint\limits_T x^2\,dM, \quad I_{zx} = \iiint\limits_T y^2\,dM.} \tag{8}$$

Заметим теперь, что расстояние d точки (x, y, z) от оси Oz равно (рис. 361)

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда момент инерции тела T относительно оси Oz равен

$$\boxed{I_z = \iiint\limits_T (x^2 + y^2)\,dM} \tag{9}$$

и аналогичные формулы верны для I_x и I_y.

Сопоставляя (8) и (9), находим

$$\boxed{I_z = I_{zx} + I_{yz},}$$

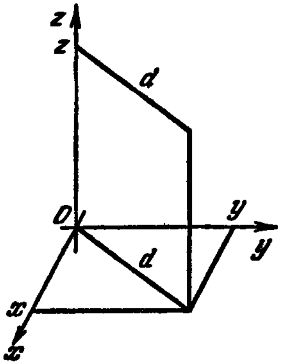


Рис. 361.

т. е. *момент инерции тела относительно какой-либо оси равен сумме моментов инерции этого тела относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей, содержащих упомянутую ось.*

Заметим, далее, что расстояние r точки (x, y, z) от начала координат равно $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Отсюда (поскольку $dI_0 = r^2 dM$) следует

$$\boxed{I_0 = \iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dM.} \tag{10}$$

Сопоставляя (10) и (8), получаем

$$\boxed{I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx},}$$

т. е. *момент инерции тела относительно какой-либо точки равен сумме моментов инерции этого тела относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся в упомянутой точке.*

Наконец, из сопоставления формул (9) и (10) следует, что

$$\boxed{I_0=\frac{1}{2}(I_x+I_y+I_z),}$$

т. е. *момент инерции тела относительно точки равен полусумме его моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через точку.*

Мы видим, с какой простотой тройные интегралы позволяют устанавливать важные соотношения между механическими характеристиками тел. Что касается фактического вычисления моментов и нахождения центров тяжести, то в большинстве простых случаев к тройным интегралам прибегать не приходится, а удается обойтись двойными или даже обыкновенными определенными интегралами.

n° 4. Замена переменных в тройных интегралах. Пусть тело A, находящееся в пространстве xyz, связано взаимно однозначно с телом B, находящимся в пространстве uvw, при помощи формул

$$x=x(u,\ v,\ w),\quad y=y(u,\ v,\ w),\quad z=z(u,\ v,\ w). \tag{11}$$

Тогда, аналогично плоскому случаю, можно ввести понятие *коэффициента искажения объемов* при преобразовании (11). Именно, под этим понимается предел отношения объемов двух взаимно соответствующих бесконечно малых *) тел, стягивающихся в точки, соответствующие друг другу в пространствах xyz и uvw:

$$J=\lim\frac{V_{xyz}}{V_{uvw}}.$$

Можно доказать, что J равен абсолютной величине определителя Якоби

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

Заметив это, буквальным повторением рассуждений, проведенных для плоского случая, получаем **формулу замены переменных в тройном интеграле**

$$\iiint\limits_A f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$
$$=\iiint\limits_B f[x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)]\,J\,du\,dv\,dw. \tag{12}$$

Как и в плоском случае, числа $u,\ v,\ w$ называются криволинейными координатами точки $(x,\ y,\ z)$. На практике часто встречаются два вида этих координат.

*) То есть таких, диаметры которых стремятся к нулю.

I. *Цилиндрические координаты.* Цилиндрическими координатами точки (x, y, z) называются числа ρ, φ, z, где ρ и φ — полярные координаты точки (x, y) (рис. 362).

Ясно, что здесь

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z$$

и потому якобиан этого преобразования

$$\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Стало быть, при переходе к цилиндрическим координатам общая формула (12) принимает вид *)

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_B f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Впрочем, обычно тела B не изображают, а пределы изменения r, φ, z

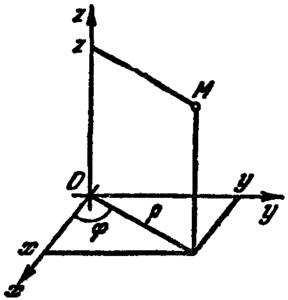


Рис. 362.

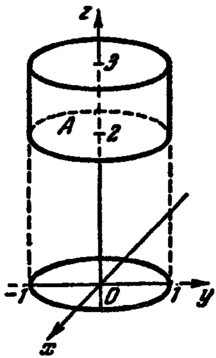


Рис. 363.

определяют непосредственно по телу A, поэтому предыдущую формулу пишут в виде

$$\boxed{\iiint\limits_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_A f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.} \tag{13}$$

Пример. Найти

$$I = \iiint\limits_A (x^2 + y^2 + z)^{20}\,dx\,dy\,dz,$$

если A — цилиндр, ограниченный поверхностью $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 2$, $z = 3$ (рис. 363).

---

*) Соответствие между пространствами xyz и $\rho\varphi z$ (как и в случае полярных координат на плоскости) не взаимно однозначно, но мы оставляем рассмотрение этого вопроса в стороне.

Согласно (13)

$$I=\iiint\limits_{A}(\rho^2+z)^{20}\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

Из чертежа ясно, что

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{1}d\rho\int\limits_2^{3}(\rho^2+z)^{20}\,\rho\,dz.$$

Но

$$\int\limits_2^3(\rho^2+z)^{20}\,\rho\,dz=\frac{\rho}{21}\left[(\rho^2+3)^{21}-(\rho^2+2)^{21}\right].$$

Отсюда

$$I=\frac{2\pi}{21}\int\limits_0^1\left[(\rho^2+3)^{21}-(\rho^2+2)^{21}\right]\rho\,d\rho=\frac{\pi}{21\cdot 22}\left[(\rho^2+3)^{22}-(\rho^2+2)^{22}\right]_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{462}\left(4^{22}-3^{22}-3^{22}+2^{22}\right).$$

Получить это без перехода к цилиндрическим координатам было бы затруднительно.

II. *Сферические координаты.* Сферическими координатами точки $M(x, y, z)$ называются числа r, θ, φ, где θ — угол между осью Oz и радиус-вектором $\overline{OM}$ точки M, r — длина этого радиуса-вектора, т. е. расстояние между началом координат O и точкой M, а φ — двугранный угол между полуплоскостью с ребром Oz, содержащей положительную часть оси Ox, и полуплоскостью с ребром Oz, содержащей точку M. Из рис. 364 видно, что

$$OP=r\sin\theta.$$

Так как x и y — проекции $\overline{OP}$ на оси Ox и Oy, а z — проекция $\overline{OM}$ на ось Oz, то

$$\boxed{\begin{gathered}x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\\ z=r\cos\theta.\end{gathered}}\tag{14}$$

Полезно отметить также очевидное соотношение

$$\boxed{r^2=x^2+y^2+z^2.}$$

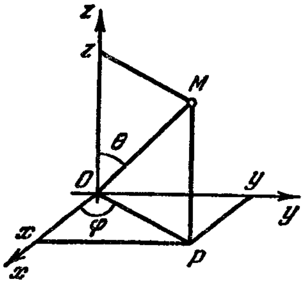


Рис. 364.

Соответствие, даваемое формулами (14), не взаимно однозначно. Чтобы получить все пространство xyz, достаточно изменять точку (r, θ, φ) в области, определяемой неравенствами

$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

но и при этом ограничении мы не добиваемся взаимной однозначности, так как плоскости $r=0$ пространства $r\theta\varphi$ в пространстве xyz отвечает одна точка $(0,\ 0,\ 0)$, а точкам $(r,\ \theta,\ 0)$ и $(r,\ \theta,\ 2\pi)$ отвечает одна и та же точка $(r\sin\theta,\ 0,\ r\cos\theta)$. Связанные с этими нарушениями взаимной однозначности осложнения не мешают, однако, применимости к нашему случаю общей формулы (12). Мы примем это без доказательства.

Найдем якобиан Δ преобразования (14). Он имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\Delta = r^2 \begin{vmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

(Мы вынесли за знак определителя множители r из 2-го и 3-го столбцов. Кроме того, множитель $\sin\theta$ мы перенесли из 3-го столбца в 1-й.) Прибавим к первому столбцу второй, умноженный на $\cos\theta$. Это дает

$$\Delta = r^2 \begin{vmatrix} \cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Разлагая Δ по элементам 3-й строки, находим

$$\Delta = r^2\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix},$$

т. е. $\Delta = r^2\sin\theta$. Коэффициент искажения объемов равен абсолютной величине Δ. Но $\Delta \geqslant 0$ (ибо $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$). Стало быть,

$$\boxed{J = r^2\sin\theta}$$

и формула (12) принимает вид

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \\ = \iiint\limits_B f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Так как тела B обычно не изображают, а пределы изменения r, θ и φ определяют непосредственно по телу A, то предыдущую формулу записывают в виде

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint\limits_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \\ &\qquad = \iiint\limits_A f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.\end{aligned}} \tag{15}$$

Формулой (15) удобно пользоваться тогда, когда $f(x, y, z)$ имеет форму $f(x^2+y^2+z^2)$, а также тогда, когда областью A служит шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ или какая-нибудь простая часть такого шара и т. п.

Пример. Найти

$$I=\iiint\limits_{A}\frac{dx\,dy\,dz}{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

если A — шар $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

По формуле (15)

$$I=\iiint\limits_{A}\frac{r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi}{1+r^3}.$$

Переходя к повторному интегралу, получаем

$$I=\int\limits_0^{\pi}d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\frac{r^2\sin\theta\,dr}{1+r^3}.$$

Опуская простые пояснения, находим

$$I=\frac{4\pi}{3}\ln 2.$$

§ 3. Криволинейные интегралы

n° 1. Криволинейный интеграл первого рода. В этом параграфе мы остановимся еще на двух разновидностях интеграла: криволинейных интегралах первого и второго родов. Начнем с интегралов первого рода.

Пусть на пространственной кривой K непрерывным образом распределена масса с плотностью *) $\rho(x, y, z)$. Если эта плотность нам известна, то общее количество M массы можно найти тем же методом, который мы многократно применяли в аналогичных случаях. Именно, мы разбиваем кривую K на n малых дуг $s_1, s_2, \ldots, s_n$, на каждой из которых берем по точке. Пусть $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ — точка, выбранная на дуге s_k. Тогда масса дуги s_k приближенно равна произведению $\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,s_k$, а для всей массы M получается приближенное выражение

$$\sum_{k=1}^{n}\rho(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,s_k.$$

Точное значение массы будет пределом этого выражения, когда наибольшая из дуг s_k стремится к нулю.

Подобного рода пределы и называются криволинейными интегралами первого рода. Дадим их точное определение.

Пусть в пространстве расположена кривая K, имеющая концы в точках A и B, и пусть во всех ее точках задана функция $f(x, y, z)$. Разобьем кривую K точками $A_0=A, A_1, A_2, \ldots, A_n=B$, следующими друг за другом вдоль по кривой в направлении от A к B, на дуги $\smile{A_{k-1}A_k}$. Пусть s_k — длина дуги $\smile{A_{k-1}A_k}$. На каждой дуге $\smile{A_{k-1}A_k}$ берем по точке $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и составляем сумму

$$\sum_{k=1}^{n}f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\,s_k.$$

---

*) Средней плотностью дуги мы называем отношение ее массы к ее длине. Плотность $\rho(x, y, z)$ кривой K в точке (x, y, z) есть предел средней плотности бесконечно малой дуги, стягивающейся в упомянутую точку.

Ее (конечный) предел *) при стремлении наибольшей из длин s_k к нулю называется *криволинейным интегралом первого рода* и обозначается через

$$\int\limits_K f(x, y, z)\, ds. \tag{1}$$

Если, в частности, кривая K лежит в плоскости Oxy, то функция f от координаты z не зависит и вместо (1) появляется интеграл

$$\int\limits_K f(x, y)\, ds. \tag{2}$$

Замечание. Полезно отметить, что $\int\limits_K f(x, y, z)\, ds$ не зависит от направления кривой K, т. е. $\int\limits_{AB} f\, ds = \int\limits_{BA} f\, ds$. Действительно, ведь длина s_k дуги $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ не зависит от того, какая из точек A_{k-1} и A_k принята за начало и какая за конец дуги.

n° 2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода по плоской кривой. Во многих случаях вычисление интеграла (2) сводится к нахождению некоторого обыкновенного определенного интеграла. Пусть, например, параметрические уравнения кривой K имеют вид

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

причем кривая описывается при изменении t от p до q ($p < q$). Тогда **) длина ds элементарной дуги кривой равна

$$ds = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt, \tag{3}$$

и интеграл (2) выражается обыкновенным определенным интегралом по формуле

$$\boxed{\int\limits_K f(x, y)\, ds = \int\limits_p^q f[x(t), y(t)]\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt.} \tag{4}$$

Если, в частности, кривая K имеет явное задание $y = y(x)$ ($a \leqslant x \leqslant b$), то

$$\boxed{\int\limits_K f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1 + y_x'^2}\, dx.}$$

Примеры. 1) Найти $I = \int\limits_K \frac{y}{x}\, ds$, если K — дуга параболы $y = \frac{1}{2}x^2$, лежащая между $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и $B(2, 2)$.

Здесь $ds = \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx = \sqrt{1 + x^2}\, dx$ и

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int\limits_1^2 (1 + x^2)^{1/2}\, d(1 + x^2) = \frac{1}{6}(\sqrt{125} - \sqrt{8}).$$

*) Этот предел может и не существовать.

**) Как обычно, предполагается существование непрерывных x_t', y_t'.

2) Найти $I=\int\limits_K ye^{-x}\,ds$, если K — дуга линии $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\operatorname{arctg} t-t$, описываемая при изменении t от 0 до 1.

Здесь $x_t'=\frac{2t}{1+t^2}$, $y_t'=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=dt$. Кроме того, $e^{-x}=\frac{1}{1+t^2}$. Стало быть,

$$I=\int\limits_0^1 (2\operatorname{arctg} t-t)\,\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\ln 2}{2}.$$

n° 3. Случай пространственной кривой. В основе формулы (4) лежала известная еще из гл. VI формула (3). Рассмотрим теперь пространственную кривую

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t).$$

Если существуют непрерывные x_t', y_t', z_t', то кривая эта оказывается гладкой и ее бесконечно малые дуги эквивалентны своим хордам. Стало быть, элементарную дугу ds с точностью до малых высшего порядка можно принять за диагональ прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz. Значит,

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt.$$

Таким образом, имеет место полная аналогия с формулой (3). Но тогда ясно, что

$$\boxed{\int\limits_K f(x, y, z)\,ds=\int\limits_p^q f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt.} \tag{5}$$

Пример. Найти

$$I=\int\limits_K xyz\,ds,$$

если K — дуга линии $x=t$, $y=\frac{t^2}{2}$, $z=\frac{\sqrt{8t^3}}{3}$, причем $0\leqslant t\leqslant 1$. Здесь

$$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{1+t^2+2t}\,dt=\frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^1 t^{\frac{9}{2}}(1+t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

n° 4. Применения криволинейного интеграла первого рода.

1. *Моменты материальной кривой.* Пусть, как и в n° 1, на кривой K распределена масса с плотностью $\rho(x, y, z)$. Тогда ясно, что моменты инерции этой массы относительно начала координат, оси Oz и плоскости Oxy равны соответственно

$$I_0=\int\limits_K (x^2+y^2+z^2)\,\rho(x, y, z)\,ds,\quad I_z=\int\limits_K (x^2+y^2)\,\rho(x, y, z)\,ds,$$

$$I_{xy}=\int\limits_K z^2\rho(x, y, z)\,ds.$$

Статический момент той же массы относительно плоскости *) Oxy

$$S_{xy}=\int_K z\rho(x, y, z)\,ds.$$

Если кривая K лежит в плоскости Oxy, то ее статические моменты относительно осей Ox и Oy

$$S_x=\int_K y\rho(x, y)\,ds, \quad S_y=\int_K x\rho(x, y)\,ds,$$

где $\rho(x, y)$ — плотность кривой **).

Мы видим, что криволинейные интегралы первого рода являются аналитическим аппаратом, весьма удобным для решения ряда механических задач.

2. *Вычисление работы.* Пусть материальная точка M переходит вдоль кривой K из положения A в положение B, причем во время движения на точку M действует сила F, направление и величина F которой изменяются вместе с положением точки M. Найдем работу силы F на перемещении AB. Для этого выделим из кривой K элементарный участок ds. Этот участок можно считать прямолинейным и принять, что за время движения M вдоль этого участка сила F не успевает измениться ни по величине, ни по направлению. Тогда элементарная работа dT нашей силы на участке ds может быть найдена по правилу n° 4 § 4 гл. VIII как работа постоянной силы на прямолинейном перемещении, т. е. как скалярное произведение силы F и вектора перемещения ds. Иными словами,

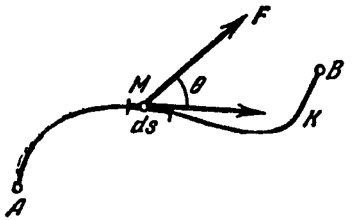


Рис. 365.

$$dT=F\cos\theta\,ds,$$

где θ — угол между силой F и кривой K ***) (рис. 365). Отсюда ясно, что

$$\boxed{T=\int_K F\cos\theta\,ds.} \tag{6}$$

Читатель должен отчетливо осознать, что здесь F (численное значение силы F) и угол θ являются ф у н к ц и я м и от координат x, y, z движущейся точки M. Ниже (в n° 8) мы преобразуем формулу (6) к более удобному виду.

---

*) Еще в гл. VI мы говорили, что при пространственном распределении массы статические моменты ее рассматривают только относительно плоскостей.

**) Ясно, что в этом случае плотность не зависит от z.

***) Это значит, что θ есть угол между F и к а с а т е л ь н о й к кривой K. Заметим, что в нашем случае K — н а п р а в л е н н а я кривая, начинающаяся в A и оканчивающаяся в B. Соответственно и касательные к K получают определенное направление (отмеченное на рис. 365 стрелкой). Разумеется, это направление сказывается только на знаке $\cos\theta$, ибо, как уже упоминалось в n° 1, при рассмотрении интеграла $\int_K f(x, y, z)\,ds$ направление кривой K никакой роли не играет.

n° 5. Криволинейный интеграл второго рода. Криволинейные интегралы второго рода определяются почти так же, как и интегралы первого рода. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена на пространственной кривой K, имеющей концы в точках A и B. В отличие от интегралов первого рода сейчас кривая K рассматривается нами как направленная линия. Пусть A — ее начало и B — конец. Разобьем K точками $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., $A_n = B$, следующими друг за другом вдоль по K в направлении от A к B. Пусть $A_k = A_k(x_k, y_k, z_k)$. Как и при определении интеграла первого рода, на каждой дуге $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ мы берем по точке $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ и составляем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{7}$$

Отличие от суммы, порождающей интеграл первого рода, состоит, стало быть, в том, что за *меру* дуги $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ принимается не длина s_k этой дуги, а ее проекция на ось Ox. Предел суммы (7) при стремлении к нулю наибольшей из дуг $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ называется *криволинейным интегралом второго рода* и обозначается через

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dx. \tag{8}$$

Здесь (в отличие от интеграла первого рода!) важен порядок букв A и B, ибо ясно, что *)

$$\int_{BA} f(x, y, z)\,dx = -\int_{AB} f(x, y, z)\,dx,$$

т. е. *при перемене направления линии, по которой производится интегрирование, интеграл второго рода меняет знак.*

Без дальнейших пояснений понятно, что означают символы

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dy, \quad \int_{AB} f(x, y, z)\,dz. \tag{9}$$

Сумму $\int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{AB} Q\,dy + \int\limits_{AB} R\,dz$ принято обозначать через

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Если кривая AB лежит в плоскости Oxy, то определенная на ней функция не зависит от z и вместо интегралов (8) и (9) появляются

$$\int_{AB} f(x, y)\,dx, \quad \int_{AB} f(x, y)\,dy.$$

Сумма $\int\limits_{AB} P\,dx + \int\limits_{AB} Q\,dy$ обозначается через $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$.

З а м е ч а н и е. Если линия AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, т. е. в плоскости $x = c$, то $dx = 0$ и

$$\int_{AB} f(x, y, z)\,dx = 0.$$

*) Если сделать B началом, а A концом линии K, то точка A_k станет предшествовать точке A_{k-1} и сумму (7) придется заменить суммой $\sum f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)(x_{k-1} - x_k)$, отличающейся от суммы (7) знаком.

Точно так же, если линия AB лежит в плоскости Oxy и представляет собою отрезок прямой $x=c$, то

$$\int_{AB} f(x, y)\, dx = 0.$$

n°6. Вычисление интеграла второго рода. Пусть кривая AB имеет параметрические уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

причем изменению параметра t от p до q соответствует движение по кривой AB от A до B (таким образом, здесь вовсе не обязательно, чтобы p было меньше q). Тогда

$$\boxed{\int_{AB} f(x, y, z)\, dx = \int_p^q f[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t)\, dt.} \tag{10}$$

Аналогичные формулы имеют место и для интегралов (9).

В случае плоской кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

формула (10) принимает вид

$$\boxed{\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_p^q f[x(t), y(t)]\, x'(t)\, dt.}$$

Для явно заданной плоской кривой $y = y(x)$ будет

$$\boxed{\int_{AB} f(x, y)\, dx = \int_a^b f[x, y(x)]\, dx; \quad \int_{AB} f(x, y)\, dy = \int_a^b f[x, y(x)]\, y'(x)\, dx,}$$

где a и b — абсциссы точек A и B.

Примеры. 1) Найти $I = \int_{AB} (4x - y)\, dx + 5x^2 y\, dy$, если AB — дуга параболы $y = 3x^2$, $A = (0, 0)$, $B = (1, 3)$.

Здесь

$$I = \int_0^1 [(4x - 3x^2) + 90x^5]\, dx = 16.$$

2) Найти

$$I = \int_{AB} (x + y)\, dx + 2z\, dy + xy\, dz,$$

если AB — дуга линии $x = t$, $y = t^2$, $z = 3 - t$, причем A и B соответствуют значениям параметра $t_A = 1$, $t_B = 2$.

Здесь

$$I = \int_1^2 (t + t^2)\, dt + \int_1^2 2(3 - t)\, 2t\, dt - \int_1^2 t^3 dt = 8\frac{3}{4}.$$

n°7. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода. Пусть $K = AB$ — направленная пространственная кривая с началом A и концом B. Тогда все касательные к K также оказываются направленными прямыми (рис. 366). Пусть α, β, γ — углы, образованные касательной к K с осями координат. Ясно, что они являются функциями координат (x, y, z) точки касания M. Выделим из K элементарную дугу ds. Если считать ее прямолинейной, то она представляет собой **в е к т о р** *) ds с проекциями dx, dy, dz. Стало быть,

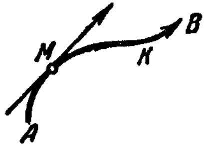


Рис. 366.

$$dx = \cos\alpha\, ds, \quad dy = \cos\beta\, ds, \quad dz = \cos\gamma\, ds.$$

Отсюда

$$\boxed{\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.} \tag{11}$$

n°8. Выражение работы интегралом второго рода. Вернемся к формуле (6), дающей выражение работы T переменной силы F. Пусть углы этой силы с осями координат равны λ, μ, ν. Тогда справедлива известная (гл. VIII, § 4, n° 3) формула

$$\cos\theta = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma,$$

ибо θ — угол между векторами F и ds. Поэтому формула (6) принимает вид

$$T = \int\limits_{AB} F\,(\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma)\,ds. \tag{12}$$

Пусть проекции силы F на оси координат

$$X = F\cos\lambda, \quad Y = F\cos\mu, \quad Z = F\cos\nu.$$

Тогда (12) можно записать так:

$$T = \int\limits_{AB} (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,ds$$

или, согласно формуле (11), прочитанной справа налево **),

$$\boxed{T = \int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.} \tag{13}$$

Это наиболее удобная формула для вычисления T.

n°9. Работа силового поля. Пусть каждой точке (x, y, z) пространства отнесена некоторая сила ***)

$$F = Xi + Yj + Zk,$$

действующая на материальную частицу M, попавшую в (геометрическую) точку (x, y, z). В этом случае говорят, что пространство представляет собой *поле силы* F или, короче, *силовое поле*. Если точка M опишет некоторую

---

*) Направленный так же, как и вся кривая AB.

**) Впрочем, равенство $dT = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ ясно и непосредственно, поскольку $dT = F\cos\theta\,ds$ есть скалярное произведение векторов $F = Xi + Yj + Zk$ и $ds = i\,dx + j\,dy + k\,dz$.

***) При переходе от одной точки (x, y, z) к другой F меняется. Следовательно, X, Y, Z суть функции от x, y, z.

линию AB, то, попадая в различные точки этой линии, она будет подвергаться воздействию соответствующим этим точкам значениям силы F. Произведенная при этом работа силы называется *работой поля*. Эта работа выражается формулой (13).

В механике важную роль играют силовые поля, обладающие следующим свойством: *работа поля при перемещении материальной точки M из точки A в точку B зависит только от A и B, но не от того, по какой линии происходит перемещение.* Такие силовые поля называются *потенциальными* (или *консервативными*).

Теорема. *Если выражение*

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$$

является полным дифференциалом какой-нибудь функции $H(x, y, z)$, то поле силы $F=Xi+Yj+Zk$ является потенциальным.

Доказательство. Пусть $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=dH(x, y, z)$. Это значит, что $X=H'_x$, $Y=H'_y$, $Z=H'_z$.

