

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

2^η Εργασία

Όνομα: Βήχας Παύλος

AEM: 6663

Εξάμηνο: 9^ο

Υπεύθυνος Επίκουρος Καθηγητής

Π. Παναγιώτου

Θεσσαλονίκη, Ιανουάριος 2024

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

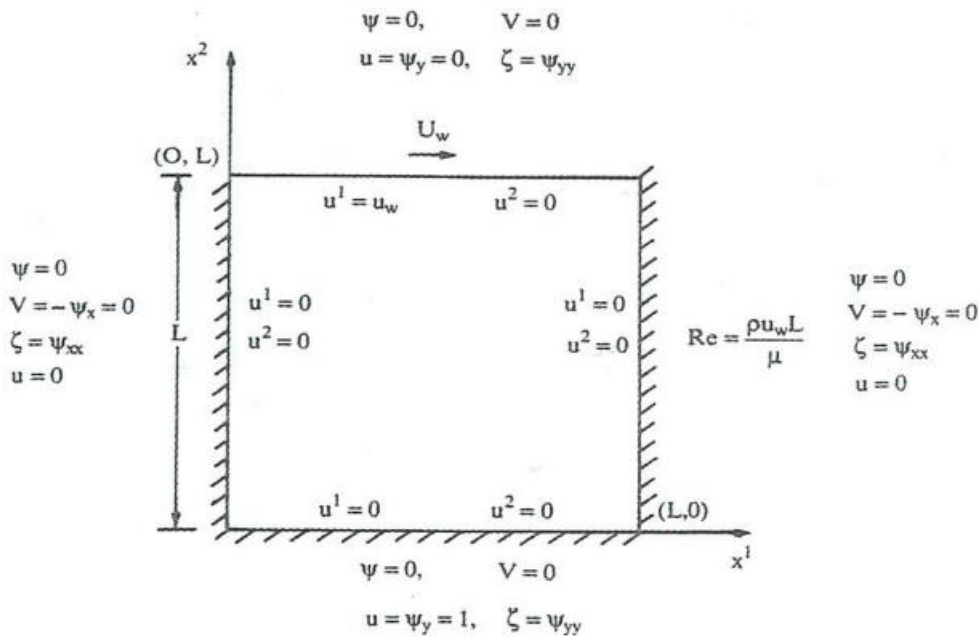
Εκφώνηση και περιγραφή άσκησης.....	3
Ρητή μορφή.....	4
Διακριτοποίηση εξισώσεων.....	4
Οριακές Συνθήκες.....	5
Αποτελέσματα ροικού πεδίου.....	7
Τεχνικές χαλάρωσης.....	11
Μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος.....	12
Επίλυση με αντίθετη κατεύθυνση τοιχώματος.....	13
Σχόλια – Συμπεράσματα	15
Πεπλεγμένη μορφή.....	16
Διακριτοποίηση εξισώσεων.....	16
Οριακές Συνθήκες.....	18
Αποτελέσματα ροικού πεδίου.....	19
Τεχνικές χαλάρωσης.....	22
Μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος.....	23
Επίλυση με αντίθετη κατεύθυνση τοιχώματος.....	24
Σχόλια – Συμπεράσματα	26
Βιβλιογραφία.....	27

Εκφώνηση και περιγραφή άσκησης

Η άσκηση αποτελεί ένα σύνθηδες πρόβλημα για την εισαγωγή στο CFD. Βασικό ζητούμενο είναι η μελέτη του ροικού πεδίου μέσα σε ένα ορθογώνιο κοίλωμα στο οποία η άνω πλευρά κινείται με μία σταθερή ταχύτητα και με την σειρά του, λόγω δυνάμεων ιξώδους, παρασύρει το ρευστό και το αναδεύει. Οι δημιουργούμενες δίνες εξαρτώνται άμεσα από τον αριθμό Reynolds και για αυτή την εργασία θα εξετάσουμε τρεις διαφορετικούς αριθμούς Reynolds:

$$Re = 1, Re = 100 \text{ και } Re = 500.$$

Το παρακάτω σκαρίφημα δίνει μία οπτικοποίηση του προβλήματος



Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το φαινόμενο είναι:

1. Εξίσωση διατήρησης στροβιλότητας

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + Re^{-1} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

Όπου $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ και $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

2. Εξίσωση Ροικής συνάρτησης και στροβιλότητα

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

Ο κώδικας γράφτηκε σε MATLAB για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

PHTH ΜΟΡΦΗ

Διακριτοποίηση εξισώσεων

Για την **εξίσωση διατήρησης της στροβιλότητας** χρησιμοποιήσαμε την Euler explicit μορφή με κεντρικές διαφορές ως εξής:

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = - \left(\left(\frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right) + \left(\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta y} \right) \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right) \right) + O((\Delta t), (\Delta x \Delta y)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$$

Για την **εξίσωση της ροικής συνάρτησης** σε σχέση με την στροβιλότητα χρησιμοποιήσαμε επίσης κεντρικές διαφορές:

$$\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right) = -\zeta_{i,j}^{n+1}$$

Όπως θα πούμε παρακάτω για τους υπολογισμούς στην ρητή μορφή θα λύσουμε για την εξίσωση διατήρησης στροβιλότητας ως προς τον όρο $\zeta_{i,j}^{n+1}$ ενώ και την εξίσωση της ροικής συνάρτησης θα λύσουμε ως προς τον όρο $\Psi_{i,j}^{n+1}$.

Οριακές Συνθήκες

Βασική οριακή συνθήκη αποτελεί η συνθήκη μη ολίσθησης. Συγκεκριμένα θεωρούμε πως στα τοιχώματα κάτω, αριστερά και δεξιά έχουμε μηδενική ταχύτητα ρευστού. Παρακάτω θα δείξουμε την εύρεση οριακής συνθήκης για το αριστερό τοίχωμα που με αντίστοιχο τρόπο θα βγάλουμε και τις οριακές συνθήκες για το δεξί και κάτω τοίχωμα.

Αριστερό τοίχωμα

Ροική Συνάρτηση Ψ :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \Leftrightarrow \Psi = \text{constant} = 0$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \Leftrightarrow \Psi = \text{constant} = 0$$

Στροβιλότητα ζ :

Από την εξίσωση ροικής συνάρτησης έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\zeta$$

Αλλά για το αριστερό τοίχωμα

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\zeta$$

Από το ανάπτυγμα Taylor:

$$\Psi_{i,2} = \Psi_{i,1} + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{i,1} \cdot \Delta x + \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_{i,1} \cdot \frac{\Delta x^2}{2}$$

Και

$$-\zeta_{i,1} = 2 \frac{\Psi_{i,1} - \Psi_{i,2}}{\Delta x^2} + \frac{2v_{i,1}}{\Delta x}$$

Αλλά λόγω no slip condition

$$\frac{2v_{i,1}}{\Delta x} = 0$$

Τελικά για την στροβιλότητα στο **αριστερό** τοίχωμα:

$$\zeta_{i,1} = 2 \frac{\Psi_{i,1} - \Psi_{i,2}}{\Delta x^2}$$

Με την αντίστοιχη λογική οι οριακές συνθήκες για τα δεξί και κάτω τοίχωμα είναι:

Δεξί τοίχωμα

$$\zeta_{i,\text{end}} = 2 \frac{\Psi_{i,\text{end}} - \Psi_{i,\text{end}-1}}{\Delta x^2}$$

Κάτω τοίχωμα

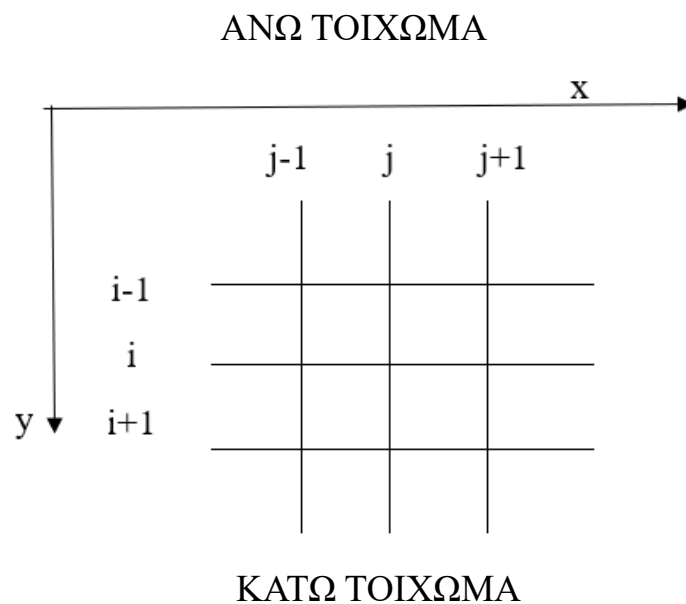
$$\zeta_{\text{end},j} = 2 \frac{\Psi_{\text{end},j} - \Psi_{\text{end}-1,j}}{\Delta y^2}$$

Για το **άνω τοίχωμα** , όπου η πλάκα κινείται η προσέγγιση είναι ίδια , **αλλά το u component της ταχύτητας εκεί είναι ίσο με την ταχύτητα U της κινούμενης πλάκας.**

Δεξί τοίχωμα

$$\zeta_{1,j} = 2 \frac{\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j}}{\Delta y^2} - \frac{2U}{\Delta y}$$

Σε αυτό το σημείο υπογραμμίζουμε το σχήμα του Grid μας και το πως μετράμε τα i και j:



Αποτελέσματα Ροικού πεδίου

Για την εκτέλεση των υπολογισμών ακολουθήσαμε την εξής διαδικασία:

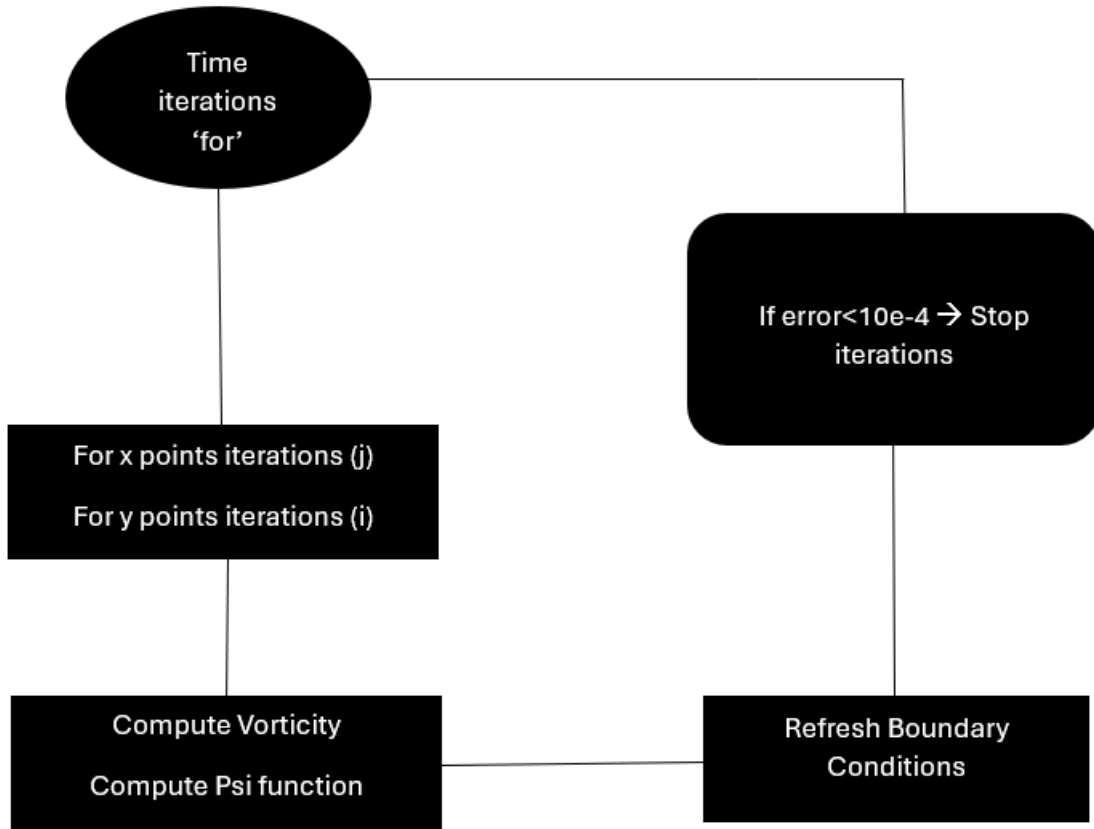
Επίλυση στις εξίσωσης στροβιλότητας ως προς τον όρο $\zeta_{i,j}^{n+1}$

