

Логика в действии. Введение

Й. ван Бентем, Амстердам & Стэнфорд, Декабрь 2003.

Аннотация. *Динамический поворот* в логике направлен на то, чтобы сделать понятия коммуникации и информирования объектами логического исследования. В данной работе хотелось бы коротко изложить новую версию этой программы и показать, каким образом могут сочетаться различные идеи из логики, философии, теории игр и computer science. В частности, мы обсудим эпистемические, динамические и временные логики, проблему ревизии убеждений (believe revision) и игровые логики.

1 Динамический поворот

Классическая логика нацелена на исследование пропозиций, которые мы можем знать или в которых быть уверенными, а также на исследование неизменных отношений следования между ними. Но следование – это в первую очередь некоторая *деятельность*, где пропозиции задействованы на входе и на выходе. В последние годы стало крепнуть мнение, что разнообразные формы деятельности, такие как рассуждение, оценка, ревизия убеждений (belief revision) или коммуникация, сами по себе являются объектами исследования логики, и что их динамическая структура может изучаться чисто логическими средствами¹. Например: представляется странным исследовать вопрос «знания» некоего утверждения исключительно с точки зрения статистики, поскольку «знания» обычно являются результатом различных познавательных процессов, которыми мы постоянно заняты – хотя бы потому, что мы регулярно задаем вопросы и получаем ответы. Так вот, есть основание считать, что спрашивание и получение ответов являются такими же важными логическими формами деятельности, что и извлечение следствий! Эту линию мысли можно продолжить: естественным динамическим дополнением статической эпистемической логике является теория индивидуальных и социальных *механизмов обучения*. Аналогичные траектории, ведущие от статистики к динамике, можно было бы проследить, если посмотреть на идею следования (inference) следующим образом: сначала как на «без-агентное» математическое отношение между статичными пропозициями, затем как на одно-агентную форму деятельности, нацеленную на выведение умозаключений, а потом и как на мульти-агентный процесс аргументации. Эту расширенную перспективу логических исследований иногда называют «Динамическим поворотом», начавшимся в восьмидесятые годы с изучения процедур интерпретации в естественном языке, а также с проблемы ревизии убеждений в рамках исследований по «искусственному интеллекту». Но как именно следовало бы включать понятие действия (first-class citizens) в область компетенции логики? Довольно правдоподобным выглядит предположение, что подходящий формальный инструментарий здесь могут предоставить темпоральная логика, философия действия, а также и динамическая логика, нацеленная на системный анализ работы компьютерных программ. Нельзя не учитывать и влияния, оказываемого теориями процессов (process theory) в computer

¹ Различие между «динамическим» и «статическим» имеет смысл и тогда, когда мы расширяем понятие классической логики, например, за счет введения в игру понятия определения или же понятия выразительной силы языка. Выразительная сила языка имеет прямое отношение к *деятельности*, связанной с процессом оценки утверждений, процессом различения между ситуациями, и т.п.

science, теорией игр и прочими дисциплинами. В этой статье я сосредоточусь лишь на той траектории «динамификации» логики, которая отражает мои собственные интересы. Значительно более широкий обзор этой темы можно найти в [van Benthem, 1996].

2 От эпистемической логики к коммуникации

Вопросы и ответы Симптоматичная иллюстрация, характеризующая Динамический поворот, возникает, к примеру, в рамках эпистемической логики. Давайте попробуем выйти за рамки привычного вопрошания, в пределах которого большинство из нас было воспитано, связанного с вопросами типа «является ли знание истинным верифицированным убеждением?», или «какие модальные аксиомы следовало бы выбрать для работы с эпистемическим оператором K ?». Вместо этого лучше посмотрим на самые распространенные коммуникативные ситуации. Предположим, что я задал вам простой вопрос, предполагающий ответы либо да, либо нет:

«Находится ли Амстердам на той же широте что и Пекин?»,

и предположим также, что вы мне ответили правдиво (с вашей точки зрения). Между прочим, правильным ответом бы было сказать «нет»². Обратим теперь внимание на некоторые сложности, скрытые за обманчивой простотой этого примера. При нормальных обстоятельствах мой вопрос является уместным, только если имеют место *определенные условия* (т.н. «входные данные», *preconditions*). Во-первых, спрашивая, я тем самым даю понять, что правильный ответ мне неизвестен. Но не только это. То, что я спрашиваю именно *вас*, означает, что с моей точки зрения является бессмысленным предполагать, что вы можете знать ответ на заданный вопрос³. Теперь об ответах. Отвечая, вы делаете меня осведомленным о некоем факте P . Помимо этого вы теперь знаете, что я знаю P , а я знаю что вы знаете, что я знаю, и т.д. Мы достигаем, таким образом, того, что в логической и психологической литературе называется *общим знанием* (*common knowledge*). Это – так называемые «выходные данные» (*postconditions*), полученные в результате правдивого ответа⁴.

