Лабораторная работа № 2 по курсу Дискретный Анализ. Словарь

Выполнил студент группы 08-207 МАИ *Павлов Иван.*

Условие

Кратко описывается задача:

1. Необходимо создать программную библиотеку, реализующую указанную структуру данных, на основе которой разработать программу-словарь. В словаре каждому ключу, представляющему из себя регистронезависимую последовательность букв английского алфавита длиной не более 256 символов, поставлен в соответствие некоторый номер, от 0 до 264 - 1. Разным словам может быть поставлен в соответствие один и тот же номер.

2. Вариант задания: 1. АВЛ-дерево.

Описание алгоритма

Я ознакомился с алгоритмами для работы с АВЛ-деревом, используя материалы лекций, статью на Википедии и материалы с Ютуба.

Словари в большинстве языков программирования позволяют хранить пары ключ-значение, с быстрым поиском элемента по ключу, возможностью вставки и удаления элемента за приемлемое время. Одним из способов быстрого поиска элемента в отсортированной структуре является бинарный поиск. Двоичное дерево поиска использует данный алгоритм для всех операций и является всегда отсортированным, однако при неудачной последовательности вставки элементов оно может выродиться в линейный список, где сложность операций составит $O(N)$, где N - это количество элементов.

Поэтому для реализации словарей используются сбалансированные деревья поиска, например, АВЛ-дерево. У АВЛ-дерева есть ключевое свойство: модуль разности высот левого и правого поддеревьев любого узла дерева не превышает 1. Для сохранения этого свойства используется балансировка при вставке и удалении элемента. Она осуществляется при помощи поворотов: левого и правого. Эти повороты меняют местами узел и его левого (правого) ребенка, сохраняя при этом свойства бинарного дерева поиска.

Поиск элемента аналогичен алгоритму бинарного поиска.

Вставка элемента делается в 3 этапа:

1. Вставляем новый элемент, аналогично алгоритму BST.

2. Начинаем подниматься к корню дерева, каждый раз пересчитывая баланс узлов.

3. Если баланс узла равен 2 (левый дисбаланс), то смотрим на баланс его левого сына. Он не может быть равен 0, так как его высота равна 1. Если его баланс равен 1

(имеется левый ребенок), то делаем правый поворот относительно исходного узла. Если баланс равен -1 (правый ребенок), то делаем левый поворот относительно его (приводим к первому случаю), а затем правый поворот относительно исходного узла. Если баланс исходного узла равен -2 (правый дисбаланс), поступаем симметрично противоположным образом.

При удалении элемента в стандартном алгоритме BST мы не можем просто удалить узел, у которого есть левое и правое поддерево одновременно. В таком случае элементу ищется замена - минимальный узел в правом поддереве. Если удаление элементу пошло по этому кейсу, то мы обратный обход к корню делаем от родителя этой замены, иначе - от родителей этого узла. Балансировка при обратном обходе при удалении аналогична балансировке при вставке.

Описание программы

Для реализации АВЛ-дерева я использовал рекурсивный подход. В каждом узле $Tree$ дерева хранятся ключ key (строка длиной 256 или меньше), значение $value$ (число типа unsigned long long), значение высоты узла $height$, указатели на левого $Tree.left$ и правого $Tree.right$ потомка, по умолчанию равны $NULL$.

Узел можно создать, используя оператор new и конструктор с параметрами ключ и значение. Над узлом определены следующие операции:

- $getHeight$ - получить высоту узла (для $NULL$-узлов возвращаем 0, иначе поле $height$).
- *balance* - получить баланс узла (разность высот левого и правого поддерева узла).
- $leftRotate$ - левый поворот. Пусть x - исходный узел, y - его правый потомок. По свойству BST $y > x$. Мы хотим "повернуть"дерево влево - значит поставить y на место x. По свойствам BST левый потомок y больше x, поэтому он должен стать правым потомком x. Сам x теперь является левым потомком y, а y встал на место x. Далее необходимо с помощью $getHeight$ пересчитать высоты x и y.
- *rightRotate* - правый поворот. Реализован аналогично левому повороту.
- *successor* - минимальный элемент, больший текущего узла. Для ЛР2 не обязательно писать полностью функцию successor, так как она используется лишь при кейсе в удалении, когда у узла есть и левое, и правое поддерево (правый узел не $NULL$).

Поиск элемента: функция $find$.

Вход: $Tree$, key.

Выход: $true$, если элемент есть в дереве, $false$ если его нет.

Реализация: проверяем равенство $Tree$ нулю. Если это так (элемент не найден), выводим $NoSuchWord$, возвращаем $false$. Если нет, то 3 случая: 1) если $Tree.key > key$, то возвращаем функцию $find$ от $Tree.left$ и key. 2) если $Tree.key < key$, то возвращаем функцию $find$ от $Tree.right$ и key. 3) если $Tree.key = key$, то получен искомый элемент, выводим OK, возвращаем $true$.