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n + \Delta t \cdot \left[- \left(\left(\frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n}{2\Delta y} \right) \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right) + \left(\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right) \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2\Delta y} \right) \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right) \right) \right] + O((\Delta t), (\Delta x \Delta y)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$$

Κατόπιν επιλύουμε την εξίσωση ροικής συνάρτησης κατά τον όρο $\Psi_{i,j}^{n+1}$.

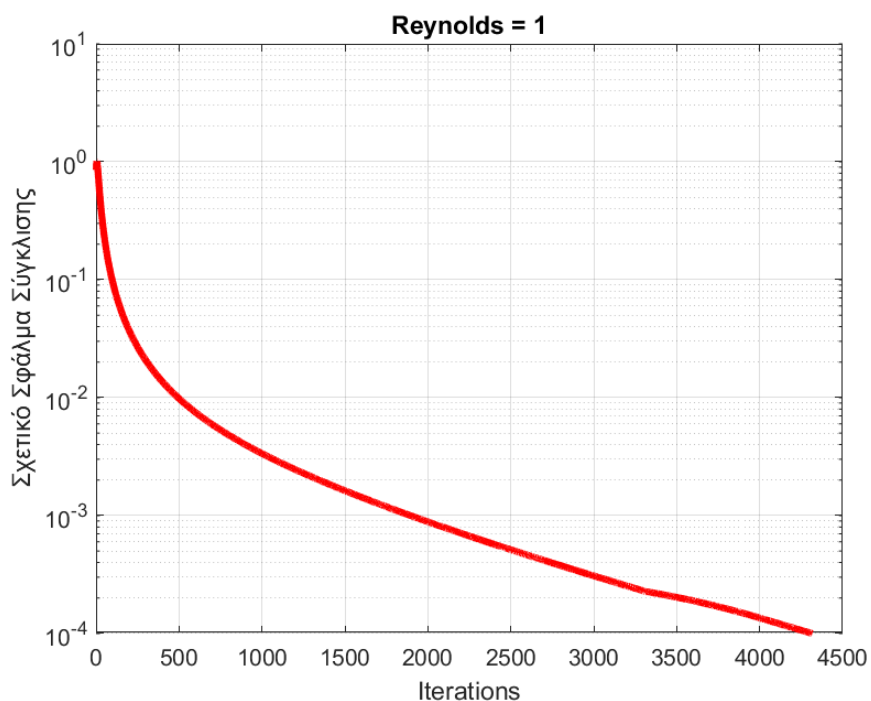
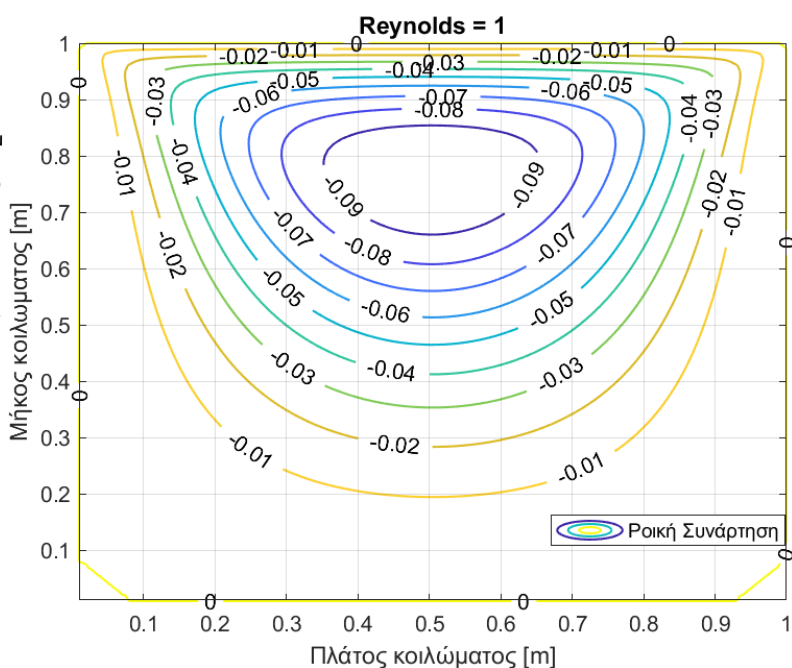
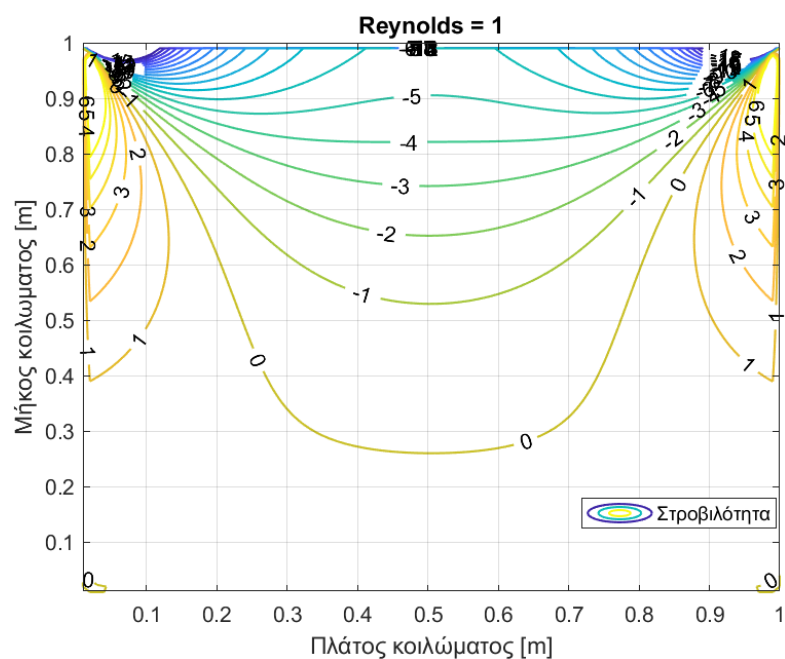
$$\Psi_{i,j}^{n+1} = 0.25(\zeta_{i,j}^{n+1} \cdot \Delta x + \Psi_{i,j+1}^n + \Psi_{i,j-1}^n + \Psi_{i-1,j}^n + \Psi_{i+1,j}^n)$$

Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ροής κατά τους υπολογισμούς μας:



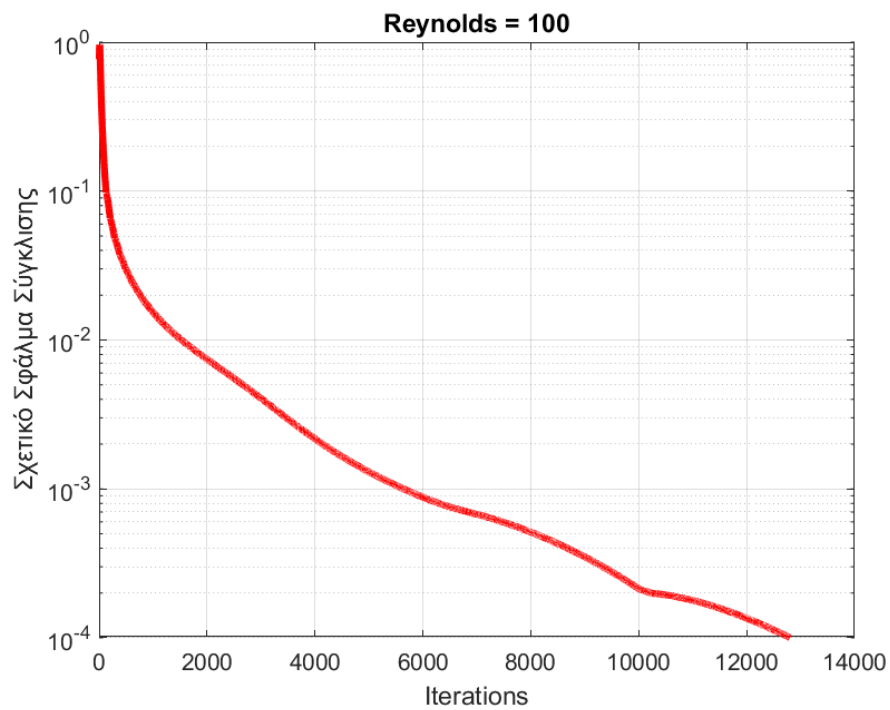
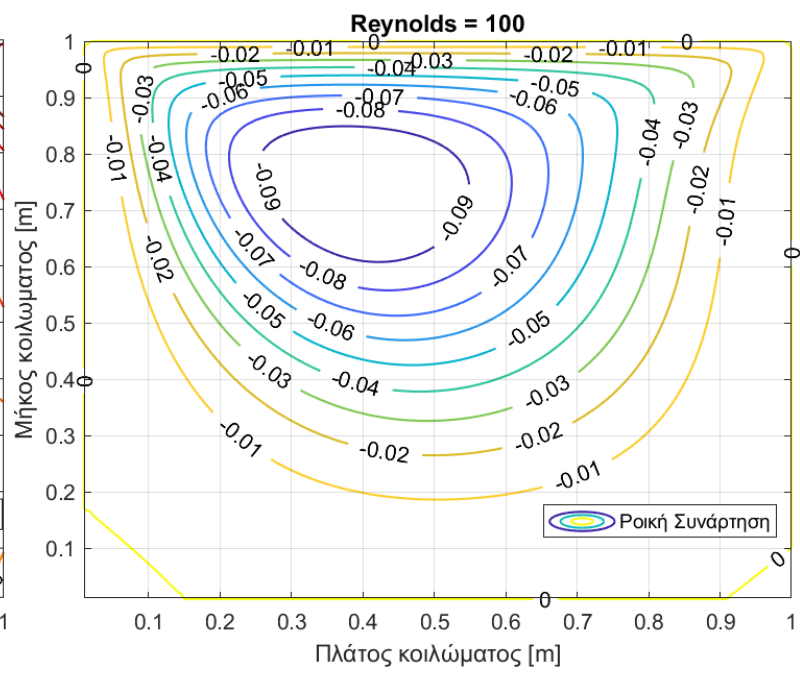
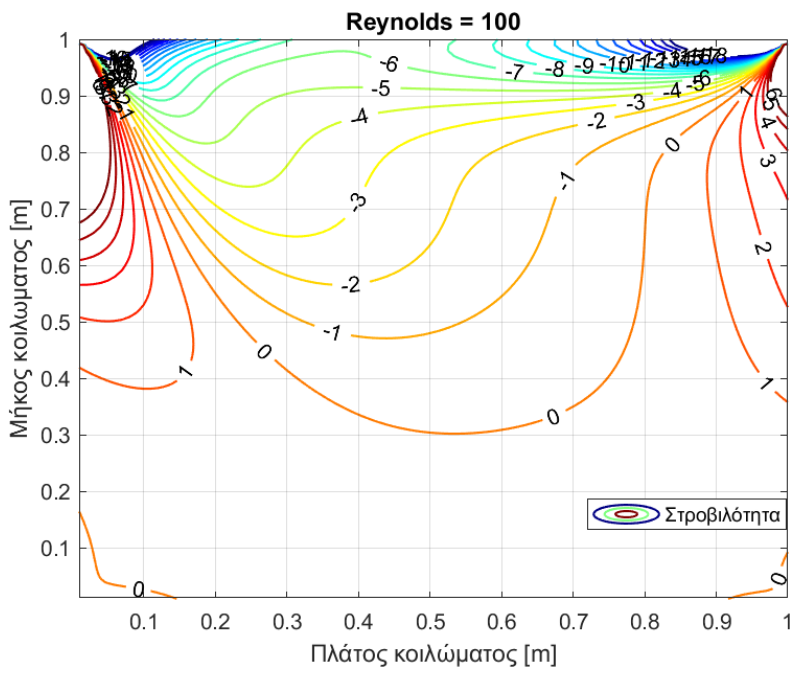
Παρακάτω Παρατίθενται τα αποτελέσματα του ροικού πεδίου για τους τρεις διαφορετικούς Reynolds για $U = 1\text{m/s}$ και μήκος-πλάτος κοιλώματος $L_x = L_y = 1\text{m}$:

