Компакты в $\mathbb{R}^n$

Битюков Юрий Иванович

24.03.2022

Компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ - это такое подмножество в $\mathbb{R}^n$, из любой плоскости точек которого можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит X.

Теорема. $X \subset \mathbb{R}^n$ - компакт $\Longleftrightarrow X$ ограничено и замкнуто.

Доказательство. Пусть X - компакт. Допустим, что X не является ограниченным $\Longrightarrow$ для $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in X : \rho(0, x_m) > m \Longrightarrow \lim\limits_{m\to\infty} \rho(0, \ldots, m) = \infty \Longrightarrow$ из $\{x_{m_k}\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность (так как $\forall\{x_{m_k}\} \Longrightarrow \rho(0, x_{m_k}) = \omega) \Longrightarrow$ $\{x_{m_k}\}$ не ограничена, что не может быть при сходимости $\Longrightarrow X$ ограничена.

Докажем замкнутость $X = \overline{X}$. Допустим, что $\exists a \in \overline{X} \backslash X$; $0 \le \rho(a, x_m) < \frac{1}{m} \xrightarrow{m\to n} 0$. Тогда $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists x_m \in X : \rho(0, x_m) < \frac{1}{m} \Longrightarrow X$ - компакт $\Longrightarrow \exists\{x_{m_k}\}_{m_k\in\mathbb{N}}$ сходится к точке X, но $\rho(0, x_m) < \frac{1}{m_k} \to 0$, $k \to \infty \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = a \Longrightarrow a \in X$ - противоречие, т.к. $a \in \overline{X} \backslash X$ $\Longrightarrow X$ - замкнуто.

Обратно: Пусть X ограничено и замкнуто. Возьмем последовательность $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}} <$ X - последовательность ограничена $\Longrightarrow$ по теореме Больцано-Вейерштраса из $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}_{m_k\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = a \Longrightarrow a$ - предельная точка $X \Longrightarrow$ из замкнутости $\Longrightarrow a \in X \Longrightarrow X$ - компакт. $\square$