Вставка элемента: функция $insert$.
Вход: $Tree$, key, $value$.
Выход: узел x.
Реализация:

1. Если $Tree = NULL$, то найдено место для вставки. Выводим OK, создаем с помощью конструктора x, возвращаем его.

2. Если $Tree.key > key$, то присваиваем $Tree.left$ функцию $insert$ от $Tree.left$, key и $value$.

3. Если $Tree.key < key$, то присваиваем $Tree.right$ функцию $insert$ от $Tree.right$, key и $value$.

4. Если $Tree.key = key$, то элемент x уже существует в дереве. Выводим $Exist$, возвращаем x.

Обратный проход к корню в рекурсивной реализации получается сам собой при возвращении из стека вызовов случаев 2 и 3. Все что нужно сделать - написать реализацию балансировки после этих вызовов. Она автоматически применится для случаев 2 и 3 при возвращении из случая 1; в случае 4 она просто не будет менять балансы узлов, так как мы никакую высоту не поменяли.

Реализация балансировки:

1. Пересчитываем высоты узлов: берем максимум $getHeight$ левого и правого потомка, прибавляем к нему 1. Присваиваем данное значение полю $height$ текущего узла.

2. Получаем $balance$ текущего узла.

3. Если модуль значения больше 1, то применяем алгоритм балансировки, описанный выше. Возвращаем x, полученный в результате всех необходимых поворотов.

Удаление узла: функция $erace$.
Вход: $Tree$, key.
Выход: элемент x, вставший на место удаленного узла.
Реализация:

Для кейса, когда у искомого узла есть и левый, и правый потомки я реализовал дополнительную функцию $eraceMinimalNode$, которая занимается поиском замены (минимального правого узла с высотой 1) и удалением ее. Функция принимает на вход $Tree$; если $Tree.left = NULL$, то заменяет $Tree.left$ на $Tree.right$, а $Tree.left$ удаляет. В противном случае рекурсивно вызывается от $Tree.left$, затем балансируется аналогично вставке.

Сама функция $erace$:

1. Если $Tree = NULL$, то искомый элемент не найден. Выводим $NoSuchWord$, возвращаем $NULL$.

2. Если $Tree.key > key$, то присваиваем $Tree.left$ функцию $erace$ от $Tree.left$, key и $value$.

3. Если $Tree.key < key$, то присваиваем $Tree.right$ функцию $erace$ от $Tree.right$, key и $value$.

4. Если $Tree.key = key$, то выводим OK и проверяем, какой из кейсов удаления нам использовать. Если оба потомка $NULL$, то просто удаляем искомый элемент, возвращаем $NULL$. Если у элемента есть один левый (правый) потомок, то удаляем элемент, возвращаем левый (правый) потомок. Если есть оба потомка, то присваиваем элементу $\{successor.key, successor.value\}$ и вызываем $eraceMinimalNode$.

После удаления производится балансировка, аналогичная балансировке при вставке.

Уничтожение дерева: функция $destroy$.
Вход: $Tree$.
Выход: $NULL$.
Реализация: Если левый и правый потомок текущего элемента равны $NULL$, то удаляем элемент, возвращаем $NULL$, присваиваем $Tree.left$ $destroy$ от $Tree.left$ и $Tree.right$ $destroy$ от $Tree.right$, затем удаляем $Tree$, возвращаем $NULL$.

Сохранение дерева в файл в компактном двоичном представлении. Реализовано в соответствии с требованиями чекера.

1. открываем бинарный файл на запись.

2. если файл существует, то вызываем функцию $save$ и закрываем файл. Выводим OK. Иначе просто выводим OK.

Функция $save$.
Вход: $Tree$, f.

Реализация: есть две метки: $NODE$, означающая начало узла в файле и END, означающая $NULL$-узел в дереве. Если $Tree = NULL$, пишем в файл END, иначе пишем последовательно пишем $NODE$, длину ключа, ключ, значение, высота. затем вызываем $save$ от $Tree.left$ и $Tree.right$.

Загрузка дерева из файла. Реализовано в соответствии с требованиями чекера.

Если файла нет, то вызываем $destroy$ от $Tree$ и присваиваем ему $NULL$ (так как из не существующего файла загружается пустое дерево). Иначе если $Tree! = NULL$ то уничтожаем дерево и вызываем функцию $load$.

Функция $load$.

Вход: $Tree$, f.

Реализация: считываем метку из файла, если она равна $NODE$, считываем все параметры и создаем узел дерева. Иначе завершаем. Рекурсивно вызываем $load$ от $Tree.left$ и $Tree.right$.