Reynolds = 1

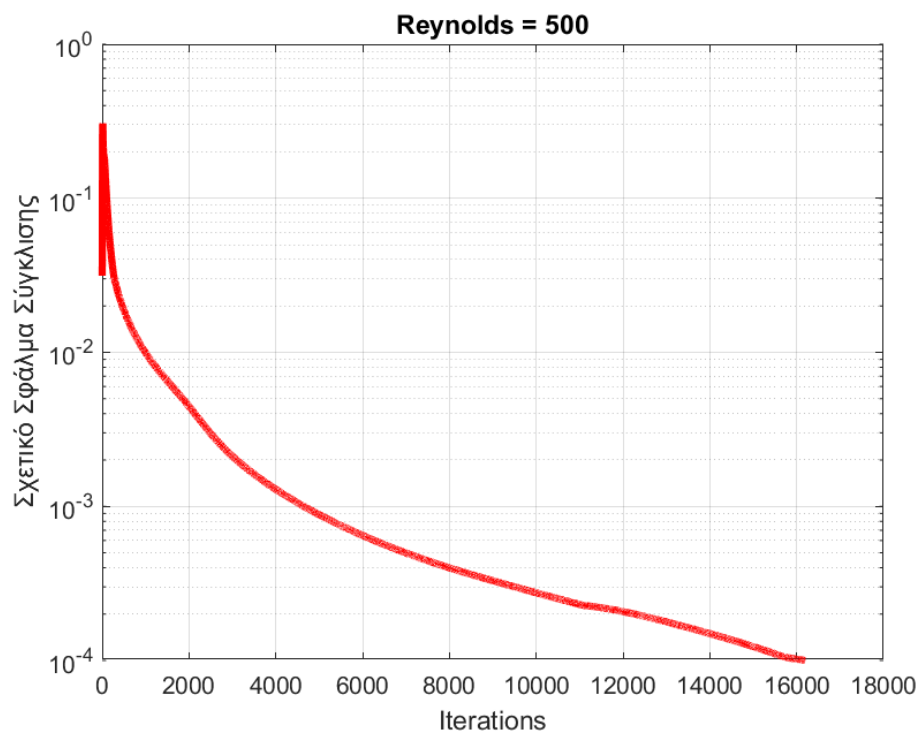
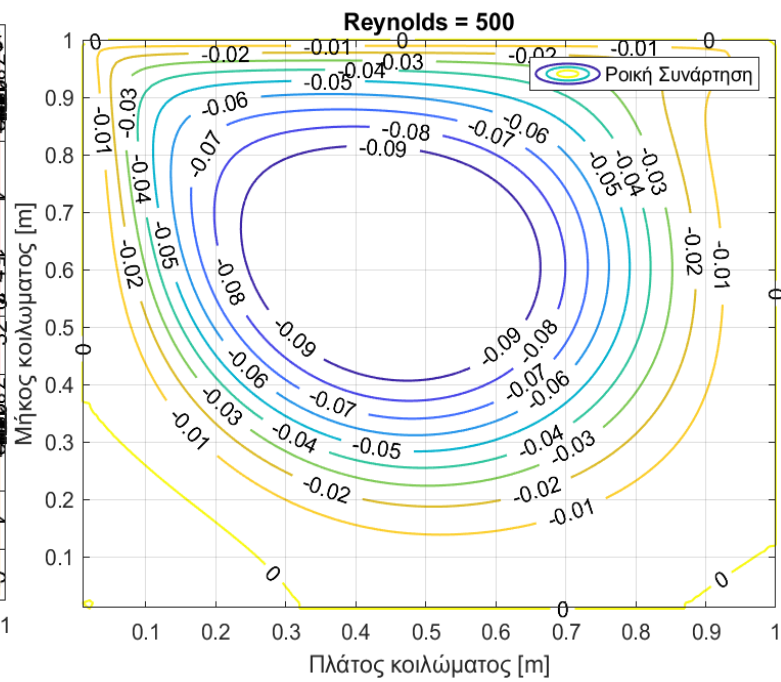
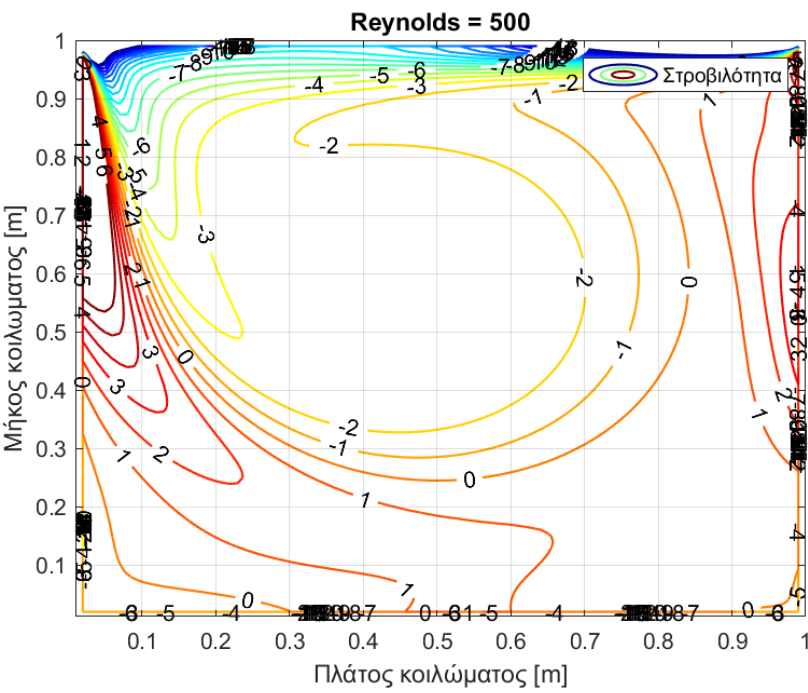


Λεπτομέρειες για τον κώδικα όπως χρονικά step , παράγοντες χαλάρωσης και διαστάσεις πλέγματος αναφέρονται παρακάτω.

Reynolds = 100



Reynolds = 500



Τεχνικές Χαλάρωσης

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \omega(\bar{\zeta}^{n+1} - \zeta^n)$$

$$\psi^{n+1} = \psi^n + \omega(\bar{\psi}^{n+1} - \psi^n)$$

Re = 1: Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιήσαμε τεχνική υπερχαλάρωσης καθώς ο κώδικας συνέκλινε σε σχετικό σφάλμα μεγαλύτερο από 10-e4 για αρκετά μικρό χρονικό βήμα. Με αυτό τον τρόπο επιταχύνουμε τον κώδικα.

Re = 100: Εδώ καταφέραμε με ένα λογικό χρονικό βήμα να φτάσουμε στην σύγκλιση μέχρι το σχετικό σφάλμα να λάβει την τιμή 10-e4. Επειδή όμως ο κώδικας ήταν ασταθής εφαρμόσαμε τεχνική υποχαλάρωσης και έτσι εξομαλύνουμε την αριθμητική επίλυση.

Re = 500: Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήσαμε ίδιο χρονικό βήμα με αυτό της περίπτωσης όπου Re = 100, αλλά εδώ ο κώδικας ήταν αισθητά πιο αργός. Εφαρμόσαμε λοιπόν τεχνική υπερχαλάρωσης, μιας και ο κώδικας ήταν αρκετά ευσταθής στις τιμές του παράγοντα υπερχαλάρωσης που βάλαμε.

Για πλέγμα 100x100

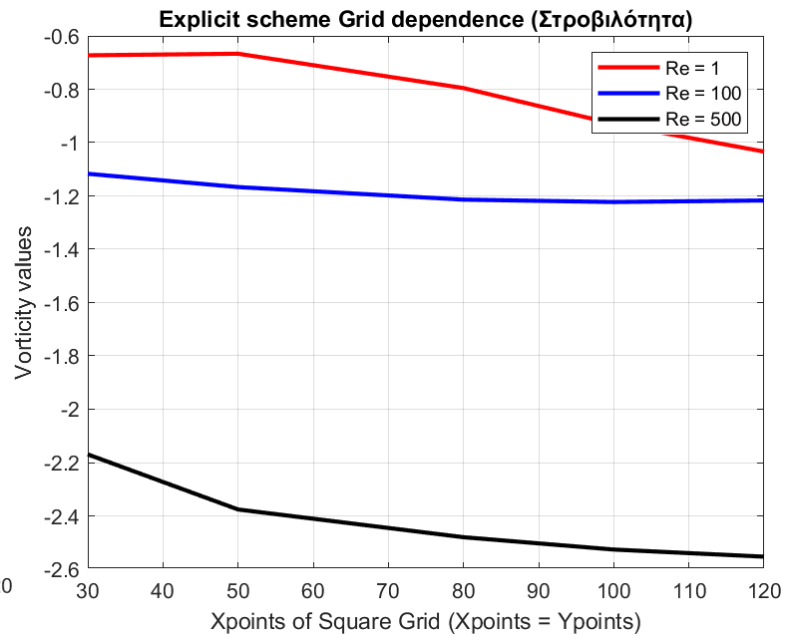
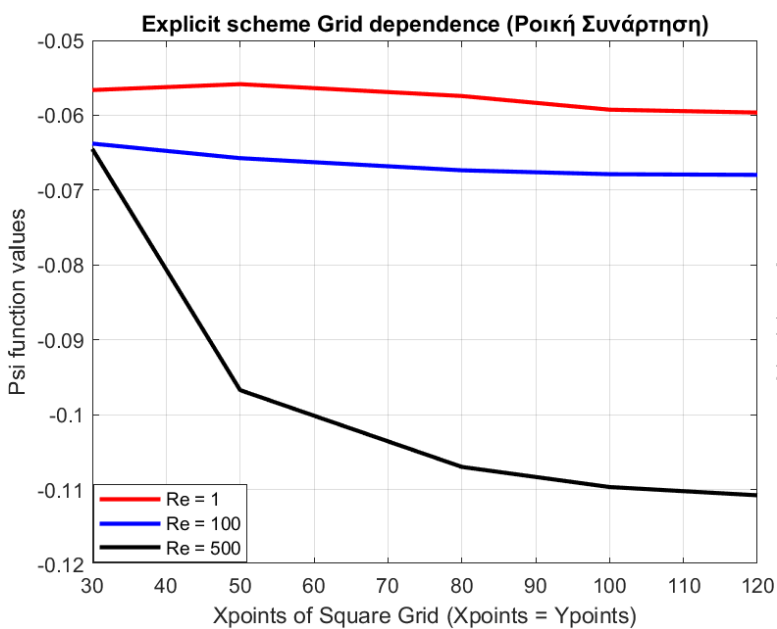
REYNOLDS	1	100	500
Time step	0.00001	0.001	0.001
Relax. Factor	1.2	0.9	1.5
Time [seconds]	1.93	6.08	7.18