Выберем в пространстве две точки $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ и соединим их некоторой линией K. Работа T поля при переходе точки M из A в B вдоль линии K выразится интегралом (13) или, что то же самое, интегралом

$$T=\int\limits_{AB} H'_x\,dx+H'_y\,dy+H'_z\,dz.$$

Для вычисления этого интеграла введем параметрические уравнения линии K. Пусть они таковы:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t),$$

причем значению $t=p$ отвечает точка A, а значению $t=q$ — точка B. Тогда согласно (10)

$$T=\int\limits_p^q [H'_x(\varphi, \psi, \omega)\,\varphi'(t)+H'_y(\varphi, \psi, \omega)\,\psi'(t)+H'_z(\varphi, \psi, \omega)\,\omega'(t)]\,dt. \tag{14}$$

Заметив это, рассмотрим функцию

$$f(t)=H[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)]. \tag{15}$$

По правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$f'(t)=H'_x(\varphi, \psi, \omega)\,\varphi'(t)+H'_y(\varphi, \psi, \omega)\,\psi'(t)+H'_z(\varphi, \psi, \omega)\,\omega'(t).$$

Значит, формула (14) принимает вид

$$T=\int\limits_p^q f'(t)\,dt=f(q)-f(p).$$

Подставляя сюда значение (15) функции $f(t)$, находим

$$T=H[\varphi(q), \psi(q), \omega(q)]-H[\varphi(p), \psi(p), \omega(p)].$$

Но ведь $\varphi(p)=x_A$, $\psi(p)=y_A$, ..., $\omega(q)=z_B$.

Стало быть,

$$\boxed{T=H(x_B, y_B, z_B)-H(x_A, y_A, z_A),} \tag{16}$$

чем и доказана теорема, ибо ни функция $H(x, y, z)$, ни точки A и B от выбора кривой K не зависят.

n° 10. Вычисление криволинейного интеграла от полного дифференциала. Формула (16) представляет собой следующую чисто математическую теорему:

Теорема. Если

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dH(x, y, z),$$

то

$$\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = H(x_B, y_B, z_B) - H(x_A, y_A, z_A). \tag{17}$$

Разумеется, такая же теорема верна и для функций двух переменных:

Теорема. Если

$$P\,dx + Q\,dy = dF(x, y),$$

то

$$\boxed{\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A),} \tag{18}$$

т. е. этот интеграл не зависит от пути интегрирования, а только от его начала и конца.

Если бы мы умели по заданному дифференциалу $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ находить первообразную функцию $H(x, y, z)$, то формула (17) дала бы нам средство вычислять стоящий в ней криволинейный интеграл. Для случая трех аргументов мы, однако, не умеем восстанавливать первообразную функцию по ее дифференциалу. Но для функций двух аргументов мы таким умением обладаем. Поэтому формула (18) приводит к правилу:

Правило. *Если* *)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{19}$$

то для вычисления интеграла $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ *надо найти функцию* $F(x, y)$, *первообразную для дифференциала* $P\,dx + Q\,dy$, *и составить разность значений этой первообразной в конце и в начале пути интегрирования.*

Ясно, что это аналог формулы Ньютона — Лейбница.

Пример. Найти

$$I = \int\limits_{AB} (3x^2y^2 + 2x)\,dx + (2x^3y + 3y^2)\,dy,$$

если $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$.

Решение. Здесь $P = 3x^2y^2 + 2x$, $Q = 2x^3y + 3y^2$. Значит, $\frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Таким образом, I является интегралом от полного дифференциала и, стало быть, не зависит от того, по какой линии производится интегрирование (поэтому мы и не задавали эту линию!). Найдем функцию $F(x, y)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Согласно тому, как мы поступали в n° 3 § 3 гл. X, полагаем

$$F(x, y) = \int P\,dx = \int (3x^2y^2 + 2x)\,dx = x^3y^2 + x^2 + \varphi(y).$$

Но $F'_y = Q$. Стало быть, $2x^3y + \varphi'(y) = 2x^3y + 3y^2$, откуда $\varphi'(y) = 3y^2$ и $\varphi(y) = y^3 + C$. Значит, $F(x, y) = x^3y^2 + x^2 + y^3 + C$. Так как $F(0, 1) = 1 + C$, $F(1, 2) = 13 + C$, то $I = 12$.

*) Ведь равенство (19) как раз и является условием того, что $P\,dx + Q\,dy$ есть полный дифференциал некоторой $F(x, y)$.

ГЛАВА XIII

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Ряд Тейлора

n° 1. Разложение функции в ряд. Пусть функция $f(x)$ задана в каком-нибудь промежутке $[A, B]$, содержащем точку a. Если у $f(x)$ существуют производные всех порядков, то, взяв по произволу натуральное n и любое x из $[A, B]$, мы сможем написать для $f(x)$ формулу Тейлора *) с остаточным членом

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n, \qquad (1)$$

где, как известно,

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (2)$$

причем $\bar{x}$ содержится между a и x.

Весьма часто оказывается, что при безграничном возрастании n (и закрепленном x) остаточный член R_n стремится к нулю

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0. \qquad (3)$$

Тогда при очень больших значениях n членом R_n в формуле (1) можно пренебречь, и мы получаем приближенную формулу

$$f(x)\cong f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (4)$$

---

*) Естественно, что мы адресуем свое изложение читателю, изучающему нашу книгу подряд. Этот читатель знает формулу Тейлора еще из гл. III. Однако мыслим и такой случай, когда к чтению настоящей главы приступит лицо, не знающее формулы Тейлора (в некоторых вузах ее изучают как раз в главе, посвященной рядам). Такому читателю мы рекомендуем вместо вывода этой формулы, приведенного в гл. III, ознакомиться с более коротким выводом, помещенным в „Замечании“, которым кончается этот n°.

Достоинством этой формулы является то, что в ней в отличие от формулы (1) нет никаких неизвестных элементов [в (1) таким элементом был $\bar{x}$]. Поэтому формула (4) оказывается удобной *) для вычисления $f(x)$.

Точность формулы (4) тем выше, чем больше n **), ибо ведь соотношение (3) означает, что

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]. \quad (5)$$

Эту мысль записывают в виде равенства

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots} \quad (6)$$

Обращаем внимание читателя на то, что здесь поставлен знак уже не приближенного, а **точного** равенства. Зато многоточие, которым заканчивается правая часть соотношения (6), символизирует тот факт, что точное равенство достигается за счет **бесконечного** множества слагаемых. Поэтому в (6) **последнего** слагаемого **нет**. Разумеется, мы не можем сложить бесконечного множества чисел, ибо такого действия никогда не изучали. Смысл равенства (6) состоит в том, что оно дает нам бесчисленное множество (ибо n зависит от нас!) приближенных формул вида (4), тем более точных, чем большим взято n ***). Иными словами, смысл формулы (6) **полностью** определен равенством (5).

Выражение, стоящее в правой части равенства (6), называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$, а само равенство называют *разложением* функции в ряд Тейлора. Частный случай ряда Тейлора, соответствующий значению $a=0$, т. е. ряд

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots,$$

называют рядом Маклорена, хотя, как было упомянуто еще в гл. III, никаких оснований для этого нет.

---

*) Ведь правая часть формулы (4) есть обыкновенный алгебраический многочлен n-й степени.

) Впрочем, мы не предполагаем, что R_n **уменьшается с ростом n (ведь стремление $R_n\to 0$ может происходить и без этого). Поэтому совсем правильно было бы сказать лишь, что ошибка формулы (4) стремится к 0 при $n\to\infty$.

***) См. предыдущую сноску.

Замечание. В основе всех рассуждений этого п° лежит формула Тейлора с остаточным членом. Теперь, когда мы владеем определенными интегралами, мы можем дать и другой вывод этой замечательной формулы.

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[A, B]$ и имеет там все производные. Выберем и закрепим две точки a и x из отрезка $[A, B]$. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a),$$

откуда

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Преобразуем написанный интеграл по формуле интегрирования по частям, положив *)

$$f'(t) = u, \quad du = f''(t)\,dt,$$
$$dt = dv, \quad v = t - x.$$

Тогда

$$\int_a^x f'(t)\,dt = [f'(t)(t-x)]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f''(t)(t-x)\,dt =$$
$$= \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \int_a^x f''(t)(t-x)\,dt$$

и

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) - \int_a^x f''(t)(t-x)\,dt.$$

Снова применяем интегрирование по частям, полагая

$$f''(t) = u, \quad du = f'''(t)\,dt,$$
$$(t-x)\,dt = dv, \quad v = \frac{1}{2}(t-x)^2.$$

Тогда

$$\int_a^x f''(t)(t-x)\,dt = \left[\frac{f''(t)}{2}(t-x)^2\right]_{t=a}^{t=x} - \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(t-x)^2\,dt =$$
$$= -\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 - \frac{1}{2!}\int_a^x f'''(t)(t-x)^2\,dt$$

*) Когда мы находим $v = v(t)$ по заданному дифференциалу $dv = dt$, мы имеем право в качестве v взять любую первообразную этого дифференциала. В частности, можем взять и $v = t - x$, поскольку x — число постоянное. Этот, хотя и вполне законный, выбор v может все же показаться несколько странным. Объясняется он тем, что мы хотим, чтобы было $v(x) = 0$.

и

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{1}{2!}\int_a^x f'''(t)(t-x)^2\,dt.$$

Продолжая эти преобразования, мы и получаем формулу Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n, \tag{1}$$

но только здесь остаточный член R_n получается не в форме (2), а в форме определенного интеграла

$$\boxed{R_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(t-x)^n\,dt.} \tag{2*}$$

Впрочем, можно, если угодно, привести выражение (2*) к лагранжевой форме (2). Чтобы сделать это, примем для определенности, что $x>a$ (для $x<a$ рассуждение аналогично) и перепишем R_n в виде

$$R_n=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Пусть p и q — наименьшее и наибольшее значения непрерывной*) функции $f^{(n+1)}(t)$ на отрезке $[a, x]$. Тогда

$$p\leqslant f^{(n+1)}(t)\leqslant q.$$

Умножим это неравенство на (положительный!) множитель $\dfrac{(x-t)^n}{n!}$ и проинтегрируем на отрезке $[a, x]$. Это дает неравенство

$$\frac{p}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt\leqslant R_n\leqslant\frac{q}{n!}\int_a^x (x-t)^n\,dt.$$

Но

$$\int_a^x (x-t)^n\,dt=-\int_a^x (x-t)^n\,d(x-t)=\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=a}^{t=x}=\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Поэтому

$$\frac{p}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\leqslant R_n\leqslant\frac{q}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

откуда

$$p\leqslant\frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}R_n\leqslant q.$$

---

*) Ведь мы считаем, что $f(t)$ имеет все производные. Но тогда $f^{(n+1)}(t)$ дифференцируема и тем более непрерывна.

По теореме о промежуточном значении [гл. II, § 2, n° 7] между a и x найдется такое $\bar{x}$, что

$$\frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}} R_n = f^{(n+1)}(\bar{x}),$$

откуда и вытекает представление R_n в форме (2).

n° 2. Терминология. Соображения, изложенные в n° 1, привели нас к рассмотрению выражений вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots \tag{7}$$

Такое выражение называется *бесконечным рядом* или, короче, *рядом*. Числа a_1, a_2, a_3, ... называются *членами* ряда (7). Ряд (7) задан, если задано правило, позволяющее для любого натурального n найти соответствующее a_n. Поэтому ряд

$$2 + 43 + 17\frac{1}{2} + 5 + \ldots$$

нельзя считать заданным. Напротив, ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \tag{8}$$

задан, ибо здесь при любом n

$$a_n = \frac{1}{2^n} \text{ *)}. \tag{9}$$

Ряд (7) часто записывают в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Так, например, ряд (8) можно записать как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Пусть дан ряд (7). Величина

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

называется n-й *частной суммой* этого ряда. Предел же этой величины, когда $n \to +\infty$, называется *суммой* ряда. Итак, *сумма ряда есть предел последовательности его частных сумм.*

---

*) Собственно говоря, чтобы задать ряд (8), надо сначала указать, что его члены задаются формулой (9).

Если сумма ряда (7) равна S,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

то пишут

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = S \quad \text{или} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Иными словами, числовой смысл выражению (7) приписывают только тогда, когда оно представляет собой ряд, имеющий сумму *).

Если ряд имеет конечную сумму, то говорят, что он *сходится*. В противном случае, т. е. когда сумма бесконечна или ее вовсе нет, ряд называется *расходящимся*.

Примеры. 1) У ряда

$$0 + 0 + 0 + \ldots \tag{10}$$

будет $S_n = 0$. Значит, и $\lim S_n = 0$. Поэтому ряд сходится, и его сумма равна 0.

2) Ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots \tag{11}$$

расходится, ибо здесь $S_n = n \to +\infty$, т. е. сумма ряда равна $+\infty$.

3) Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots \tag{12}$$

также расходится. Здесь

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \ \ldots,$$

т. е. $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = 1$, и предела у S_n вообще нет. Иными словами, ряд (12) совсем не имеет суммы.

Заметим, что точные определения, приведенные в этом n°, были предложены лишь в 19-м веке. До этого в математике не было отчетливых формулировок, связанных с рядами. Это служило источником своеобразных попыток использовать науку в интересах религии. Так, один математик 18-го века „рассуждал" следующим образом. Переписав (12) в виде

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

он заключал, что сумма ряда (12) равна 0. С другой стороны, тот же ряд он записывал в виде

$$1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots$$

*) Можно сказать, что теперь понятие сложения распространено на случай бесконечного множества слагаемых. Мы видим, что в этом случае указанное действие выполнимо не всегда!

и выводил, что его сумма равна 1. Отсюда следовало „заключение", что

$$0=1.$$

Далее говорилось: „0 есть ничто, а 1 есть нечто. Поэтому нет ничего удивительного в том, что бог создал мир из ничего". Разумеется, все это „рассуждение" неправильно, так как ряд (12) вообще не имеет суммы. Интересно, что даже такой могучий ум, как Эйлер, считал само собою разумеющимся, что ряд (12) имеет сумму. Исходя из этой неверной предпосылки, он „рассуждал" так: пусть сумма ряда (12) равна S. Тогда

$$S=1-1+1-1+\ldots$$

или

$$S=1-(1-1+1-1+\ldots)=1-S.$$

Отсюда $2S=1$ и $S=\frac{1}{2}$. В эпоху Эйлера не было отчетливого понимания, что математические символы получают смысл не сами по себе, а в силу надлежащих определений. Тогда считали, что если какое-то математическое выражение написано, то оно обязательно имеет числовое значение, и дело лишь в том, чтобы **найти** это значение. Сколь ни гениален был Эйлер, но он был сыном своего времени, и ему был присущ характерный для этого времени описанный здесь „математический фетишизм".

4) Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots$$

У него

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

или, что то же самое,

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1,$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

5) Интересен пример „гармонического ряда"

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

Так как все члены этого ряда положительны, то его частная сумма S_n возрастает при увеличении n. Поэтому заведомо существует (конечный или бесконечный) $\lim S_n$. Рассмотрим сумму S_n при $n=2^m$. Ее можно записать в виде

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\\+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right).$$

Заметим, что в каждых скобках наименьшее слагаемое — последнее. Поэтому

$$S_{2^m}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\\+\left(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right).$$

Каждая из сумм, стоящих в скобках, равна $\frac{1}{2}$. Значит,

$$S_{2^m}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}=1+\frac{m}{2}.$$

Но тогда ясно, что

$$\lim S_{2^m}=+\infty,$$

а значит, и вообще

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

т. е. *гармонический ряд расходится.*

6) В заключение рассмотрим геометрическую прогрессию

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots \tag{13}$$

со знаменателем q. Если $a=0$, то наша прогрессия превращается в ряд $0+0+0+\ldots$. Этот случай не представляет интереса, и мы предполагаем $a\neq 0$. Образуем сумму S_n

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}.$$

Если $q=1$, то $S_n=na\to\infty$, и (13) расходится. Пусть же $q\neq 1$. Тогда по известной алгебраической формуле

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

Если $|q|<1$, то $q^n\to 0$, и потому

$$S_n\to\frac{a}{1-q}.$$

Если же $|q|>1$, то $q^n\to\infty$, и

$$S_n\to\infty.$$

Остается рассмотреть случай, когда $|q|=1$, т. е. когда $q=\pm 1$. Но мы предположили, что $q\neq 1$. Значит, $q=-1$, а тогда q^n не имеет предела (ибо пробегает последовательность значений $-1, 1, -1, 1, \ldots$). Значит, и S_n не имеет предела и (13) расходится *).

Из сопоставления всего сказанного вытекает

Теорема. *Геометрическая прогрессия* (13) *сходится тогда и только тогда, когда модуль ее знаменателя меньше единицы*

$$|q|<1.$$

В этом случае

$$\boxed{a+aq+aq^2+aq^3+\ldots=\frac{a}{1-q}.}$$

n° 3. Теорема разложения. Вернемся к вопросу о разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора. Прежде всего заметим, что таких рядов для одной и той же функции может быть бесконечно много, ибо этот ряд определяется не только функцией $f(x)$, но и числом a, выбор которого зависит от нас. Допустим же, что число a нами выбрано. Тогда представление $f(x)$ равенством

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots \tag{14}$$

называется ее разложением по степеням $x-a$. Ясно, что такое разложение не всегда возможно. Ему могут помешать три причины:

1) Ряда (14) нельзя даже и составить. Так обстоит дело, например, для функции $f(x)=\frac{1}{x}$, у которой не существует значения $f(0)$, и потому ряд (14) не существует при $a=0$. То же имеет место и для функции $f(x)=\sqrt{x}$, у которой не существует $f'(0)$.

---

*) Это видно и непосредственно, так как (13) превращается в ряд

$$a-a+a-a+\ldots,$$

сходный с (12).

2) Ряд (14) составить можно, но он расходится. Разложим, например, $f(x)=\frac{1}{1-x}$ в ряд Маклорена. Здесь

$$f(x)=(1-x)^{-1},\quad f'(x)=(1-x)^{-2},\quad f''(x)=2!(1-x)^{-3},$$
$$f'''(x)=3!(1-x)^{-4},\ \ldots$$

Значит,

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1!,\quad f''(0)=2!,\quad f'''(0)=3!,\ \ldots$$

и вообще $f^{(n)}(0)=n!$. Стало быть, ряд Маклорена здесь представляет собой прогрессию

$$1+x+x^2+x^3+\ldots \tag{15}$$

При $x=5$ он расходится. Значит, $f(5)=-\frac{1}{4}$ при помощи ряда Маклорена вычислять нельзя. Правда, для $|x|<1$ по теореме из n° 2 прогрессия (15) сходится и дает нашу $f(x)$, однако существуют и такие функции $f(x)$, для которых ряд (14) расходится при всех $x\neq a$ (при $x=a$ ряд (14) всегда сходится, ибо имеет вид $f(a)+$ $+0+0+0+\ldots$).

3) Ряд (14) составить можно, он сходится, но сумма его не равна $f(x)$. Примером такой функции служит функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

Подсчет, который мы опускаем, показывает, что у нее $f^{(n)}(0)=0$ при любом n, так что ряд Маклорена имеет вид $0+0+0+\ldots$ Он сходится, но его сумма есть 0, а не $f(x)$.

Все эти обстоятельства естественно приводят к задаче нахождения условий, при которых $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $x-a$. Для решения этой задачи нам понадобится

Лемма. При любом постоянном $Q>0$ будет

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q^n}{n!}=0. \tag{16}$$

Проведем доказательство*) для $Q=10$. Из хода рассуждения будет видно, что лемма верна для любого $Q>0$. Итак, пусть

$$x_n=\frac{10^n}{n!}.$$

*) Более краткое, но менее элементарное доказательство леммы будет дано в n° 3 § 2.

Тогда

$$x_1 = \frac{10}{1!} = 10, \quad x_2 = \frac{10^2}{2!} = 50.$$

Отдадим себе отчет в том, что произошло при переходе от x_1 к x_2. При этом переходе числитель 10 заменился на 10^2, т. е. увеличился в 10 раз. Знаменатель же 1! заменился на 2!, т. е. увеличился в 2 раза. В связи с этим x_2 и оказалось в 5 раз больше x_1. При переходе от x_2 к

$$x_3 = \frac{1000}{3!}$$

придется снова умножить числитель на 10, а знаменатель на 3. Поэтому x_3 получается из x_2 умножением на $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Снова произошло увеличение, но уже в меньшее количество раз. При переходе от x_3 к x_4 произойдет умножение x_3 на $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$. Подобные увеличения будут иметь место при переходах от x_4 к x_5, от x_5 к x_6 и т. д. Однако уже переход от x_9 к x_{10} не вызывает никакого увеличения, ибо

$$x_9 = \frac{10^9}{9!}, \quad x_{10} = \frac{10^{10}}{10!}, \quad \text{т. е. } x_9 = x_{10}.$$

При переходе же от x_{10} к x_{11} произойдет уже некоторое **уменьшение**, ибо при этом переходе числитель умножается на 10, а знаменатель на 11. Все же это уменьшение незначительно. Но при переходе от x_{99} к x_{100} числитель умножается как всегда на 10, а знаменатель уже на 100, так что x_{100} в 10 раз меньше x_{99}. А дальнейшие уменьшения будут еще значительнее, ибо

$$x_{101} = \frac{10}{101} x_{100} < \frac{1}{10} x_{100}, \quad x_{102} = \frac{10}{102} x_{101}, \ldots$$

Мы видим, что x_n не только стремится к нулю, но что это стремление чрезвычайно быстрое. Этим и доказана лемма.

Теорема. *Пусть $f(x)$ задана на $[A, B]$ и имеет там производные всех порядков. Если существует такое постоянное число K, что при всех натуральных n и при всех x из $[A, B]$ оказывается*

$$\boxed{|f^{(n)}(x)| \leqslant K,} \tag{17}$$

то для любых двух точек a и x из $[A, B]$ будет

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \tag{18}$$

Доказательство. По формуле Тейлора имеем

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n,$$

где

$$R_n=\frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x-a)^n.$$

По самому своему определению соотношение (18) равносильно соотношению

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\right]=f(x),$$

т. е. соотношению

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0. \tag{19}$$

Точка $\bar{x}$ лежит между a и x и потому принадлежит отрезку $[A, B]$. Значит, по (17)

$$|f^{(n)}(\bar{x})|\leqslant K,$$

откуда

$$|R_n|\leqslant K\frac{|x-a|^n}{n!}.$$

Если в (16) положить $Q=|x-a|$, то получится

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^n}{n!}=0.$$

Тем самым доказано (19), а значит, и теорема.

Замечание. Мы пользовались для доказательства теоремы лагранжевой формой остаточного члена. Можно доказать теорему и опираясь на представление остаточного члена в форме определенного интеграла *)

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(t-x)^{n-1}dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

В самом деле, согласно (17) будет

$$-K\leqslant f^{(n)}(t)\leqslant K.$$

Считая для определенности $x>a$, умножим это неравенство на (положительный) множитель $(x-t)^{n-1}$. Это дает

$$-K(x-t)^{n-1}\leqslant f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\leqslant K(x-t)^{n-1}.$$

---

*) Причем не сводя его к форме Лагранжа!

Интегрируя это неравенство и замечая, что

$$\int_a^x (x-t)^{n-1}dt = \frac{(x-a)^n}{n},$$

получаем [после деления на $(n-1)!$]

$$-K\frac{(x-a)^n}{n!} \leqslant R_n \leqslant K\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Отсюда

$$|R_n| \leqslant K\frac{|x-a|^n}{n!},$$

и доказательство заканчивается так же, как и выше.

Примеры. 1) Пусть $f(x)=\sin x$. Здесь условие (17) выполняется на всей оси при $K=1$. Значит, $\sin x$ разлагается по степеням $x-a$ при любых x и a. В частности, взяв $a=0$, из равенств

$$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x, \ \ldots$$

найдем

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f^{(4)}(0)=0, \ \ldots,$$

откуда следует разложение $\sin x$ в ряд Маклорена:

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots} \qquad (20)$$

Еще в гл. III мы видели, что это равенство*) позволяет фактически вычислять $\sin x$. Однако представление функции рядом бывает полезно не только в вопросах нахождения численных значений этой функции, но и для ее теоретического изучения. Так, например, из равенства (20) мы сразу видим, что

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Ниже будут даны и другие теоретические применения формулы (20).

2) Другим примером использования теоремы может служить функция $\cos x$, где K также равно 1. Разложение $\cos x$ в ряд Маклорена имеет вид

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots} \qquad (21)$$

---

*) В упомянутой главе речь шла не о равенстве (20), а о представлении $\sin x$ при помощи конечной формулы Тейлора, т. е. при помощи частной суммы ряда (20). Практически это одно и то же, ибо вычисление при помощи ряда приводится к замене его на частную сумму.

3) Пусть $f(x)=e^x$. Здесь $f^{(n)}(x)=e^x$, и не существует такого K, чтобы при всех вещественных x было

$$e^x \leqslant K.$$

Однако если закрепить любой отрезок $[A, B]$, то для всех x из этого отрезка будет (рис. 367)

$$e^x \leqslant e^B.$$

Значит, для этого отрезка справедлива наша теорема. Поскольку же любые две точки a и x можно охватить некоторым отрезком $[A, B]$, то e^x при любых a и x представима рядом Тейлора, расположенным по степеням $x-a$.

В частности, взяв $a=0$, получаем

$$\boxed{e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots} \tag{22}$$

При $x=1$ это дает

$$\boxed{e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots}$$

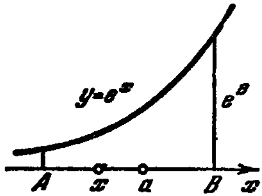


Рис. 367.

n°4. Формула Эйлера. Сам Эйлер вывел свою знаменитую формулу при помощи рядов (20), (21) и (22). Именно, заменив в равенстве

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

аргумент x на xi, он получил

$$e^{xi} = 1+xi+\frac{x^2i^2}{2!}+\frac{x^3i^3}{3!}+\frac{x^4i^4}{4!}+\frac{x^5i^5}{5!}+\frac{x^6i^6}{6!}+\frac{x^7i^7}{7!}+\cdots$$

Но

$$i=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i,\quad i^6=-1,\quad i^7=-i,\ \ldots$$

Стало быть, предыдущее равенство принимает вид

$$e^{xi} = 1+xi-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}i+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}i-\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}i+\ldots$$

или, если собрать отдельно вещественные и отдельно мнимые члены,

$$e^{xi} = \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right).$$

Замечая, что

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\cos x,\qquad x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sin x,$$

находим

$$\boxed{e^{xi} = \cos x + i \sin x.}$$

n° 5. Степенные ряды. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots \tag{23}$$

или более общий ряд

$$c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + c_3 (x-a)^3 + \ldots \tag{24}$$

Ряд (23) есть частный случай ряда (24), отвечающий значению $a=0$. Однако достаточно изучить этот частный случай, чтобы оказался изученным и ряд (24). Действительно, подстановка $x-a=\bar{x}$ превращает (24) в ряд

$$c_0 + c_1 \bar{x} + c_2 \bar{x}^2 + c_3 \bar{x}^3 + \ldots,$$

т. е. в ряд вида (23).

