



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



Υπολογιστική Ρευστομηχανική

Διδάσκων: Π. Παναγιώτου

1<sup>η</sup> ΕΡΓΑΣΙΑ 2023-2024

*Βήχας Παύλος*

*AEM: 6663*

*Εξάμηνο 9<sup>ο</sup>*

## Περιεχόμενα

<i>Περιγραφή Εργασίας και δεδομένων.....</i>	<i>2</i>
<i>Ρητή μέθοδος.....</i>	<i>5</i>
<i>Διακριτοποίηση.....</i>	<i>5</i>
<i>Λογική αλγορίθμου.....</i>	<i>6</i>
<i>Μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος.....</i>	<i>7</i>
<i>Αποτελέσματα.....</i>	<i>11</i>
<i>Πεπλεγμένη μέθοδος.....</i>	<i>14</i>
<i>Διακριτοποίηση.....</i>	<i>14</i>
<i>Λογική αλγορίθμου.....</i>	<i>16</i>
<i>Μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος.....</i>	<i>17</i>
<i>Αποτελέσματα.....</i>	<i>19</i>
<i>Συμπεράσματα – Σχόλια .....</i>	<i>22</i>
<i>Βιβλιογραφία .....</i>	<i>23</i>

## Περιγραφή εργασίας και δεδομένων

Το περιεχόμενο της εργασίας αφορά την ροή πάνω από μία επίπεδη πλάκα και στόχος μας είναι να αποτυπώσουμε το φαινόμενο ανάπτυξης οριακού στρώματος, με βάση την θεωρία του Prandtl, πάνω από αυτήν. Στο πλαίσιο λοιπόν της εργασίας καλούμαστε να αξιοποιήσουμε τόσο της γνώσεις μας στην ρευστομηχανική όσο και στην αλγοριθμική μας σκέψη. Η επίλυση γίνεται αριθμητικά μέσω πεπερασμένων διαφορών και η άσκηση επιλύεται με δύο μεθόδους, μία ρητή και μία πεπλεγμένη.

Στην τεχνική έκθεση αυτή θα παρουσιάσουμε την διακριτοποίηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το φαινόμενο ενώ παράλληλα θα εξηγηθεί βήμα βήμα η λογική με την οποία εξελίσσεται ο αλγόριθμός μας. Κατόπιν, θα παρουσιαστεί η μελέτη ανεξαρτησίας του πλέγματός μας και τέλος θα γίνει σύγκριση της αριθμητικής επίλυσης με την αναλυτική λύση κατά Blasius.

### Εξίσωση Συνέχειας

Από την διαφορική μορφή της εξίσωσης συνέχειας των ρευστών έχουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1)$$

### Εξίσωση Ορμής

Και από τις Navier-Stokes έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = & -\frac{\partial p}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \rho f_x \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = & -\frac{\partial p}{\partial y} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \rho f_y \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = & -\frac{\partial p}{\partial z} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \nabla \cdot \mathbf{V} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho f_z \end{aligned} \quad (4)$$

Το πρόβλημά μας είναι **μόνιμο** , επομένως ο όρος  $\frac{\partial p}{\partial t}$  μηδενίζεται. Επιπλέον θεωρούμε πως έχουμε **2D ροή** στις διευθύνσεις x και y και η ροή είναι **ασυμπίεστη**. Μία ,επίσης, σημαντική παραδοχή που κάνουμε εδώ και μας οδηγεί στις εξισώσεις της εκφώνησης είναι πως επειδή το οριακό στρώμα είναι πολύ λεπτό, η  $\nu$  θα είναι πολύ μικρότερη της  $u$  ( $\nu \ll u$ ) **Αυτό σημαίνει πως η κλίση ταχύτητας κατά πλάτος είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή κατά μήκος**. Με αυτές λοιπόν τις παραδοχές η εξίσωση συνέχειας και ορμής που περιγράφει το οριακό στρώμα Prandtl είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6)$$

### Οριακές Συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος μας είναι οι εξής:

1. Συνθήκη Μη Ολίσθησης επί της επιφάνειας της πλάκας
2. Ταχύτητα  $u$  μακριά από το οριακό στρώμα είναι  $u = U_\infty$
3. Ροή εισόδου αέρα ομοιόμορφη και παράλληλη προς την πλάκα ( $U_\infty$ )

## Ρητή μέθοδος επίλυσης

### Διακριτοποίηση

Για την διακριτοποίηση των διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιήσαμε forward μέθοδο βασιζόμενοι στο ανάπτυγμα Taylor. Ξεκινώντας λοιπόν από τη εξίσωση ορμής έχουμε για κάθε όρο:

#### Εξίσωση ορμής

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = v_j^i \cdot \frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (7)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_j^i \cdot \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (8)$$

$$V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = V \cdot \frac{u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (9)$$

Κατόπιν επιλύουμε ως προς τον όρο  $u_{j+1}^i$

$$u_{j+1}^i = \left[ V \cdot \frac{u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) - v_j^i \frac{u_j^{i+1} - u_j^i}{\Delta y} - O(\Delta y) \right] \cdot \left[ \frac{\Delta x}{u_j^i} \right] + u_j^i - O(\Delta x) \quad (10)$$

#### Εξίσωση Συνέχειας

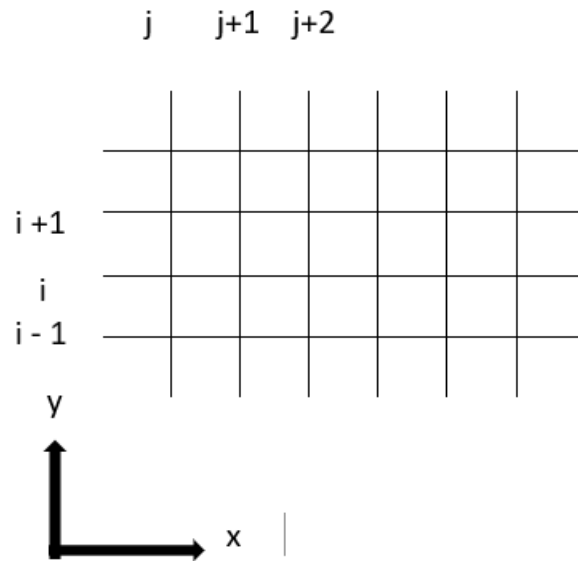
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_j^{i+1} - v_j^i}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (12)$$

Και επιλύουμε ως προς τον όρο  $v_j^{i+1}$

$$v_j^{i+1} = - \left[ \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta x} + O(\Delta x) \right] \cdot \Delta x + v_j^i \quad (13)$$

Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να αναφέρουμε πως στον αλγόριθμό μας το  $j$  αναφέρεται σε μεταβολή στην κατεύθυνση  $x$  (στήλες) ενώ το  $i$  στην  $y$  (γραμμές).



### Λογική αλγορίθμου

Ξεκινώντας λοιπόν το πρόγραμμα μας ορίζουμε τις βασικές παραμέτρους του προβλήματός μας:

1. Κινηματικό ιξώδες  $\nu = 1.47e-05$
2. Ταχύτητας ελεύθερης ροής  $= 2 \text{ m/s}$
3. Μήκος πλάκας και ύψος παρατήρησης (10 και 0.1 m αντίστοιχα)
4. Αριθμός στηλών και γραμμών (X points & Y points)
5. Βήμα  $\Delta x$  και  $\Delta y$  με βάση τα παραπάνω
6. Δημιουργία αρχικού Grid (πίνακας) με τις αντίστοιχες διαστάσεις

Προχωράμε ορίζοντας τις οριακές συνθήκες:

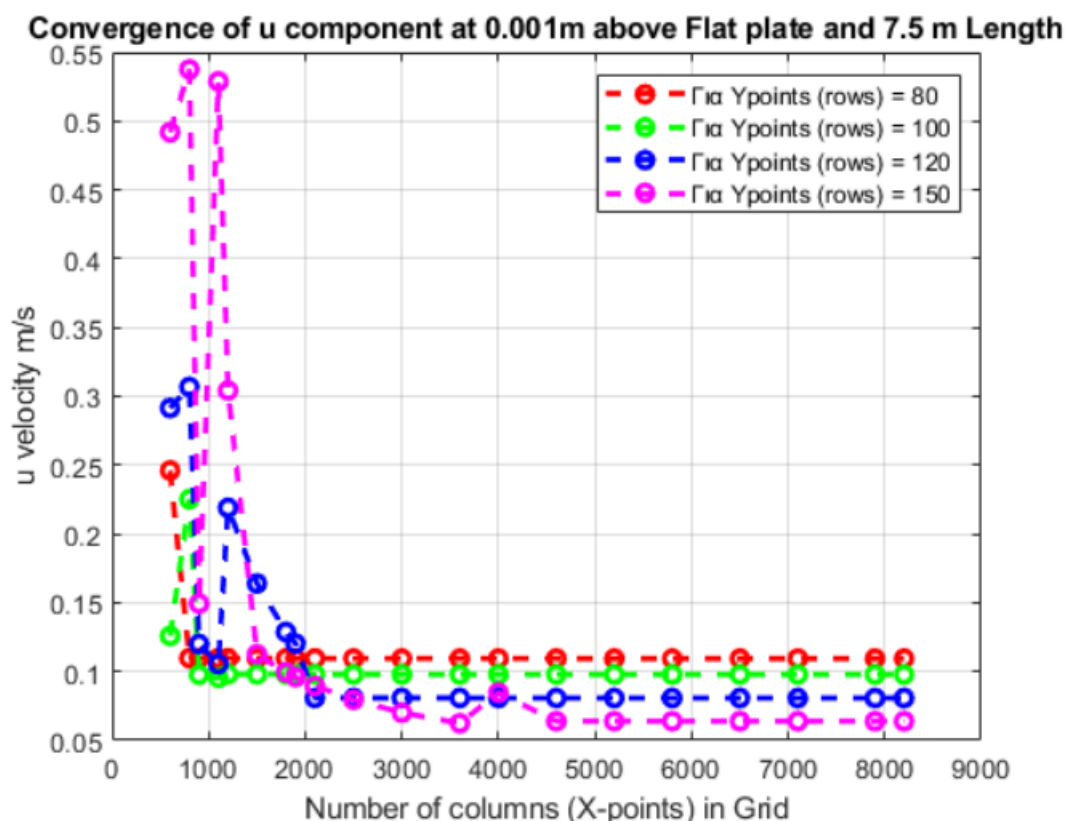
- Τα στοιχεία της αρχικής γραμμής  $i-1$  είναι μόνιμα 0  $\rightarrow$  No slip Condition
- Τα στοιχεία της αρχικής στήλης  $j$  είναι για το  $u$  ίσα με 2 ενώ για το  $v$  ίσα με 0  $\rightarrow$  Inlet Air
- Τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής  $i + \dots$  είναι ίσα με 2 για το  $u$  και 0 για το  $v \rightarrow$  Freestream