Ιδιαίτερη εντύπωση μας έκανε πως ενώ στις περιπτώσεις όπου Re = 100 & Re = 500 ο κώδικας ήταν ευσταθής για τιμές τόσο υπερχαλάρωσης όσο και υποχαλάρωσης (κοντά στο 1) η περίπτωση όπου Re = 1 ο κώδικας ήταν ασταθής για τεχνική υποχαλάρωσης!?

Συμπερασματικά, λοιπόν, όπως φάνηκε και από την επίλυση της άσκησης η επιλογή των τιμών παράγοντα χαλάρωσης ειδικά στις περιπτώσεις όπου Re = 500 & Re = 100 ήταν ξεκάθαρα ένα trade off μεταξύ εξομάλυνσης της αριθμητικής επίλυσης (για $\omega < 1$) και επιτάχυνση της αριθμητικής επίλυσης (για $\omega > 1$). Εμείς παρακολουθώντας το σχετικό σφάλμα και βλέποντας την smooth συμπεριφορά του, προτιμήσαμε να αυξήσουμε την ταχύτητα επίλυσης στην περίπτωση όπου Re = 500 και αντίστοιχα για να εξομαλύνουμε την επίλυση στην Re = 100 επιλέξαμε υποχαλάρωση.

Μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος

Για την μελέτη ανεξαρτησία πλέγματος επιλέξαμε 3 διαφορετικά πλέγματα και ελέγξαμε τις τιμές της ροικής συνάρτησης όσο και της στροβιλότητας σε ένα σημείο, και συγκεκριμένα στο κέντρο του πλέγματος ($Y_{points}/2$, $X_{points}/2$). Με αυτό τον τρόπο είδαμε σε ποιο πλέγμα οι τιμές αυτές συγκλίνουν. Αξίζει να σημειωθεί εδώ πως για όλα τα αποτελέσματα το πλέγμα μας είναι τετράγωνο, δηλαδή στοιχεία στον x είναι ίσα με τα στοιχεία στον y.

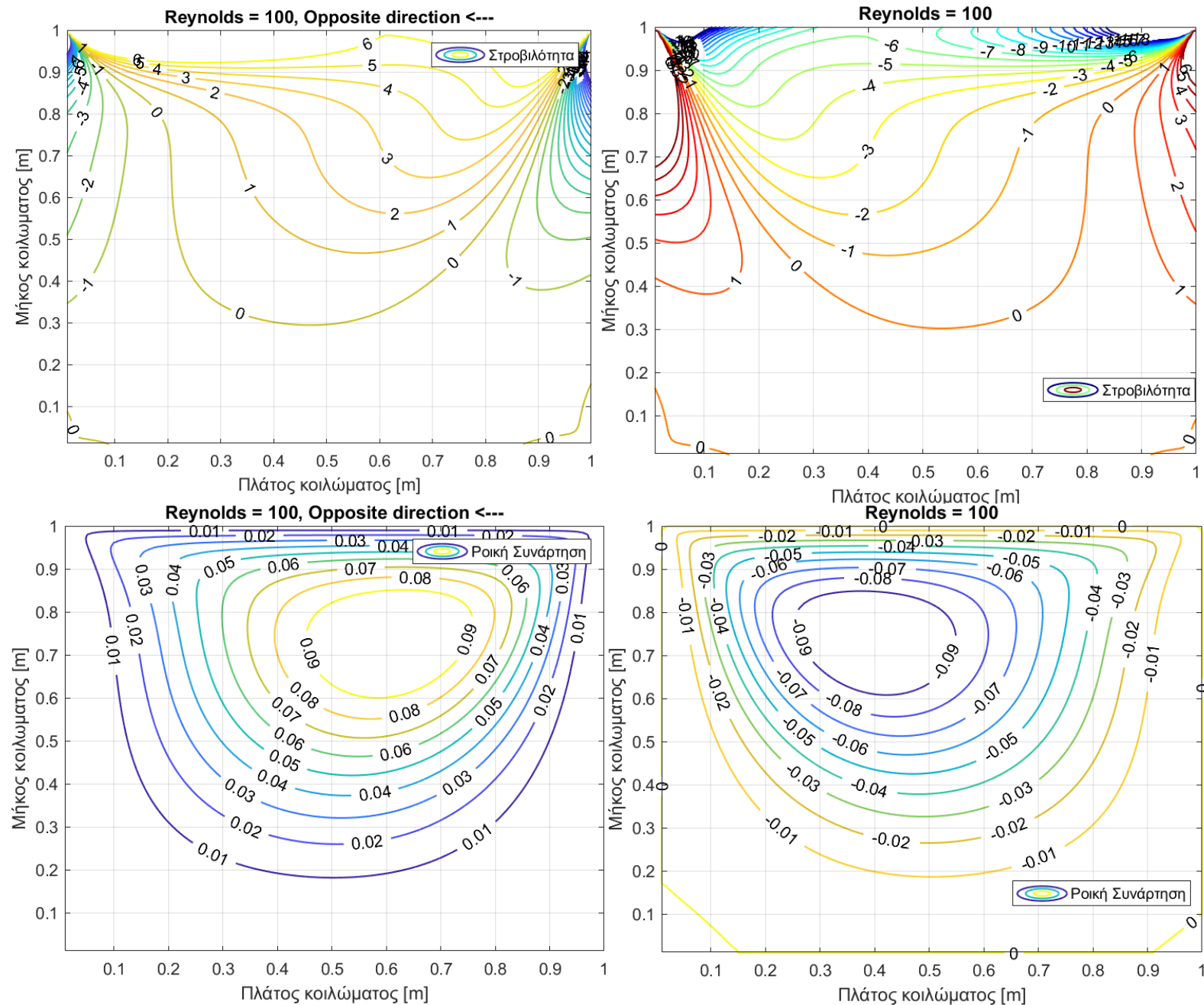


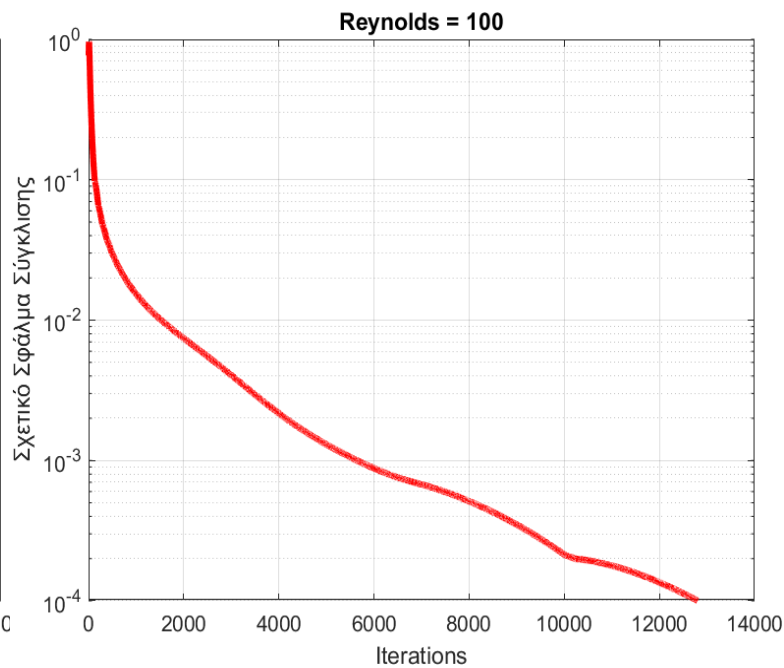
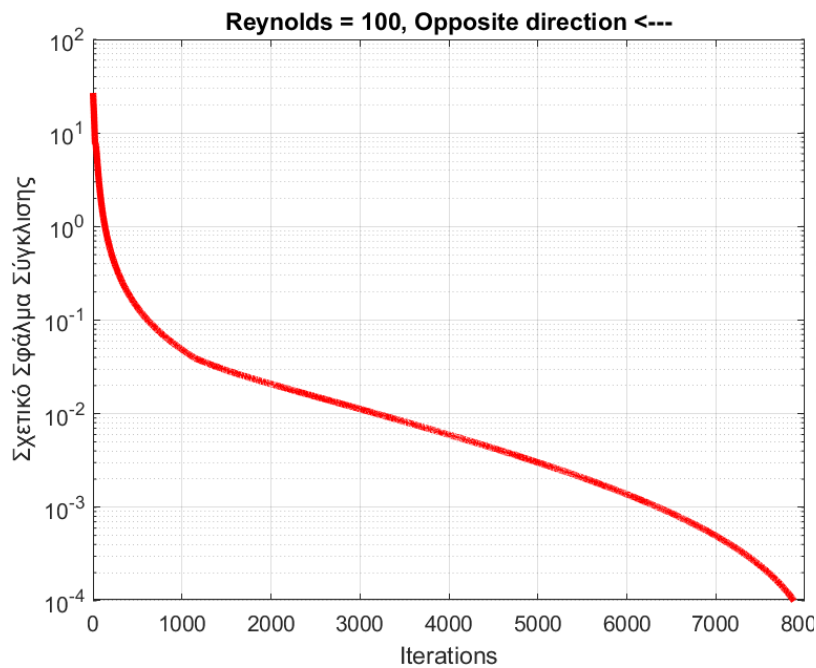
Η επιλογή του πλέγματος έγινε επιλέγοντας αυτό που μας δίνει τιμές κοντά στην σύγκλιση και ταυτόχρονο απαιτεί την ελάχιστη δυνατή υπολογιστική ισχύς. Για αυτόν τον λόγο επιλέγουμε ένα πλέγμα 100x100. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε πως η περίπτωση με τον υψηλότερο $Re = 500$ είναι αυτή που απαιτεί πυκνότερο πλέγμα για να φθάσει κοντά στις τιμές σύγκλισης καθώς σε αυτή την περίπτωση η ροή γίνεται πολύπλοκότερη.