Относительно ряда (23) нельзя ставить вопрос, сходится он или нет. В самом деле, рассмотрим, например, ряд

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots \tag{25}$$

Если $x=0$, то он имеет вид $0+0+0+\ldots$ и сходится, а если $x=1$, то наш ряд превращается в $1+1+1+\ldots$ и расходится. Вообще, по отношению к ряду (23) *) разумно ставить вопрос только так: при каких значениях x этот ряд сходится и при каких расходится? Например, ряд (25) является геометрической прогрессией со знаменателем x. Значит, он сходится тогда и только тогда, когда $|x|<1$, т. е. при значениях x, лежащих в промежутке $(-1, +1)$. Отметим еще, что при любом x будет

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Поэтому стоящий в правой части этого равенства степенной ряд сходится при любом x из промежутка $(-\infty, +\infty)$. Всякий степенной ряд (23) очевидным образом сходится при $x=0$, и существуют ряды **), которые при всех $x \neq 0$ расходятся.

Имеет место замечательная

Теорема 1. *Для всякого ряда*

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots \tag{23}$$

---

*) Как, впрочем, и по отношению к любому ряду

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots,$$

членами которого являются некоторые функции от x.

**) Пример будет дан в n° 7 § 2.

существует такое число $R \geqslant 0$, что ряд (23) *сходится при всех x, лежащих внутри промежутка $(-R, +R)$, и расходится при всех x, лежащих вне отрезка $[-R, +R]$.*

Мы примем эту теорему без доказательства. К ней полезно добавить следующие замечания.

1) Число R называется *радиусом сходимости* ряда (23), а промежуток $(-R, +R)$ — *промежутком сходимости* этого ряда.

2) На концах промежутка сходимости разные ряды ведут себя по-разному (рис. 368).

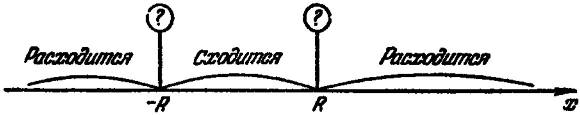


Рис. 368.

3) Существуют ряды, у которых $R = +\infty$. Такие ряды сходятся при всех x. Примером может служить ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

4) Существуют ряды, у которых $R = 0$. У таких рядов *) промежуток сходимости вырождается в точку $x = 0$.

5) Промежуток $(-R, +R)$ симметричен относительно точки $x = 0$. Для степенного ряда

$$c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \ldots$$

промежуток сходимости симметричен относительно точки $x = a$ и имеет вид $(a - R, a + R)$.

Рассмотрим какой-нибудь ряд (23), у которого $R > 0$. Тогда для каждого x из $(-R, +R)$ ряд имеет определенную (и конечную) сумму. Эта сумма, естественно, зависит от x, т. е. является функцией аргумента x, определенной при $-R < x < R$ (и, может быть, в одной или обеих точках $x = \pm R$). Обозначая эту функцию через $f(x)$, будем иметь

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots \tag{26}$$

Приведем без доказательства две важные теоремы.

Теорема 2. *Внутри промежутка сходимости степенного ряда его можно почленно дифференцировать. Это значит, что при $-R < x < R$ функция $f(x)$, стоящая в* (26), *имеет производную $f'(x)$, причем*

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots \tag{27}$$

*) Пример будет дан в п° 7 § 2.

Теорема 3. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, содержащемся строго внутри промежутка сходимости. Это значит, что при $-R<a<b<R$ *из* (26) *следует*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b c_0\,dx+\int_a^b c_1x\,dx+\int_a^b c_2x^2\,dx+\ldots \tag{28}$$

Так как при перестановке a и b обе части (28) меняют знак, то (28) верно и при $b<a$.

Пусть, в частности, $a=0$. Вычисляя интегралы, стоящие в (28) справа, найдем

$$\int_0^b f(x)\,dx=c_0b+c_1\frac{b^2}{2}+c_2\frac{b^3}{3}+\cdots$$

Это равенство верно при всех b из промежутка $(-R, R)$.

Обозначая переменную интегрирования через t и заменяя b через x, придадим предыдущему равенству вид

$$\int_0^x f(t)\,dt=c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+c_2\frac{x^3}{3}+\cdots \tag{29}$$

Равенство (29) верно при $-R<x<R$.

Докажем в заключение, что верна

Теорема единственности. Если функция $f(x)$ *в промежутке* $(-R, +R)$ *представляется в форме*

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots, \tag{30}$$

то написанный здесь ряд является ее рядом Маклорена.

Действительно, полагая $x=0$, находим $f(0)=c_0$, т. е.

$$c_0=f(0).$$

Дифференцируя (30), находим

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots \tag{31}$$

Положив здесь $x=0$, получим $f'(0)=c_1$, т. е.

$$c_1=\frac{f'(0)}{1!}.$$

Дифференцируя (31), находим

$$f''(x)=2c_2+3\cdot 2c_3x+\ldots$$

Положив $x=0$, получим $f''(0)=2c_2$, т. е.

$$c_2=\frac{f''(0)}{2!}.$$

Таким же образом получим, что и вообще

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

а это и доказывает теорему. Наша теорема показывает, что не может быть двух степенных рядов, расположенных по степеням x и представляющих одну и ту же функцию. Аналогичным образом доказывается, что разложение

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots$$

обязательно таково:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots,$$

т. е. является разложением $f(x)$ в ее ряд Тейлора.

n° 6. Разложение логарифма. Рассмотрим ряд

$$1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Это геометрическая прогрессия со знаменателем $q=-x$. Значит, она сходится при $|-x|<1$, т. е. в промежутке $-1<x<1$. Сумма ее по теореме n° 2 в этом промежутке равна $\frac{1}{1+x}$. Итак,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \quad (-1<x<1).$$

Отсюда согласно (29) вытекает, что при $-1<x<1$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

или, что то же самое,

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots} \tag{32}$$

Равенство (32) доказано нами для $-1<x<1$, однако оно верно и при $x=1$, что дает красивую формулу

$$\boxed{\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots} \tag{33}$$

Для фактического вычисления $\ln 2$ эта формула все же неудобна ввиду чрезвычайно медленной сходимости стоящего в ней ряда: чтобы получить $\ln 2$ с двумя знаками после запятой, надо взять 99 членов ряда!

Понятие о вычислении логарифмов. Заменим в (32) аргумент x на $-x$. Это дает равенство

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

верное при $-1 < x < 1$. Вычитая его из (32), получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right). \tag{34}$$

Положим здесь

$$x = \frac{1}{2N+1},$$

где N — натуральное число. Тогда

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{2N+1}}{1-\frac{1}{2N+1}} = \frac{N+1}{N}$$

и (34) принимает вид

$$\boxed{\ln(N+1) = \ln N + \frac{2}{2N+1} + \frac{2}{3(2N+1)^3} + \frac{2}{5(2N+1)^5} + \ldots} \tag{35}$$

Написанный здесь ряд сходится довольно быстро (и притом тем быстрее, чем больше N). Поэтому формула (35) позволяет, зная $\ln N$, найти $\ln(N+1)$.

Возьмем, в частности, $N = 1$. Тогда (35) дает

$$\ln 2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{81} + \frac{2}{1215} + \frac{2}{15\,309} + \ldots$$

Ограничиваясь выписанными членами, находим

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= 0{,}66667, \\ \frac{2}{81} &= 0{,}02469, \\ \frac{2}{1215} &= 0{,}00165, \\ \frac{2}{15\,309} &= 0{,}00013 \\ \hline &\ 0{,}69314. \end{aligned}$$

Отбрасывая последний знак как сомнительный, получаем

$$\ln 2 = 0{,}6931. \tag{36}$$

Положим теперь $N=2$. Тогда из (35) и (36) вытекает

$$\ln 3 = \ln 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{375} + \frac{2}{15\,625} + \cdots =$$
$$= 0{,}6931 + 0{,}4000 + 0{,}0053 + 0{,}0001 = 1{,}0985.$$

Итак,

$$\ln 3 = 1{,}0985. \tag{37}$$

Отсюда и из (35) можно было бы найти $\ln 4$. Однако проще заметить, что (36) дает

$$\ln 4 = 2\ln 2 = 1{,}3862.$$

Подставляя в (35) $N=4$, находим *)

$$\ln 5 = \ln 4 + \frac{2}{9} + \frac{2}{2187} + \cdots = 1{,}3862 + 0{,}2222 + 0{,}0009 = 1{,}6093.$$

Итак,

$$\ln 5 = 1{,}6093. \tag{38}$$

До сих пор мы говорили о натуральных логарифмах. Однако наши подсчеты позволяют находить и десятичные логарифмы. В самом деле, для любого $N>0$ будет

$$10^{\lg N} = N.$$

Логарифмируя это равенство по основанию e, получаем

$$\lg N \cdot \ln 10 = \ln N,$$

откуда

$$\lg N = \frac{\ln N}{\ln 10}.$$

Но $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$, и формулы (36) и (38) дают $\ln 10 = 0{,}6931 + 1{,}6093$, т. е.

$$\ln 10 = 2{,}3024.$$

Стало быть **),

$$\boxed{\lg N = \frac{\ln N}{2{,}302}.} \tag{39}$$

Отсюда и из (36) следует

$$\lg 2 = \frac{0{,}693}{2{,}302} = 0{,}301. \tag{40}$$

Аналогично из (37) и (39) вытекает

$$\lg 3 = \frac{1{,}099}{2{,}302} = 0{,}477. \tag{41}$$

---

*) Отброшенные члены уже не могут повлиять на первые 4 знака после запятой.

**) Все наши подсчеты приближенные. Поэтому уже 4-й знак после запятой сомнителен, и мы его отбрасываем. Разумеется, и после этого мы не можем гарантировать, что все сохраненные знаки абсолютно надежны. Так, на самом деле $\ln 10 = 2{,}302585\ldots$

Равенства (40) и (41) позволяют составить трехзначную таблицу десятичных логарифмов всех чисел первого десятка, кроме $\lg 7$. Именно,

$$\lg 4 = 2\lg 2, \quad \lg 5 = 1 - \lg 2, \quad \lg 6 = \lg 2 + \lg 3, \quad \lg 8 = 3\lg 2, \quad \lg 9 = 2\lg 3.$$

Стало быть, упомянутая таблица имеет вид

N	$\lg N$	N	$\lg N$
1	0,000	6	0,778
2	0,301	7	?
3	0,477	8	0,903
4	0,602	9	0,954
5	0,699	10	1,000

Читателю ясно, как можно было бы найти и $\lg 7$, а также, как получить логарифмы с большей степенью точности: надо лишь удерживать больше членов в рядах, получающихся из (35) при различных N.

n° 7. Разложение арктангенса. Геометрическая прогрессия

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

имеет знаменатель $q = -x^2$. Стало быть, она сходится при $|-x^2| < 1$, т. е. при $|x^2| < 1$ или, что то же самое, при $-1 < x < 1$ и имеет при этих x сумму

$$\frac{1}{1+x^2}.$$

Итак, при $-1 < x < 1$ будет

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

откуда (при тех же x) следует

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

т. е.

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots} \tag{42}$$

Можно было бы доказать, что равенство (42), доказанное нами для $-1 < x < 1$, остается верным и при $x = \pm 1$. Иными словами, справедлива формула

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,} \tag{43}$$

связывающая число π (т. е. отношение длины окружности к диаметру!) с натуральными числами. Для фактического вычисления π формула (43), однако, непригодна из-за слишком медленной сходимости входящего в нее ряда. Если вместо $x=1$ в формуле (42) положить $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, то получим равенство

$$\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{45}-\frac{1}{189}+\frac{1}{729}-\frac{1}{2673}+\cdots\right), \tag{44}$$

содержащее гораздо более быстро сходящийся ряд. Если ограничиться выписанными здесь членами и учесть, что

$$\sqrt{3}=1{,}73205, \quad 2\sqrt{3}=3{,}4641,$$

то мы найдем

$$\begin{array}{rr}
1=1{,}00000 & \frac{1}{9}=0{,}11111 \\
\frac{1}{45}=0{,}02222 & \frac{1}{189}=0{,}00529 \\
\frac{1}{729}=0{,}00137 & \frac{1}{2673}=0{,}00038 \\
\hline
1{,}02359 & 0{,}11678
\end{array}$$

$$\pi=3{,}4641\cdot(1{,}02359-0{,}11678)=3{,}4641\cdot 0{,}9068,$$

т. е.

$$\pi=3{,}1412. \tag{45}$$

Точность этого равенства довольно хорошая, ибо

$$\pi=3{,}14159\ldots,$$

т. е. ошибка равенства (45) менее 0,0004. Если бы в ряде (44) мы удержали больше членов и каждый из них нашли бы с большей точностью, то получили бы более точное значение π.

n° 8. Биномиальный ряд. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(1+x)^{\mu}$$

и построим ее ряд Маклорена. Так как

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\mu(1+x)^{\mu-1},\\
f''(x)&=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},\\
f'''(x)&=\mu(\mu-1)(\mu-2)(1+x)^{\mu-3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

то

$$f(0)=1, \quad f'(0)=\mu, \quad f''(0)=\mu(\mu-1), \quad f'''(0)=\mu(\mu-1)(\mu-2), \ldots$$

Значит, интересующий нас ряд таков:

$$1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+\ldots \tag{46}$$

Это так называемый *биномиальный ряд.*

Если $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, то ряд (46) принимает соответственно вид

$$1$$
$$1+x$$
$$1+2x+x^2$$
$$1+3x+3x^2+x^3$$

и его сумма совпадает соответственно с $(1+x)^0$, $(1+x)^1$, $(1+x)^2$, $(1+x)^3$. Вообще, если μ — целое неотрицательное число, то ряд (46) сам собою обрывается, превращается в конечный многочлен и его сумма совпадает с функцией $(1+x)^\mu$. Если же μ не есть целое неотрицательное число, то ряд (46) бесконечен, и прежде всего возникает вопрос о его промежутке сходимости. Можно доказать (это делается ниже в n° 7 § 2), что ряд (46) сходится при $-1<x<1$. При этих x имеем

$$(1+x)^\mu=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+\ldots \tag{47}$$

Доказать *) это равенство при помощи теоремы n° 3 нельзя, так как здесь ни при каком K не выполнено условие (17). Мы дадим хотя и искусственное, но несложное доказательство равенства (47). Именно, обозначим сумму ряда (47) (при $-1<x<1$ она существует и конечна!) через $S(x)$. Тогда

$$S(x)=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{6}x^3+\ldots \tag{48}$$

Дифференцируя это равенство, найдем

$$S'(x)=\mu+\mu(\mu-1)x+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2}x^2+\ldots,$$

откуда

$$\frac{S'(x)}{\mu}=1+(\mu-1)x+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}x^2+\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{6}x^3+\ldots \tag{49}$$

Умножим (49) на x. Это дает

$$x\frac{S'(x)}{\mu}=x+(\mu-1)x^2+\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}x^3+\ldots \tag{50}$$

Складывая равенства (49) и (50) и приводя подобные члены, получаем

$$(1+x)\frac{S'(x)}{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+\ldots,$$

т. е.

$$(1+x)S'(x)=\mu S(x). \tag{51}$$

---

*) Читатель должен уяснить, что сходимость ряда (46) еще не означает справедливости равенства (47) (см. хотя бы пример на стр. 635). Надо еще установить, что **с у м м а** ряда (46) равна $(1+x)^\mu$.

Теперь уже нетрудно закончить доказательство. Для этого введем функцию

$$\varphi(x)=\frac{S(x)}{(1+x)^{\mu}}.$$

Дифференцируя ее, получим

$$\varphi'(x)=\frac{S'(x)(1+x)^{\mu}-S(x)\mu(1+x)^{\mu-1}}{(1+x)^{2\mu}},$$

т. е.

$$\varphi'(x)=\frac{(1+x)S'(x)-\mu S(x)}{(1+x)^{\mu+1}}.$$

В силу (51) отсюда следует, что $\varphi'(x)=0$. Но тогда $\varphi(x)$ — величина постоянная. Поскольку же непосредственно видно, что $\varphi(0)=1$, то, вообще, при всех x из $(-1, +1)$ будет $\varphi(x)=1$, т. е.

$$\frac{S(x)}{(1+x)^{\mu}}=1 \quad \text{или} \quad S(x)=(1+x)^{\mu},$$

чем и доказано (47).

В частности, при $\mu=-1$ равенство (47) принимает вид

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots, \tag{52}$$

т. е. дает сумму геометрической прогрессии. Вспоминая, что разложения логарифма и арктангенса были нами получены из прогрессии (52), видим, какое большое богатство содержится в формуле (47). Положим еще в этой формуле $\mu=-\frac{1}{2}$. Это дает

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^4-\ldots$$

Заменяя здесь x на $-x^2$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}x^8+\ldots$$

Интегрируя это равенство, находим

$$\boxed{\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}\cdot\frac{x^9}{9}+\ldots}$$

Это равенство справедливо при $-1<x<1$.

n°9. Приложение рядов к вычислению интегралов. Пусть на промежутке $(a-R, a+R)$ функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням $x-a$:

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots$$

Тогда, как было отмечено в n° 5 *), для любого отрезка $[p, q]$, содержащегося в $(a-R, a+R)$, будет

$$\boxed{\int_p^q f(x)\,dx=\int_p^q c_0\,dx+\int_p^q c_1(x-a)\,dx+\int_p^q c_2(x-a)^2\,dx+\ldots}$$

Поскольку интегралы, стоящие здесь справа, вычисляются немедленно, полученная формула дает способ вычисления интеграла, написанного слева. Для этого надо лишь разложить подынтегральную функцию в ряд.

Примеры. 1) Вычислим

$$\int_0^{0,2}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Так как

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots,$$

то

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\ldots$$

Отсюда

$$\int_0^{0,2}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{0,2}\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\ldots\right)dx=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{18}+\frac{x^5}{600}-\ldots\right]_0^{0,2}=0,2-\frac{0,008}{18}+\frac{0,00032}{600}-\ldots$$

и

$$\int_0^{0,2}\frac{\sin x}{x}\,dx=0,19956.$$

Здесь все знаки верные. Такая хорошая точность оказалась достигнутой почти без вычислений потому, что отрезок $0\leqslant x\leqslant 0,2$ расположен в непосредственной близости к точке $x=0$, а вблизи этой точки разложение подынтегральной функции сходится очень быстро.

2) Найдем

$$\int_0^{0,3}e^{-x^2}\,dx.$$

*) Мы имеем в виду теорему 3 из n° 5. Хотя в этой теореме речь шла о рядах, расположенных по степеням x, а не по степеням $x-a$, но еще в начале n° 5 было указано, что это безразлично, ибо подстановка $x-a=\bar{x}$ сводит ряд $\sum c_n(x-a)^n$ к ряду $\sum c_n\bar{x}^n$.

Заменяя в равенстве

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

x на $-x^2$, получим

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{0,3}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \ldots\right)dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \ldots\right]_0^{0,3}.$$

Отсюда

$$\int_0^{0,3} e^{-x^2}\,dx = 0{,}29124.$$

Все написанные знаки верны!

n° 10. Приложение рядов к решению дифференциальных уравнений. Существуют два способа решения дифференциальных уравнений при помощи рядов: I. Применение ряда Тейлора и II. Способ неопределенных коэффициентов.

I. *Применение ряда Тейлора.* Пусть требуется найти решение уравнения

$$y' = f(x, y), \qquad (53)$$

удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$. Представим себе разложение искомого решения в ряд по степеням разности $x - x_0$. Оно таково:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \qquad (54)$$

Свободный член $y(x_0)$ этого разложения нам известен: он равен y_0. Подставляя в (53) значение $x = x_0$, найдем и

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Далее, дифференцируя (53), получаем

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\,y', \qquad (55)$$

откуда находим и

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\,y'(x_0).$$

Аналогично этому, дифференцируя (55) и полагая $x = x_0$, найдем $y'''(x_0)$ и т. д. В результате мы сможем найти сколь угодно много членов разложения (54).

Примеры. 1) Найти решение уравнения

$$y' = 2y^3, \qquad (56)$$

удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Непосредственно из (56) получаем $y'(0)=2$. Дифференцируя (56), получим

$$y''=4yy', \tag{57}$$

откуда $y''(0)=8$. Дифференцируя (57), найдем

$$y'''=4y'^2+4yy'', \tag{58}$$

откуда $y'''(0)=48$. Далее, (58) дает

$$y^{(4)}=12y'y''+4yy''',$$

откуда $y^{(4)}(0)=384$. Подставляя все это в разложение

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots,$$

находим

$$y=1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+\ldots$$

Справа написана геометрическая прогрессия со знаменателем $2x$. Она сходится при $|x|<\frac{1}{2}$ и имеет для этих x сумму *)

$$\frac{1}{1-2x}. \tag{59}$$

2) Найти решение уравнения Риккати, которое мы уже рассматривали в гл. XI (§ 1, n° 10):

$$y'=x-y^2, \tag{60}$$

удовлетворяющее условию $y|_{x=1}=1$.

Последовательно дифференцируя равенство (60), находим

$$\begin{aligned}
y'' &= 1-2yy',\\
y''' &= -2y'^2-2yy'',\\
y^{(4)} &= -6y'y''-2yy''',\\
y^{(5)} &= -6y''^2-8y'y'''-2yy^{(4)},\\
y^{(6)} &= -20y''y'''-10y'y^{(4)}-2yy^{(5)},\\
y^{(7)} &= -20y'''^2-30y''y^{(4)}-12y'y^{(5)}-2yy^{(6)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (60) получаем

$$y'(1)=0,\quad y''(1)=1,\quad y'''(1)=-2,\quad y^{(4)}(1)=4,\quad y^{(5)}(1)=-14,$$
$$y^{(6)}(1)=68,\quad y^{(7)}(1)=-336.$$

---

*) Функция (59) удовлетворяет уравнению (56) при всех $x\neq\frac{1}{2}$, а не только при $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. Иными словами, ряд (54) может давать решение уравнения не во всей области существования этого решения.

Значит,

$$y=1+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{6}-\frac{7(x-1)^5}{60}+\\+\frac{17(x-1)^6}{180}-\frac{(x-1)^7}{15}+\ldots \quad (61)$$

Постараемся отдать себе отчет в том, какую точность мы получим, если за y примем сумму выписанных членов ряда (61) (отметим, что мы даже не знаем промежутка сходимости этого ряда!). Для этого прежде всего заметим, что из (61) следует, что

$$y'=(x-1)-(x-1)^2+\frac{2(x-1)^3}{3}-\frac{7(x-1)^4}{12}+\\+\frac{17(x-1)^5}{30}-\frac{7(x-1)^6}{15}+\ldots \quad (62)$$

Теперь мы можем, выбрав какие-либо „контрольные точки", вычислить [опираясь на (61) и (62)] в этих точках отдельно левую и правую части равенства (60) и сравнить их. Полезно отметить, что сходимость рядов (61) и (62) будет тем более быстрой, чем ближе лежит точка x к точке 1.

Принимая в качестве контрольной точку $x=\frac{3}{2}$, найдем для нее

$$y'=0{,}307, \quad y=1{,}091, \quad x-y^2=0{,}310.$$

Аналогично для точки $x=\frac{1}{2}$ будет

$$y'=-0{,}895, \quad y=1{,}183, \quad x-y^2=-0{,}899.$$

Для значений x, более удаленных от 1, надо брать в ряде (61) больше членов.

II. *Способ неопределенных коэффициентов.* Этот способ особенно удобен в применении к линейным уравнениям

$$y^{(n)}+A(x)y^{(n-1)}+\ldots+M(x)y=N(x). \quad (63)$$

Он состоит в следующем: выбирается какое-либо число a и все коэффициенты $A(x), \ldots, M(x)$ уравнения (63), а также его свободный член $N(x)$ разлагаются по степеням разности $x-a$. После этого искомое решение y представляется рядом

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots \quad (64)$$

с буквенными коэффициентами $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Подставляя этот ряд в уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях разности $x-a$, находят $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Можно доказать, что в промежутке, в котором сходятся ряды для $A(x), \ldots, M(x), N(x)$, сходится и найденный ряд для y и что его сумма действительно удовлетворяет уравнению.

Примеры. 1) Решить уравнение

$$y'' - y = 0. \tag{65}$$

Представим y в форме

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

Тогда

$$y'' = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + \ldots$$

Подставляя это в уравнение, найдем

$$(2c_2 - c_0) + (3\cdot 2c_3 - c_1)\,x + (4\cdot 3c_4 - c_2)\,x^2 + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю все коэффициенты, получим

$$\begin{aligned} 2c_2 &= c_0, \\ 2\cdot 3c_3 &= c_1, \\ 3\cdot 4c_4 &= c_2, \\ 4\cdot 5c_5 &= c_3, \\ 5\cdot 6c_6 &= c_4, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Отсюда

$$c_2 = \frac{c_0}{2!}, \quad c_4 = \frac{c_0}{4!}, \quad c_6 = \frac{c_0}{6!}, \ \ldots,$$

$$c_3 = \frac{c_1}{3!}, \quad c_5 = \frac{c_1}{5!}, \quad c_7 = \frac{c_1}{7!}, \ \ldots$$

Стало быть,

$$y = c_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots\right). \tag{66}$$

Коэффициенты c_0 и c_1 найти неоткуда и их можно взять по желанию. Иными словами, эти коэффициенты суть произвольные постоянные, и (66) является общим решением уравнения (65). Если мы вспомним, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

и

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

то увидим, что *)

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

---

*) Функции $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называются соответственно *гиперболическими косинусом* и *синусом* и обозначаются через $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$. О них будет более подробно сказано в „Добавлении I".