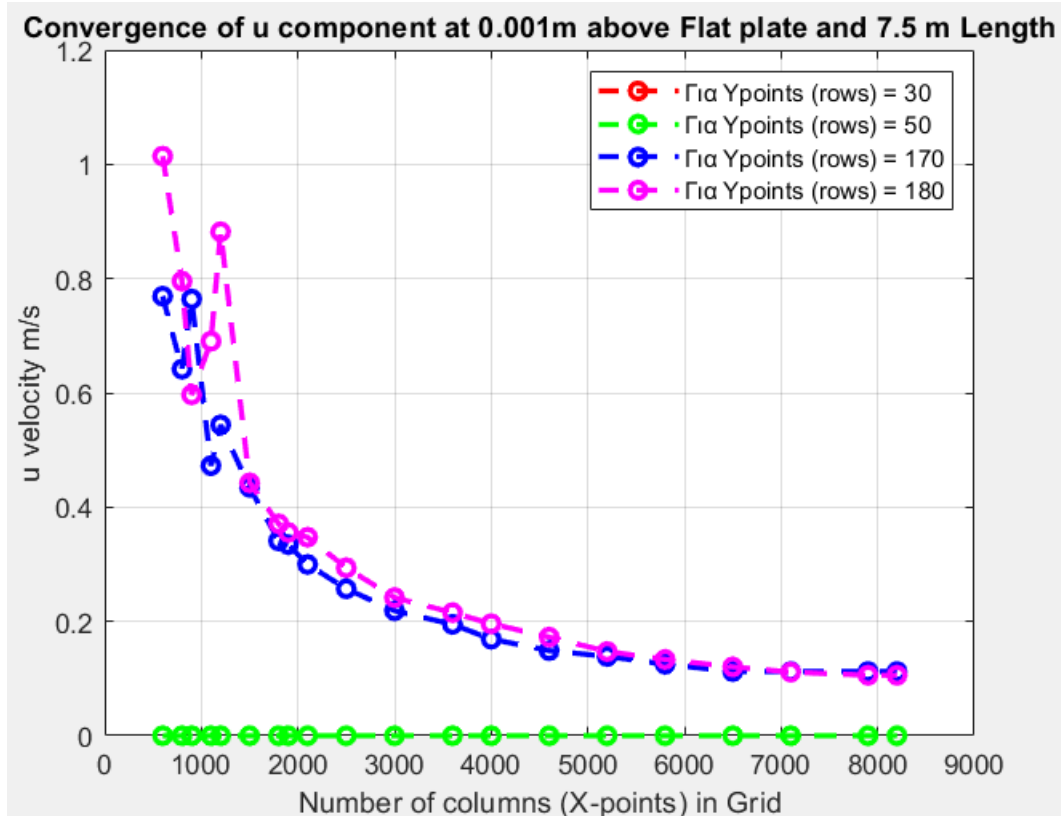
Ξεκινώντας λοιπόν να επιλύουμε με δύο επαναληπτικές ενέργειες (for) (ξεκινώντας από έξω προς τα μέσα) για στήλες  $j$  (δηλαδή  $x$  κατεύθυνση) για  $j = 1$  και εμφωλευμένη για γραμμές  $i$  (δηλαδή  $y$  κατεύθυνση) για  $i = 2$  παρατηρήσαμε πως αδυνατούμε να ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς μας από την εξίσωση συνέχειας. Για αυτόν τον λόγο ξεκινάμε από την εξίσωση ορμής που έχει μοναδικό άγνωστο τον όρο  $u_{j+1}^i$  και επιλύουμε ως προς αυτόν όπως στην εξίσωση (10). Έπειτα χρησιμοποιούμε την εξίσωση συνέχειας για να βρούμε τον τελευταίο άγνωστο από το σύστημα των μερικών διαφορικών τον όρο  $v_j^{i+1}$  όπως από την σχέση (13).

### Μελέτη Ανεξαρτησίας Πλέγματος

Για την μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος επιλέξαμε ένα σημείο στον χώρο, κοντά από την επιφάνεια της πλάκας (για να πιάνουμε τις κλίσεις ταχύτητας) και παρατηρήσαμε την τιμή της ταχύτητας για διάφορες τιμές τόσο σημείων  $x$  όσο και σημείων  $y$  του πλέγματος. Εντοπίσαμε πως ο αριθμός των σημείων  $x$  του πλέγματος (Στήλες) πρέπει να είναι αρκετά μεγαλύτερος από τον αριθμό των σημείων  $y$  του πλέγματος. Αυτό, υποθέσαμε ότι γίνεται για τον λόγο που προαναφέρθηκε στην περιγραφή της εργασίας, δηλαδή πως οι κλίσεις ταχύτητας στην  $y$  διεύθυνση είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτές στην  $x$ .

Παρακάτω παρατίθενται τα σχετικά διαγράμματα για διάφορες τιμές  $Y_{\text{points}}$  και  $X_{\text{points}}$  του Grid:





Η τιμή της ταχύτητας  $u$  συγκλίνει για  $X - \text{points} > 4500$  και  $Y - \text{Points} > 70$

Αφού λοιπόν είδαμε τα όρια του πλέγματος για τα οποία ο κώδικας είναι σταθερός έπειτα κάναμε μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος χρησιμοποιώντας και την αναλυτική λύση του Blasius. Συγκεκριμένα τρέξαμε για διάφορα πλέγματα τον κώδικα και εξάγαμε το σφάλμα μεταξύ του πάχους οριακού στρώματος της αριθμητικής λύσης και τις αναλυτικής λύσης του Blasius για το σημείο της πλάκας  $L = 10\text{m}$  (Γιατί εκεί έχω μέγιστη απόκλιση).

$$\text{Error} = |\delta_{Num} - \delta_{Blasius}|$$

Για  $L = 10\text{m}$  προκύπτει πως  $\delta_{Blasius} = 0.0418\text{ m}$

Παρακάτω παρατίθενται τα σχετικά διαγράμματα:



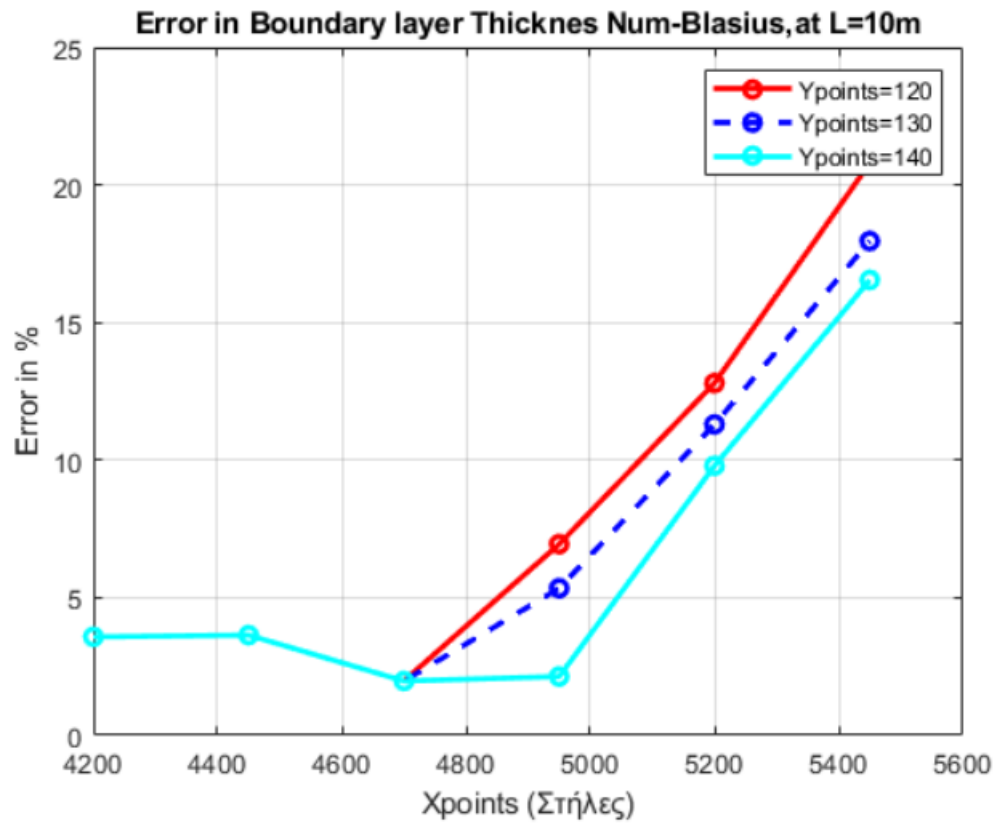


Figure 3: Σφάλμα πάχους οριακού στρώματος για διάφορα πλήθη στοιχείων Y το Grid

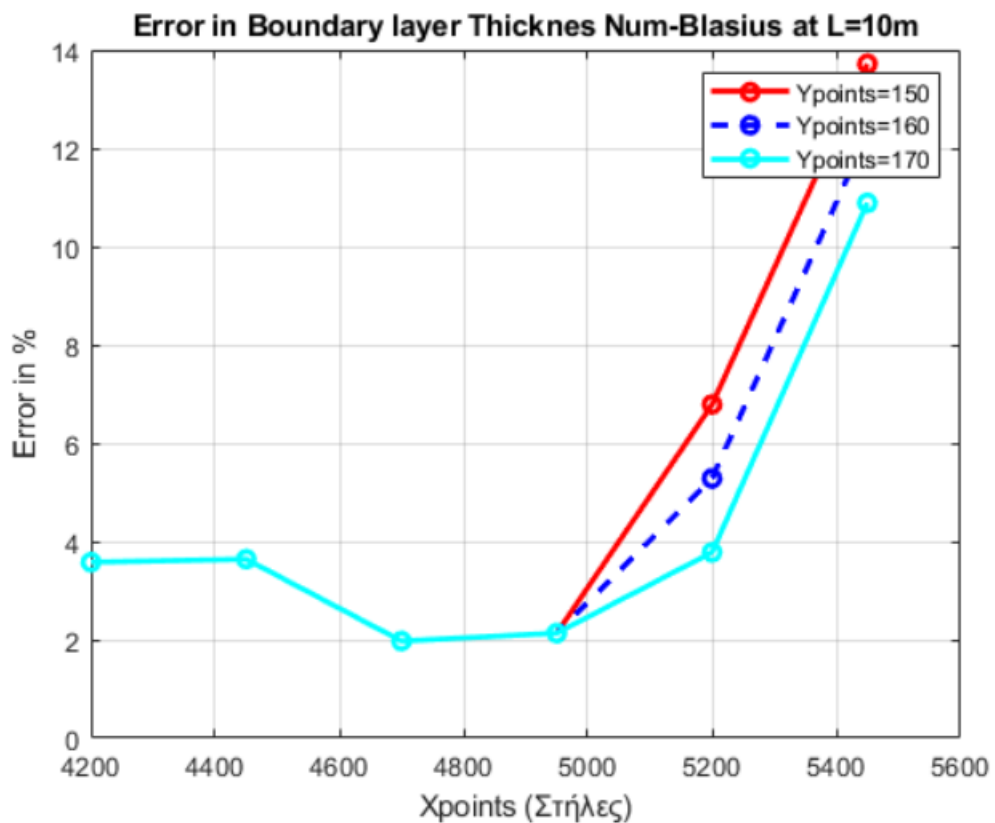


Figure 4: Σφάλμα πάχους οριακού στρώματος για διάφορα πλήθη στοιχείων Y το Grid:

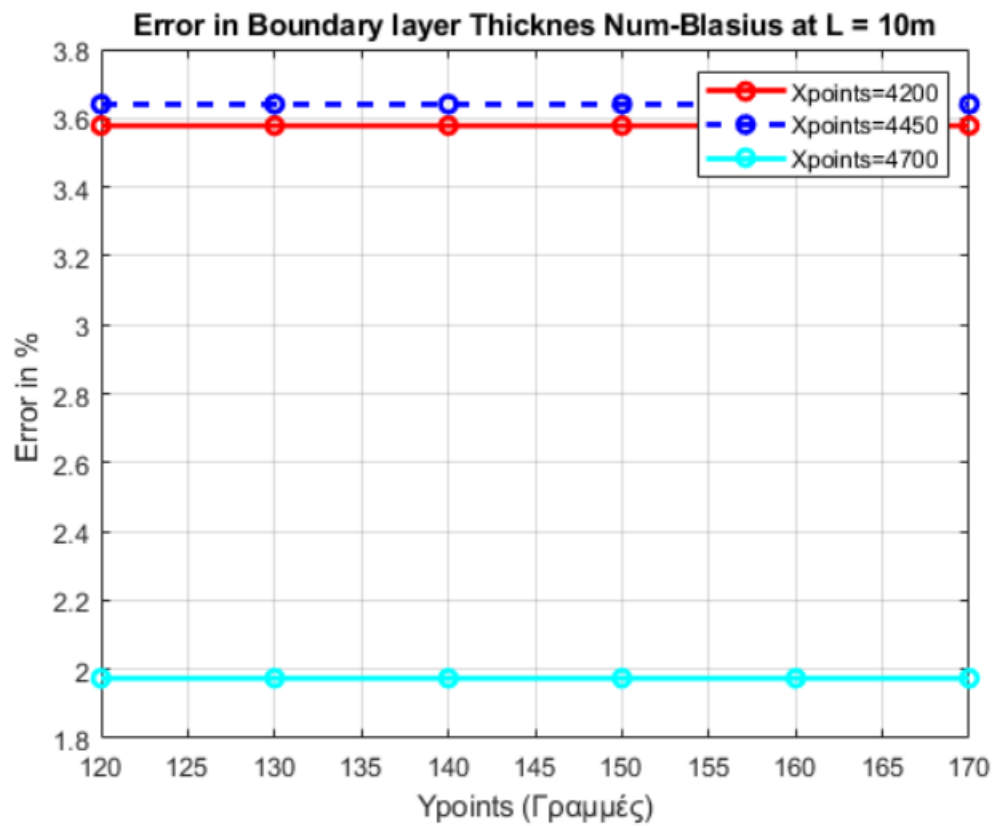


Figure 5: Σφάλμα πάχους οριακού στρώματος για διάφορα πλήθη στοιχείων X το Grid

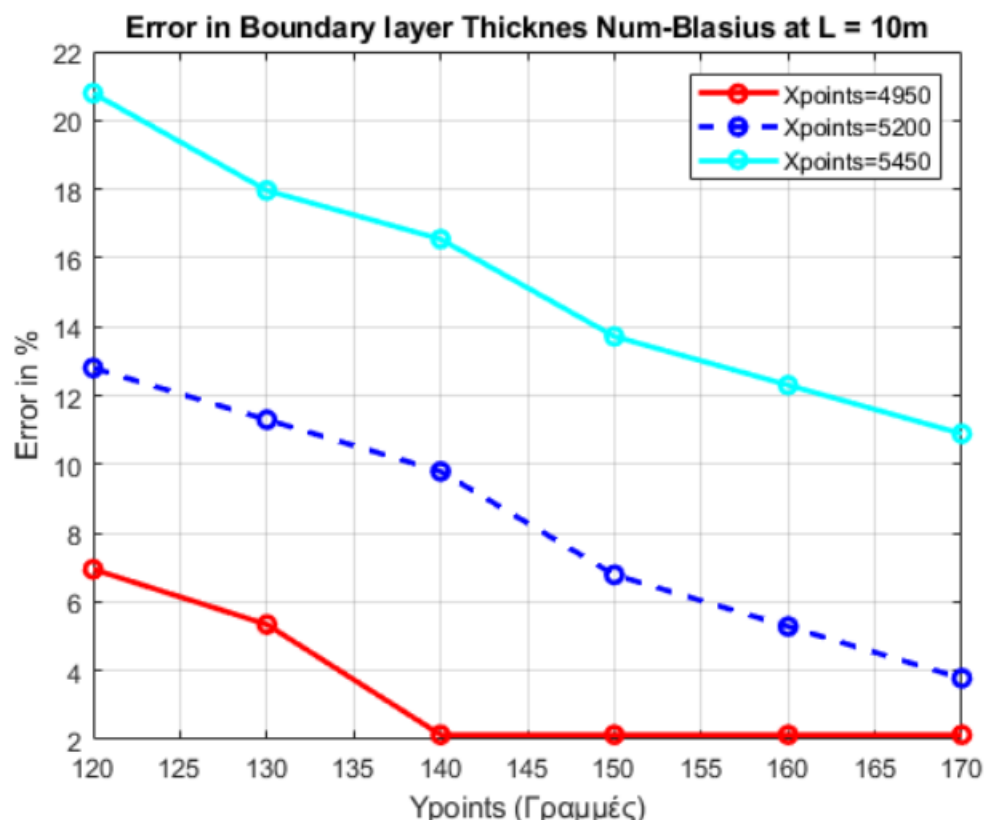


Figure 6: Σφάλμα πάχους οριακού στρώματος για διάφορα πλήθη στοιχείων X το Grid

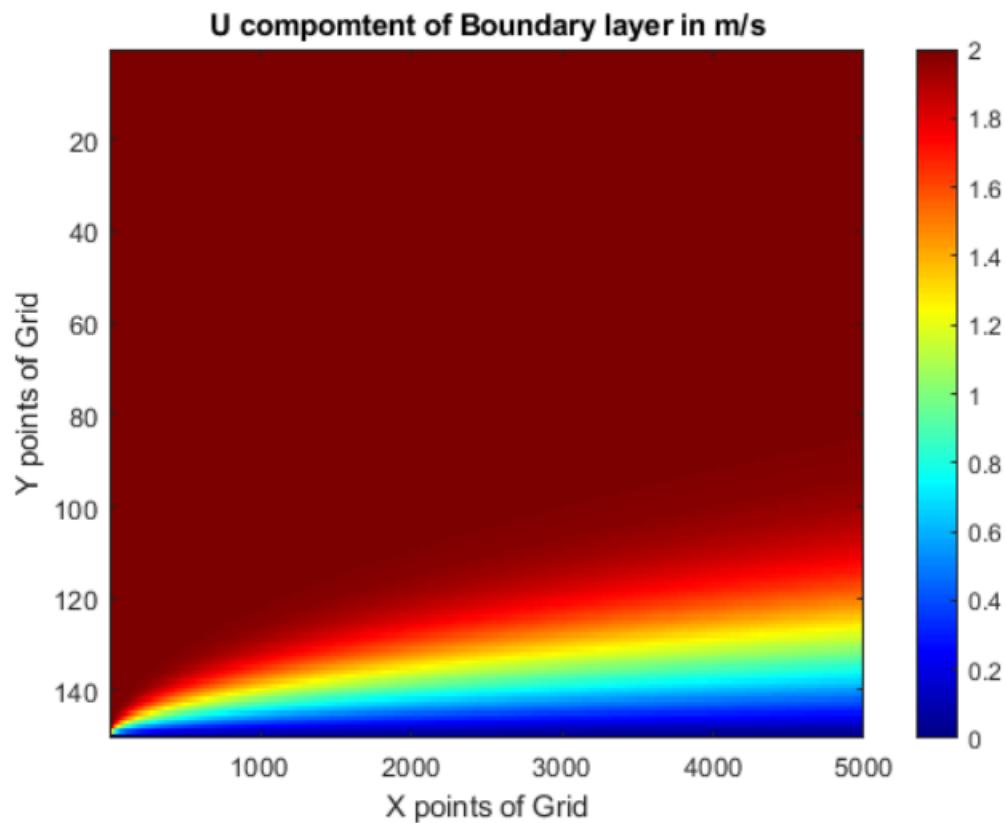
## Αποτελέσματα και Σύγκριση με αναλυτική λύση

Με βάση τα παραπάνω επιλέχθηκε τόσο για την καλή ακρίβεια όσο και για την μικρότερη δυνατή υπολογιστική ισχύς Grid με:

Ypoints = 150 → Γραμμές

Xpoints = 5000 → Στήλες

Μία πρώτη οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



## Πάχος οριακού στρώματος

Στο κάτω διάγραμμα φαίνεται το πάχος του οριακού στρώματος κατά μήκος της επίπεδης πλάκας τόσο για την αριθμητική λύση όσο και για την αναλυτική λύση Blasius.

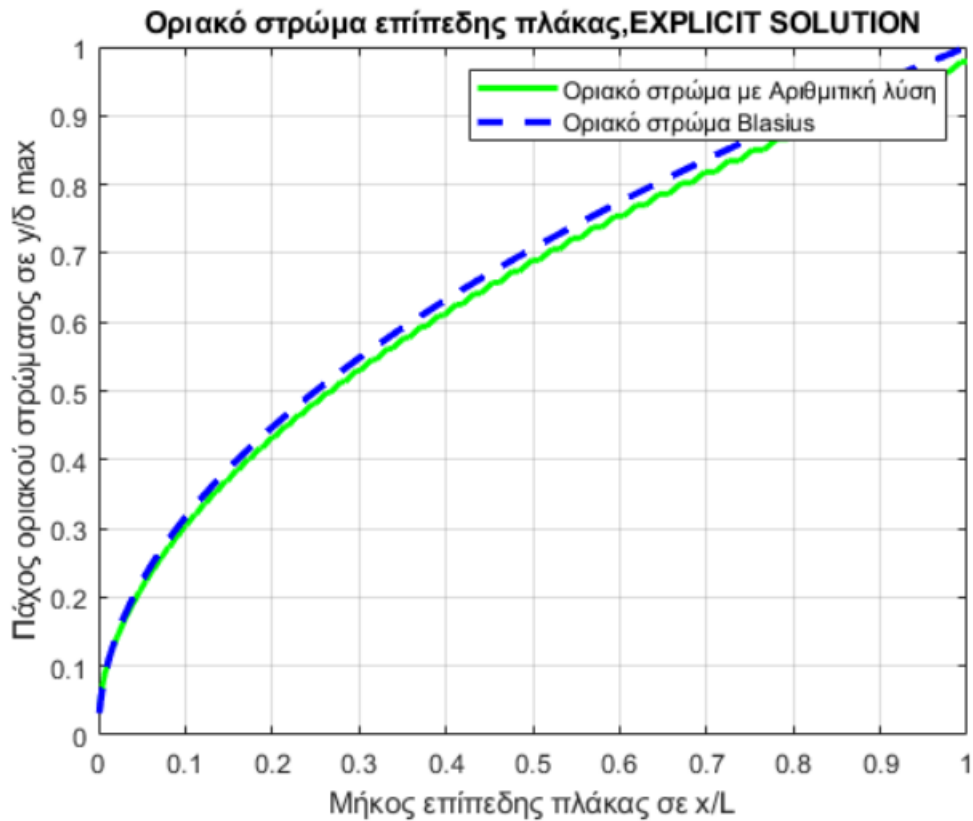
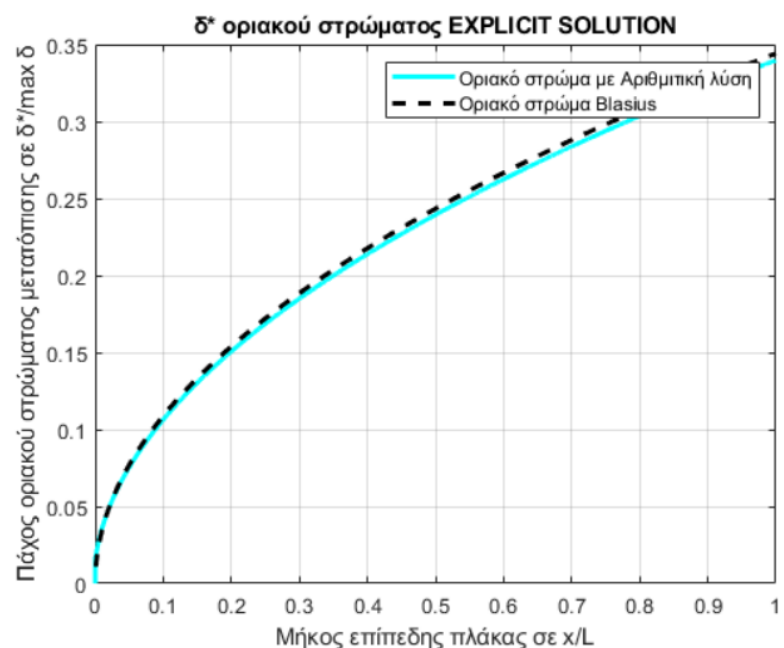


Figure 8: Πάχος οριακού στρώματος

Η μέγιστη απόκλιση βρίσκεται στο τέλος της επίπεδης πλάκας και κυμαίνεται στο 2%, παρόλα ταύτα φαίνεται πως η EXPLICIT προσέγγιση μας είναι πολύ κοντά στην επίλυση Blasius.

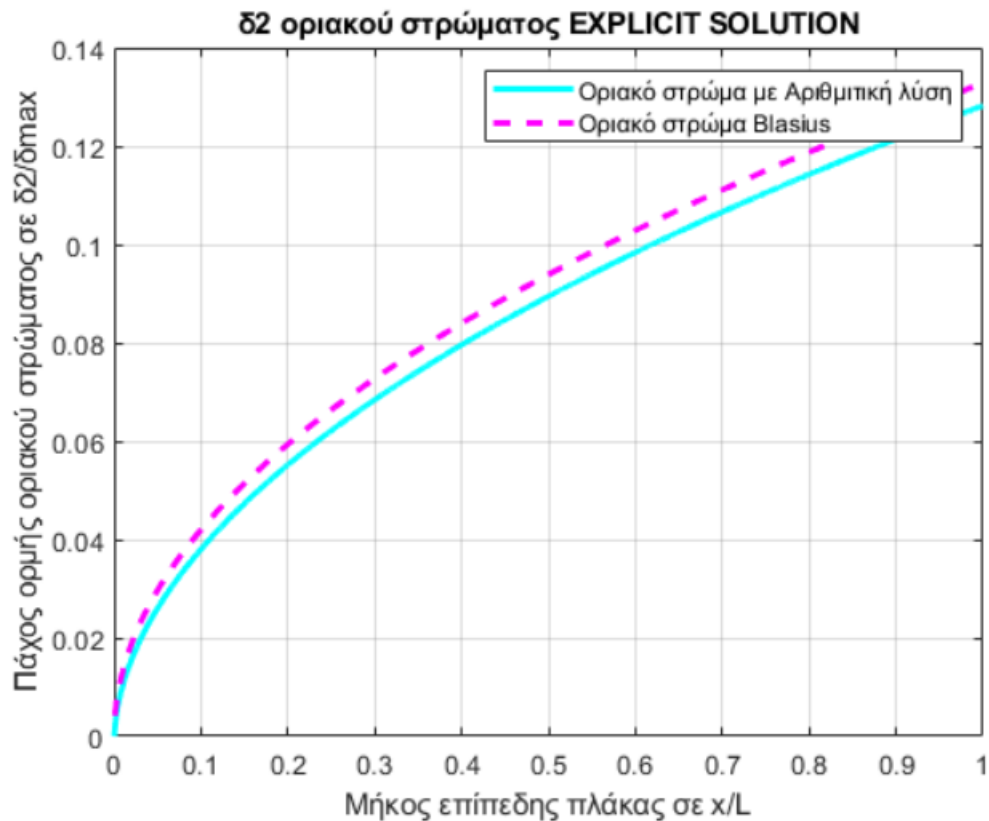
### Οριακό Στρώμα Μετατόπισης

Ένα ακόμη μέγεθος με το οποίο συγκρίνουμε τις δύο λύσεις είναι το οριακό στρώμα μετατόπισης  $\delta^*$ . Σύμφωνα με αυτό βλέπουμε πόσο περιορίζει την ροή μάζας το οριακό στρώμα. Δηλαδή πόσο μου στενεύει το οριακό στρώμα την ροή από άποψη παροχής μάζας.