Επίλυση με αντίθετη κατεύθυνση τοιχώματος

Όπως αναφέρεται και στην εκφώνηση, επιλέξαμε έναν Reynolds και το πλέγμα 100x100 για την σύγκριση της λύσης με αντίθετη φορά του άνω τοιχώματος και της προηγούμενης λύσης που αναλύθηκε. Η τιμή του $Re = 100$. Η βασική διαφορά σε αυτή την περίπτωση βρίσκεται στην οριακή συνθήκη της στροβιλότητας στο άνω τοίχωμα (το κινούμενο) :

$$\zeta_{1,j} = 2 \frac{\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j}}{\Delta y^2} + \frac{2U}{\Delta y}$$





Η σύγκριση έγινε για πλέγμα 100×100 και χρονικό βήμα $dt = 0.001$ ενώ ο παράγοντας χαλάρωσης είναι ο ίδιος και για τις δύο περιπτώσεις με $\omega = 0.9$.

Παρατηρήσεις

1. Τα διαγράμματα είναι αντισυμμετρικά από την οπτική τους, η ανάπτυξη των δευτερογενών δινών και της κεντρικής δίνης δινών γίνεται αντισυμμετρικά δηλαδή.
2. Η τιμές της ροικής συνάρτησης και της στροβιλότητας είναι θετικές στην περίπτωση της αντίθετης κατεύθυνσης και αρνητικές στην περίπτωση της ομόρροπης κατεύθυνσής.
3. Αρκετά πιο γρήγορος ο κώδικας στην περίπτωση της αντίθετης κατεύθυνσης (2.95 seconds) σε σύγκριση με την πρώτη περίπτωση (6.08).
4. Το σφάλμα στην 2^η περίπτωση ξεκινάει από ~ 2 τάξης μεγέθους μεγαλύτερη τιμή.

Σχόλια – Συμπεράσματα

Για την ρητή μορφή μπορούμε χωρίς αμφιβολία να πούμε πως:

- Αυξάνοντας τον αδιάστατο Reynolds παρατηρούμε την ανάπτυξη δευτερογενών δινών καθώς πολυπλοκότερη ροή με ανακυκλοφορίες.
- Για $Re = 1$ η ροή είναι στρωτή και οι τιμές της στροβιλότητας φαίνονται συμμετρικές ως προς το μεσαία γραμμή y του πλέγματος ενώ η ροική συνάρτηση είναι μοτίβου ‘Single-cell’.
- Για $Re = 100$ παρατηρούμε μία μεταβατική φάση από την στρωτή στην τυρβώδη ροή με πολυπλοκότερα μοτίβα ροής και ανάπτυξη δευτερογενών δινών.
- Για $Re = 500$ η ροή πια αρχίζει να είναι εμφανώς πολύ κοντά στην τυρβώδη ροή. Κατά την εξέλιξη της ροής έως την μόνιμη κατάσταση δημιουργούνται πολλαπλές δίνες, έντονες ανακυκλοφορίες και γενικότερα μία πιο ‘χαοτική’ συμπεριφορά της ροής.
- Επιπλέον, είναι εμφανές το γεγονός πως αυξανόμενου του αριθμού Reynolds τα οριακά στρώματα στις ακίνητες πλευρές λεπταίνουν.
- Τέλος αυξανόμενου του Reynolds ο κώδικας γίνεται πιο ευάλωτος σε αστάθειες. **ΕΞΑΙΡΕΣΗ*** αποτελεί η περίπτωση για $Re = 1$ όπου ίσως για αλγοριθμικούς λόγους ο κώδικας φαίνεται να είναι αρκετά ευάλωτος και να απαιτεί μικρό χρονικό βήμα και overrelaxation !?

Οι λύσεις που απεικονίζονται δείχνουν ίδιες με αυτές τόσο της εκφώνησης όσο και της διεθνούς βιβλιογραφίας.

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ

Διακριτοποίηση εξισώσεων

Για την πεπλεγμένη έκδοση του προβλήματος επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο ADI (alternate direction implicit method) για να αποφύγουμε την σύνθετη επίλυση που θα απαιτούσε την λύση ενός πενταδιαγώνιου μητρώου. Με αυτή την μέθοδο ‘κόβουμε’ τον χρόνο στο μισό και για το πρώτο μισό θα λύνουμε στην κατεύθυνση y αξιοποιώντας τις δύο αντίστοιχες οριακές συνθήκες ($n + 1/2 \rightarrow Y$ Marching) ενώ στο άλλο μισό του χρόνου με ακριβώς ίδια φιλοσοφία επιλύουμε στην x κατεύθυνση ($n+1 \rightarrow X$ Marching). Η στροβιλότητα εκφράστηκε κατά την διακριτοποίηση σε backwards Euler implicit μορφή ενώ για την ροική συνάρτηση που υπολογίζεται κατόπιν της στροβιλότητας επιλέξαμε την επίλυση με explicit μορφή, όπως ακριβώς αναφέρεται σαν επιλογή στη εκφώνηση.

Διακριτοποίηση Εξίσωσης Διατήρησης Στροβιλότητας

Για το πρώτο μισό χρόνο:

$$\frac{z_{i,j}^{n+1/2} - z_{i,j}^n}{\frac{\Delta t}{2}} = - \left(\left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \left(\frac{z_{i,j+1}^n - z_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \right) + \left(\left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{z_{i+1,j}^{n+1/2} - z_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \right) + \frac{1}{Re} \left(\left(\frac{z_{i+1,j}^{n+1/2} - z_{i,j}^{n+1/2} + z_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{z_{i,j+1}^n - z_{i,j}^n + z_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \right)$$

Θέτουμε:

$$A = - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y \Delta x} \right) \quad \Gamma = \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta x^2}$$
$$B = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j}^n}{\Delta y \Delta x} \right) \quad \Delta = \frac{\Delta t}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta y^2}$$

Και επιλύουμε ως προς τους όρους $\zeta_{i+1,j}^{n+1/2}$ $\zeta_{i,j}^{n+1/2}$ & $\zeta_{i-1,j}^{n+1/2}$

$$-\Gamma \zeta_{i-1,j}^{n+1/2} + (1+B+2\Gamma) \zeta_{i,j}^{n+1/2} + (-B-\Gamma) \zeta_{i+1,j}^{n+1/2} = \Delta \zeta_{i,j-1}^n + (1-A-2\Delta) \zeta_{i,j}^n + (A+\Delta) \zeta_{i,j+1}^n$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης το ορίζουμε ως $K_{i,j}$, ενώ για $i = 2$ ο όρος είναι οριακή συνθήκη αριστερού τοιχώματος και για $i = \text{end} - 1$ ο όρος είναι οριακή συνθήκη δεξιού τοιχώματος.

Με αυτόν τον τρόπο επιλύουμε τον παρακάτω τριδιαγώνιο μητρώο:

$$\begin{pmatrix} (1+B+2\Gamma) & (-B-\Gamma) & \dots & 0 \\ -\Gamma & (1+B+2\Gamma) & (-B-\Gamma) & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\Gamma & (1+B+2\Gamma) & (-B-\Gamma) \\ & & & -\Gamma & (1+B+2\Gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{2,j}^n \\ \zeta_{3,j}^n \\ \vdots \\ \zeta_{\text{end}-1,j}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1,j} \\ K_{2,j} \\ \vdots \\ K_{\text{end}-1,j} \end{pmatrix}$$

Το μητρώο επιλύεται με Thomas algorithm από scrip που βρέθηκε έτοιμο στο διαδίκτυο και κατόπιν ανανεώνουμε τις οριακές συνθήκες με τις νέες τιμές.

Για το δεύτερο μισό χρόνο:

Η φιλοσοφία είναι ίδια, αλλά αυτή τη φορά κάνουμε επίλυση στην x κατεύθυνση αξιοποιώντας τις δύο ακόμη οριακές συνθήκες που δεν χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως.

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = - \left(\left(\frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i,j}^n}{\Delta y} \right) \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) \right) + \left(\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \right) + \frac{1}{Re} \left(\left(\frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j}^{n+1/2} + \zeta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \right)$$

Κρατάμε ακριβώς ίδιους τους συντελεστές A, B, Γ και Δ και επιλύουμε ως προς τους όρους με εκθέτη το $n+1$:

$$-\Delta \zeta_{i,j-1}^{n+1} + (1+A+2\Delta) \zeta_{i,j}^{n+1} + (-A-\Delta) \zeta_{i,j+1}^{n+1} = \Gamma \zeta_{i-1,j}^{n+1/2} + (1-B-2\Gamma) \zeta_{i,j}^{n+1/2} + (B+\Gamma) \zeta_{i+1,j}^{n+1/2}$$

Και με τον τρόπο που προαναφέρθηκε επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για να βρούμε τις τιμές της στροβιλότητας για το επόμενο ολόκληρο χρονικό βήμα $n+1$ και κατόπιν ξανά ανανεώνουμε τις τιμές των οριακών συνθηκών.

Διακριτοποίηση Εξίσωσης Ροικής συνάρτησης

Ακολουθήσαμε ,όπως προαναφέραμε , την ρητή μορφή της διακριτοποιημένης εξίσωσης:

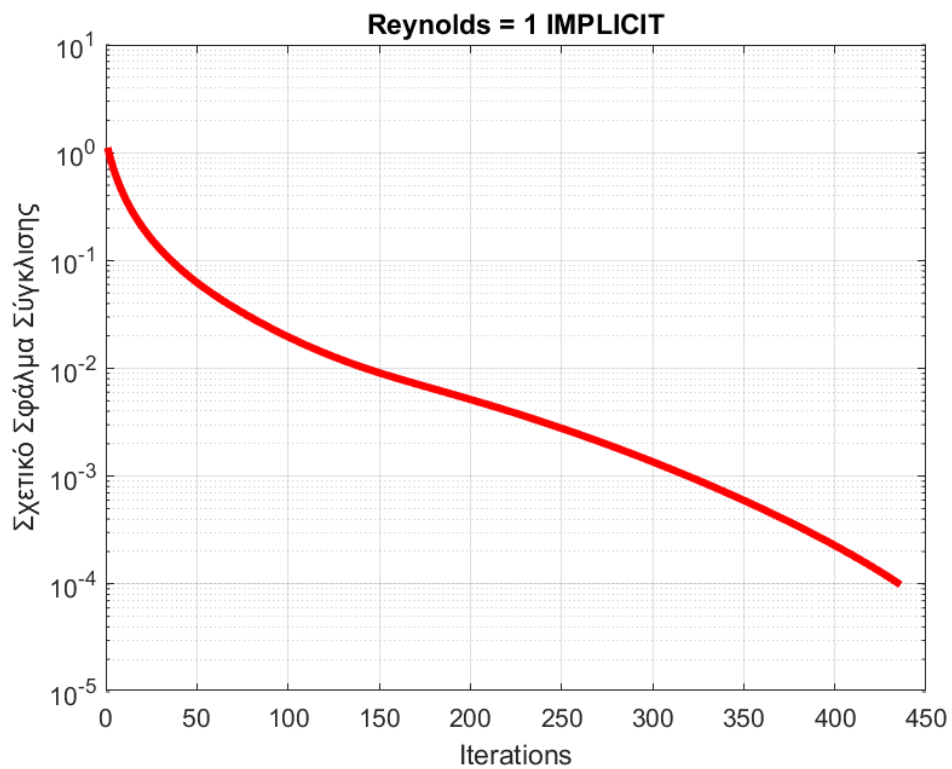
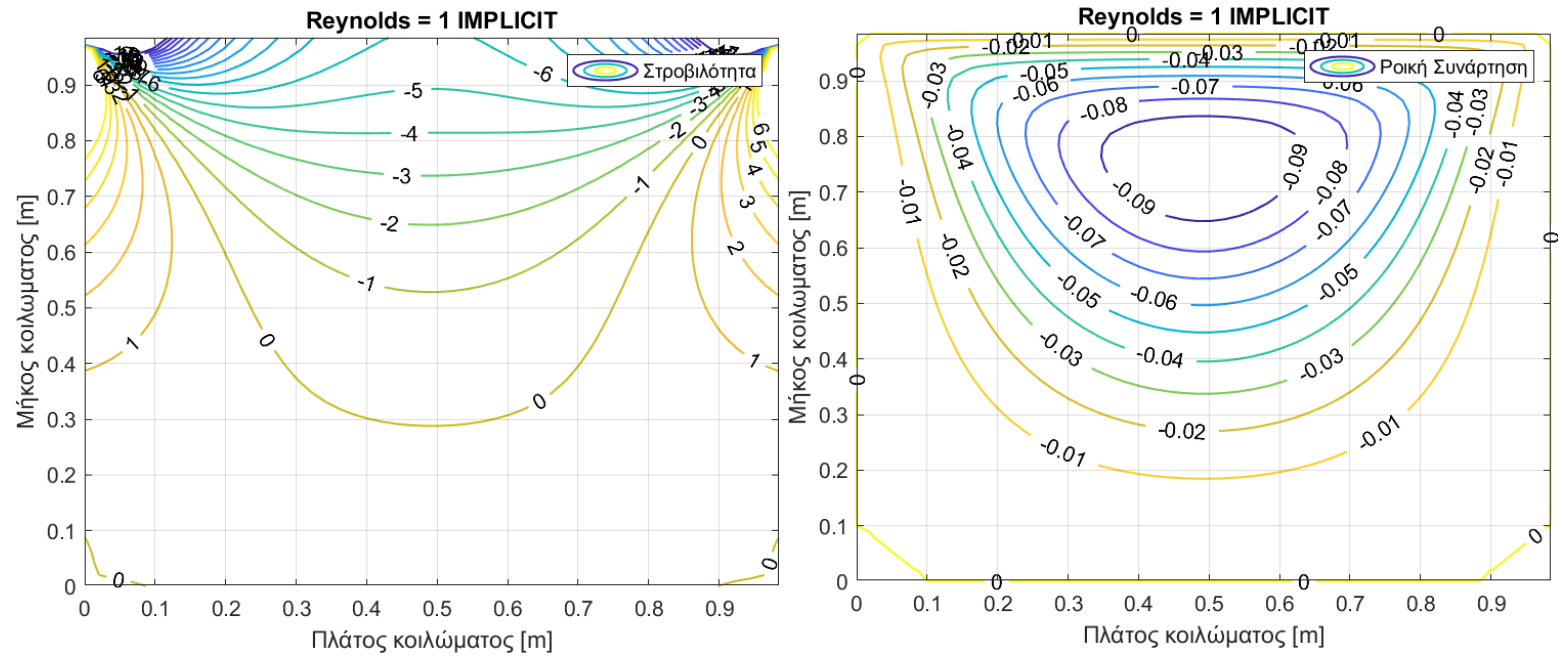
$$\left(\frac{\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j-1}^n}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i-1,j}^n}{\Delta y^2} \right) = -\zeta_{i,j}^{n+1}$$

Οριακές συνθήκες

Οι οριακές συνθήκες και σε αυτή την περίπτωση είναι ακριβώς ίδιες με την περίπτωση της ρητής διακριτοποίησης. Απλά εδώ η μόνη διαφορά είναι ότι τις ανανεώνουμε κάθε μισό χρονικό βήμα.

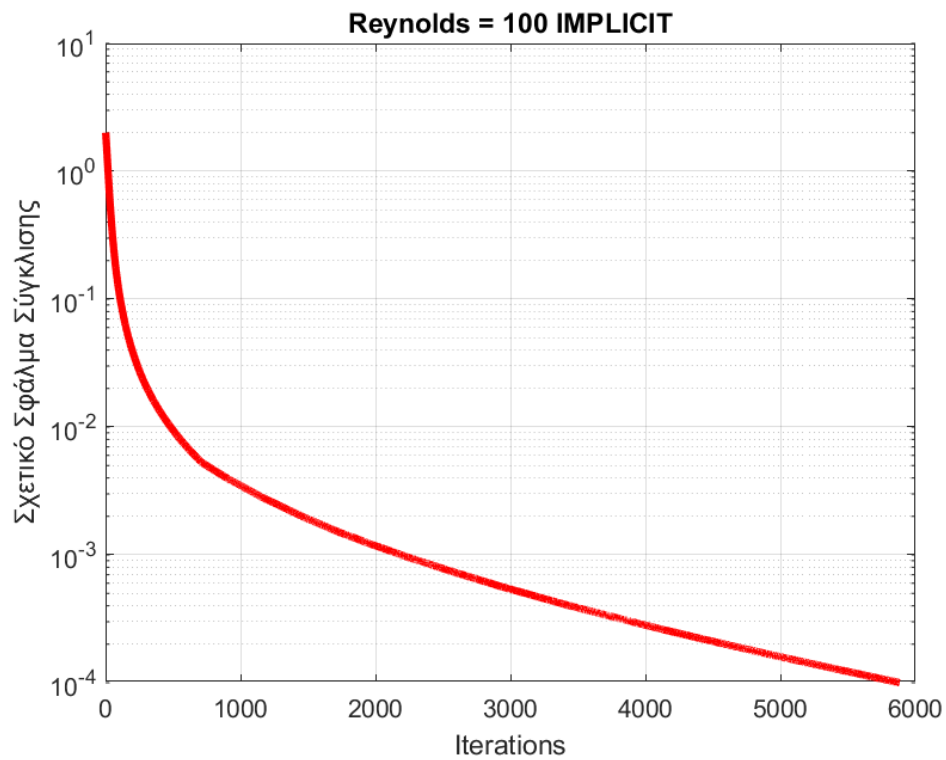
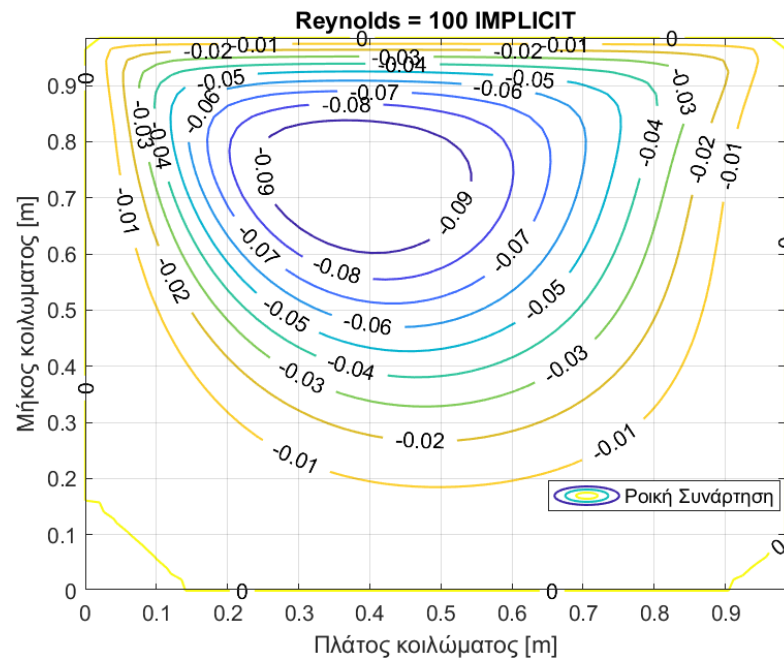
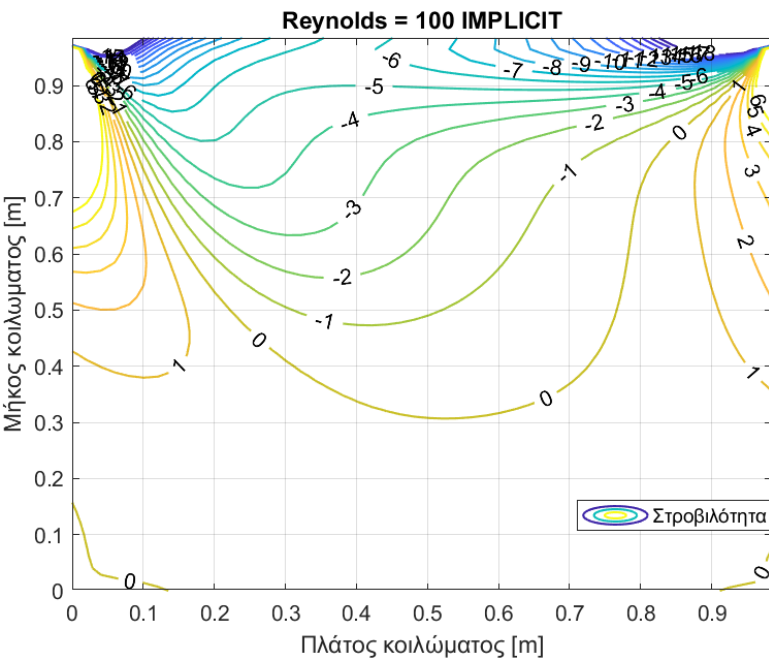
Αποτελέσματα ροικού πεδίου