Значит,

$$y = c_0\frac{e^x+e^{-x}}{2} + c_1\frac{e^x-e^{-x}}{2} = C_1e^x + C_2e^{-x},$$

где положено

$$\frac{c_0+c_1}{2} = C_1, \quad \frac{c_0-c_1}{2} = C_2.$$

2) Найти то решение y уравнения

$$y'' + xy' + y = x\cos x, \tag{67}$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{68}$$

Если написать для y разложение по степеням x

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots,$$

то условия (68) дадут $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. Значит,

$$y = x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

Отсюда

$$y' = 1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots,$$
$$y'' = 2c_2 + 3\cdot 2c_3x + 4\cdot 3c_4x^2 + \ldots$$

Подставляя y, y' и y'' в (67) и заменяя $\cos x$ его разложением (21), находим

$$2c_2 + 2\cdot 3c_3x + 3\cdot 4c_4x^2 + \ldots + x(1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \ldots) +$$
$$+ x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots = x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{array}{c|l}
1 & 2c_2 = 0, \\
x & 2\cdot 3c_3 + 2 = 1, \\
x^2 & 3\cdot 4c_4 + 2c_2 + c_2 = 0, \\
x^3 & 4\cdot 5c_5 + 3c_3 + c_3 = -\dfrac{1}{2!}, \\
x^4 & 5\cdot 6c_6 + 4c_4 + c_4 = 0, \\
x^5 & 6\cdot 7c_7 + 5c_5 + c_5 = \dfrac{1}{4!}, \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Отсюда прежде всего следует, что

$$c_2 = c_4 = c_6 = c_8 = \ldots = 0.$$

Далее имеем

$$c_3 = -\frac{1}{3!}, \quad c_5 = \frac{1}{4\cdot 5}\left(-\frac{1}{2!} - 4c_3\right) = \frac{1}{5!},$$

$$c_7 = \frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{1}{4!} - 6c_5\right) = -\frac{1}{7!}, \ldots$$

Иначе говоря,

$$c_3 = -\frac{1}{3!}, \quad c_5 = \frac{1}{5!}, \quad c_7 = -\frac{1}{7!}, \quad c_9 = \frac{1}{9!}, \ldots$$

и потому

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

или, что то же самое,

$$y = \sin x.$$

То, что это действительно требуемая функция, легко проверить непосредственно.

Мы видим, что способ неопределенных коэффициентов дает частное или общее решение дифференциального уравнения, смотря по тому, сопровождается ли уравнение начальными условиями или нет. Если такие условия даны и имеют вид

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

то рекомендуется представлять y рядом, расположенным по степеням $x - x_0$.

3) Рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0, \tag{69}$$

называемое *уравнением Бесселя* *). Представим его решение y в форме

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots \tag{70}$$

Отсюда

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots,$$
$$y'' = 1\cdot 2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + 3\cdot 4c_4 x^2 + \ldots$$

Перепишем уравнение (69) в виде

$$xy'' + y' + xy = 0 \tag{71}$$

и подставим сюда написанные ряды. Это дает

$$(2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + 3\cdot 4c_4 x^2 + \ldots)\,x + c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$
$$\ldots + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots)\,x = 0$$

---

*) Уравнением Бесселя называется дифференциальное уравнение $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$. Уравнение (69) является его частным случаем, отвечающим значению $n = 0$.

или

$$c_1+(c_0+4c_2)x+(c_1+9c_3)x^2+$$
$$+(c_2+16c_4)x^3+(c_3+25c_5)x^4+\ldots=0.$$

Отсюда

$$c_1=c_3=c_5=c_7=\ldots=0,$$

$$c_2=-\frac{c_0}{2^2},\quad c_4=\frac{c_0}{2^2\cdot 4^2},\quad c_6=-\frac{c_0}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2},\ \ldots$$

и потому

$$y=c_0\left(1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots\right).$$

Можно доказать (это будет сделано в n° 7 § 2), что написанный ряд сходится при любом x. Однако его сумма не является элементарной функцией. Она называется *функцией Бесселя* *) и обозначается через $J_0(x)$:

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots$$

Таким образом,

$$y=CJ_0(x),$$

где $C=c_0$ — произвольная постоянная. На первый взгляд полученный результат непонятен: ведь мы никаких начальных условий как будто не ставили. Значит, должно было бы получиться общее решение нашего дифференциального уравнения, а это общее решение должно было зависеть от двух постоянных. У нас же получилось решение, зависящее только от одной постоянной. В чем же дело? Дело в том, что в самом начале мы написали: „Представим его (т. е. дифференциального уравнения Бесселя) решение y в форме (70)". Но ведь в уравнение входит член $\frac{y'}{x}$. Чтобы этот член не терял смысла при $x=0$, приходится допустить, что $y'(0)=0$. А это есть начальное условие! Оно и содержалось неявно во фразе, написанной выше в кавычках. Естественно, что, наложив на решение дифференциального уравнения 2-го порядка одно начальное условие, мы тем самым закрепляем значение одной из произвольных постоянных. Более полный анализ показывает, что второе решение дифференциального уравнения (69), линейно независимое с $y_1=J_0(x)$, имеет вид

$$y_2=J_0(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

*) Полнее: функцией Бесселя первого рода и нулевого порядка.

и в форме (70) не представляется. Общее же решение нашего дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Значит, допустив представимость y в форме (70), мы этим и потребовали, чтобы было $C_2 = 0$.

n° 11. Упражнения. 1) Разложить $\sin x$ по степеням $x - \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \frac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots\right]$.

2) Найти первые три (отличные от нуля) члена разложения $\operatorname{tg} x$ по степеням x.

Ответ: $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$

3) Найти первые 4 члена разложения $\sqrt{1 + \sin x}$ по степеням x.

Ответ: $\sqrt{1 + \sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \ldots$

4) Доказать, что $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \ldots$

5) Вычислить $I = \int\limits_0^{0,3} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

Ответ: $I = 0{,}2971$.

6) Вычислить $I = \int\limits_0^{0,5} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} dx$.

Ответ: $I = 0{,}507$.

7) Вычислить $I = \int\limits_1^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{1 + (x-1)^2}}$.

Ответ: $I = 0{,}493$.

8) С помощью разложения в ряд Тейлора найти решение дифференциального уравнения $y' = \frac{1}{x+y}$ *), удовлетворяющее условию $y(1) = -2$.

Ответ: $y = -x - 1$.

9) Пусть $y' = \frac{2x + y^2 - 5}{2}$, $y(2) = 1$. Найти $y(2,4)$.

Ответ **): $y(2,4) = 1{,}092$.

---

*) Меняя роли x и y, сводим это дифференциальное уравнение к линейному.

**) Ср. с примерами 5 и 6 из n° 10 § 1 гл. XI.

10) Найти несколько членов разложения по степеням x того решения дифференциального уравнения $y'' - xy' + y = 2$, для которого $y(0) = y'(0) = 1$.

Ответ: $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{240} + \ldots$

11) Найти несколько членов разложения в ряд по степеням $x - 1$ того решения дифференциального уравнения $4x^2y'' + y = 0$, у которого $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2}$ *).

Ответ: $y = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} - \frac{5(x-1)^4}{128} + \frac{7(x-1)^5}{256} - \ldots$

§ 2. Дальнейшие сведения из теории рядов

n° 1. Основные свойства рядов.

Теорема 1. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать. Иначе говоря, если*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = A, \tag{1}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = B, \tag{2}$$

то

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \ldots = A + B. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть A_n, B_n и S_n — частные суммы рядов (1), (2), (3):

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$
$$S_n = (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n).$$

Тогда

$$S_n = A_n + B_n.$$

Но ведь при $n \to \infty$ будет $A_n \to A$, $B_n \to B$, откуда следует, что $S_n \to A + B$, а это равносильно формуле (3).

Теорема 2. *Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то ряд останется сходящимся, а его сумма умножится на это число.*

Доказательство. Пусть

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = A. \tag{1}$$

Образуем ряд

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots \tag{4}$$

*) Предложенное дифференциальное уравнение есть уравнение Эйлера. Поэтому легко установить, что $y = \sqrt{x} = \sqrt{1 + (x - 1)}$, и требуемое разложение получается при помощи биномиального ряда. Рекомендуем найти его способом неопределенных коэффициентов.

Если A_n и S_n — частные суммы рядов (1) и (4), т. е.

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n,$$

то $S_n = cA_n$. Но при $n \to \infty$ будет $A_n \to A$, откуда $S_n \to cA$, а это значит, что

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots = cA.$$

***Теорема* 3.** *Член сходящегося ряда с возрастанием своего номера стремится к нулю. Иными словами, если ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{5}$$

сходится, то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0.} \tag{6}$$

Доказательство. Пусть A_n и A соответственно обозначают n-ю частную сумму и сумму ряда (5). Тогда

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

и аналогично

$$A_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1},$$

откуда

$$a_n = A_n - A_{n-1}.$$

Но при $n \to \infty$ будет $A_n \to A$ и $A_{n-1} \to A$. Значит, $a_n \to A - A = 0$, чем и доказано (6).

Замечание. Теорема 3 означает, что соотношение (6) является необходимым условием сходимости ряда (5). Вспомним теперь, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

расходится. Так как у этого ряда

$$a_n = \frac{1}{n} \to 0,$$

то мы видим, что достаточным для сходимости ряда (5) условие (6) не является. Иными словами, нарушение этого условия гарантирует расходимость ряда, но его выполнение не гарантирует сходимости.

Определение. Пусть m — натуральное число. Ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots \tag{7}$$

называется *остатком* ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{5}$$

после m-го члена.

***Теорема 4.** Сам ряд* (5) *и его остаток* (7) *одновременно сходятся или расходятся.*

Доказательство. Пусть A_n — n-я частная сумма ряда (5), а A_k^* — k-я частная сумма ряда (7), т. е.

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad A_k^* = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}.$$

Тогда при $n > m$ будет

$$A_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n),$$

т. е. [поскольку $n = m + (n - m)$]

$$A_n = A_m + A_{n-m}^*. \tag{8}$$

Допустим теперь, что ряд (7) сходится к сумме R_m.

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots = R_m.$$

Тогда при $n \to \infty$ будет и $n - m \to \infty$ (ведь m закреплено!), откуда

$$A_{n-m}^* \to R_m.$$

Сопоставляя это соотношение с формулой (8), видим, что

$$A_n \to A_m + R_m,$$

т. е. ряд (5) сходится к сумме $A_m + R_m$. Итак, сходимость остатка ряда влечет сходимость самого ряда. Аналогично, на основании той же формулы (8) доказывается и обратное предложение.

Попутно доказано, что в случае сходимости рядов (5) и (7) их суммы A и R_m связаны соотношением

$$A = A_m + R_m.$$

Это соотношение можно записать в более наглядном виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

n° 2. Положительные ряды. Признаки сравнения.

Определение. Ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{5}$$

называется *положительным*, если положительны все его члены.

У такого ряда частная сумма

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

возрастает вместе с n. Значит, обязательно существует предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n. \tag{9}$$

При этом предел (9) будет конечным тогда и только тогда, когда сумма S_n ограничена сверху, т. е. когда существует такое постоянное число K, что при всех n оказывается

$$S_n < K.$$

Иначе говоря, верна

Теорема 1. *Положительный ряд всегда имеет (конечную или равную $+\infty$) сумму. Он сходится тогда и только тогда, когда его частные суммы ограничены сверху.*

Определение. Пусть даны два положительных ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{10}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \tag{11}$$

Если при всех n будет

$$\boxed{a_n \leqslant b_n,} \tag{12}$$

то говорят, что ряд (11) является *мажорантным* по отношению к ряду (10), а ряд (10) является *минорантным* по отношению к (11).

Иначе говоря, каждый член минорантного ряда меньше (точнее: не больше) соответствующего (т. е. имеющего тот же номер) члена мажорантного ряда.

Теорема 2. (***Первый признак сравнения.***) *Из сходимости мажорантного ряда следует сходимость минорантного.*

Доказательство. Пусть ряд (11) — мажорантный для (10). Положим

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Из (12) ясно, что

$$A_n \leqslant B_n. \tag{13}$$

Теперь допустим, что ряд (11) сходится. Тогда его частные суммы ограничены сверху, т. е. найдется такая постоянная K, что при всех n будет

$$B_n < K.$$

Отсюда и из (13) видно, что при всех n будет и

$$A_n < K,$$

а тогда ряд (10) сходится.

Доказанную теорему можно высказать и в такой (равносильной) форме: *расходимость минорантного ряда влечет расходимость мажорантного.* Само собою ясно, что из расходимости мажорантного ряда мы не можем сделать никакого заключения о поведении ряда минорантного.

Пример. В n°2 § 1 мы видели, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots$$

сходится. Но ясно, что этот ряд будет мажорантным для ряда

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots \tag{14}$$

Стало быть, ряд (14) также сходится. Этот ряд является остатком для ряда

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots, \tag{15}$$

очень похожего на гармонический. Однако в отличие от гармонического ряд (15) сходится [ибо сходится его остаток (14)].

Теорема 3. (***Второй признак сравнения.***) *Пусть даны два положительных ряда*

$$a_1+a_2+a_3+\dots, \tag{16}$$

$$b_1+b_2+b_3+\dots \tag{17}$$

Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения одинаковых по номеру членов рядов (16) *и* (17)

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \qquad (0<l<+\infty),$$

то эти ряды одновременно сходятся или расходятся.

Доказательство. Допустим, что ряд (17) сходится. Пусть

$$L=l+1.$$

Так как отношение $\frac{a_n}{b_n}$ стремится к пределу l и $l<L$, то при достаточно больших значениях n станет

$$\frac{a_n}{b_n}<L.$$

Пусть это неравенство станет верным, как только сделается $n>m$, где m — некоторое закрепленное натуральное число. Тогда для $n>m$, т. е. для $n=m+1$, $m+2$, $m+3$, ... будет

$$a_n<Lb_n.$$

Это означает, что ряд

$$a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\dots \tag{18}$$

является минорантным для ряда

$$Lb_{m+1}+Lb_{m+2}+Lb_{m+3}+\dots \tag{19}$$

Последний же ряд сходится. В самом деле, он получен умножением на L всех членов ряда

$$b_{m+1}+b_{m+2}+b_{m+3}+\ldots,$$

который сходится как остаток сходящегося ряда (17). Но тогда, как известно, сходится и (19). По первому признаку сравнения из сходимости ряда (19) вытекает сходимость ряда (18). А это остаток ряда (16). Значит, сходится и (16).

Итак, из сходимости ряда (17) вытекает сходимость ряда (16). Поскольку же эти ряды равноправны, то верно и обратное предложение, чем и завершено доказательство.

Если заранее предположить, что a_n и b_n (при $n\to\infty$) будут величинами бесконечно малыми (иначе все само собой ясно: ряд, у которого член с ростом номера не стремится к нулю, расходится), то теорему можно будет формулировать так: *если члены a_n и b_n двух положительных рядов являются бесконечно малыми одного порядка, то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.*

Пример. Ряд

$$\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots$$

расходится, ибо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\pi.$$

В заключение докажем одну теорему, которая будет использована нами позже.

Теорема 4. (О вложенном ряде.) Пусть дан сходящийся положительный ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots \tag{19а}$$

и пусть $n_1<n_2<n_3<\ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда ряд

$$a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+\ldots \tag{19б}$$

*также будет сходящимся**).

Доказательство. Пусть S_n и $\overline{S_k}$ — соответственно частные суммы рядов (19а) и (19б):

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$
$$\overline{S_k}=a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}+\ldots+a_{n_k}.$$

Тогда все члены суммы $\overline{S_k}$ входят в состав суммы S_{n_k}. Кроме того, в сумму S_{n_k} могут входить и такие слагаемые, которых в сумме $\bar{S}_k$ нет. Поскольку

*) Естественно назвать ряд (19б) „вложенным" в ряд (19а). Например, ряд $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\ldots$ „вложен" в гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{3}+\ldots$

ряд (19а) положительный, то и все упомянутые „лишние" (т. е. входящие в сумму S_{n_k}, но не входящие в сумму $\overline{S_k}$) слагаемые положительны. Отсюда следует, что

$$\overline{S_k} \leqslant S_{n_k}.$$

Но ведь ряд (19а) сходится. Значит, все его частные суммы остаются меньшими одного и того же постоянного числа A:

$$S_n < A.$$

В частности, $S_{n_k} < A$. А тогда и подавно

$$\overline{S_k} < A.$$

Стало быть, частные суммы положительного ряда (19б) ограничены сверху и этот ряд сходится.

n° 3. Признак Даламбера. Оба признака сравнения, рассмотренные в n° 2, имеют один и тот же недостаток: чтобы исследовать сходимость какого-либо положительного ряда, надо подобрать для сравнения с ним некоторый другой ряд, поведение которого (в отношении его сходимости) известно. Никаких общих правил для нахождения этого нового ряда нет, все зависит от догадливости исследователя, а также от запаса известных ему сходящихся и расходящихся рядов. Излагаемый в этом n° признак сходимости положительных рядов, принадлежащий Даламберу*), свободен от указанного недостатка. В этом признаке никаких новых рядов, кроме интересующего нас, привлекать не нужно, а нужно лишь проделать некоторые операции над самим данным рядом. Правда, этот признак не универсален, но во многих случаях он решает вопрос о сходимости или расходимости ряда.

Лемма 1. *Пусть дан положительный ряд*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{20}$$

Если при всех n оказывается

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,} \tag{21}$$

то ряд (20) *расходится.*

Доказательство. Неравенство (21) означает, что

$$a_n < a_{n+1}.$$

Стало быть,

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots,$$

т. е. n-й член ряда a_n с увеличением n удаляется от нуля. Но тогда не выполнено необходимое условие ($a_n \to 0$) сходимости ряда, и он расходится.

*) J. d'Alembert (1717—1783) — французский математик и механик.

Весьма соблазнительно попробовать доказать, что ряд (20) будет сходиться, если при всех n окажется

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Это, однако, невозможно. В самом деле, у гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

будет

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

а он расходится! Однако если при всех n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0{,}9,$$

то ряд (20) будет сходиться. Так же обстоит дело, если

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0{,}99$$

и т. п. Именно, справедлива

Лемма 2. *Если положительный ряд* (20) *таков, что при всех n оказывается*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \tag{22}$$

где q — постоянное число, меньшее 1,

$$0 < q < 1,$$

то этот ряд сходится.

Доказательство. Из (22) следует, что

$$\frac{a_2}{a_1} < q, \ \frac{a_3}{a_2} < q, \ \frac{a_4}{a_3} < q, \ \ldots, \ \frac{a_n}{a_{n-1}} < q.$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$\frac{a_2 a_3 a_4 \ldots a_n}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}} < q^{n-1}$$

или, что то же самое,

$$\frac{a_n}{a_1} < q^{n-1}.$$

Значит,

$$a_n < a_1 q^{n-1},$$

т. е. наш ряд (20) будет минорантным для ряда

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots \tag{23}$$

Но (23) есть геометрическая прогрессия со знаменателем q. Так как $0 < q < 1$, то эта прогрессия сходится, а тогда (по первому признаку сравнения) сходится и ряд (20).

Теорема. (***Признак Даламбера.***) *Пусть положительный ряд* (20) *таков, что существует предел*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l.}$$

$>$

Если $l \cancel{<} 1$, *то ряд* (20) *расходится, а если* $l<1$, *то этот ряд сходится.*

Доказательство. Пусть сначала $l>1$. Так как отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при больших n становится почти равным l, то оно при этих n будет удовлетворять неравенству

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1. \tag{24}$$

Пусть это неравенство начнет выполняться, как только n станет больше, чем m, где m — некоторое закрепленное натуральное число. Тогда ряд

$$a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\ldots \tag{25}$$

по лемме 1 должен оказаться расходящимся *). Но ведь этот ряд есть остаток нашего ряда (20). Стало быть, и (20) расходится.

Пусть теперь $l<1$. Положим

$$\frac{l+1}{2}=q.$$

Тогда

$$l<q<1.$$

Поскольку отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при больших n становится почти равным l, то при этих n оно будет удовлетворять неравенству

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q.$$

Пусть это неравенство выполняется для таких n, что $n>m$, где m — некоторое закрепленное натуральное число. Тогда по лемме 2 сходится ряд (25), и доказательство заканчивается так же, как и в случае $l>1$.

---

*) Непосредственно к нашему ряду (20) лемма 1 неприменима, так как в этой лемме предполагается, что неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ верно при всяком n, а (24) верно лишь при $n>m$.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. Здесь $a_n=\frac{n}{2^n}$, $a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$. Отсюда при $n\to\infty$ будет

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}.$$

Значит, ряд сходится.

2) Для ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$$

будет

$$a_n=\frac{3^n n!}{n^n},\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{3^{n+1}n!}{(n+1)^n}$$

и потому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{3}{e}>1.$$

Значит, ряд расходится.

3) Для ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \tag{26}$$

будет

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\to 1.$$

Этот случай теоремой не предусмотрен, однако и без теоремы мы знаем, что ряд (26) расходится.

4) Для похожего ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

также будет

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\to 1,$$

но этот ряд сходится.

Примеры 3) и 4) показывают, что при

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

ряд (20) может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

5) Рассмотрим ряд

$$\frac{Q}{1!}+\frac{Q^2}{2!}+\frac{Q^3}{3!}+\ldots\ (Q>0).$$

Здесь $a_n = \frac{Q^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{Q^{n+1}}{(n+1)!}$ и потому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{Q}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Стало быть, наш ряд сходится. Поскольку же общий член сходящегося ряда стремится к нулю, то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{Q^n}{n!} = 0}$$

и мы получили новое доказательство леммы из n° 3 § 1.

n° 4. Интегральный признак сходимости.

Определение. Пусть ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{27}$$

и некоторая функция $f(x)$, заданная при $x \geqslant 1$, связаны так, что при всех натуральных n оказывается

$$\boxed{f(n) = a_n.} \tag{28}$$

Тогда $f(x)$ называется *производящей функцией* ряда (27). Например, функция $\frac{1}{x}$ является производящей для гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

Теорема. **(*Интегральный признак сходимости.*)** *Пусть ряд* (27) *имеет непрерывную, положительную и убывающую производящую функцию* $f(x)$. *Тогда ряд и несобственный интеграл*

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \tag{29}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Так как ряд (27) положителен*), то он заведомо имеет сумму, которая может быть конечной или бесконечной. Аналогично этому интеграл (29), будучи интегралом от положительной функции, обязательно существует, но также может быть бесконечным. Этот интеграл представляет собой площадь фигуры H, ограниченной снизу осью Ox, сверху линией $y = f(x)$, т. е. графиком функции $f(x)$, слева прямой $x = 1$ и ничем не ограничен-

*) Ибо $a_n = f(n) > 0$.

ной справа (рис. 369). Нетрудно понять, что изображенные на рис. 369 прямоугольники имеют высоты, равные $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, $f(3)=a_3$, $f(4)=a_4$, ... Так как основания всех этих прямоугольников равны 1, то их площади равны последовательно a_1, a_2, a_3, ...

Предположим теперь, что ряд (27) сходится, т. е. что сумма $a_1+a_2+a_3+\ldots$ конечна. Тогда будет конечной сумма площадей упомянутых выше прямоугольников. Иными словами, конечной будет площадь составленной из этих прямоугольников ступенчатой фигуры. Но непосредственно из рисунка ясно, что эта ступенчатая фигура

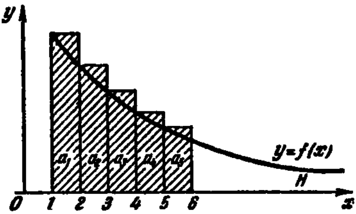


Рис. 369.

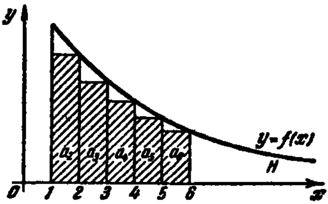


Рис. 370.

объемлет фигуру H, о которой говорилось выше. Поэтому эта последняя фигура и подавно имеет конечную площадь. Иначе говоря, конечным оказывается интеграл (29). Итак, сходимость ряда (27) влечет сходимость интеграла (29).

Допустим теперь, что интеграл (29) сходится, т. е. что площадь фигуры H конечна. Тогда и подавно будет конечной площадь вписанной в нее ступенчатой фигуры, заштрихованной на рис. 370. Эта последняя фигура состоит из прямоугольников с высотами $f(2)=a_2$, $f(3)=a_3$, $f(4)=a_4$, ... и основаниями, равными 1. Стало быть, ее площадь равна $a_2+a_3+a_4+\ldots$ Таким образом, ряд $a_2+a_3+a_4\ldots$, являющийся остатком нашего ряда (27), сходится. Вместе с ним сходится и (27). Итак, сходимость интеграла (29) влечет сходимость ряда (27). Теорема доказана.

Примеры. 1) Для гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}=[\ln x]_1^{+\infty}=\ln(+\infty)=+\infty.$$

Мы получили новое доказательство расходимости этого ряда.

2) Для ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

производящей будет $f(x)=\frac{1}{x^2}$, и интегральный признак дает

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}=1,$$

т. е. ряд сходится.

Интересно, что для обоих этих рядов признак Даламбера не давал никакого ответа.

3) Для ряда

$$\frac{1}{3\cdot 1^2-1}+\frac{2}{3\cdot 2^2-1}+\frac{3}{3\cdot 3^2-1}+\frac{4}{3\cdot 4^2-1}+\ldots$$

производящей функцией служит $f(x)=\frac{x}{3x^2-1}$. Так как

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{3x^2-1}=\left[\frac{1}{6}\ln(3x^2-1)\right]_1^{+\infty}=+\infty,$$

то ряд расходится. Здесь также признак Даламбера неприменим.

n° 5. Знакочередующиеся ряды.

Определение. Ряд называется *знакочередующимся* *), если любые два его соседних члена имеют разные знаки.