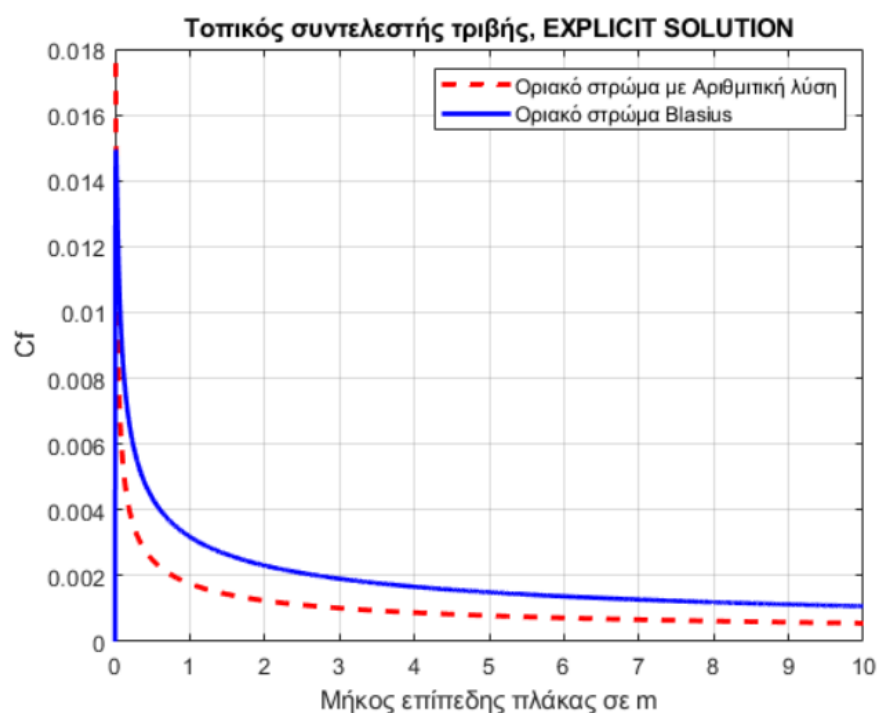
### Πάχος ορμής οριακού στρώματος $\delta_2$

Εξίσου σημαντικό μέγεθος για την σύγκριση των δύο λύσεων. Αντίστοιχα, όπως το προηγούμενο μέγεθος μας δείχνει πόσο πρέπει να ελαττωθεί το συνολικό πάχος από το οποίο διέρχεται η ροή έτσι ώστε να έχουμε ροή ορμής της ροής αντίστοιχη με την περίπτωση που δεν είχαμε οριακό στρώμα.



### Συντελεστής Τριβής

Τέλος, η επίδραση των διατμητικών τάσεων για τις δύο λύσεις, μπορεί να φανεί από τον συντελεστή τριβής  $C_f$ .



Τα αντίστοιχα μεγέθη δόθηκαν από την εκφώνηση:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}, \quad \delta_1 = \frac{1.72x}{\sqrt{Re_x}}, \quad \delta_2 = \frac{0.664x}{\sqrt{Re_x}}, \quad C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$$

## Πεπλεγμένη μέθοδος επίλυσης

### Διακριτοποίηση

Για την διακριτοποίηση στην implicit μέθοδο, έγινε χρήση της διακριτοποίησης Crank-Nicholson για την εξίσωση ορμής και χρήση backwards για την εξίσωση συνέχειας.

Ξεκινώντας λοιπόν ξανά από την εξίσωση της ορμής, έχουμε για κάθε όρο:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_j^i \cdot \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (14)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v_j^i}{2} \cdot \left[ \frac{u_{j+1}^{i+1} - u_{j+1}^{i-1}}{2\Delta y} + \frac{u_j^{i+1} - u_j^{i-1}}{2\Delta y} \right] + \text{Σφάλμα αποκοπής} \quad (15)$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = V \cdot \left[ \frac{u_{j+1}^{i+1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i-1}}{2\Delta y^2} + \frac{u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1}}{2\Delta y^2} \right] + \text{Σφάλμα αποκοπής} \quad (16)$$

Προς διευκόλυνσή μας θέτουμε:

$$1. A = \frac{u_j^i}{\Delta x}$$

$$2. B = \frac{v_j^i}{4\Delta y}$$

$$3. G = \frac{V}{2\Delta y^2}$$

Εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{j+1}^i - v_j^{i-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (16)$$

Στο πρόβλημα μας έχουμε marching λύση στον άξονα x (ανά στήλες). Έτσι, οι άγνωστοι είναι οι εξής:

Εξίσωση Ορμής :

$$1. u_{j+1}^{i+1}$$

$$2. u_{j+1}^i$$

$$3. u_{j+1}^{i-1}$$

Εξίσωση Συνέχειας:

$$1. v_{j+1}^i$$

Για την Εξίσωση ορμής λοιπόν χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

Το δεξί μέλος με τα γνωστά μεγέθη σε κάθε iteration της y κατεύθυνσης το ορίζουμε ίσο με

$$K = (A-2\Gamma)u_j^i + (\Gamma-B) u_j^{i+1} + (B+\Gamma) u_j^{i-1} \quad (17)$$

Ενώ από την άλλη το αριστερό μέλος με τους αγνώστους είναι:

$$(B-\Gamma)u_{j+1}^{i-1} + (A+2\Gamma) u_{j+1}^i + (B-\Gamma) u_{j+1}^{i+1}$$

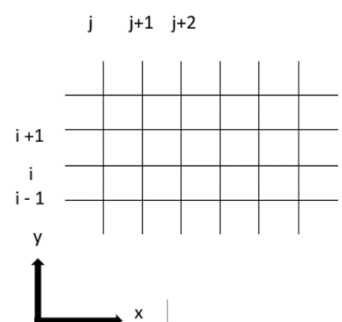
Έτσι αφού θέσουμε  $E = (B-\Gamma)$  &  $\Delta = (A+2\Gamma)$ , παράγεται ένα Τριδιαγώνιο Μητρώο:

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & E_1 & 0 & \dots & & 0 \\ E_2 & \Delta_2 & E_2 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & E_{end-1} & \Delta_{end-1} & E_{end-1} \\ & & & 0 & E_{end} & \Delta_{end} \end{bmatrix}$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί πως για  $i = 2$  (y-direction) ο  $(B-\Gamma)u_{j+1}^{i-1}$  όρος είναι γνωστός από την οριακή συνθήκη Μη ολίσθησης ενώ από την άλλη για  $i = \text{last}-1$  Ynode ο όρος  $(B-\Gamma) u_{j+1}^{i+1}$  είναι επίσης γνωστός από την οριακή συνθήκη της ταχύτητας ομοιόμορφης ελεύθερης ροής, για αυτό και η μορφή του μητρώου είναι τριδιαγώνιος πίνακας.

Για την εξίσωση συνέχειας απλά θα επιλύσουμε ως προς τον μοναδικό άγνωστο όρο που προαναφέρθηκε παραπάνω.

Πριν πάμε στην Λογική του αλγορίθμου μας υπενθυμίζουμε την μορφή του Grid μας (όπως explicit)



Ακριβώς όπως και στην ρητή μέθοδο ορίζουμε τις βασικές παραμέτρους του προβλήματός μας:

1. Κινηματικό ιξώδες  $V = 1.47e-05$
2. Ταχύτητας ελεύθερης ροής  $= 2 \text{ m/s}$
3. Μήκος πλάκας και ύψος παρατήρησης (10 και 0.1 m αντίστοιχα)
4. Αριθμός στηλών και γραμμών στο Grid (X points & Y points)
5. Βήμα  $\Delta x$  και  $\Delta y$  με βάση τα παραπάνω
6. Δημιουργία αρχικού Grid (πίνακας) με τις αντίστοιχες διαστάσεις

Προχωράμε ορίζοντας τις οριακές συνθήκες:

- Τα στοιχεία της αρχικής γραμμής  $i-1$  είναι μόνιμα 0  $\rightarrow$  No slip Condition
- Τα στοιχεία της αρχικής στήλης  $j$  είναι για το  $u$  ίσα με 2 ενώ για το  $v$  ίσα με 0  $\rightarrow$  Inlet Air
- Τα στοιχεία της τελευταίας γραμμής  $i + \dots$  είναι ίσα με 2 για το  $u$  και 0 για το  $v \rightarrow$  Freestream

Ο Αλγόριθμός μας λοιπόν ‘τρέχει’ δύο λούπες, η πρώτη για κάθε node στην  $x$ -κατεύθυνση και μία εμφωλευμένη για κάθε node στην  $y$ -κατεύθυνση.