Reynolds = 1

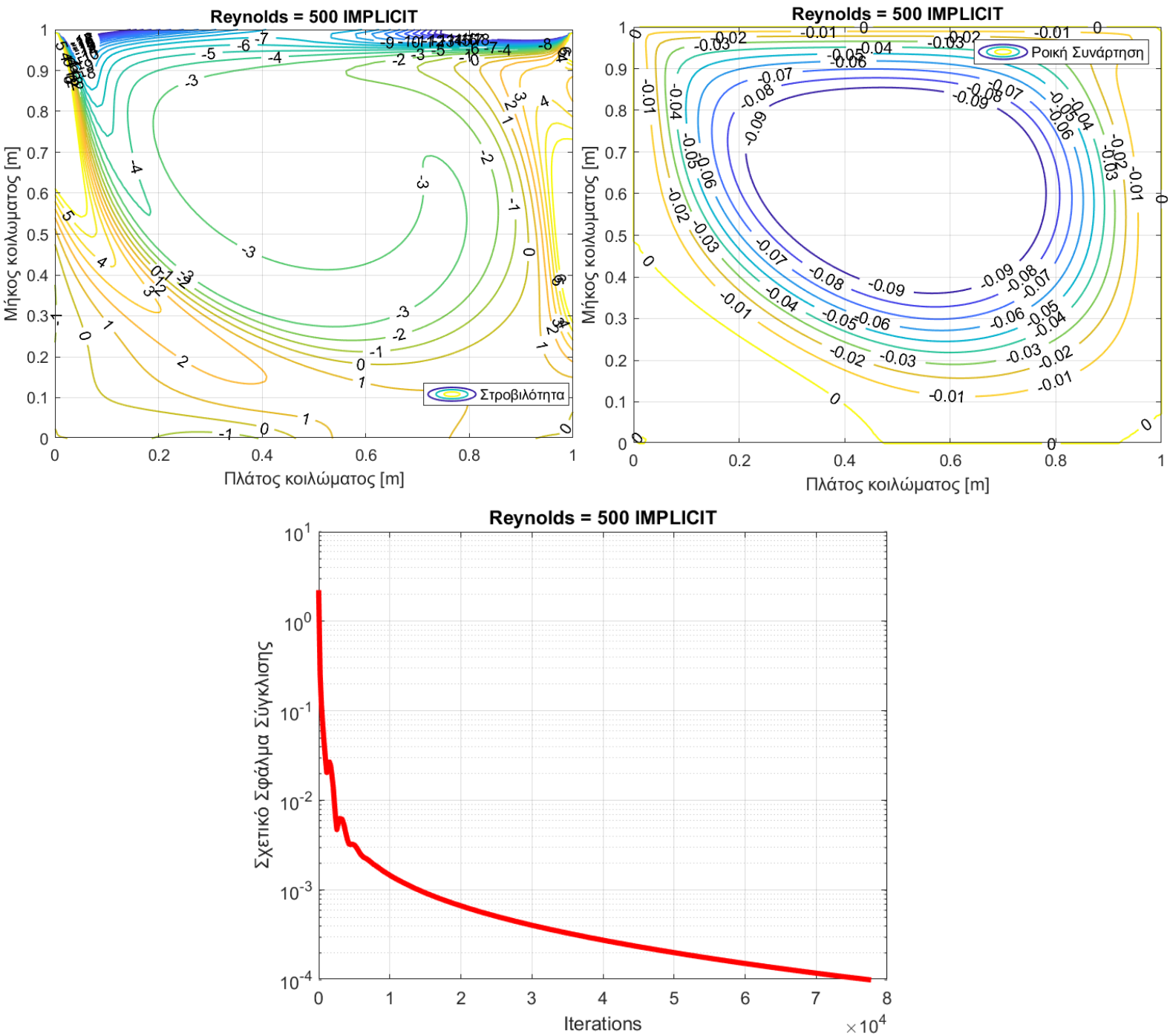


Λεπτομέρειες για τον κώδικα όπως χρονικά step , παράγοντες χαλάρωσης και διαστάσεις πλέγματος αναφέρονται παρακάτω.

Reynolds = 100



Reynolds = 500



Σχόλιο: Η χρήση του μικρού παράγοντα υποχαλάρωσης ενδέχεται να υποεκτιμά τις τιμές της τελικής κατάστασης.

Τεχνικές Χαλάρωσης

$$\zeta^{n+1} = \zeta^n + \omega(\bar{\zeta}^{n+1} - \zeta^n)$$
$$\psi^{n+1} = \psi^n + \omega(\bar{\psi}^{n+1} - \psi^n)$$

Re = 1: Στην περίπτωση αυτή ο κώδικας ήταν ανεκτικός από άποψη ευστάθειας τόσο για χρήση υπερχαλάρωσης όσο και υποχαλάρωσης. Επιλέξαμε παράγοντα υποχαλάρωσης 0.8 για να κάνουμε πιο ‘robust’ τον κώδικα μας καθώς και γιατί ακόμη και με υπερχαλάρωση ο χρόνος που χρειαζόταν ήταν πολύ λίγος.

Re = 100: Αντίστοιχα με την παραπάνω περίπτωση για τους ακριβώς ίδιους λόγους επιλέξαμε παράγοντα υποχαλάρωσης 0.9.

Re = 500: ίσως η μεγαλύτερη πρόκληση σε αυτή την εργασία. Ο κώδικας φάνηκε πολύ ευάλωτος σε αστάθειά όταν το χρονικό βήμα ήταν μικρότερο από 0.1! Για χρονικό βήμα 1.5 , απαιτήθηκε αρκετά μικρός παράγοντας υποχαλάρωσης της τάξης 10^{-2} γεγονός που έκανε πολύ εντύπωση. Επιπλέον , ο χρόνος εκτέλεσης του κώδικα ήταν 1024 δευτερόλεπτα!?.

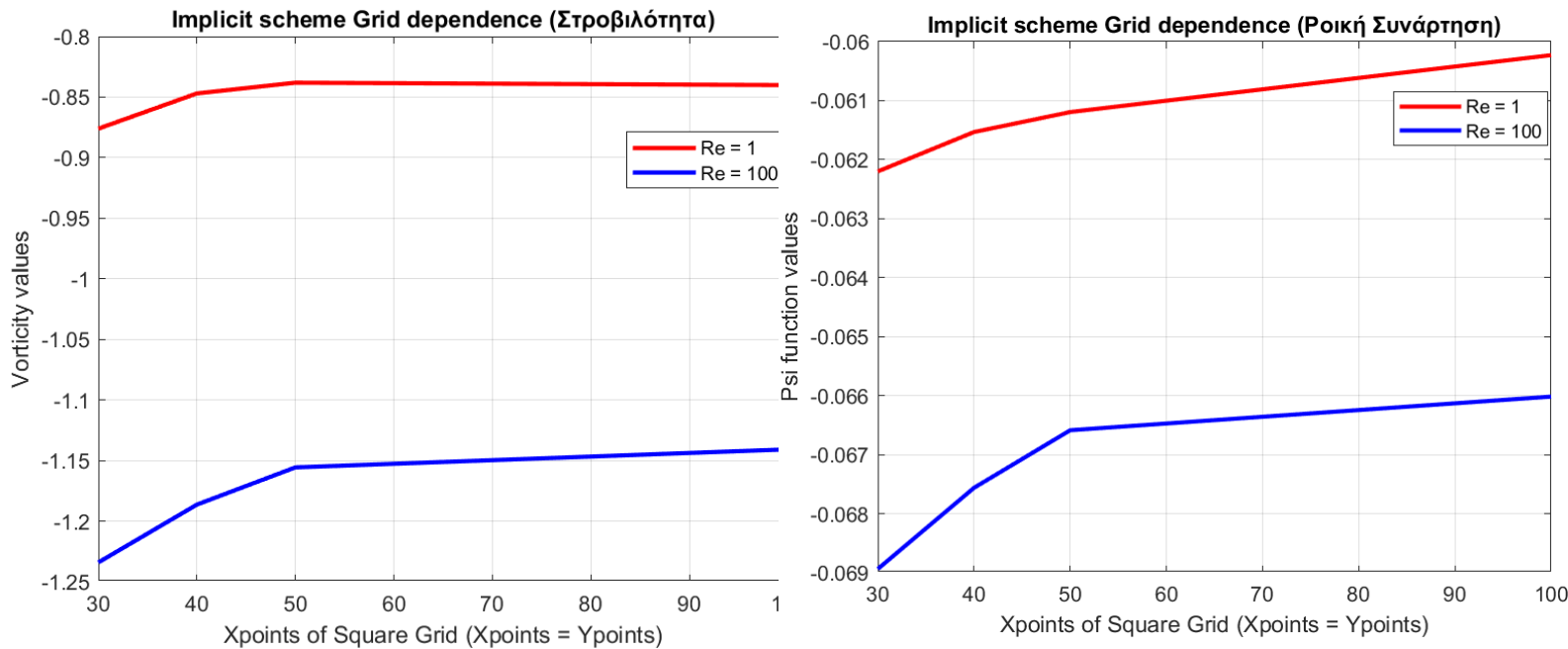
Reynolds = 500 → **Elapsed time is 1024.989211 seconds.**

REYNOLDS	1	100	500
Time Step	0.001	0.001	1.5
Relax. Factor	0.8	0.9	0.01
Time [seconds]	1.9	10.1	1024
Grid	50x50	50x50	100x100

Λόγο της μεγάλης υπολογιστικής πολυπλοκότητας για την περίπτωση του Re = 500 , η μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος για την πεπλεγμένη μορφή θα γίνει μόνο για τους Re = 1 & Re = 100.

Μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος

Με την ίδια ακριβώς λογική όπως στην ρητή περίπτωση δοκιμάσαμε διάφορα πλέγματα. Η μεγάλη διαφορά εδώ από την ρητή μορφή είναι ο χρόνος εκτέλεσης του κώδικα.