До сих пор мы обозначали n-й член ряда через a_n. В этом n° мы отступим от этого и через a_n будем обозначать не сам n-й член, а его абсолютную величину. Тогда, предполагая для определенности, что первый член знакочередующегося ряда положителен, запишем его в виде

$$a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-\ldots \qquad (30)$$

Теорема Лейбница. *Если модуль n-го члена знакочередующегося ряда с возрастанием n убывает и стремится к нулю, то ряд сходится.*

Доказательство. Рассмотрим ряд (30), предполагая, что

$$a_1>a_2>a_3>a_4>\ldots;\quad \lim_{n\to\infty}a_n=0. \qquad (30a)$$

Пусть S_n — n-я частная сумма ряда. Тогда

$$S_2=(a_1-a_2),$$
$$S_4=(a_1-a_2)+(a_3-a_4),$$
$$S_6=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6),$$
$$S_8=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+(a_5-a_6)+(a_7-a_8),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

*) Иногда знакопеременным или альтернирующим.

Каждая из разностей, написанных в скобках, благодаря первому из условий (30a) положительна. Стало быть,

$$S_2 < S_4 < S_6 < S_8 < \ldots$$

Это значит, что переменная S_{2n} возрастает. С другой стороны, сумму S_{2n} можно записать в виде

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Каждая из разностей, написанных в скобках, положительна. Поскольку и $a_{2n} > 0$, то ясно, что

$$S_{2n} < a_1.$$

Таким образом, переменная S_{2n} является величиной, ограниченной сверху. Из указанных двух свойств этой переменной следует, что она имеет конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_{2n}.$$

Покажем, что к этому же пределу стремится и S_{2n+1}. В самом деле, ведь

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S + 0 = S.$$

Значит, независимо от того, будет ли индекс n четным или нечетным, окажется

$$S_n \to S.$$

Теорема доказана.

Пример. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

сходится. В n° 6 § 1 мы уже говорили, что его сумма равна $\ln 2$.

Замечания. 1) Условие убывания модуля общего члена отбросить нельзя. Действительно, рассмотрим знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10^3} + \ldots$$

У него $a_n \to 0$, но ряд расходится: сумма членов, стоящих на нечетных местах, бесконечна, а сумма членов, стоящих на четных местах как сумма геометрической прогрессии (со знаменателем 0,1) конечна.

2) Мы видели, что S_{2n} приближается к S, возрастая. Напротив, S_{2n+1} с ростом n убывает. Действительно,

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_3 &= a_1 - (a_2 - a_3), \\ S_5 &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и так как каждая из разностей, написанных в скобках, положительна, то

$$S_1 > S_3 > S_5 > \ldots$$

Таким образом, если ряд (30) удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то суммы S_{2n} являются приближенными значениями суммы S с недостатком, а суммы S_{2n+1} — с избытком.

3) Ту же мысль мы можем выразить по-иному. Для этого заметим, что $S_1 = a_1$ и $S_2 = a_1 - a_2 > 0$. Поэтому неравенство

$$S_2 < S < S_1$$

дает

$$0 < S < a_1,$$

т. е. *сумма ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет тот же знак, что и первый член ряда, а по модулю меньше его*. Заметим теперь, что остаток ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, и сам удовлетворяет условиям этой теоремы, и потому к нему применимо только что сделанное замечание. Если сумма остатка после m-го члена равна R_m, то равенство

$$S = S_m + R_m$$

приводит к заключению: *ошибка, которую мы делаем, оборвав ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, на каком-либо члене, имеет тот же знак, что и первый отброшенный член, а по модулю меньше его.*

Это свойство рядов, удовлетворяющих условиям теоремы Лейбница, делает такие ряды очень удобными при численных подсчетах, ибо позволяет оценивать ошибку, происходящую от замены суммы ряда его частной суммой.

Пример. Пусть

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \ldots$$

Заменив S суммой выписанных членов, мы сделаем отрицательную ошибку, абсолютно меньшую, чем

$$\frac{1}{6^6} = \frac{1}{46656} < 0{,}00003.$$

n° 6. Абсолютная сходимость. Общий признак Даламбера. Теперь рассмотрим ряд, члены которого могут быть числами любых знаков. В отличие от предыдущего n° мы снова будем обозначать символом a_n сам n-й член ряда, а не только его абсолютную величину.

Теорема 1. *Рассмотрим одновременно с рядом*

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots \tag{31}$$

ряд модулей его членов

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+\ldots \tag{32}$$

Если ряд (32) *сходится, то сходится и* (31).

Доказательство. Пусть ряд

$$b_1+b_2+b_3+\ldots \tag{33}$$

состоит из всех положительных членов ряда (31), а ряд

$$c_1+c_2+c_3+\ldots \tag{34}$$

состоит из модулей всех отрицательных членов ряда (31) *).

Ряды (33) и (34) „вложены" в сходящийся положительный ряд (32) и по теореме n° 2 сходятся. Пусть B и C — их суммы, а B_p и C_q — их частные суммы. Рассмотрим частную сумму

$$A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

ряда (31). Если среди написанных здесь членов имеется $p=p(n)$ положительных и $q=q(n)$ отрицательных, то, очевидно,

$$A_n=B_p-C_q.$$

Если $n\to\infty$, то **) и $p\to\infty$, $q\to\infty$. Но тогда

$$B_p\to B,\quad C_q\to C$$

и потому $A_n\to B-C$. Наличие конечного предела $\lim A_n$ и доказывает теорему.

Замечание. Эта теорема необратима: из сходимости ряда (31) не вытекает, что сходится и (32). Например, ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

---

*) Например, если ряд (31) таков:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{45}+\frac{1}{63}-\frac{1}{147}+\frac{1}{200}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{1007}+\ldots,$$

то ряды (32), (33) и (34) соответственно имеют вид:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{45}+\frac{1}{63}+\frac{1}{147}+\frac{1}{200}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1007}+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{45}+\frac{1}{63}+\frac{1}{200}+\frac{1}{1000}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{147}+\frac{1}{1007}+\ldots$$

**) Мы рассматриваем случай, когда в (31) имеется бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов. Иначе все очевидно.

по теореме Лейбница сходится, в то время как ряд из модулей его членов представляет собой гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots,$$

который, как мы знаем, расходится.

Мы видим, что сходимость ряда (32) означает нечто большее, чем сходимость ряда (31). Поэтому полезно дать

Определение. Если сходится не только данный ряд (31), но и ряд (32) модулей его членов, то ряд (31) называется *абсолютно сходящимся*. Если же сам ряд (31) сходится, а (32) расходится, то (31) называется *неабсолютно сходящимся* рядом.

***Теорема 2.* (*Общий признак Даламбера.*)** *Пусть ряд*

$$a_1+a_2+a_3+\ldots \tag{31}$$

таков, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l.$$

Тогда при $l<1$ ряд (31) *абсолютно сходится, а при $l>1$ он расходится.*

Доказательство. Пусть сначала $l<1$. Сопоставим с рядом (31) ряд из модулей его членов

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots \tag{32}$$

Этот ряд положителен, и мы можем применить к нему признак Даламбера. Но ведь

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Стало быть, (32) сходится, а это и значит, что ряд (31) сходится абсолютно.

Рассмотрим теперь случай, когда $l>1$. Тогда привлечение ряда (32) ничего не дает, ибо из его расходимости нельзя сделать никакого заключения о поведении ряда (31). Однако теорему легко доказать непосредственно без использования ряда (32). Именно, поскольку при $n\to\infty$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\to l>1,$$

то для достаточно больших n станет $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>1$, т. е.

$$|a_{n+1}|>|a_n|.$$

Как только начнет реализоваться это неравенство, так сейчас же абсолютные величины членов ряда (31) начнут расти, т. е. члены ряда (31) будут удаляться от нуля. Это показывает, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда ($a_n\to 0$) и ряд расходится.

n° 7. Применение общего признака Даламбера к степенным рядам. Общий признак Даламбера во многих случаях позволяет найти промежуток сходимости степенного ряда. Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots \tag{35}$$

Здесь $a_n=\frac{x^n}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$. Значит,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2|x|\xrightarrow[n\to\infty]{}|x|.$$

На основании общего признака Даламбера мы заключаем, что ряд (35) сходится (и даже абсолютно) при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Иными словами, промежуток сходимости этого ряда

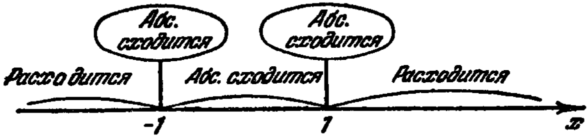


Рис. 371.

есть $-1<x<1$. Каково поведение ряда **на концах** этого промежутка, по признаку Даламбера узнать нельзя, ибо там $|x|=1$. Однако, непосредственно подставляя в ряд (35) значения $x=\pm 1$,

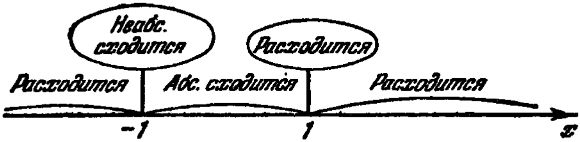


Рис. 372.

видим, что при этих значениях ряд абсолютно сходится. Схематически поведение ряда изображено на рис. 371.

В качестве другого примера рассмотрим ряд

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots \tag{36}$$

Здесь

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n}{n+1}|x|\to|x|$$

и промежуток сходимости тот же: $-1<x<1$. Однако при $x=1$ ряд (36) превращается в расходящийся гармонический ряд, а при $x=-1$ он сходится по теореме Лейбница. Значит, его поведение имеет характер, изображенный на рис. 372.

Рассмотрим еще ряд

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Здесь

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x|}{n+1}\to 0$$

и ряд сходится при любом x *).

Интересен пример ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n. \tag{37}$$

Здесь при $x\neq 0$ будет

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=(n+1)|x|\to+\infty.$$

Поэтому ряд (37) расходится при всех x, кроме $x=0$.

Вернемся к биномиальному ряду

$$1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+\ldots, \tag{38}$$

которым мы занимались в n° 8 § 1. Там было сказано, что промежуток сходимости этого ряда есть $-1<x<1$. Сейчас мы в состоянии доказать это. Действительно, у ряда (38) будет

$$a_n=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n,$$

$$a_{n+1}=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(\mu-n)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Поэтому при $n\to\infty$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|\mu-n|}{n+1}|x|\to|x|.$$

Остальное ясно.

В заключение остановимся на ряде

$$1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\ldots, \tag{39}$$

который встретился нам в n° 10 § 1. Здесь

$$a_n=\pm\frac{x^{2n}}{2^2\cdot 4^2\ldots(2n)^2},\qquad a_{n+1}=\mp\frac{x^{2n+2}}{2^2\cdot 4^2\ldots(2n)^2(2n+2)^2}.$$

Стало быть,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left(\frac{x}{2n+2}\right)^2\to 0$$

и ряд сходится при любом x.

---

*) Этот факт был установлен нами и раньше, когда была доказана разложимость функции e^x в ряд Маклорена.

§ 3. Ряды Фурье

n° 1. Вводные замечания. Мы видели, какую большую пользу приносит представление функции $f(x)$ в форме

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots, \tag{1}$$

т. е. в форме суммы степенного ряда. Такое представление дает возможность и находить численные значения функции, и устанавливать различные свойства функции (например, доказать формулу Эйлера), и решать дифференциальные уравнения и т. п. Столь плодотворным оказывается представление (1) потому, что отдельные слагаемые правой части являются чрезвычайно простыми функциями. Можно сказать, что формула (1) показывает, как составлена сложная функция $f(x)$ из простейших функций

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots \tag{2}$$

Таким образом, разложение (1) в некотором роде сходно с разложением многочлена на множители или с разложением рациональной дроби на простые и т. п.

Наряду с системой степеней (2), в элементарной математике хорошо изучена система тригонометрических функций

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \ldots \tag{3}$$

Поэтому, кроме представления функции $f(x)$ в форме (1), большое значение имеет ее представление в форме суммы ряда по функциям (3), т. е. в форме

$$f(x) = A + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots \tag{4}$$

Ряд такого вида носит название *тригонометрического* ряда.

Напомним важное свойство тригонометрических функций:

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha, \quad \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha.$$

Если функция $\varphi(x)$ обладает тем свойством, что при некотором постоянном T и всех x оказывается

$$\varphi(x + T) = \varphi(x),$$

то говорят, что $\varphi(x)$ *имеет период* T или, короче, T*-периодична.* Таким образом, все функции системы (3) 2π-периодичны. Но тогда и сумма ряда (4) должна быть 2π-периодична: если все члены ряда не меняются от замены x на $x + 2\pi$, то и сумма его не меняется от этой замены. Поэтому тригонометрические ряды являются аппаратом, особенно удобным для представления 2π-периодических функций.

n° 2. Ортогональность тригонометрической системы.

Определение. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *взаимно ортогональными* на промежутке $[a, b]$, если

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0.}$$

Теорема 1. *Любые две функции системы*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \ldots \tag{3}$$

взаимно ортогональны на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме.

Лемма. *Если $k \neq 0$ — положительное или отрицательное целое число, то* *)

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = 0,} \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx = 0.} \tag{5}$$

В самом деле,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\,[\sin kx]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Аналогично доказывается и второе из равенств (5).

Переходя к доказательству теоремы, мы должны выбирать из системы (3) различные пары функций и находить интеграл от их произведения. При этом могут представиться следующие случаи.

I. Одна из выбранных функций есть 1, а вторая $\cos nx$ или $\sin nx$. Тогда упомянутый интеграл будет нулем в силу леммы.

II. Выбрана пара функций $\cos nx$ и $\cos mx$. Так как

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\,[\cos(A - B) + \cos(A + B)], \tag{6}$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n - m)\,x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n + m)\,x\,dx\right].$$

По лемме оба интеграла, стоящие справа, равны нулю.

*) Второе (но не первое!) из равенств (5) верно и при $k = 0$, ибо $\sin 0 = 0$.

III. Выбраны функции $\sin nx$ и $\sin mx$. Тогда вместо (6) надо применить формулу

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

и рассуждать, как и II.

IV. Выбраны функции $\cos nx$ и $\sin mx$. Так как

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)],$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x \, dx\right].$$

По лемме*) оба интеграла справа равны нулю.

Итак, какие бы две различные функции из системы (3) ни взять, интеграл от их произведения по промежутку $[-\pi, \pi]$ равен нулю. Это и требовалось доказать.

Нам понадобится еще

***Теорема 2.** При любом натуральном n будет*

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi,} \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi.} \tag{7}$$

В самом деле,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx \, dx\right] = \pi,$$

ибо второй интеграл, стоящий справа, по лемме равен нулю. Аналогично доказывается и второе равенство (7).

---

*) Здесь не исключен случай $m = n$. Тогда второй интеграл справа будет нулем не по лемме, а по замечанию, сделанному в предыдущей сноске.

n° 3. Теорема единственности. Ряд Фурье.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, заданная и непрерывная на отрезке $[-\pi, \pi]$, разлагается в тригонометрический ряд, то коэффициенты его определяются единственным образом.*

Доказательство. Пусть

$$f(x) = A + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots \tag{4}$$

Проинтегрируем это равенство по промежутку $[-\pi, \pi]$, причем к правой части (4) применим теорему „интеграл суммы равен сумме интегралов“. Так как справа стоит бесконечное множество слагаемых, то следовало бы обосновать возможность применения указанной теоремы, но мы оставим это в стороне *).

Благодаря равенствам (5) интегралы от всех слагаемых, кроме первого, равны нулю, что приводит к соотношению

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} A\,dx = A \cdot 2\pi.$$

Отсюда

$$\boxed{A = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.} \tag{8}$$

Итак, свободный член A разложения (4) действительно определяется единственным образом.

Займемся теперь хотя бы коэффициентом a_2. Для его нахождения умножим равенство (4) на $\cos 2x$. Это приводит к равенству

$$f(x)\cos 2x = A\cos 2x + (a_1 \cos x \cos 2x + b_1 \sin x \cos 2x) + \\ + (\underline{a_2 \cos^2 2x} + b_2 \sin 2x \cos 2x) + \ldots$$

Это равенство мы проинтегрируем по промежутку $[-\pi, \pi]$, причем к правой части снова применим упомянутую теорему об интеграле суммы. По теореме 1 из n° 2 интегралы от всех слагаемых, кроме подчеркнутого, будут равны нулю (в этом и состоит основная идея доказательства!). Применяя еще теорему 2 из n° 2, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_2 \cos^2 2x\,dx = \pi a_2.$$

---

*) Бывают случаи, когда равенство $\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$ неверно. Однако можно доказать, что в случае, рассматриваемом нами, такая „неприятность“ исключена.

Стало быть,

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx.$$

Аналогично доказывается, что и при любом n будет

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx,} \tag{9}$$

а также

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.} \tag{10}$$

Теорема доказана.

Эта теорема дает повод ввести следующее

Определение. Пусть $f(x)$ — функция, заданная на промежутке $[-\pi, \pi]$. Числа A, a_n, b_n, найденные для этой функции по формулам (8), (9) и (10), называются ее *коэффициентами Фурье* *), а ряд

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с этими коэффициентами называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Из доказательства теоремы 1 видно, что эту теорему можно формулировать и так:

Теорема единственности. *Если непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, то это обязательно ее ряд Фурье.*

Разумеется, эта теорема вовсе не значит, что всякая непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция действительно разлагается в ряд Фурье. Например, функция $f(x) = x$, рассматриваемая на $[-\pi, \pi]$, заведомо не разлагается на всем этом отрезке в тригонометрический ряд, ибо у нее $f(-\pi) \neq f(\pi)$, а сумма тригонометрического ряда ввиду своей 2π-периодичности в точках $x = \pm\pi$ должна иметь одинаковые значения.

n°4. Теорема разложения. Примеры.

Теорема. *Пусть $f(x)$ задана на $[-\pi, \pi]$ и в каждой точке этого промежутка имеет конечную производную $f'(x)$. Тогда*

*) J. B. J. Fourier (1768—1830) — французский математик, систематически применявший тригонометрические ряды.

ряд Фурье этой функции сходится на всей оси, причем сумма его $S(x)$ равна $f(x)$ в точках x, для которых $-\pi<x<\pi$, и

$$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}. \tag{11}$$

Эту замечательную теорему мы примем без доказательстиа.

Замечання. 1) В теореме гонорится о том, какона сумма ряда $S(x)$ и точках, прннадлежащих отрезку $[-\pi, \pi]$. Однако поскольку эта сумма 2π-периодична, то ее значения на $[-\pi, \pi]$ определяют собой н исе остальные значення.

2) Теорема гарантирует разложимость всякой дифференцируемой на $[-\pi, \pi]$ функции и ее ряд Фурье не на исем этом отрезке, а лишь на открытом промежутке $(-\pi, \pi)$. Одиако если разлагаемая функция удовлетиоряет еще дополнительному услоиию

$$\boxed{f(-\pi)=f(\pi),} \tag{12}$$

то, как это иидно из (11), она будет представима сионм рядом Фурье на исем отрезке $[-\pi, \pi]$.

Прнмеры. 1) Пусть $f(x)=x$. Найдем коэффициенты Фурье этой функции. По (8)

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Далее, нntегрируя по частям и применяя (5), находим

$$\pi a_n=\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d(\sin nx)=$$

$$=\frac{1}{n}\left\{[x\sin nx]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right\}=0.$$

Наконец,

$$\pi b_n=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\,d(\cos nx)=$$

$$=-\frac{1}{n}\left\{[x\cos nx]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right\}=-\frac{2\pi\cos n\pi}{n}. \tag{13}$$

Но $\cos n\pi=(-1)^n$. Стало быть,

$$b_n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Отсюда

$$\boxed{x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right).} \tag{14}$$

Равенство (14) верно лишь при $-\pi<x<\pi$ *). В точках же $x=\pm\pi$ оно заведомо неверно, ибо сумма ряда в этих точках равна 0. В силу 2π-периодичности суммы $S(x)$ ряда (14) график этой суммы имеет вид, изображенный на рис. 373 жирной линией.

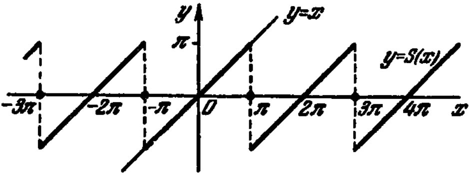


Рис. 373.

Интересно, что $S(x)$ оказывается р а з р ы в н о й функцией (хотя все члены ряда непрерывны!). Мы видим, что появление в математике разрывных функций совершенно неизбежно: их вводит сам математический аппарат даже при рассмотрении столь „хороших" функций, как $f(x)=x$. Систематическим исследованием разрывных функций занимается „Теория функций вещественной переменной", однако в технических вузах эта дисциплина не изучается.

2) Рассмотрим функцию $f(x)=x^2$. Ее коэффициенты Фурье таковы:

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}.$$

Далее, интегрируя по частям, находим

$$\pi a_n=\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 d(\sin nx)=$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left[x^2\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}-2\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx\right\}.$$

---

*) Положив, в частности, $x=\frac{\pi}{2}$, получаем

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

В n° 7 § 1 [формула (43)] это равенство было получено из других соображений.

Внеинтегральный член справа равен нулю. Интеграл же был найден в (13). Стало быть,

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Аналогичный подсчет дает $b_n = 0$. Значит,

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots\right).} \tag{15}$$

Так как функция $f(x) = x^2$ удовлетворяет условию (12), то формула

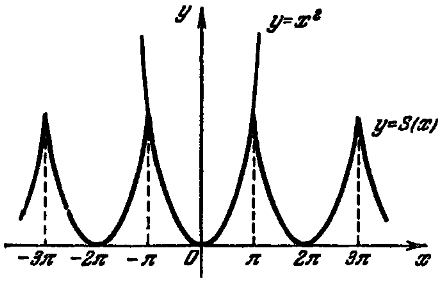


Рис. 374.

(15) верна на всем отрезке $[-\pi, \pi]$. В частности, полагая $x = \pi$, находим

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right),$$

откуда вытекает изящное равенство

$$\boxed{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.} \tag{16}$$

Замечание. Если (16) умножить на $\frac{1}{4}$, то получится

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots = \frac{\pi^2}{24}.$$

Вычитая это равенство из (16), получим

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Вследствие 2π-периодичности суммы $S(x)$ ряда (15) ее график имеет вид, изображенный на рис. 374. Функция $S(x)$ оказывается непрерывной, но не гладкой.

3) Очень поучительно следующее упражнение: пусть функция $f(x)=2x^2+3x+1$ разложена в ряд Фурье и пусть $S(x)$ — сумма этого ряда. Найти $S(1)$, $S(\pi)$, $S\left(2\frac{1}{3}\pi\right)$, $S\left(7\frac{1}{2}\pi\right)$, $S(10)$.

Решение. Точка $x=1$ лежит внутри промежутка $(-\pi, \pi)$, где $S(x)=f(x)$. Значит, $S(1)=6$. Далее, $2S(\pi)=f(\pi)+f(-\pi)$ и потому $S(\pi)=2\pi^2+1$. В силу 2π-периодичности $S(x)$ имеем $S\left(2\frac{1}{3}\pi\right)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi^2}{9}+\pi+1$. Аналогично $S\left(7\frac{1}{2}\pi\right)=S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$ $=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}-\frac{3\pi}{2}+1$. Наконец, $S(10)=S(10-4\pi)=$ $=S(-2{,}566\ldots)=f(-2{,}566\ldots)=6{,}47\ldots$

n° 5. Обобщение. Теорема n° 4 допускает значительное обобщение. Для его формулировки полезно ввести обозначения *)

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x), \quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Если функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна, то оба предела $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ существуют и равны $f(x_0)$. Если $f(x)$ задана так:

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ при } x=3, \\ 0 \text{ при } x\neq 3 \end{cases}$$

Рис. 375.

(рис. 375), то $f(3-0)=f(3+0)=0$, в то время как $f(3)=1$.

Теорема. *Если $f(x)$ кусочно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке x_0 из $(-\pi, \pi)$, где существуют четыре конечных предела*

$$f(x_0+0),\ f(x_0-0),$$

$$\alpha=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0}, \quad \beta=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0}.$$

Сумма ряда $S(x)$ в каждой такой точке равна

$$S(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Кроме того, ряд сходится к сумме

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

в точках $x=\pm\pi$, если существуют конечные пределы $f(-\pi+0)$ $f(\pi-0)$ и

$$\lim_{x\to\pi-0}\frac{f(x)-f(\pi-0)}{x-\pi}, \quad \lim_{x\to-\pi+0}\frac{f(x)-f(-\pi+0)}{x+\pi}.$$

---

*) См. сноску на стр. 214.

Эта теорема позволяет разлагать в ряд Фурье и кусочно непрерывные функции.

Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } -\pi\leqslant x<0, \\ h \text{ при } x=0, \\ 1 \text{ при } 0<x\leqslant\pi. \end{cases}$$

Найдем для этой функции ряд Фурье. Здесь

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}dx=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}[\sin nx]_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{-1}{n\pi}[\cos nx]_0^{\pi}=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}.$$

Значит,

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right). \tag{17}$$

Равенство (17) верно при $-\pi<x<0$ (где сумма ряда равна 0) и при $0<x<\pi$ (где эта сумма равна 1). В частности, при $x=\frac{\pi}{2}$ получаем снова, что

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

то же получается и при $x=-\frac{\pi}{2}$. В точках $x=0$, $x=\pm\pi$ сумма ряда очевидным образом равна $\frac{1}{2}$, что согласуется с теоремой.

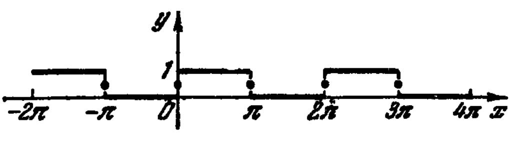


Рис. 376.

Отметим, что значение h, принимаемое функцией при $x=0$, никакой роли не играет. Это вполне естественно, ибо изменение значения подынтегральной функции в одной точке не может отразиться на величине интеграла *), а коэффициентами ряда Фурье служат как раз некоторые интегралы.

График суммы ряда (17) изображен на рис. 376.

n° 6. Разложение четных и нечетных функций.