Εντός και των δύο επαναληπτικών διαδικασιών αυτών αρχικά υπολογίζουμε τους συντελεστές  $A$ ,  $B$  &  $\Gamma$  καθώς ανεβαίνοντας τα  $i$  για ένα συγκεκριμένο  $j$  οι τιμές αυτών των συντελεστών μεταβάλλονται. Φροντίζουμε λοιπόν να ενημερώνουμε τις τιμές αυτές και να τις αποθηκεύουμε σε μία στήλη για κάθε συντελεστή προκειμένου να τις αξιοποιήσουμε στην επίλυση του μητρώου. Κατόπιν, ορίζουμε για κάθε επανάληψη node του  $i$ , υπό σταθερό node  $j$ , τις τιμές  $K_i$  και αξιοποιούμε τις οριακές συνθήκες no slip condition & freestream για τις τιμές του  $i = 2$  και  $i = \text{end}-1$  αντίστοιχα, όπως ακριβώς επεξηγήθηκε λίγο παραπάνω.

Αφού λοιπόν τελειώσει η εμφωλευμένη λούπα ( $i \rightarrow y\text{-direction}$ ), Δημιουργούμε το τριδιαγώνιο μητρώο  $A$ , με τις στήλες των συντελεστών που αναφέραμε πριν, και έπειτα βρίσκουμε τις τιμές ταχύτητας του  $u$  σε μια στήλη για όλες τις γραμμές (για ένα  $x$ , σε όλα τα  $y$ ) χρησιμοποιώντας τον τελεστή “\” επιλύουμε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων με τόσους αγνώστους όσα Y points στο Grid και τόσες εξισώσεις όσα επίσης τα Y points. Ανανεώνουμε τον πίνακα που φέρει τις τιμές τις ταχύτητας  $u$  και έπειτα αλλάζουμε στήλη ( $j \rightarrow x\text{-direction}$ ) και επαναλαμβάνουμε το ίδιο.

Τώρα, εφόσον έχουμε γνωστούς όλους τους όρους από την διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας επιλύουμε επαναληπτικά για να βρούμε τον άγνωστο όρο  $v_{j+1}^i$ .



## Μελέτη Ανεξαρτησίας Πλέγματος

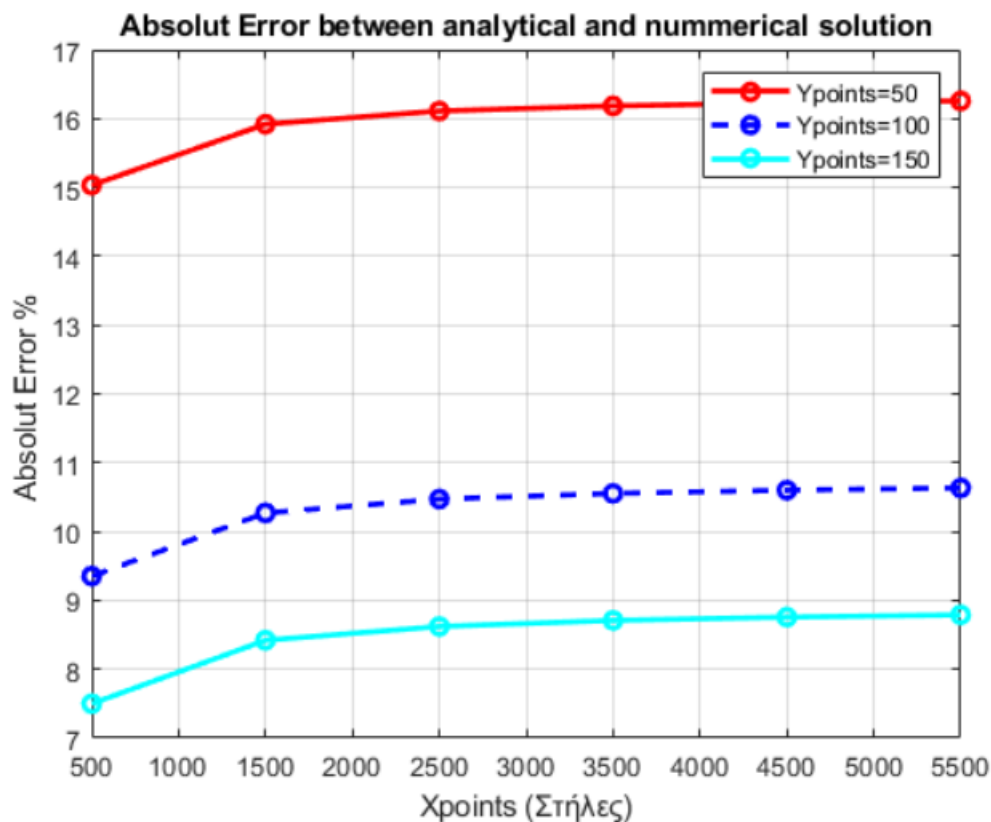
Επειδή όπως γνωρίζουμε η πεπλεγμένη μέθοδος είναι unconditionally σταθερή η επιλογή του πλέγματος έγινε με βάση το σφάλμα στο πάχος του οριακού στρώματος μεταξύ της δική μας αριθμητική λύση και την αναλυτική λύση του Blasius. Σε αυτή την περίπτωση επιλέξαμε να βρούμε τα απόλυτο σφάλμα που υπάρχει σε όλο το μήκος της πλάκας μεταξύ της αναλυτικής λύσης Blasius και της αριθμητικής.

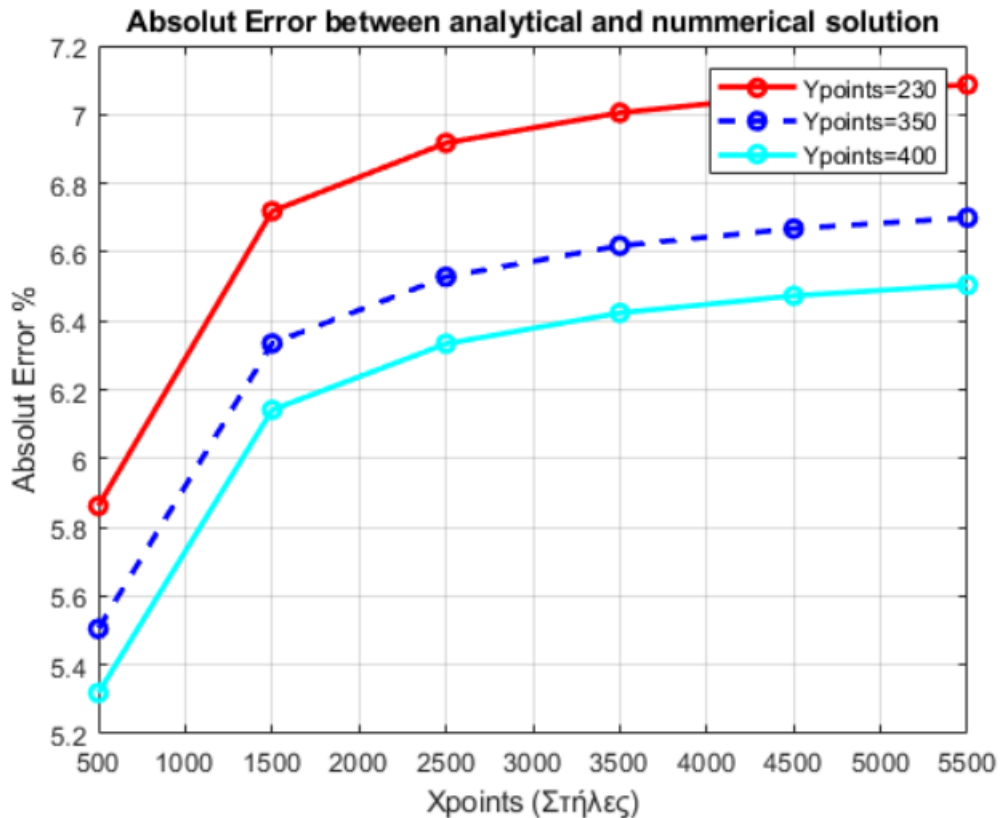
$$\sum_{L=0}^{L=10} |\delta_{num} - \delta_{Blasius}| \quad \text{Απόλυτο Σφάλμα:}$$

και ανοίγουμε το σφάλμα αυτό στο  $\delta_{Blasius}$  για να το πάρουμε σε ποσοστό.