Дневник отладки

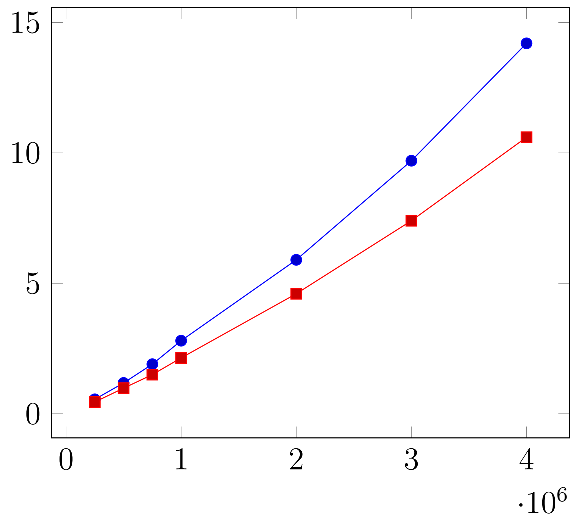
RE7 закрывал файл, равный $NULL$. Добавил if.

RE9 undefined behavior при вызове методов от объектов, равных $NULL$. Заменил все методы на аналогичные функции.

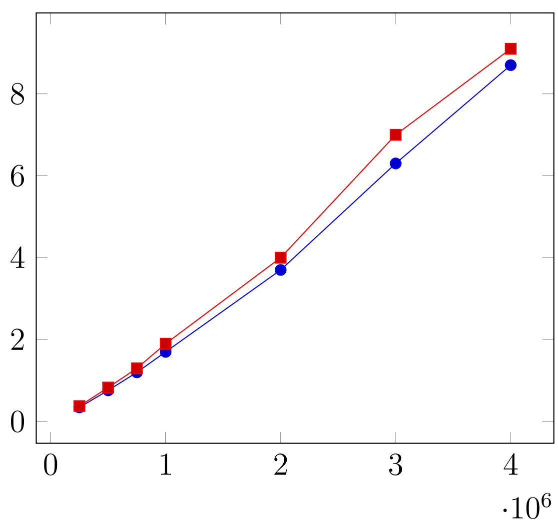
Тест производительности

Сравним производительность вставки и удаления АВЛ-дерева и std::map, который использует под капотом красно-черное дерево. Синим цветом выделена зависимость времени работы АВЛ-дерева от количества входных данных, красным цветом - зависимость времени работы std::map от количества входных данных. Данные замеры включают также ввод элементов, поэтому сложность этих действий $O(nlogn)$ (ввод + операции над деревом).

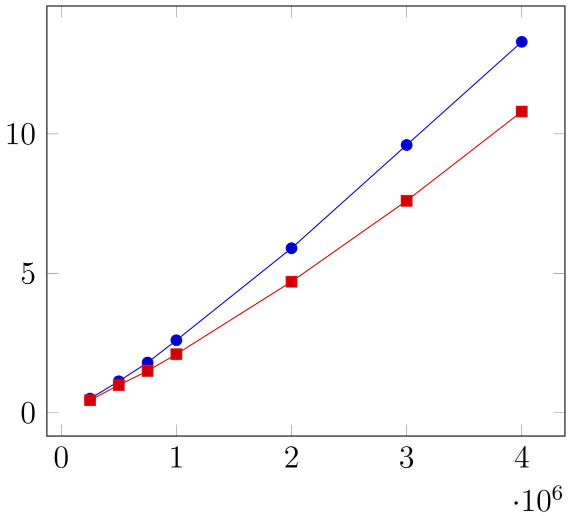
1. Вставка



2. Поиск



3. Удаление



Вставка и удаление работают в std::map быстрее, так как красно-черное дерево делает меньше поворотов и пересчетов, чем АВЛ-дерево. Поиск в АВЛ-дереве работает быстрее, чем в std::map, так как АВЛ-дерево более сбалансировано.

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было изучено и реализовано АВЛ-дерево - сбалансированная структура данных, которая позволяет эффективно выполнять операции вставки, удаления и поиска элементов.

АВЛ-дерево находит свое применение в различных областях разработки, таких как базы данных, компиляторы, алгоритмы сжатия данных и т.д. Благодаря своей сбалансированности, оно гарантирует, что все операции выполняются за логарифмическое время, что делает его очень эффективным в ситуациях, когда нужно обрабатывать большие объемы данных.

Однако, в стандартной библиотеке языка программирования C++ вместо АВЛ-дерева используется красно-черное дерево для реализации контейнера $std :: map$. Это связано с тем, что красно-черное дерево является более эффективным с точки зрения вычислительных затрат. Кроме того, реализация АВЛ-дерева требует большего количества операций поворота, что может приводить к замедлению работы программы.

Оценка сложности АВЛ-дерева составляет $O(logn)$, где n - количество элементов в дереве. Это делает его очень эффективным для решения задач, связанных с поиском, вставкой и удалением элементов в словарях.