Определение. Функция $f(x)$ называется *четной*, если она не меняется при изменении знака ее аргумента, т. е. если

$$\boxed{f(-x)=f(x).}$$

Примерами четных функций служат функции x^2, x^4, x^6 и, вообще, x^{2n}, а также $\cos x$ и, вообще, $\cos nx$. Функция $f(x)=1$ также является четной.

Ясно, что график четной функции симметричен относительно оси ординат (рис. 377).

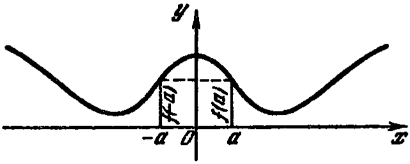


Рис. 377.

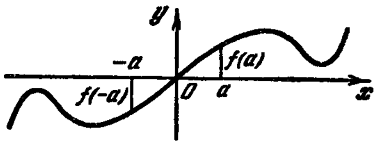


Рис. 378.

Определение. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента она меняет знак, но сохраняет абсолютную величину, т. е. если

$$\boxed{f(-x)=-f(x).}$$

Например, таковы функции x, x^3, x^5 и, вообще, x^{2n-1}, а также $\sin x$ и, вообще, $\sin nx$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 378).

Функция может не быть ни четной, ни нечетной. Например, такова $f(x)=x^2+x$. Здесь $f(5)=30$, $f(-5)=20$. Функция $f(x)\equiv 0$ является одновременно и четной и нечетной.

Рассмотрим произведение $p(x)=f(x)g(x)$. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ четные или обе нечетные, то $p(x)$, очевидно, будет четной функцией. Если же из функций $f(x)$ и $g(x)$ одна четная, а другая нечетная, то $p(x)$ будет нечетной функцией. Иначе говоря, верна

---

*) Ведь геометрически изменение функции в одной точке означает удлинение или укорочение только одной ординаты ее графика. Такое изменение не влияет на площадь, которая выражается интегралом.

Теорема 1. *Произведение двух функций одинаковой (различной) четности четно (нечетно).*

Для дальнейшего нужна

Лемма. *Верна формула*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx. \tag{18}$$

В самом деле,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Сделаем в первом интеграле справа подстановку $x = -y$. Это превратит его в

$$-\int_{a}^{0} f(-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(-y)\,dy.$$

Так как обозначение переменной интегрирования роли не играет, то

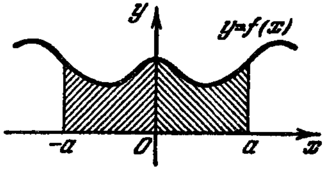


Рис. 379.

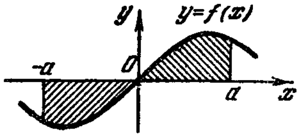


Рис. 380.

мы можем ее снова обозначить буквой x. Остальное ясно.

В частности, из (18) следует

Теорема 2. *Если $f(x)$ четна, то*

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.} \tag{19}$$

Если же $f(x)$ нечетна, то

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.} \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) геометрически очевидны: первая из них вытекает из равенства площадей, заштрихованных на рис. 379. Иллюстрацией второй служит рис. 380. В обоих случаях суть дела в симметрии графика $f(x)$.

Пусть $f(x)$ — четная функция. Тогда ее коэффициент Фурье A по формуле (19) может быть записан в виде

$$\boxed{A=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx.} \tag{21}$$

Аналогично этому, поскольку произведение $f(x)\cos nx$ четно, то по той же формуле

$$\boxed{a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx.} \tag{22}$$

Наконец, $b_n=0$, так как произведение $f(x)\sin nx$ нечетно и к b_n применима формула (20).

Таким образом, верна

Теорема 3. *Ряд Фурье четной функции не содержит синусов и имеет вид*

$$A+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,$$

причем его коэффициенты A и a_n можно находить по упрощенным формулам (21) *и* (22).

Таким же способом устанавливается

Теорема 4. *Ряд Фурье нечетной функции не содержит ни свободного члена, ни косинусов и имеет вид*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,$$

где

$$\boxed{b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx.} \tag{23}$$

n°7. Разложение функции, заданной на части промежутка $[-\pi, \pi]$. До сих пор мы говорили о разложении в тригонометрический ряд функции, заданной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Рассмотрим теперь случай, когда $f(x)$ задана лишь на части $[a, \pi]$ этого отрезка, где $-\pi<a<\pi$ (рис. 381). Будем предполагать $f(x)$ дифференцируемой на этом отрезке и поставим вопрос о построении такого тригонометрического ряда

$$A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{24}$$

в который разлагалась бы наша $f(x)$. Эту задачу можно решить так: выберем совершенно произвольную функцию $g(x)$, заданную

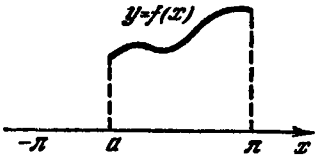


Рис. 381.

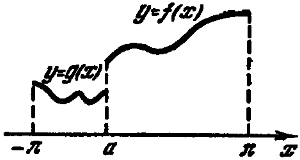


Рис. 382.

и дифференцируемую на отрезке $[-\pi, a]$, и определим на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ „составную“ функцию $F(x)$, положив

$$F(x)=\begin{cases} g(x), & \text{если } -\pi\leqslant x<a,\\ f(x), & \text{если } \quad a\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

График $F(x)$ изображен на рис. 382. Функция $F(x)$ разлагается в свой ряд Фурье (24) на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, за исключением, может быть, трех точек: $x=\pm\pi$ и $x=a$. В этих точках сумма ряда будет соответственно равна

$$\frac{g(-\pi)+f(\pi)}{2}, \quad \frac{g(a)+f(a)}{2}.$$

Поскольку при $a<x<\pi$ „составная“ функция $F(x)$ совпадает с $f(x)$, то для этих x будет

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{25}$$

Если подбирать $g(x)$ с условием $g(-\pi)=f(\pi)$, то окажется $F(-\pi)=F(\pi)$, и (25) будет верно и при $x=\pi$. Наконец, условие $g(a)=f(a)$ обеспечит справедливость равенства (25) и при $x=a$.

Таким образом, поставленная задача имеет решение. Однако это решение *не единственное*: ведь функцию $g(x)$ мы могли выбирать бесконечным множеством способов, а выбор этой функции определяет коэффициенты ряда (24). Например,

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{a}g(x)\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{\pi}f(x)\,dx.$$

Поэтому (в отличие от функции, заданной на всем отрезке $[-\pi, \pi]$) функция, заданная на более коротком отрезке, допускает бесконечное множество представлений вида (25): здесь не имеет места теорема единственности.

Все сказанное относится, в частности, и к отрезку $[0, \pi]$. Но тут появляется некое новое обстоятельство. Именно, мы можем, если

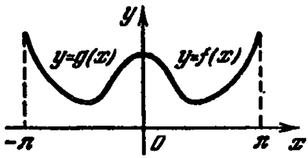


Рис. 383.

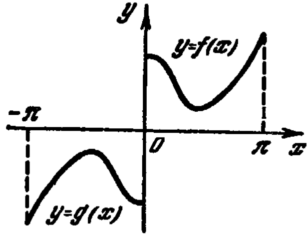


Рис. 384.

захотим, взять $g(x)$ такой, чтобы „составная“ функция $F(x)$ оказалась четной (рис. 383). Это приводит к разложению

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{26}$$

в котором

$$A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx. \tag{27}$$

Нетрудно видеть, что формула (26) верна на всем отрезке $[0, \pi]$. С другой стороны, мы можем выбрать $g(x)$ и так, чтобы $F(x)$ оказалась нечетной *) (рис. 384). Это приведет нас к разложению

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{28}$$

в котором

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx. \tag{29}$$

Формула (28) верна при $0 < x < \pi$. Чтобы она была верна при $x = 0$, надо, чтобы было $f(0) = 0$, ибо правая часть равенства (28) обращается в 0 при $x = 0$. Точно так же для справедливости формулы (28) в точке $x = \pi$ надо, чтобы было $f(\pi) = 0$.

*) Если $f(0) \neq 0$, то $F(x)$ будет иметь разрыв при $x = 0$.

Таким образом, верна

Теорема. *Функцию $f(x)$, заданную и дифференцируемую на $[0, \pi]$, можно бесконечным множеством способов разложить в тригонометрический ряд. В частности, ее можно разложить по косинусам в ряд* (26), *коэффициенты которого определяются формулами* (27). *Можно также $f(x)$ разложить по синусам в ряд* (28) *с коэффициентами* (29).

Примеры. 1) Пусть $f(x)=x$. Разложить эту функцию на $[0, \pi]$ в ряд по косинусам.

Здесь

$$A=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\left\{[x\sin nx]_0^\pi-\int_0^\pi \sin nx\,dx\right\}=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[\cos nx]_0^\pi=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1].$$

Отсюда при $0\leqslant x\leqslant\pi$ будет

$$\boxed{x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).} \tag{30}$$

В частности, при $x=0$ мы снова находим

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

Сумма ряда (30) является 2π-периодической и четной функцией. Ее график изображен на рис. 385.

2) Пусть функция $f(x)=3x^2+x+1$, заданная в $[0, \pi]$, разложена в тригонометрический ряд по синусам. Найти сумму ряда $S(x)$ в точках $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=6\pi$, $x=7\frac{1}{4}\pi$, $x=12$.

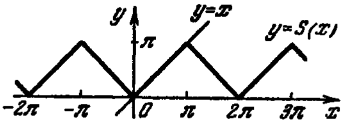


Рис. 385.

Решение. a) Так как $0<\frac{\pi}{2}<\pi$, то $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\frac{3\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}+1$. b) Так как $S(x)$ нечетна *), то $S\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$ $=-S\left(\frac{\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}+1\right)$. c) $S(6\pi)=0$, так как

*) Ведь это сумма ряда синусов!

при $x=6\pi$ все члены ряда обращаются в нуль. d) $S\left(7\frac{1}{4}\pi\right)=$ $=S\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=-S\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\left(\frac{27}{16}\pi^2+\frac{3}{4}\pi+1\right)$. e) $S(12)=$ $=S(12-4\pi)=S(-0{,}566\ \ldots)=-S(0{,}566\ \ldots)=-f(0{,}566\ \ldots)=$ $=-2{,}527$.

n° 8. Сдвиг основного промежутка. Всю теорию рядов Фурье мы излагали для функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$. Однако вместо этого отрезка можно было бы положить в основу рассуждений любой другой отрезок длины 2π. Дело в том, что 2π есть период всех функций системы

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \ldots, \tag{31}$$

а справедлива

Теорема 1. *Если функция $\varphi(x)$ имеет период 2π, то интеграл*

$$I(a)=\int_{a}^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx$$

от числа a не зависит.

В самом деле,

$$I(a)=\int_{a}^{0}\varphi(x)\,dx+\int_{0}^{2\pi}\varphi(x)\,dx+\int_{2\pi}^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx. \tag{32}$$

В последнем интеграле справа можно сделать замену $x=y+2\pi$, дающую

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi}\varphi(x)\,dx=\int_{0}^{a}\varphi(y+2\pi)\,dy=\int_{0}^{a}\varphi(y)\,dy=\int_{0}^{a}\varphi(x)\,dx=-\int_{a}^{0}\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, первый и третий интегралы правой части (32) взаимно уничтожаются и

$$I(a)=\int_{0}^{2\pi}\varphi(x)\,dx,$$

чем и доказана теорема.

В частности, из нее следует, что 1) любые две функции системы (31) взаимно ортогональны на всяком отрезке длины 2π и 2) при всяком a будет

$$\int_{a}^{a+2\pi}\cos^2 nx\,dx=\int_{a}^{a+2\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi.$$

Поэтому всю теорию и можно перенести с отрезка $[-\pi, \pi]$ на любой отрезок $[a, a+2\pi]$. Например, верна

Теорема 2. *Если $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0, 2\pi]$, то всюду на открытом промежутке $(0, 2\pi)$ будет*

$$f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{33}$$

где

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

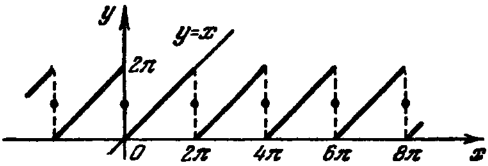


Рис. 386.

Ряд (33) *сходится и в точках $x=0$, $x=2\pi$, где его сумма равна*

$$\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, рассматриваемую на отрезке $[0, 2\pi]$.

Здесь

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx=\pi,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx=-\frac{2}{n}.$$

Стало быть, при $0<x<2\pi$ будет

$$\boxed{x=\pi-2\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right).} \tag{34}$$

В частности, при $x=\frac{\pi}{2}$ получаем уже знакомое равенство

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

В точках $x=0$ и $x=2\pi$ сумма $S(x)$ ряда (34) равна π. График этой суммы изображен на рис. 386. Мы видим, что она разрывна.

Нетрудно понять, что $S\left(9\frac{1}{3}\pi\right)=S\left(1\frac{1}{3}\pi\right)=1\frac{1}{3}\pi$.

n° 9. Растяжение основного промежутка. Мы видели, что ряды вида

$$A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

являются хорошим аналитическим аппаратом для представления функций, заданных на промежутке длины 2π. Остановимся теперь на функциях $f(x)$, заданных на отрезке другой длины $2l$. Пусть для определенности речь идет о функции $f(x)$, заданной и дифференцируемой на отрезке $[-l, +l]$. Положим

$$\varphi(z)=f\left(\frac{lz}{\pi}\right).$$

Тогда $\varphi(z)$ будет заданной и дифференцируемой уже на отрезке $[-\pi, \pi]$. Значит, к $\varphi(z)$ применима теория, изложенная выше, и потому при $-\pi<z<\pi$ будет

$$\varphi(z)=f\left(\frac{lz}{\pi}\right)=A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nz + b_n \sin nz).$$

Положим в этом равенстве $z=\frac{\pi x}{l}$. Это дает для $-l<x<l$ равенство

$$\boxed{f(x)=A+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right).} \tag{35}$$

В точках $x=\pm l$ сумма ряда равна

$$\frac{f(-l)+f(l)}{2}.$$

Остановимся на коэффициентах ряда (35). Например,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z)\cos nz\,dz=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lz}{\pi}\right)\cos nz\,dz.$$

Подстановка $z=\frac{\pi x}{l}$ дает

$$\boxed{a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.}$$

Аналогично

$$A=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Что касается функций, заданных и дифференцируемых на отрезке $[0, l]$, то они допускают бесчисленное множество разложений вида (35). В частности, их можно разлагать по косинусам и по синусам. Последнее разложение имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (0<x<l),$$

где

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{36}$$

n° 10. Задача о колебании струны. Ряды Фурье находят многочисленные применения. Здесь мы покажем, как они используются при решении задачи о колебании струны. Струной называется гибкая нить, не оказывающая сопротивления изгибу.

Рассмотрим струну, которая в начальный момент совмещена с отрезком $0\leqslant x\leqslant l$ оси Ox. Мы будем считать, что концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены на оси Ox. Пусть струна растягивается силами F и $-F$, приложенными к ее концам и направленными вдоль оси Ox. Если струну вывести из состояния равновесия и затем предоставить самой себе, то под влиянием растягивающих сил точки струны придут в движение, стремясь вернуться в исходное положение. Однако, придя в это положение, каждая точка струны будет обладать уже некоторой скоростью и по инерции пройдет дальше своего равновесного положения. При этом дальнейшем движении точек они будут тормозиться растягивающими силами и т. д. Таким образом, струна будет совершать некоторое колебательное движение. Задача состоит в исследовании этого движения.

Сделаем ряд предположений. Прежде всего мы считаем, что, выводя струну из состояния равновесия, мы придаем ей форму некоторой линии *) $y=f(x)$, лежащей в плоскости xy, и не сообщаем точкам струны никаких начальных скоростей **). Тогда во все время движения струна будет оставаться в плоскости xy. Мы будем предполагать, что каждая точка струны совершает только поперечные колебания, перпендикулярные оси Ox. Эти колебания мы предположим столь малыми, что квадратами отклонений точек струны от оси Ox можно пренебречь. Кроме того, будем считать, что во все время движения струна будет сохранять пологую форму. Это означает, что угол α, образуемый касательной к струне с осью Ox, достаточно мал, чтобы можно было считать

$$\sin\alpha=\alpha, \qquad \cos\alpha=1. \tag{37}$$

Наконец, мы считаем струну однородной, причем массу единицы длины струны в ее нерастянутом состоянии обозначим через ρ.

Возьмем какую-либо точку струны, имевшую в начальный момент $t=0$ абсциссу x. Так как эта точка будет двигаться перпендикулярно оси Ox,

---

*) Так как концы струны должны находиться на оси Ox, то на функцию $f(x)$ надо наложить требования $f(0)=f(l)=0$.

**) Последнее предположение несущественно и делается лишь для простоты. Можно было бы рассмотреть случай, когда каждой точке струны сообщается некоторая начальная скорость. Надо лишь, чтобы все векторы начальных скоростей лежали в плоскости xy и были параллельны оси Oy.

то во время движения ее абсцисса x не будет меняться. Ордината же ее y будет зависеть от времени, а также и от того, о какой точке идет речь, т. е. от абсциссы x этой точки. Таким образом, эта ордината является функцией от x и от времени t. Эту функцию мы будем обозначать через $y(x, t)$. Итак, дело сводится к нахождению функции $y(x, t)$. Ясно, что эта неизвестная функция должна удовлетворять граничным условиям

$$y(0, t) = y(l, t) = 0, \tag{38}$$

выражающим то, что концы струны $x=0$, $x=l$ в любой момент t находятся на оси Ox, и начальным условиям

$$y(x, 0) = f(x), \quad y'_t(x, 0) = 0, \tag{39}$$

первое из которых выражает то, что в начальный момент $t=0$ струне придана заданная форма $y=f(x)$, а второе означает, что точки струны не имеют начальных скоростей.

Выведем теперь дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять неизвестная функция $y(x, t)$. Для этого выделим из струны элементарный отрезок, который в начальный момент $t=0$ совпадал с отрезком $[x, x+dx]$ оси Ox. В момент t этот отрезок представит собой элементарную дугу линии $y=y(x, t)$. Длина этой дуги равна

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx.$$

Пренебрегая членом $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ *), получим

$$ds = dx.$$

Масса выделенного элемента равна $\rho\, dx$. К этому элементу будут приложены растягивающие его силы. Пусть натяжение струны в точке x будет равно F_x.

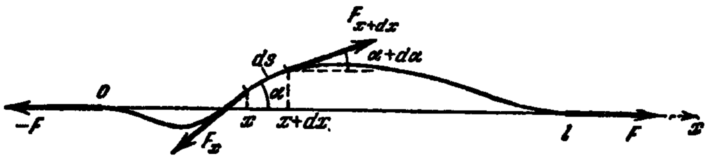


Рис. 387.

Тогда к концам нашего элемента будут приложены силы F_x и F_{x+dx}. Они направлены по касательным, проведенным к струне в точках x и $x+dx$. Обозначим через α угол между осью Ox и касательной к струне в точке x. В точке $x+dx$ этот угол пусть будет равен $\alpha+d\alpha$ (рис. 387).

Обозначим равнодействующую сил, приложенных к концам элемента, через $\boldsymbol{R}$, а ускорение элемента через $\boldsymbol{w}$. Тогда векторное уравнение движения элемента имеет вид

$$(\rho\, dx)\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{R}. \tag{40}$$

---

*) Это основано на предположении пологой формы струны. Ведь $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$. Значит, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$, а мы считаем $\cos \alpha = 1$.

Проектируя это уравнение на ось Ox, находим *)

$$(\rho\, dx)\, w_x = R_x. \tag{41}$$

Поскольку точки струны движутся перпендикулярно оси Ox, то $w_x = 0$. Стало быть, и $R_x = 0$. Но

$$R_x = F_{x+dx} \cos(\alpha + d\alpha) - F_x \cos \alpha.$$

В силу (37) будет $\cos(\alpha + d\alpha) = \cos\alpha = 1$ и потому $R_x = F_{x+dx} - F_x$. Сопоставляя это с равенством $R_x = 0$, находим, что $F_{x+dx} = F_x$. Это значит, что величина натяжения не меняется вдоль струны. Поскольку же на концах струны это натяжение равно F, то и во всех точках струны оно равно F, и вместо F_x и F_{x+dx} можно писать F. Спроектируем теперь уравнение (40) на ось Oy:

$$(\rho\, dx)\, w_y = R_y. \tag{42}$$

Так как $w_y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, а [см. (37)]

$$R_y = F \sin(\alpha + d\alpha) - F \sin\alpha = F(\alpha + d\alpha) - F\alpha = F\, d\alpha,$$

то (42) дает

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\, dx = F\, d\alpha,$$

или **)

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{d\alpha}{dx}. \tag{43}$$

Вспомним теперь, что $\operatorname{tg}\alpha = y'_x = \dfrac{\partial y}{\partial x}$. Отсюда

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Как и выше, членом $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ можно пренебречь, откуда

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Положив для краткости $\dfrac{F}{\rho} = a^2$, придадим уравнению (43) вид

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.} \tag{44}$$

---

*) Предостерегаем от недоразумения! Символ R_x означает проекцию силы R на ось Ox, а F_x — численное значение натяжения в точке, абсцисса которой равна x.

**) Через $d\alpha$ обозначено приращение угла α, когда в закрепленный момент t абсцисса x получила приращение $x + dx$. Поэтому отношение $\dfrac{d\alpha}{dx}$ есть, строго говоря, частная производная $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}$.

Это знаменитое *уравнение колебания струны*. Мы видим, что это дифференциальное уравнение с частными производными. Такие уравнения до сих пор мы еще не изучали.

Таким образом, наша механическая задача свелась к чисто математической: найти такое решение уравнения (44), которое удовлетворяет условиям (38) и (39).

Существуют разные способы решить задачу, к которой мы пришли. Один из способов был предложен в 18 веке Д. Бернулли. Позже, уже в 19 веке, этот способ систематически применялся Фурье для решения целого ряда термодинамических задач, почему он и получил название *метода Фурье*. Этот способ мы и изложим. Он заключается в том, что сначала решается следующая

Вспомогательная задача. Найти функцию $y=y(x, t)$, удовлетворяющую требованиям:

$$1) \quad y(x, t) \not\equiv 0, \tag{45}$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{46}$$

$$3) \quad y(0, t)=y(l, t)=0, \tag{47}$$

$$4) \quad y(x, t)=X(x)\,T(t). \tag{48}$$

Отличие вспомогательной задачи от той, которую нам на самом деле надо решить, состоит в том, что от искомой функции $y(x, t)$ мы уже не требуем, чтобы она удовлетворяла начальным условиям (39), но зато требуем, чтобы она имела специальный вид $X(x)\,T(t)$, т. е. представлялась в форме произведения функции X одного только x на функцию $T(t)$ одного только t. Кроме того, мы налагаем на $y(x, t)$ естественное требование, чтобы она не была тождественным нулем.

Оказывается, что измененная таким образом задача решается довольно легко и что она имеет бесконечное множество решений, из которых удается составить и решение нашей основной задачи.

Займемся же поставленной вспомогательной задачей.

Из (45) вытекает существование такой точки (x_0, t_0), что $y(x_0, t_0)\neq 0$. Тогда $X(x_0)\,T(t_0)\neq 0$, т. е. $T(t_0)\neq 0$. Подставим значение $t=t_0$ в граничные условия (47):

$$X(0)\,T(t_0)=X(l)\,T(t_0)=0.$$

Отсюда видно, что искомая функция $X(x)$ должна удовлетворять условиям

$$X(0)=X(l)=0. \tag{49}$$

Подставляя (48) в (46), получим

$$XT''=a^2X''T,$$

т. е.

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{a^2T}. \tag{50}$$

Но (внимание!) правая часть равенства (50) не зависит от x. Значит, и левая часть (50) от x не должна зависеть. С другой стороны, эта левая часть может быть функцией только одного x, ибо $X=X(x)$. Значит, левая (а с ней и правая) часть равенства должна быть постоянной величиной. Обозначим эту (неизвестную нам!) постоянную через μ.

Допустим сначала, что $\mu=0$. Тогда из (50) следует

$$X''=0.$$

Отсюда $X'=C_1$ и $X=C_1x+C_2$, т. е. X должна быть линейной функцией.

Подставляя найденное значение X в условия (49), получим

$$C_1\cdot 0+C_2=0,\quad C_1l+C_2=0.$$

Но тогда $C_1=C_2=0$, т. е. $X\equiv 0$, а с ним и $y(x,t)\equiv 0$, что противоречит (45). Таким образом, не существует решения вспомогательной задачи, у которого было бы $\mu=0$.

Допустим теперь, что $\mu>0$, т. е. $\mu=\lambda^2$, где λ можно считать положительным. Тогда

$$\frac{X''}{X}=\lambda^2,\quad \text{т. е.}\quad X''-\lambda^2X=0.$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид

$$X=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}.$$

Подставляя найденное значение X в (49), получим

$$C_1+C_2=0,\quad C_1e^{\lambda l}+C_2e^{-\lambda l}=0.$$

Решая эту систему, находим $C_1=C_2=0$. Это снова приводит к соотношению $X\equiv 0$, противоречащему условию (45). Итак, неравенство $\mu>0$ тоже оказывается невозможным. Стало быть, вспомогательную задачу можно рассматривать только предполагая, что неизвестное нам $\mu<0$, т. е. что $\mu=-\lambda^2$, где $\lambda>0$. Таким образом,

$$\frac{X''}{X}=-\lambda^2\quad \text{или}\quad X''+\lambda^2X=0.$$

Решение этого уравнения есть

$$X=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x.$$

Первое из граничных условий (49) дает $C_2=0$. Значит (заменяя C_1 на C),

$$X=C\sin\lambda x.$$

Если бы было $C=0$, то мы не пришли бы к решению нашей вспомогательной задачи, ибо получилось бы противоречие с (45). Стало быть, $C\neq 0$. Но тогда второе из условий (49) дает

$$\sin\lambda l=0.$$

Это возможно лишь при $\lambda l=n\pi$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Значит, для λ возможны лишь значения

$$\lambda=\frac{n\pi}{l}\quad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

что приводит к следующим выражениям для X:

$$X_n=C_n\sin\frac{n\pi x}{l}\quad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

причем C_n при каждом n может принять любое (отличное от 0) значение.