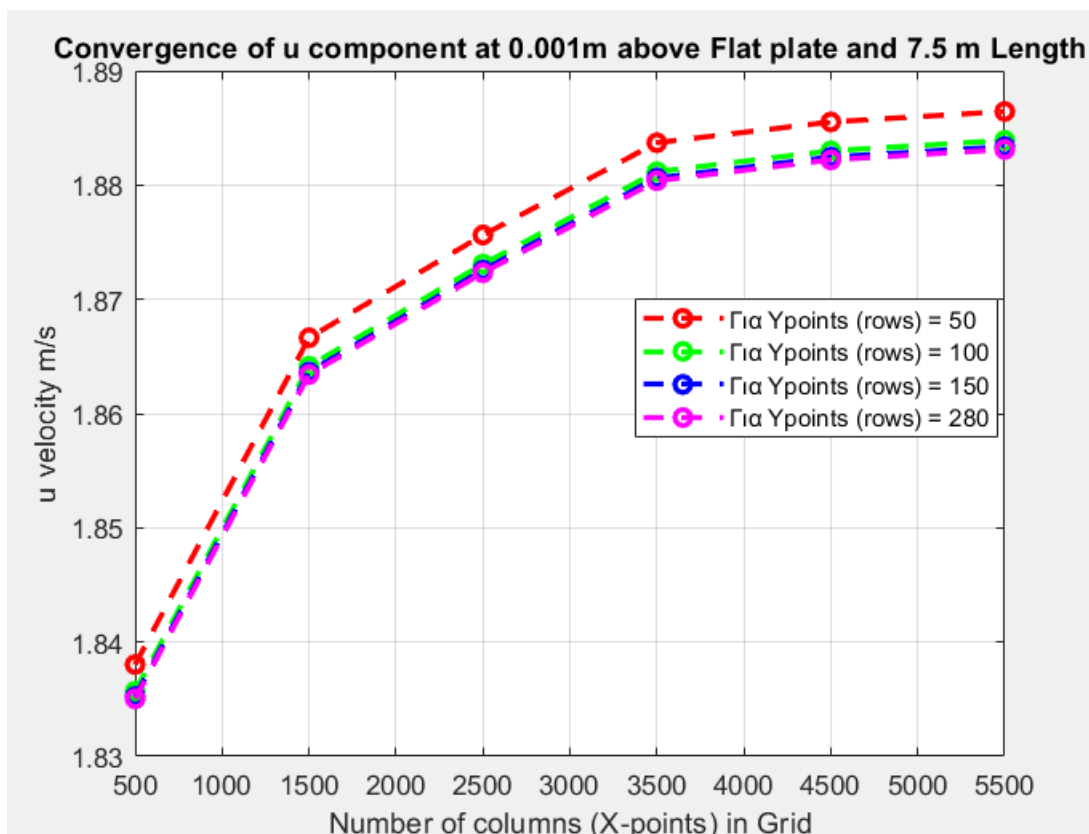
Με αυτόν τον τρόπο θα δούμε πόσο καλά κάνει 'Fit' η καμπύλη πάχους του οριακού στρώματος της αριθμητικής επίλυσης με την καμπύλη της αναλυτικής. Τρέξαμε λοιπόν επαναληπτικές εντολές με παραμέτρους τόσο το πλήθος των x-nodes του πλέγματος όσο και των y-nodes.

Παρακάτω παρατίθενται τα σχετικά διαγράμματα:





Ιδιαίτερη εντύπωση μας προξένησε το γεγονός πως το ελάχιστο σφάλμα εντοπίζεται σε αρκετά χαμηλότερο αριθμό x-nodes σε αντίθεση με την ρητή μέθοδο. Επειδή όμως 500 x-nodes είναι αρκετά λίγα ενδέχεται να χάνουμε αρκετή πληροφορία λόγω του Grid. Για αυτόν τον λόγο είδαμε που (διάσταση πλέγματος) συγκλίνει η ταχύτητα:



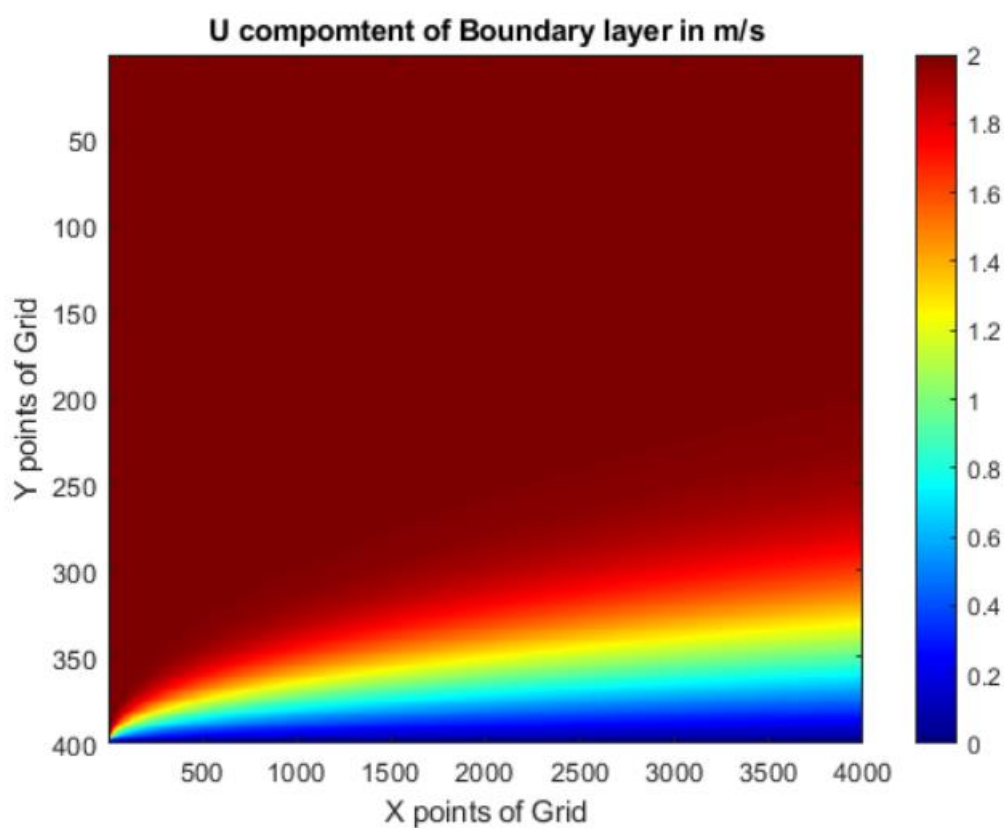
Βλέπουμε λοιπόν πως η ταχύτητα συγκλίνει σε αριθμό x-nodes μετά τα 3000. Με βάση τα παραπάνω λοιπόν επιλέγουμε Grid :