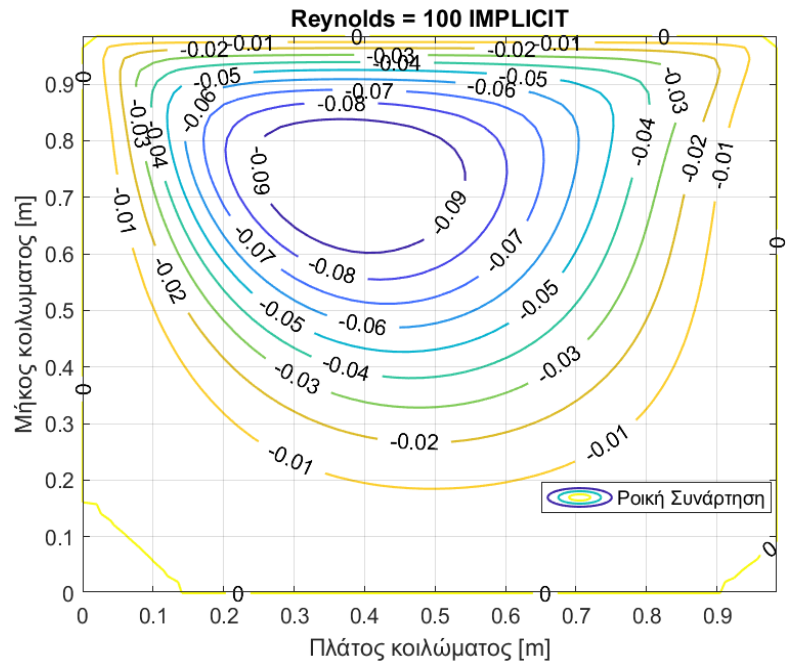
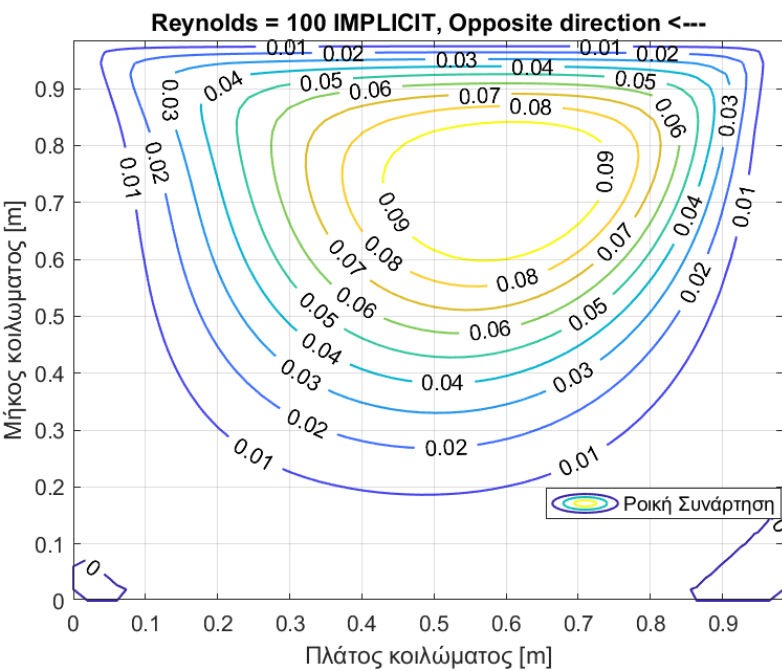
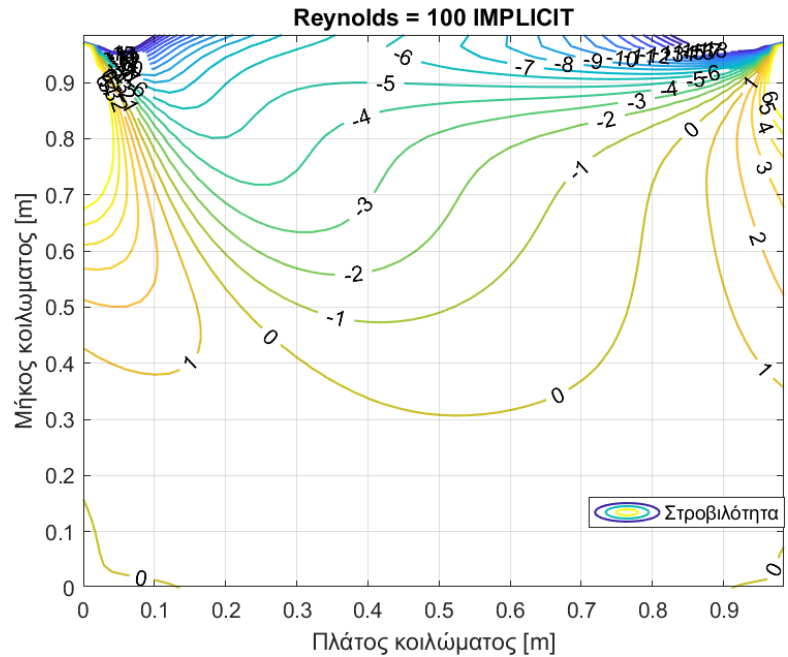
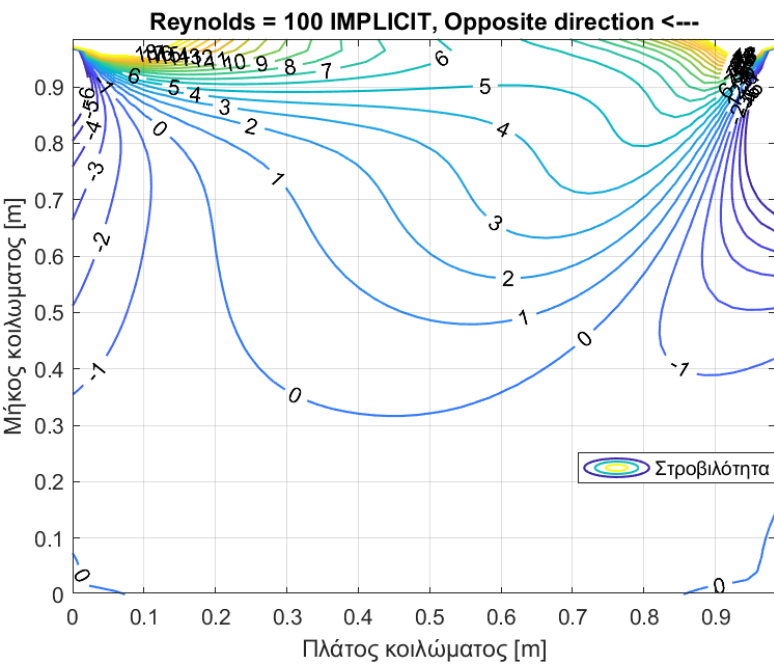


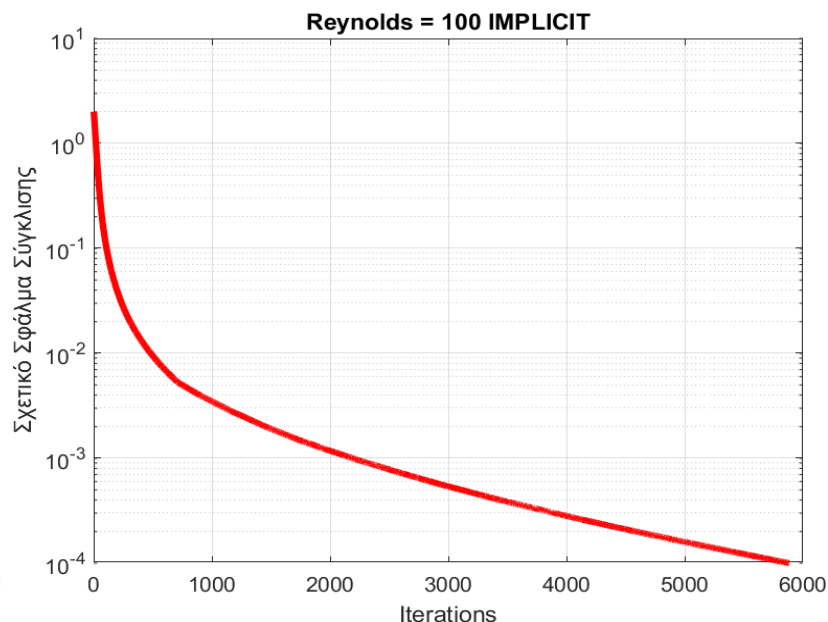
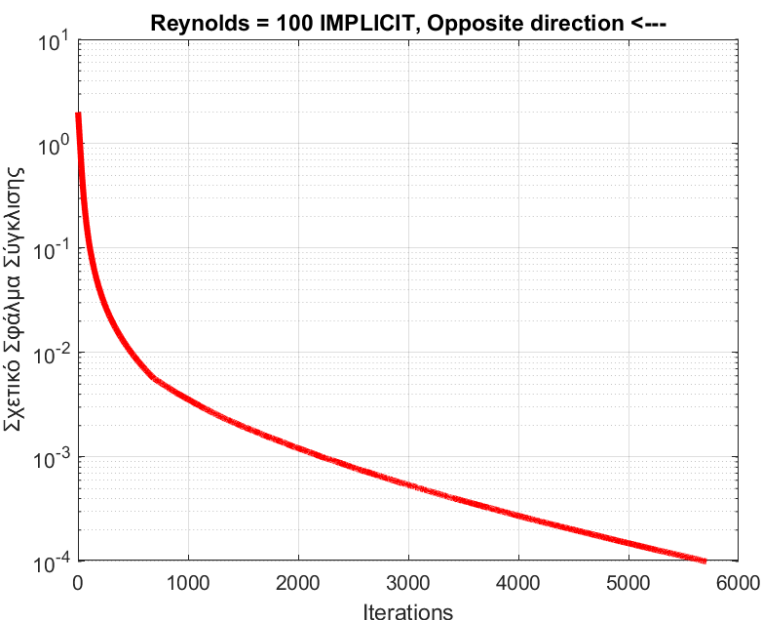
Από το διάγραμμα φαίνεται πως η διάσταση 50x50 του Grid δείχνει αρκετά αξιόπιστη και ταυτόχρονα πιο γρήγορη. Σημειώνουμε επίσης πως για Grid 100x100 ο κώδικας για $Re = 100$ είναι ασταθής.

Επίλυση με αντίθετη κατεύθυνση τοιχώματος

Για αυτή την περίπτωση επιλέγουμε και πάλι $Reynolds = 100$ σε ένα πλέγμα 50×50 . Και εδώ, όπως στην ρητή, η κύρια διαφορά για τον υπολογισμό βρίσκεται στην αλλαγή της οριακής συνθήκης του άνω τοιχώματος:

$$\zeta_{1,j} = 2 \frac{\psi_{1,j} - \psi_{2,j}}{\Delta y^2} + \frac{2U}{\Delta y}$$





Η σύγκριση έγινε με χρονικό βήμα $dt = 0.001$ και παράγοντα χαλάρωσης $\omega = 0.9$.

Παρατηρήσεις:

1. Και εδώ όπως στην περίπτωση της ρητής βλέπουμε ένα αποτέλεσμα συμμετρικό. Η τιμές για τις δύο περιπτώσεις, αντίθετης κατεύθυνσης και αρχικής είναι αντίθετες.
2. Δίνες που με την αρχική κατεύθυνση του άνω τοιχώματος ήταν αντιωρολογιακές στην περίπτωση της αντίθετης κατεύθυνσης είναι ωρολογιακές.
3. Η δομή των δινών δεν αλλάζει ουσιαστικά.
4. Στη περίπτωση της αντίθετης κατεύθυνσης ο κώδικας εκτελείτε ελαφρά πιο γρήγορα (5719 iterations σε αντίθεση με την αρχική περίπτωση όπου είναι 5894 iterations).

Σχόλια – Συμπεράσματα

Για το πρόβλημα εκφρασμένο σε πεπλεγμένη μορφή:

- Τα ρευστομηχανικά φαινόμενα είναι ίδια με την ρητή περίπτωση (ανατρέξτε ‘Σχόλια - Συμπεράσματα’ ρητής περίπτωσης).
- Παρατηρήθηκε η σταθερότητα της πεπλεγμένης μεθόδου καθώς και η δυνατότητα εξαγωγής αξιόπιστων αποτελεσμάτων με αραιότερο πλέγμα σε σύγκριση με την ρητή μέθοδο.
- Η πεπλεγμένη όμως απαιτεί ένα μεγαλύτερο υπολογιστικό ‘κόστος’, και ιδιαίτερα στην περίπτωση υψηλού $Reynolds = 500$ όπου ο υπολογιστικός χρόνος ήταν τρεις τάξης μεγέθους μεγαλύτερος από την περίπτωση της ρητής μορφής.
- Τόσο στην ρητή όσο και την πεπλεγμένη μορφή καταφέραμε να φτάσουμε το σχετικό σφάλμα σύγκλισης στη τιμή που ορίζετε από την εκφώνηση ενώ οι τιμές στροβιλότητας και ροικής συνάρτησης καθώς και οι γεωμετρίες των διαγραμμάτων σε όλες τις περιπτώσεις είναι πολύ κοντά σε επιλύσεις που παρουσιάζονται τόσο στην εκφώνηση όσο και στην διεθνή βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

- ✚ Anderson, John David, et al. *Computational fluid dynamics: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- ✚ Hochstein, John I., and Andrew L. Gerhart. Young, Munson and Okiishi's *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, 2021.
- ✚ Kurien, Elijah. "Approximating the Navier-Stokes Equations with the Explicit Finite Difference Method to Solve the Lid-driven Cavity Flow Problem." *Journal of Critical Care & Emergency Medicine*. SRC/JCCEM-128. DOI: doi.org/10.47363/JCCEM/2023 (2) 119 (2023): 2-9.
- ✚ Kamel, Abanoub G., Eman H. Haraz, and Sarwat N. Hanna. "Numerical simulation of three-sided lid-driven square cavity." *Engineering Reports* 2.4 (2020): e12151.