Выберем какое-либо из возможных значений λ и подставим в (50):

$$\frac{T''}{a^2T}=-\lambda^2=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Отсюда

$$T''+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T=0,$$

т. е.

$$T=M\sin\frac{an\pi t}{l}+N\cos\frac{an\pi t}{l},$$

где M и N — произвольные постоянные. Обозначая это T через T_n и полагая $C_nM = A_n$, $C_nN = B_n$, получаем бесконечное множество решений вспомогательной задачи

$$\boxed{y_n(x, t) = \left(A_n \sin\frac{an\pi t}{l} + B_n \cos\frac{an\pi t}{l}\right) \sin\frac{n\pi x}{l}.} \tag{51}$$

Здесь $n = 1, 2, 3, \ldots$, а A_n и B_n — произвольные постоянные. Любая функция (51) удовлетворяет *) уравнению (46) и граничным условиям (47), причем это верно уже и без ограничений $A_n \neq 0$, $B_n \neq 0$.

Заметим теперь, что и уравнение (46) и условия (47) линейны и однородны, т. е. таковы, что сумма функций, удовлетворяющих им, также будет удовлетворять и уравнению и граничным условиям. Поэтому функция

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin\frac{an\pi t}{l} + B_n \cos\frac{an\pi t}{l}\right) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{52}$$

при условии сходимости выписанного ряда также будет удовлетворять уравнению (46) и условиям (47) **). Отметим, что A_n и B_n остаются при этом произвольными постоянными (лишь бы не нарушалась сходимость ***) полученного ряда). Чтобы функция (52) была искомым решением интересующей нас (уже не вспомогательной, а основной) задачи, надо подобрать A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия (39).

Первое условие (39) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x). \tag{53}$$

Дифференцируя (52), получим

$$y'_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{an\pi}{l} \left(A_n \cos\frac{an\pi t}{l} - B_n \sin\frac{an\pi t}{l}\right) \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Полагая $t = 0$ и учитывая второе из условий (39), получаем

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin\frac{n\pi x}{l} = 0. \tag{54}$$

Чтобы удовлетворить соотношению (54), надо принять $A_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Соотношение же (53) показывает, что коэффициенты B_n должны быть коэффициентами разложения функции $f(x)$, заданной в $[0, l]$, по функциям $\sin\frac{n\pi x}{l}$.

---

*) Предлагаем читателю убедиться в этом непосредственно.

**) Поскольку в правой части (52) стоит не обыкновенная сумма, а бесконечный ряд, сказанное в тексте нуждается в более обстоятельной аргументации (ибо не всякий, даже сходящийся ряд можно дифференцировать почленно). Мы оставляем в стороне возникающие в связи с этим трудности.

***) См. предыдущую сноску.

Согласно (36) имеем

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{55}$$

Итак, искомое решение имеет вид

$$\boxed{y(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},}$$

где B_n определяются из (55).

Пример. Пусть $a=l=1$ и $f(x)=\frac{\sin^3\pi x}{1000}$ *). Найти $y\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

Решение. Найдем сначала разложение (53). Это гораздо проще сделать без использования формул (55), а непосредственно. Действительно **), $\sin^3\alpha=\sin\alpha\cdot\sin^2\alpha=\sin\alpha\cdot\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{2}-\frac{\sin(\alpha+2\alpha)+\sin(\alpha-2\alpha)}{4}=$ $=\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha$. Значит, $\frac{\sin^3\pi x}{1000}=\frac{3\sin\pi x-\sin 3\pi x}{4000}$, откуда

$$y(x, t)=\frac{1}{4000}(3\cos\pi t\sin\pi x-\cos 3\pi t\sin 3\pi x) \quad \text{и} \quad y\left(\frac{1}{3}, 1\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{8000}.$$

n° 11. Распространение тепла в стержне. В качестве другого примера применения рядов Фурье рассмотрим задачу о распространении тепла в стержне. Пусть стержень длины l весь, кроме своих концов, помещен в теплоизолирующую оболочку и нагрет до некоторой температуры, различной в различных его точках. Если этот стержень предоставить самому себе, то заключенное в нем тепло будет перетекать от более нагретых мест к менее нагретым, и температура стержня с течением времени станет выравниваться, причем на этот процесс будет влиять также и режим, который поддерживается на концах стержня. Задача состоит в том, чтобы, зная упомянутый режим и распределение температуры вдоль стержня в начальный момент $t=0$, найти это распределение в последующие моменты $t>0$. Для этого естественно надо задать и термические характеристики стержня: его теплоемкость c и коэффициент теплопроводности k. Напомним, что c — это количество калорий, которое нужно подать, чтобы единицу массы стержня (мы считаем его однородным с линейной плотностью ρ) нагреть на 1°. Коэффициент k представляет собой количество тепла (в калориях), которое будет протекать за единицу времени через сечение стержня, если температура стержня падает на 1° при перемещении вдоль стержня на единицу длины. Мы будем обозначать температуру стержня в точке x ***) в момент t через $u(x, t)$. Это и есть та величина, которую надо найти. Температуру же $u(x, 0)$ стержня в начальный момент мы считаем известной и обозначим через $f(x)$:

$$u(x, 0)=f(x). \tag{56}$$

---

*) Напомним, что $f(x)$ должна удовлетворять соотношениям $f(0)=$ $=f(l)=0$.

**) Ведь $\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$.

***) Один из концов (назовем его „левым“) стержня фиксируется и точкой x называется точка, отстоящая от этого конца на расстоянии x.

Что касается теплового режима на концах стержня *), то мы рассмотрим два случая:

A) концы погружены в тающий лед, т. е. в них поддерживается постоянная температура

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; \tag{57}$$

B) концы помещены в ту же теплоизолирующую оболочку, что и весь стержень. Это означает, что через концы не происходит протекания тепла. Математическое выражение этой закономерности мы найдем несколько позже.

Рассмотрим сечение x нашего стержня и найдем, какое количество Q тепла протечет (слева направо) через это сечение за элементарный промежуток времени $[t, t+dt]$. В момент t температура стержня в точке x будет равна $u(x, t)$. Возьмем отличную от x точку $x+\Delta x$ стержня. Пусть для определенности $\Delta x > 0$, т. е. новая точка лежит правее старой (рис. 388). В ней температура стержня в момент t будет равна $u(x+\Delta x, t)$. Таким образом, п а д е н и е температуры при перемещении из x в $x+\Delta x$ оказывается равным $u(x, t) - u(x+\Delta x, t)$. Стало быть, н а е д и н и ц у д л и н ы стержня (на участке $[x, x+\Delta x]$) приходится падение температуры, равное

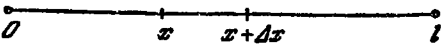


Рис. 388.

$$\frac{u(x, t) - u(x+\Delta x, t)}{\Delta x}.$$

Если Δx весьма мало, то найденную величину можно принять за $-\frac{\partial u}{\partial x} = -u'_x(x, t)$. Такое падение температуры заставило бы за единицу времени перейти через сечение x количество тепла, равное $-k\frac{\partial u}{\partial x}$ калорий. За время же $[t, t+dt]$ через наше сечение перейдет (слева направо)

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}dt \tag{58}$$

калорий **).

Если концы стержня теплоизолированы, то количество тепла, протекающее через них, равно нулю, и потому

$$u'_x(0, t) = u'_x(l, t) = 0. \tag{59}$$

Это и есть то выражение режима B), о котором мы упомянули выше.

Выделим из нашего стержня элементарный отрезок $[x, x+dx]$. За время $[t, t+dt]$ через сечение x в наш отрезок войдет (из расположенной левее x

---

*) Этот режим может быть весьма разнообразен. Можно, например, на концах поддерживать температуру, изменяющуюся по заданным законам $u(0, t) = \varphi(t)$, $u(l, t) = \psi(t)$ и т. п.

**) Если $u(x+\Delta x, t) < u(x, t)$, то температура падает при перемещении слева направо. В этом случае тепло потечет через сечение x также слева направо, т. е. окажется $Q > 0$. Это вполне согласуется с тем, что в нашем случае $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$. Если же $u(x+\Delta x, t) > u(x, t)$, то тепло потечет справа налево, т. е. будет $Q < 0$. Но тогда $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, и формула (58) снова будет справедливой.

части стержня)

$$Q_1 = -ku'_x(x, t)\,dt$$

калорий. За это же время из нашего отрезка через его конец $x+dx$ уйдет направо

$$Q_2 = -ku'_x(x+dx, t)\,dt$$

калорий. Стало быть, в рассматриваемом отрезке за время $[t, t+dt]$ накопится количество тепла, равное

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = k\,[u'_x(x+dx, t) - u'_x(x, t)]\,dt$$

калорий. Поскольку малое приращение функции можно заменять ее дифференциалом, то

$$\Delta Q = ku''_{xx}(x, t)\,dx\,dt = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dt.$$

Подача такого количества тепла должна повысить температуру единицы массы стержня на

$$\frac{k}{c}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dt$$

градусов. Поскольку же масса отрезка $[x, x+dx]$ равна $\rho\,dx$, то соответствующее повышение температуры будет

$$\frac{k}{c\rho}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dt. \tag{60}$$

С другой стороны, это повышение температуры $u(x, t)$ в точке x за время $[t, t+dt]$ равно

$$u(x, t+dt) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}\,dt. \tag{61}$$

Приравнивая друг другу выражения (60) и (61) и полагая для краткости $\frac{k}{c\rho} = a^2$, получим *уравнение теплопроводности*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.} \tag{62}$$

Таким образом, мы приходим к двум математическим задачам:

А) Найти то решение уравнения (62), которое удовлетворяет начальному условию (56) и граничным условиям (57).

В) То же с заменой условий (57) на (59).

Применим к задаче А) метод Фурье. Для этого решим сначала вспомогательную задачу: найти функцию $u(x, t) \not\equiv 0$, удовлетворяющую уравнению (62) и граничным условиям (57) и имеющую специальный вид

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{63}$$

Как и при решении уравнения колебания струны, легко показать, что из (57) следует

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{64}$$

Подставляя (63) в (62), получим

$$XT' = a^2X''T,$$

т. е.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T}. \tag{65}$$

Как и в n° 10, заключаем, что соотношение (65) возможно лишь тогда, когда обе его части представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим ее через μ. Как и в n° 10, убеждаемся на основании (64), что допущения $\mu = 0$, $\mu > 0$ невозможны. Стало быть, $\mu < 0$. Полагая $\mu = -\lambda^2$ и буквально повторяя рассуждения n° 10, найдем из (65), что

$$X = C \sin \lambda x.$$

Более того, как и в n° 10, устанавливаем, что λ может иметь только одно из значений $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Стало быть, X может иметь любое из выражений

$$X_n = C_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где C_n — произвольные постоянные. Выбирая какое-либо из возможных значений λ и приравнивая правую часть равенства (65) величине $\mu = -\lambda^2$, находим

$$\frac{T'}{a^2T} = -\frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

т. е.

$$\frac{dT}{T} = -\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}\,dt,$$

откуда

$$T = Me^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t},$$

где M — произвольная постоянная. Полагая $C_nM = A_n$, находим бесчисленное множество решений вспомогательной задачи

$$\boxed{u_n(x, t) = A_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t} \sin \frac{n\pi x}{l}.} \tag{66}$$

Каждая из этих функций при любом A_n удовлетворяет и уравнению (62) и граничным условиям (57). Ввиду линейности и однородности уравнения и условий, сумма

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t} \sin \frac{n\pi x}{l}} \tag{67}$$

при любом выборе A_n, сохраняющем сходимость *) написанного ряда, также будет решением (62), удовлетворяющим (57). Постараемся же подобрать A_n так, чтобы удовлетворить и начальному условию $u(x, 0) = f(x)$. Ясно, что

---

*) См. вторую сноску на стр. 702.

это приводит к равеиству

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x),$$

откуда

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{68}$$

Итак, задача А) решена. Ее решение дается формулой (67), в которой A_n иадо вычислять по (68).

Полезио заметить, что из (67) следует, что

$$u(x, +\infty) = 0.$$

Физический смысл этого соотношения ясен: все тепло из стержня вытечет, и в ием установится температура льда, в который погружеиы его концы.

Перейдем к задаче В). Для иее вспомогательная задача состоит в нахождении фуикции $u(x, t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$, удовлетворяющей уравнению (62) и условиям (59). Последиие дают

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{69}$$

Подстаиовка $u = XT$ в (62) снова приводит к уравиению

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T} = \mu, \tag{70}$$

где $\mu = \text{const}$. Случай $\mu > 0$ исключается, как и выше. Но соотиошение $\mu = 0$ теперь уже в о з м о ж н о. Оио дает

$$X'' = 0,$$

откуда $X' = C_1$, $X = C_1x + C$. Согласно (69) будет $C_1 = 0$ и потому

$$X = C,$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, при $\mu = 0$ уравиение (70) дает $T' = 0$, т. е. и $T = C^*$, где C^* — постояниая. Стало быть, одним из решений вспомогательной задачи будет

$$u(x, t) = A_0. \tag{71}$$

При любом выборе A_0 (хотя бы и $A_0 = 0$) эта функция удовлетворяет соотношениям (62) и (59).

Предположим теперь, что $\mu = -\lambda^2 < 0$. Это дает уравиеиие

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

решенне которого имеет вид

$$X = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x.$$

Но тогда

$$X' = \lambda(-C_1\sin\lambda x + C_2\cos\lambda x),$$

и первое из соотиошений (69) дает $C_2 = 0$, так что (после замены C_1 на C) X принимает вид

$$X = C\cos\lambda x.$$

Отсюда и из второго условия (69) получаем

$$X'(l) = -\lambda C \sin \lambda l = 0.$$

Значит, $\lambda l = n\pi$ и

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{72}$$

Таким образом, найдено бесконечное множество выражений функции X:

$$X_n = C_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Подставляя в (70) одно из значений (72), находим

$$\frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}.$$

Отсюда

$$T = Me^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}.$$

Положив $C_n M = A_n$, находим бесчисленное множество функций

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

удовлетворяющих (62) и (59). Но тогда и

$$\boxed{u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t} \cos \frac{n\pi x}{l}} \tag{73}$$

будет решением (62), удовлетворяющим (59). Остается подобрать A_0, A_1, A_2, ... так, чтобы оказалось $u(x, 0) = f(x)$, т. е.

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

Для этого надо взять

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x)\,dx, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{74}$$

З а м е ч а н и е. Из (73) видим, что

$$u(x, +\infty) = A_0.$$

Этим выражен физически очевидный факт, что с течением времени температура в изолированном стержне выравнивается. Более того, физически ясно и значение этой выравненной температуры. Именно, найдем общее количество тепла, содержащееся в нашем стержне. Для этого выделим из него элемент $[x, x+dx]$. В начальный момент температура этого элемента равна $f(x)$. Поскольку масса элемента равна $\rho\,dx$, то для получения указанной температуры нужно было накопить в элементе

$$c\rho f(x)\,dx$$

калорий.

Стало быть, общее количество тепла в стержне будет равно

$$Q = c\rho \int_0^l f(x)\,dx.$$

Поскольку стержень изолирован, то это же количество тепла сохранится в нем и при $t = +\infty$. На единицу массы стержня придется

$$\frac{Q}{\rho l} = \frac{c}{l} \int_0^l f(x)\,dx$$

калорий. Это количество тепла и создает в стержне температуру

$$\frac{1}{l} \int_0^l f(x)\,dx,$$

найденную выше.

ДОБАВЛЕНИЕ I

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

n° 1. Определения. В некоторых прикладных вопросах используются функции *)

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.} \tag{1}$$

Первая из них называется *гиперболическим косинусом*, а вторая *гиперболическим синусом*. Они во многом аналогичны обыкновенным тригонометрическим функциям $\cos x$ и $\sin x$ и, как мы увидим ниже, не только тесно связаны с гиперболой, но имеют к ней такое же отношение, какое имеют $\cos x$ и $\sin x$ к окружности.

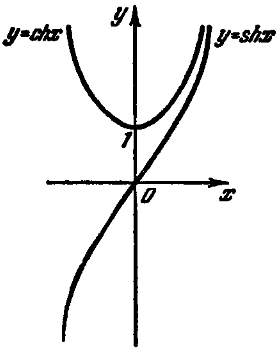


Рис. 389.

Отношения

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

называются соответственно *гиперболическим тангенсом* и *котангенсом*.

Легко видеть, что $\operatorname{ch} x > 0$, а $\operatorname{sh} x$ имеет тот же знак, что и x. Поскольку из (1) сразу видно, что

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

то функция $\operatorname{sh} x$ возрастает на всей оси, а $\operatorname{ch} x$ убывает на $(-\infty, 0)$ и возрастает на $(0, +\infty)$. Обе эти функции стремятся к $+\infty$ при $x \to +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$. Графики **) их изображены на рис. 389.

---

*) Их обозначают также через $\cos \operatorname{hyp} x$ и $\sin \operatorname{hyp} x$.

**) Кривая $y = \operatorname{ch} x$ называется *цепной линией*.

n°2. Аналогия с тригонометрическими функциями. Каждая тригонометрическая формула имеет аналог в теории гиперболических функций. Приведем ряд таких аналогий:

1) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$	1*) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$
2) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$	2*) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$
3) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$	3*) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$
4) $\cos(-x) = \cos x,$	4*) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$
5) $\sin(-x) = -\sin x,$	5*) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x,$
6) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$	6*) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$
7) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$	7*) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$
8) $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0,$	8*) $\operatorname{ch} 0 = 1, \ \operatorname{sh} 0 = 0,$
9) $e^{xi} = \cos x + i \sin x,$	9*) $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x,$
10) $\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2},$	10*) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$
11) $\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i},$	11*) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$
12) $(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$	12*) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$
13) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$	13*) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots,$
14) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$	14*) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$

Проверка любой формулы из правого столбца не представляет никаких трудностей. Например, чтобы доказать формулу 3*), пишем на основании (1)

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$
$$= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y).$$

Интереснее, однако, не заниматься проверкой формул правого столбца, а дать средство их нахождения. Этому посвящен n°3.

n°3. Связь тригонометрических и гиперболических функций. Мы уже говорили, что выражение e^z имеет смысл не только для вещественных, но и для любых комплексных z. Благодаря этому мы можем определить выражения $\cos z$ и $\sin z$ для комплексных z, полагая

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \tag{2}$$

Можно доказать, что все формулы тригонометрии, связывающие $\sin x$ и $\cos x$, остаются верными при подстаиовке вместо x любого комплексного числа. С другой стороны, подстановка $z=xi$ в формулы (2) дает (с учетом $i^2=-1$)

$$\cos(xi)=\frac{e^{-x}+e^x}{2}, \quad \sin(xi)=\frac{e^{-x}-e^x}{2i}=\frac{(e^{-x}-e^x)i}{2i^2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}i,$$

откуда

$$\boxed{\cos(xi)=\operatorname{ch}x, \quad \sin(xi)=i\operatorname{sh}x.} \tag{3}$$

Формулы (3) и дают ключ к построению формул правого столбца таблицы n°2. Именно, справедливо

Правило. *Написав любую тригонометрическую формулу, надо аргументы* $x, y, \ldots$, *стоящие под знаком* sin *и* cos, *заменить на* $xi, yi, \ldots$ *и применить соотношения* (3). *Это приведет к формуле, которая в теории гиперболических функций соответствует исходной формуле тригонометрии.*

Пример. Возьмем тригонометрическую формулу

$$2)\ \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

и заменим x и y на xi и yi:

$$\cos[(x+y)i]=\cos(xi)\cos(yi)-\sin(xi)\sin(yi),$$

откуда вытекает формула 2*)

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-(i\operatorname{sh}x)(i\operatorname{sh}y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

n°4. Связь с гиперболой. Хорошо известно, что равенства

$$x=\cos t, \quad y=\sin t \tag{4}$$

представляют собой параметрические уравнения окружности $x^2+y^2=1$. Рассмотрим теперь линию

$$x=\operatorname{ch}t, \quad y=\operatorname{sh}t. \tag{5}$$

Так как $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$, то из (5) следует, что $x^2-y^2=1$, а это равнобочная гипербола. Поскольку всегда $\operatorname{ch}t>0$, то равенства (5) представляют собой параметрические уравнения правой ветви гиперболы $x^2-y^2=1$. Стало быть, по отношению к гиперболе функции $\operatorname{ch}t$ и $\operatorname{sh}t$ играют ту же роль, что $\cos t$ и $\sin t$ по отношению к окружности.

Указанная связь функций $\operatorname{ch}t$ и $\operatorname{sh}t$ с гиперболой имеет несколько формальный характер. Исследуем эту связь более обстоятельно. Для этого заметим, что (рис. 390) если угол $AOM=t$, то площадь кругового сектора AOM равна $\frac{t}{2}$. Значит, мы можем формулировать следующее

Правило. *Чтобы построить на чертеже* $\cos t$ *и* $\sin t$, *надо найти на окружности*

$$x^2+y^2=1$$

такую точку $M(x, y)$, чтобы площадь сектора AOM равнялась $\frac{t}{2}$. Тогда $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Оказывается, что аналогичное правило позволяет строить $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$. Чтобы установить это, рассмотрим точку $M(\bar{x}, \bar{y})$, лежащую на правой ветви

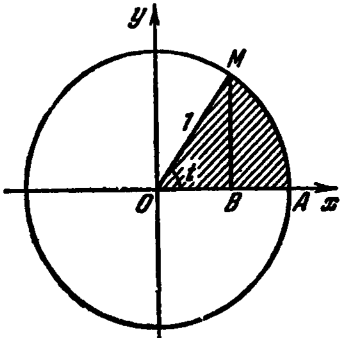


Рис. 390.

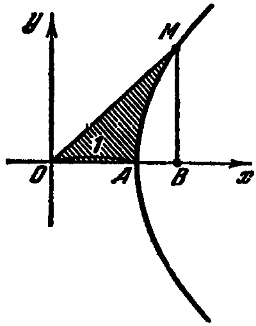


Рис. 391.

гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. Пусть для определенности $\bar{y} > 0$ (рис. 391). Найдем площадь F сектора AOM. Ясно, что

$$F = \frac{\bar{x}\bar{y}}{2} - \int_1^{\bar{x}} y\,dx. \tag{6}$$

Но $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Интегрируя по частям, находим

$$\int_1^{\bar{x}} y\,dx = \int_1^{\bar{x}} \sqrt{x^2-1}\,dx = [x\sqrt{x^2-1}]_1^{\bar{x}} - \int_1^{\bar{x}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Отсюда

$$\int_1^{\bar{x}} y\,dx = \bar{x}\bar{y} - \int_1^{\bar{x}} \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \bar{x}\bar{y} - \int_1^{\bar{x}} \sqrt{x^2-1}\,dx - \int_1^{\bar{x}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

и

$$2\int_1^{\bar{x}} y\,dx = \bar{x}\bar{y} - [\ln(x + \sqrt{x^2-1})]_1^{\bar{x}} = \bar{x}\bar{y} - \ln(\bar{x} + \bar{y}).$$

Значит, $\int_1^{\bar{x}} y\,dx = \frac{1}{2}[\bar{x}\bar{y} - \ln(\bar{x}+\bar{y})]$, и формула (6) дает

$$F = \frac{1}{2}\ln(\bar{x}+\bar{y}). \tag{7}$$

Теперь мы можем формулировать

Правило. *Чтобы построить на чертеже* $\operatorname{ch} t$ *и* $\operatorname{sh} t$, *надо найти на правой ветви гиперболы*

$$x^2-y^2=1$$

такую точку $M(x, y)$, *чтобы площадь сектора* AOM *равнялась* $\frac{t}{2}$. *Тогда* $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$.

В самом деле, в силу (7) будет

$$\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\ln(x+y),$$

т. е. $x+y=e^t$. Но $x^2-y^2=1$, т. е. $(x+y)(x-y)=1$, откуда $e^t(x-y)=1$ и $x-y=e^{-t}$. Из равенств $x+y=e^t$, $x-y=e^{-t}$ находим

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\operatorname{ch} t, \quad y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\operatorname{sh} t.$$

Замечание. На рис. 390 не только площадь сектора AOM равнялась $\frac{t}{2}$, но и угол AOM был равен t. Разумеется, на рис. 391 угол AOM не будет равен t*).

ДОБАВЛЕНИЕ II

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

n° 1. Постановка вопроса. Мы знаем из элементарной алгебры, как решить уравнение

$$f(x)=0, \tag{1}$$

если $f(x)$ — линейная или квадратичная функция. Для функций более сложной природы обычно приходится прибегать к приближенному решению уравнения (1). Очень часто удается найти такой отрезок $[a, b]$, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. Тогда по теореме о промежуточном значении непрерывной функции [функцию $f(x)$ мы будем считать не только непрерывной, но имеющей непрерывные производные $f'(x)$ и $f''(x)$] между a и b обязательно будет находиться корень **) уравнения (1). В этих условиях можно считать a значением искомого корня с недостатком, а b — его значением с избытком, причем отклонение каждого из этих приближенных значений от истинной величины корня меньше $b-a$. Легко сообразить, как получить интересующий нас корень с лучшей точностью. Для этого надо положить

$$c=\frac{a+b}{2}$$

---

*) Очевидно, $\operatorname{tg}\angle AOM=\frac{y}{x}=\operatorname{th} t$, т. е. $\angle AOM=\operatorname{arctg}(\operatorname{th} t)\neq t$.

**) И, может быть, даже не один.

и найти $f(c)$. Если окажется $f(c)=0$ (что, вообще говоря, маловероятно), то c будет точным значением искомого корня. Если же будет $f(c)\neq 0$, то знак $f(c)$ будет противоположен знаку одного из чисел $f(a)$ и $f(b)$. Иными словами, один из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ будет обладать тем свойством, что на его концах $f(x)$ принимает значения разных знаков. Тогда левый конец этого отрезка представит собой значение искомого корня с недостатком, а правый — с избытком. Отклонение каждого из этих значений от истинной величины корня будет уже меньше $\frac{b-a}{2}$. Продолжая этот процесс, мы, очевидно, сможем найти интересующий нас корень с любой (и притом гарантированной!) точностью.