X-Points = 4000

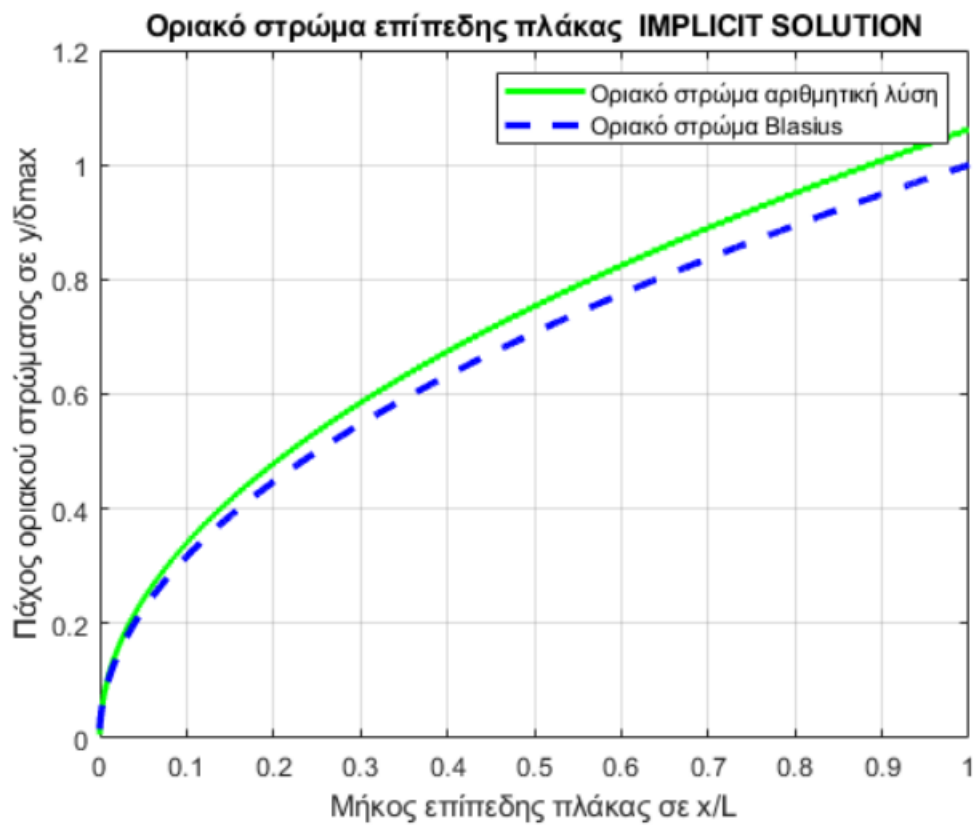
Y-Points = 400

*Αποτελέσματα και Σύγκριση με αναλυτική λύση*

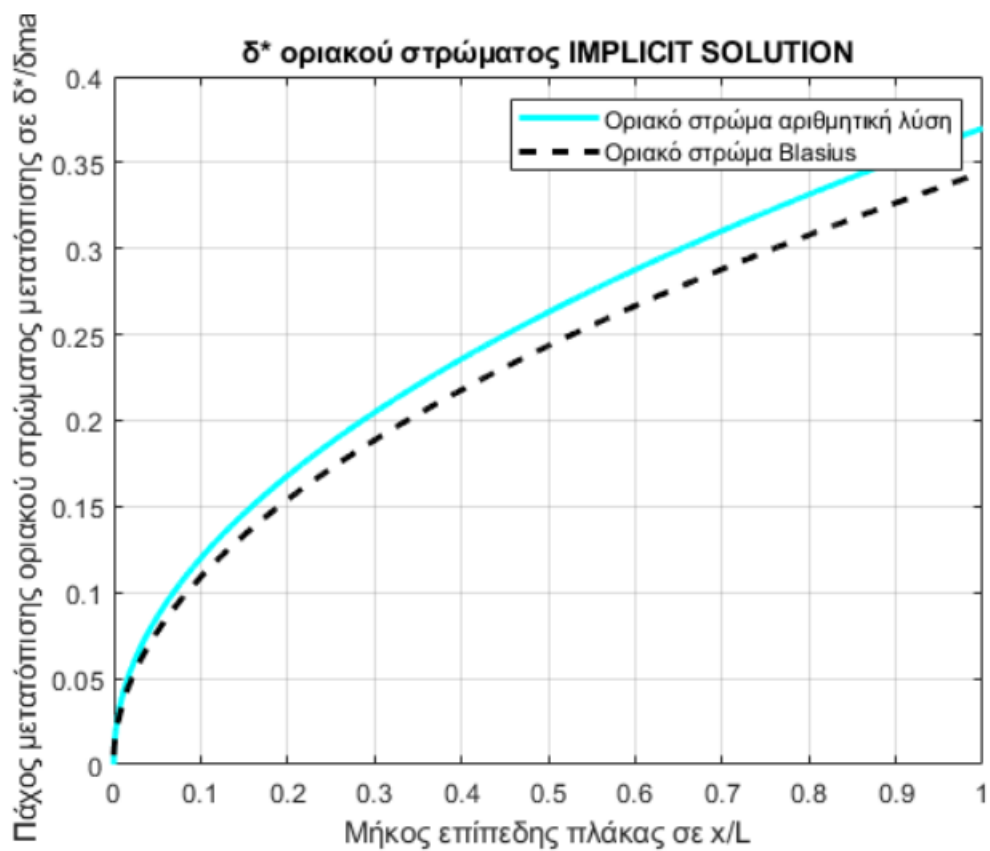
Μία πρώτη οπτικοποίηση του οριακού στρώματος φαίνεται στο κάτω διάγραμμα , με την ταχύτητα  $u$  κατά μήκος της πλάκας.



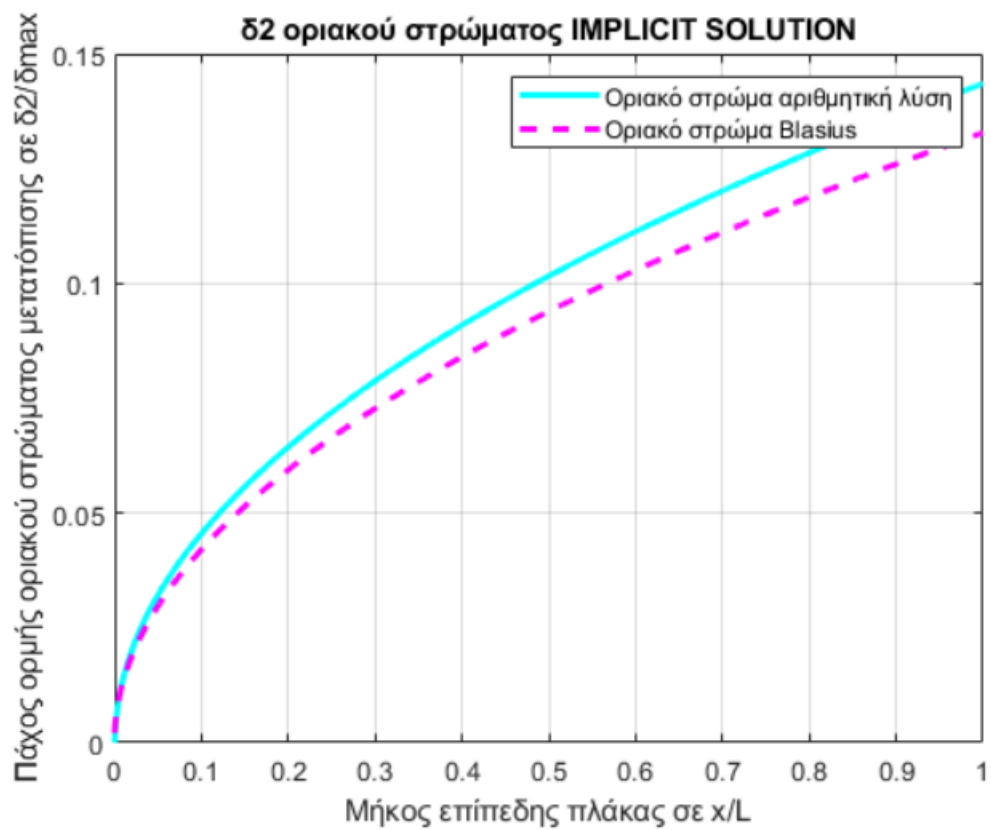
Πάχος οριακού Στρώματος



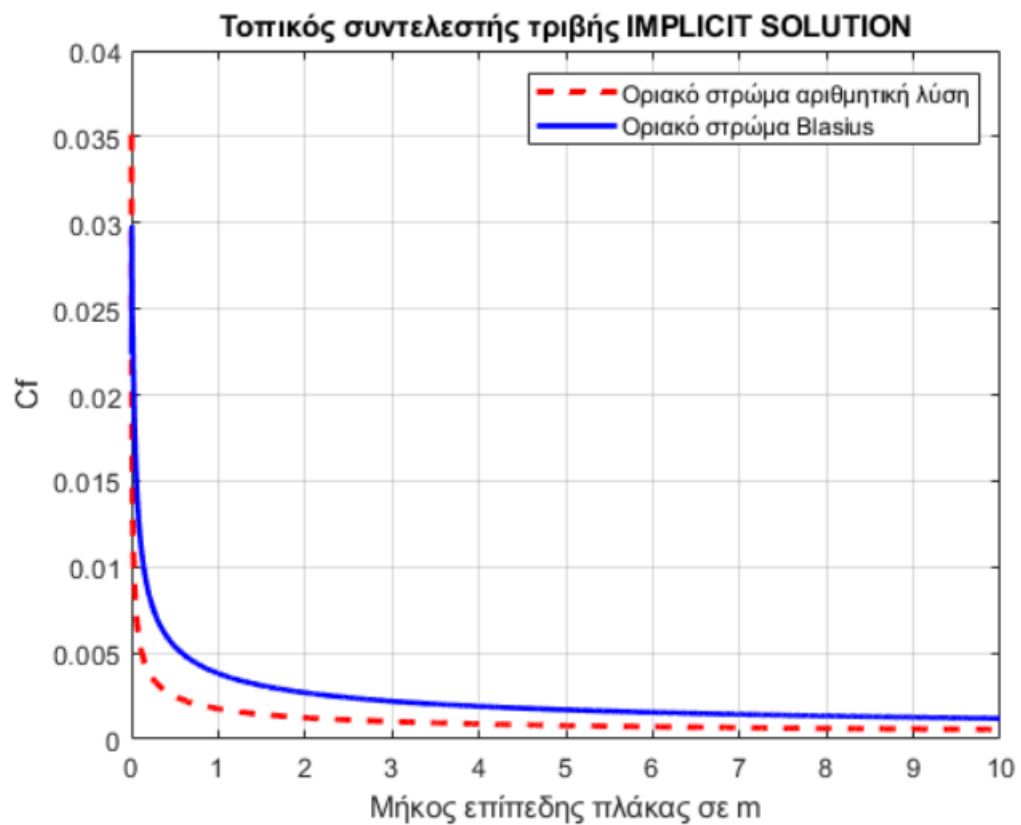
Οριακό Στρώμα Μετατόπισης



Πάχος ορμής οριακού στρώματος  $\delta_2$



Συντελεστής Τριβής



## Συμπεράσματα

Κατά την επίλυση της 1<sup>ης</sup> εργασίας στο πλαίσιο του μαθήματος Υπολογιστική Ρευστομηχανική είδαμε την αριθμητική επίλυση του φαινομένου ανάπτυξης οριακού στρώματος επάνω από μία πλάκα. Η προσέγγιση της επίλυσης έγινε με δύο μεθόδους , μία πεπλεγμένη και μία ρητή. Με βάση τα αποτελέσματα που προέκυψαν φάνηκε μία υπερεκτίμηση του πάχους του οριακού στρώματος από την πεπλεγμένη μέθοδο ενώ υποεκτίμηση από την ρητή μέθοδο. Μεγαλύτερη ακρίβεια φαίνεται να πετυχαίνει η ρητή κάτι που μας εκπλήσσει καθώς συνήθως η πεπλεγμένη χαρίζει μεγαλύτερη ακρίβεια. Επιπλέον αξίζει να αναφερθεί ο αρκετά μεγαλύτερος υπολογιστικός χρόνος που απαιτήθηκε για την πεπλεγμένη μέθοδο καθώς και για την μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος για αυτή όπως και επίσης η μεγαλύτερη πολυπλοκότητα για το στήσιμο του προβλήματος και του κώδικα. Παρ'όλ'αυτά , διακρίναμε το γεγονός πως η πεπλεγμένη είναι unconditionally stable καθώς για οποιοδήποτε πλέγμα και αν δοκιμάσαμε ο κώδικας παρέμενε σταθερός.

## *Βιβλιογραφία*

- Boundary Layer over a flat plate, BSc report, P.P. Puttkammer , Faculty Of Engineering Technology , University of Twente
- Computational Fluid Dynamics: "The basics with applications", John D. Anderson
- MUNSON, B. R., YOUNG, D. F., & OKIISHI, T. H. (2019) Μηχανική Ρευστών. Μετάφραση από τα αγγλικά από τον Υάκινθος, Κ. ,Τερπίτης Δ. Ν. Θεσσαλονίκη: ΤΖΙΟΛΑΣ