Изложенный прием обладает тем недостатком, что требует очень большого числа последовательных делений получающихся отрезков пополам. Поэтому на практике применяют способы, быстрее ведущие к цели. Мы изложим два таких способа: с п о с о б х о р д и с п о с о б к а с а т е л ь н ы х (называемый также способом Ньютона).

Как уже было упомянуто, мы предполагаем существование непрерывных $f'(x)$ и $f''(x)$. Будем считать (эти предположения обычно реализуются), что $f'(x)$ и $f''(x)$ на найденном нами отрезке $[a, b]$ сохраняют знак *). Если при $a\leqslant x\leqslant b$ будет $f'(x)>0$, то $f(x)$ оказывается возрастающей на $[a, b]$ функцией, и потому уравнение (1) будет иметь на $[a, b]$ т о л ь к о о д и н корень. Так же обстоит дело и в случае $f'(x)<0$.

Заметим, далее, что задача отыскания корня уравнения (1) совершенно равносильна задаче нахождения точки пересечения кривой

$$y=f(x) \tag{2}$$

с осью Ox. Именно в этой геометрической форме мы и будем рассматривать нашу задачу.

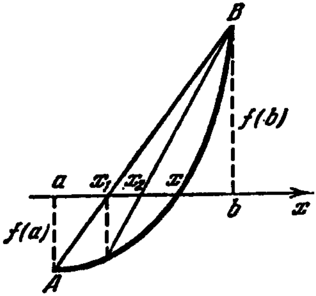


Рис. 392.

n°2. Способ хорд. Заменим дугу линии (2) между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (рис. 392) хордой AB этой дуги. Пусть x_1 — абсцисса пересечения хорды AB с осью Ox. Сущность способа хорд состоит в том, что x_1 принимается за искомый корень x уравнения (1).

Уравнение прямой AB как прямой, проходящей через две заданные точки, таково:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}. \tag{3}$$

*) Как и выше, мы считаем, что $f(a)$ и $f(b)$ — числа разных знаков.

Для того чтобы найти абсциссу x_1 пересечения хорды AB с осью Ox, надо в (3) положить $y=0$. Это дает

$$\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a},$$

откуда

$$\boxed{x_1=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a).} \tag{4}$$

Это и есть расчетная формула способа хорд. Найдя x_1 и определив знак $f(x_1)$, мы установим, на каком из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ лежит интересующий нас корень. Применяя к этому отрезку ту же формулу (4), мы получим для искомого корня x значение x_2, обладающее лучшей точностью, чем x_1. При этом, как показывает рис. 392, значение x_2 будет лежать с той же стороны от корня x, что и x_1. Поэтому повторное применение изложенного приема, хотя и приводит обычно после небольшого числа шагов к интересующему нас значению корня с хорошей точностью, но не дает возможности хорошей *оценки* этой точности.

Пример. Решить уравнение

$$x^2-2=0. \tag{5}$$

Здесь $f(x)=x^2-2$. Так как $f(1)=-1$, $f(2)=2$, то следует положить $a=1$, $b=2$. Тогда из (4) вытекает, что

$$x_1=1-\frac{2-1}{2-(-1)}(-1)=1\frac{1}{3}=1{,}3333.$$

Далее, $f\left(1\frac{1}{3}\right)=-0{,}2222$. Значит, на втором шаге надо положить $a=1\frac{1}{3}$, $b=2$. Тогда формула (4) дает

$$x_2=1{,}3333-\frac{2-1{,}333}{2+0{,}222}(-0{,}2222)=1{,}4\,.$$

Находим, далее, $f(x_2)=f(1{,}4)=-0{,}04$ и принимаем $a=1{,}4$, $b=2$. Тогда

$$x_3=1{,}4+\frac{0{,}6}{2{,}04}\cdot 0{,}04=1{,}412\,.$$

Поскольку $x_3-x_2=0{,}012$, т. е. x_3 почти совпадает с x_2, то можно остановиться на x_3. Другой способ контроля, часто применяемый на практике, состоит в нахождении $f(x_3)=-0{,}006$.

n° 3. Способ касательных. В этом способе, вместо того чтобы искать пересечение с осью Ox линии (2), ищут пересечение оси Ox с *касательной*, проведенной к линии (2) в одной из точек A и B.

Выясним, в какой из этих двух точек надо проводить касательную. Для этого разберем все возможные комбинации знаков $f'(x)$ и $f''(x)$:

	1	2	3	4
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Если вспомнить, что положительный (отрицательный) знак $f'(x)$ означает возрастание (убывание) функции $f(x)$, а положительный (отрицательный) знак $f''(x)$ означает, что линия $y=f(x)$ обращена вогнутостью вверх (вниз), то станет ясным, что нашим комбинациям соответствуют рис. 393, 394, 395 и 396.

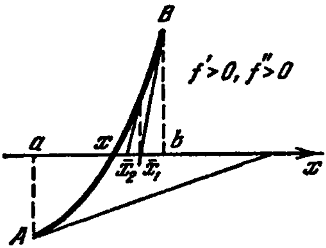


Рис. 393.

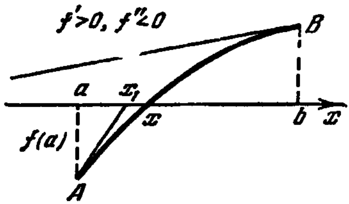


Рис. 394.

Остановимся хотя бы на рис. 393. Он показывает, что пересечение оси Ox с касательной, проведенной в точке B, лежит ближе к корню уравнения (1), чем точки a и b. Напротив, пересечение

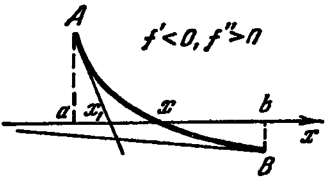


Рис. 395.

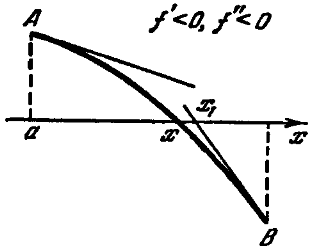


Рис. 396.

оси Ox с касательной, проведенной в точке A, может лежать даже за пределами отрезка $[a, b]$. Таким образом, в случае, изображенном на рис. 393, касательную надо проводить в точке B. В рассматриваемом нами случае $f''(x)>0$, и мы видим, что касательную надо проводить в том из концов дуги AB, в котором ордината $f(x)$ также имеет знак „$+$“ (ведь $f(b)>0$). Из рис. 394, 395, 396 читатель легко убедится, что и при остальных трех комбинациях знаков $f'(x)$ и $f''(x)$ *для нахождения приближенного значения* $\bar{x}_1$ *корня уравнения* (1) *надо принять за это значение абсциссу пересечения оси* Ox *и касательной к линии* (2), *проведенной в той из точек* A *и* B, *ордината которой имеет тот же знак, что и* $f''(x)$ *).

Обозначим абсциссу той из точек A и B, где мы проводим касательную, через c. Тогда уравнение касательной будет иметь вид

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

Для нахождения точки пересечения этой прямой с осью Ox полагаем $y=0$. Это дает

$$-f(c) = f'(c)(\bar{x}_1 - c),$$

откуда

$$\boxed{\bar{x}_1 = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.} \tag{6}$$

Это расчетная формула способа касательных. Любой из рисунков 393—396 показывает, что для получения корня с большей точностью надо снова применить формулу (6), приняв теперь за c точку $\bar{x}_1$. Из тех же рисунков видно, что повторное применение этого приема довольно быстро дает искомый корень с хорошей точностью. Однако способ касательных обладает тем же недостатком, что и способ хорд: все значения $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots$ лежат с одной стороны от истинного корня x уравнения (1).

Заметим, что значения корня, даваемые формулой (6), лежат с противоположной стороны от x, по сравнению со значениями, даваемыми формулой (4). Иными словами, если по способу хорд мы получаем значения корня x с н е д о с т а т к о м, то способ касательных дает нам тот же корень с и з б ы т к о м. Поэтому с о в м е с т н о е применение обоих способов свободно от того дефекта, которым страдает каждый из них в отдельности.

П р и м е р. Рассмотрим то же уравнение

$$x^2 - 2 = 0,$$

что и выше. Здесь $f(x) = x^2 - 2$, $a=1$, $b=2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2$. Далее, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$. Значит, $f''(x) > 0$ и за точку c надо взять $b=2$. Тогда $f(c)=2$, $f'(c)=4$ и формула (6) дает

$$\bar{x}_1 = 2 - \frac{2}{4} = 1{,}5.$$

---

*) Впрочем, если обе точки a и b уже весьма близки к искомому корню, то касательную можно проводить в любой из них.

Теперь положим $c = 1{,}5$. Тогда $f(c) = 0{,}25$, $f'(c) = 3$ и

$$\bar{x}_2 = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}417.$$

Положим еще $c = 1{,}417$, $f(c) = 0{,}008$, $f'(c) = 2{,}834$ и

$$\bar{x}_3 = 1{,}417 - \frac{0{,}008}{2{,}834} = 1{,}414.$$

Упражнения. 1) Найти x_1, x_2, x_3 по способу хорд для уравнения $x^3 - 3 = 0$, приняв $a = 1$, $b = 2$.

Ответ. $x_1 = \frac{9}{7} = 1{,}286$; $x_2 = 1{,}392$; $x_3 = 1{,}427$.

2) Найти $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ по способу касательных для уравнения $x^3 - 3 = 0$, приняв $a = 1$, $b = 2$.

Ответ. $\bar{x}_1 = 1\frac{7}{12} = 1{,}583$; $\bar{x}_2 = 1{,}454$; $\bar{x}_3 = 1{,}4423$.

3) Для уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$ взять $a = 1$, $b = 2$ и найти x_1 способом хорд, $\bar{x}_1$ способом касательных, а затем $\bar{x}_2$ способом касательных и x_2 способом хорд, примененным к отрезку $[x_1, \bar{x}_1]$.

Ответ. $x_1 = 1{,}25$; $\bar{x}_1 = 1{,}625$; $\bar{x}_2 = 1{,}486$; $x_2 = 1{,}461$.

4) Найти $f(\bar{x}_2)$ и $f(x_2)$ для примера 3 и применить к отрезку $[x_2, \bar{x}_2]$ способ хорд.

Ответ. $f(\bar{x}_2) = 0{,}073$; $f(x_2) = -0{,}016$;
$x_3 = 1{,}465$; $f(x_3) = -0{,}002$.

n° 4. Другая трактовка способа Ньютона. Решение системы уравнений. К формуле (6) можно придти из других соображений *). Пусть надо решить уравнение

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

причем известно приближенное значение x_0 искомого корня, мало отличающееся от его истинного значения x. Тогда $x = x_0 + h$, где h мало (и нам неизвестно!). Для нахождения x достаточно найти поправку h. Уравнение (1) по формуле Тейлора можно переписать так:

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \ldots = 0.$$

Если пренебречь здесь всеми степенями h, кроме первой, то получится

$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0,$$

---

*) По существу эти „другие" соображения равносильны вышеизложенным и лишь облечены в другую форму.

откуда

$$h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

и

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Тем самым мы снова пришли к формуле (6).

Изложенный здесь ход мыслей приводит к другому порядку выкладок. Покажем его на следующем примере.

Пример. Найти корень уравнения

$$x^2 - 2 = 0, \tag{7}$$

зная его приближенное значение $x_0 = 1{,}3$.

Положим $x = 1{,}3 + h$ и подставим это в (7):

$$(1{,}3 + h)^2 - 2 = 0,$$

т. е.

$$1{,}69 + 2{,}6h + h^2 - 2 = 0.$$

Пренебрегая членом h^2, получим

$$2{,}6h = 0{,}31,$$

откуда $h = 0{,}119$ и $x = 1{,}419$.

Если желать улучшить результат, то следует положить $x = 1{,}419 + h$ и повторить тот же прием.

В такой трактовке способ Ньютона применим и к системам уравнений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y &= 1{,}9, \\ x + y^2 &= 2{,}1. \end{aligned} \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что числа $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ должны быть близки к искомым значениям неизвестных, так как они „почти" удовлетворяют нашей системе. Положим $x = 1 + h$, $y = 1 + k$ и подставим в (8):

$$1 + 2h + h^2 + 1 + k = 1{,}9, \quad 1 + h + 1 + 2k + k^2 = 2{,}1.$$

Пренебрегая членами h^2 и k^2, получим линейную систему

$$\begin{aligned} 2h + k &= -0{,}1, \\ h + 2k &= 0{,}1, \end{aligned}$$

откуда $h = -0{,}1$; $k = 0{,}1$. Значит, $x = 0{,}9$; $y = 1{,}1$. Повторяя этот прием, полагаем $x = 0{,}9 + h$, $y = 1{,}1 + k$ и подставляем в (8):

$$0{,}81 + 1{,}8h + h^2 + 1{,}1 + k = 1{,}9, \quad 0{,}9 + h + 1{,}21 + 2{,}2k + k^2 = 2{,}1,$$

откуда, пренебрегая h^2 и k^2, получим

$$1{,}8h+k=-0{,}01,$$

$$h+2{,}2k=-0{,}01.$$

Из этой линейной системы находим $h=-0{,}004$, $k=-0{,}003$ и, стало быть, $x=0{,}896$, $y=1{,}097$.

Для этих значений x и y будет

$$x^2+y=1{,}8998, \quad x+y^2=2{,}0994$$

и, таким образом, невязки *) в обоих уравнениях $<0{,}0006$.

Упражнения. 1) Найти поправки к значениям $x=2$, $y=1$ в системе уравнений

$$x^2+y^2=9{,}1,$$

$$x^2+y=5.$$

Ответ. $h=0{,}025$; $k=-0{,}1$.

2) В той же системе найти поправки к значениям $x=2{,}025$, $y=0{,}9$.

Ответ. $h=-0{,}002$; $k=0{,}007$.

3) Найти поправки к значениям $x=0{,}5$, $y=0{,}2$ в системе уравнений

$$4x^2-5y=0,$$

$$x+5y^2=0{,}75.$$

Ответ. $h=0{,}019$; $k=0{,}015$.

ДОБАВЛЕНИЕ III

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В инженерной практике встречают следующую задачу. Относительно двух физических величин x и y заранее известно, что они **связаны формулой заданного вида** $y=kx$, или $y=ax+b$, или $y=ax^2+bx+c$ и т. п., но входящие в эту формулу коэффициенты (т. е. k, или a, b, c и т. п.) **неизвестны**. Произведен

---

*) Пусть $\bar{x}$ — приближенное значение корня уравнения $f(x)=\varphi(x)$. *Невязкой* (отвечающей значению $\bar{x}$) называется абсолютная величина разности $f(\bar{x})-\varphi(\bar{x})$. Аналогично определяется понятие системы невязок для системы уравнений.

ряд экспериментов, в результате которых найдено n взаимно соответствующих друг другу значений

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \end{array} \tag{1}$$

Требуется по таблице (1) найти упомянутые коэффициенты.

В случае зависимости $y=kx$ можно ограничиться одним экспериментом и принять отношение $\frac{y_1}{x_1}$ за k. Однако, вследствие неизбежных при всяком измерении (или наблюдении) ошибок, результаты однократного эксперимента не вполне надежны. Поэтому экспериментов производят несколько и возникает вопрос, как по (различным!) значениям отношений $\frac{y_i}{x_i}$ $(i=1,\ 2, \ldots, n)$ найти k. Проще всего, разумеется, положить

$$k=\frac{\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}+\ldots+\frac{y_n}{x_n}}{n}, \tag{2}$$

т. е. взять в качестве k среднее арифметическое чисел $\frac{y_i}{x_i}$.

По отношению к зависимости

$$y=ax+b \tag{3}$$

(если экспериментов больше двух) мы уже не имеем столь простого решения. *Способ наименьших квадратов*, предложенный Лежандром и Гауссом, дает общий подход к поставленной задаче. Разъясним его хотя бы на примере зависимости (3).

Первая строка таблицы (1) приводит к набору из n чисел

$$z_i=ax_i+b \quad (i=1,2,\ldots, n),$$

зависящему от значений a и b. Идеальным было бы выбрать a и b так, чтобы при всех i оказалось

$$z_i=y_i \quad (i=1,2,\ldots, n).$$

Однако этого обычно сделать не удается, так как (вследствие упомянутых выше ошибок измерения) значения a и b, найденные из системы уравнений

$$ax_1+b=y_1, \qquad ax_2+b=y_2,$$

не будут удовлетворять остальным уравнениям $ax_3+b=y_3, \ldots, ax_n+b=y_n$. Поэтому при любом выборе a и b обратить в нуль все разности

$$z_i-y_i \qquad (i=1, 2,\ldots, n)$$

не удается. В основе способа наименьших квадратов лежит следующий принцип: *искомыми значениями a и b являются те, при которых сумма квадратов разностей*

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

оказывается наименьшей *). Так как σ зависит от a и b, то искомые a и b находятся из системы уравнений

$$\boxed{\frac{\partial\sigma}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial b}=0} \tag{4}$$

(которые называются *нормальными*). Какой бы формулой заранее заданного вида, но с неизвестными коэффициентами $a, b, c, \ldots$ **) ни были связаны x и y, наличие таблицы (1) дает возможность составить нормальные уравнения для нахождения упомянутых коэффициентов.

В случае зависимости $y=kx$ дело сводится к рассмотрению суммы

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}(kx_i-y_i)^2,$$

---

*) Этот принцип очень естествен. Действительно, пару чисел (z_1, z_2) можно рассматривать как точку на плоскости. Если (y_1, y_2) — другая точка плоскости, то расстояние между точками (z_1, z_2) и (y_1, y_2) равно

$$\sqrt{(z_1-y_1)^2+(z_2-y_2)^2}.$$

Эту величину можно назвать просто „расстоянием между числовыми парами (z_1, z_2) и (y_1, y_2)". Точно так же „расстоянием между числовыми тройками (z_1, z_2, z_3) и (y_1, y_2, y_3)" следует назвать величину

$$\sqrt{(z_1-y_1)^2+(z_2-y_2)^2+(z_3-y_3)^2},$$

ибо это и в самом деле есть расстояние между точками (z_1, z_2, z_3) и (y_1, y_2, y_3). Но тогда, имея дело с n-членными числовыми наборами $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, естественно назвать „расстоянием" между ними число

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}.$$

Приняв эту терминологию, мы видим, что принцип, лежащий в основе способа наименьших квадратов, состоит в стремлении добиться за счет выбора a и b наибольшей близости набора $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ к набору $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

**) Впрочем, речь идет о формулах, содержащих $a, b, c, \ldots$ линейно, т. е. имеющих вид $y=a\varphi(x)+b\psi(x)+c\omega(x)+\ldots$, где $\varphi, \psi, \omega, \ldots$ даны. Иначе нормальные уравнения очень сложны.

зависящей от одного аргумента k, и место уравнений (4) занимает одно уравнение

$$\frac{d\sigma}{dk}=0,$$

т. е.

$$2\sum_{i=1}^{n}(kx_i-y_i)x_i=0.$$

Отсюда

$$k=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}. \qquad (5)$$

Для записи сумм вида $\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ и т. п. Гаусс предложил краткие обозначения $[x]$, $[x^2]$, $[xy]$ и т. п. С их помощью формулу (5) можно записать так:

$$k=\frac{[xy]}{[x^2]}. \qquad (6)$$

Пусть, например, таблица (1) имеет вид:

x	1	2	3	4	5
y	2,9	6,1	9,2	11,8	16

(7)

Каждое из отношений $\frac{y_i}{x_i}$ близко к 3. Именно,

$$\frac{y_1}{x_1}=2,90;\ \frac{y_2}{x_2}=3,05;\ \frac{y_3}{x_3}=3,66;\ \frac{y_4}{x_4}=2,95;\ \frac{y_5}{x_5}=3,2.$$

Среднее арифметическое этих чисел

$$k=\frac{15,76}{5}=3,25.$$

Формула же (6) дает

$$k=\frac{2,9+12,2+27,6+47,2+80}{1+4+9+16+25}=\frac{169,9}{55}=3,09. \qquad (8)$$

Замечание. Выбор в качестве „наилучшего" из ряда значений наблюденной величины их среднего арифметического можно обосновать и при помощи способа наименьших квадратов. Действительно, если наблюденные значения величины x суть $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то способ наименьших квадратов требует, чтобы за „истинное" значение x

было принято число a, минимизирующее сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2.$$

Отсюда

$$\frac{d\sigma}{da} = 0,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a) = 0$$

и

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Вернемся к зависимости $y = ax + b$. Здесь $\sigma = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ и уравнения (4) таковы:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)\, x_i = 0; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} a[x^2] + b[x] &= [xy], \\ a[x] + nb &= [y]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Решая эту систему, найдем a и b. Для примера проведем выкладки применительно к таблице (7). Здесь

$$[x^2] = 55; \ [x] = 15; \ [xy] = 169{,}9; \ n = 5; \ [y] = 46$$

и система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} 55a + 15b &= 169{,}9, \\ 15a + 5b &= 46, \end{aligned}$$

откуда $a = 3{,}19$; $b = -0{,}37$.

Замечание. Формула $y = kx$ является частным случаем формулы $y = ax + b$. Значит, зависимость $y = 3{,}19x - 0{,}37$ точнее (с точки зрения, положенной в основу способа наименьших квадратов), чем $y = 3{,}09x$ *). Разумеется, если теория вопроса, в ко-

*) Действительно,

$$\sum_{i=1}^{5} (3{,}09x_i - y_i)^2 = 0{,}6635; \quad \sum_{i=1}^{5} (3{,}19x_i - 0{,}37 - y_i)^2 = 0{,}539.$$

тором встретилась таблица (7), установила, что x и y прямо пропорциональны, то надо пользоваться все же зависимостью $y=3{,}09x$. Но может случиться, что данные таблицы (7) надо охватить хоть какой-нибудь аналитической формулой, а никаких **теоретических** предпосылок для выбора такой формулы нет*). Тогда зависимость $y=3{,}19x-0{,}37$ предпочтительнее зависимости $y=3{,}09x$. Еще лучший результат доставила бы формула

$$y=ax^2+bx+c,$$

в которой a, b, c определены по способу наименьших квадратов.

Если есть основания думать, что числа y_i, фигурирующие в таблице (1), являются значениями $f(x_i)$ какой-нибудь (неизвестной нам!) 2π-периодической функции $f(x)$, то данные таблицы можно пытаться охватить эмпирической формулой

$$y=A+a\cos x+b\sin x.$$

Способ наименьших квадратов здесь приводит к следующей нормальной системе уравнений для нахождения A, a, b:

$$\begin{gathered} nA+a[\cos x]+b[\sin x]=[y], \\ A[\cos x]+a[\cos^2 x]+b[\sin x\cos x]=[y\cos x], \\ A[\sin x]+a[\sin x\cos x]+b[\sin^2 x]=[y\sin x]. \end{gathered}$$

Упражнения. 1. Найти a и b в случае зависимости $y=ax+b$ для таблицы

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

Ответ. $a=3{,}023$; $b=-1{,}08$.

2. Составить нормальные уравнения для определения a и b в случае зависимости $y=ax^2+b$.

Ответ. $a[x^4]+b[x^2]=[x^2y]$, $a[x^2]+nb=[y]$.

3. Найти a и b из предыдущего примера для таблицы

x	1	2	3	4	5
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

Ответ. $a=0{,}992$; $b=-0{,}909$.

---

*) Формулы, найденные в ситуациях такого рода, называются *эмпирическими*.

4. Составить нормальные уравнения для определения a, b, c в случае зависимости $y = ax^2 + bx + c$.

Ответ. $a[x^4] + b[x^3] + c[x^2] = [x^2y]$;

$$a[x^3] + b[x^2] + c[x] = [xy];$$

$$a[x^2] + b[x] + nc = [y].$$

5. Найти a, b, c из предыдущего примера для таблицы

x	1	2	3	4	5
y	2,9	8,9	19,1	33,2	50,8

Ответ. $a = 1{,}936$; $b = 0{,}394$; $c = 0{,}502$.

6. Найти $\sum\limits_{i=1}^{5} (0{,}992x_i^2 - 0{,}909 - y_i)^2$ для примера 3.

Ответ. 0,0144.

7. Составить нормальные уравнения относительно a и b в случае зависимости $y = a\cos 2x + b\sin 3x$.

Ответ. $a[\cos^2 2x] + b[\sin 3x\cos 2x] = [y\cos 2x]$;

$$a[\sin 3x\cos 2x] + b[\sin^2 3x] = [y\sin 3x].$$

Исидор Павлович НАТАНСОН
КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Генеральный директор *А. Л. Кноп*
Директор издательства *О. В. Смирнова*
Главный редактор *Ю. А. Сандулов*
Художественный редактор *С. Л. Шапиро*
Подготовка к переизданию *С. Ю. Малахов*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат
78.01.07.952.Т.11668.01.99 от 19.01.99, выдан ЦГСЭН в СПб

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЛАНЬ»
lan@lpbl.spb.ru
www.lanpbl.spb.ru
193012, Санкт-Петербург, пр. Обуховской обороны, 277
издательство: тел.: (812) 262-2495, 262-1178;
pbl@lpbl.spb.ru (издательский отдел).

склад № 1: факс: (812) 267-2792, 267-1368;
trade@lpbl.spb.ru (торговый отдел).
193029, пр. Елизарова, 1
склад № 2: (812) 265-0088, 567-5493, 567-1445;
root@lanpbl.spb.ru
Филиал в Москве:
Москва, 7-я ул. Текстильщиков, 5, тел.: (095) 919-96-00.
Филиал в Краснодаре:
350072, Краснодар, ул. Зиповская, 7, тел.: (8612) 57-97-81.

Сдано в набор 20.08.99. Подписано в печать 10.10.99.
Бумага газетная. Формат $84\times108^1/_{32}$.
Гарнитура Таймс. Печать высокая.
Печ. л. 23. Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 1633.

Отпечатано с фотоформ в ГПП «Печатный Двор»
Министерства Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.