Заметим, между прочим, что в большинстве случаев входные и выходные данные несут в себе знание о знании других людей. Это может показаться несколько избыточным – побочным – социальным эффектом коммуникации. Но в действительности эти итеративные уровни знания о знании нередко оказываются решающими в плане успешности совершаемых действий. Предположим, что я знаю не только то, что вы украли у меня часы и теперь носите их, но также и то, что вы не знаете, что я это знаю. Скорее всего, в этом случае мне достаточно будет рассчитывать на то, чтобы просто отобрать их у вас. Однако в том случае, если вы совершенно открыто носите украденные часы, фактически давая мне знать, что вы знаете, что я знаю, что они у вас (обратите внимания, что здесь целых 3 итерации!), то это есть повод для меня задуматься о каких-то более замысловатых стратегиях возвращения собственных часов. Иными словами, успешная коммуникация и адекватные практические действия напрямую зависят от аккуратности нашего обращения с различными оттенками смысла понятия «знание».

² По крайней мере, если верить маленькому глобусу, стоящему у меня на столе.

³ Это относится к типу «кооперативных» вопросов. Ни одно из перечисленных условий не работает, скажем, в случае дидактических вопросов, задаваемых учителем в классе, или же в случае *игр*, там где намеренное сбивание с толку может иметь место.

⁴ Термины «входные данные» и «выходные данные» распространены в программном анализе.

Эпистемическая логика. Входные и выходные даны предыдущего эпизода могут быть записаны в терминах стандартной эпистемической логики, формализм которой вполне позволяет кодировать знания о фактах и о той информации, которой владеют другие люди. К примеру, с помощью эпистемического модального оператора K , читаемого как «знает что», и дуальной модальности \Diamond , означающей «считает возможным что», предыдущая ситуация может быть описана так:

$$\neg K_I P \ \& \ \neg K_I \neg P \\ \langle I \rangle (K_{you} P \vee K_{you} \neg P)$$

Более того, после получения ответа, становятся истинными еще и следующие утверждения:

$$K_{you} P, K_I P, K_{you} K_I P, \text{ и т.д.}$$

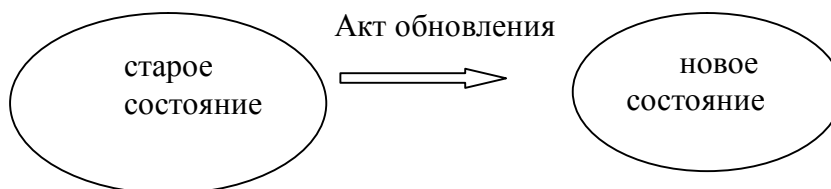
вплоть до утверждения об общем для нас обоих знании (common knowledge) $C_{I,you} P$.

Говоря точнее, подобные эпистемические формулы отсылают к типичным семантическим моделям

$$M = (W, \{\sim_j\}_j, V)$$

для эпистемической логики, состоящей из множества возможных миров W (описывающих возможные состояния действительного мира), отношений достижимости \sim_j для каждого агента j , и оценочной функции V , присваивающей каждой пропозиции истинностное значение в каждом из возможных миров. В таком случае формула $K_I P$ истинна в мире s если P истинно во всех мирах t , таких что $s \sim_I t$. Значительно более сильная формула $C_G P$ (выражающая общее знание) является истинной тогда, когда P истинно во всех мирах, достижимых из s за любое конечное число шагов $s \sim_I t \sim_I k \dots$ с произвольным набором агентов. Иногда бывает удобным считать отношения достижимости \sim_j просто отношениями эквивалентности, что превращает нашу логику в поли-модальную систему $S5$ с оператором общего знания. Однако аналогичные идеи будут работать и в случае существенно более слабых логик, моделирующих убеждения агентов, а не их знания.

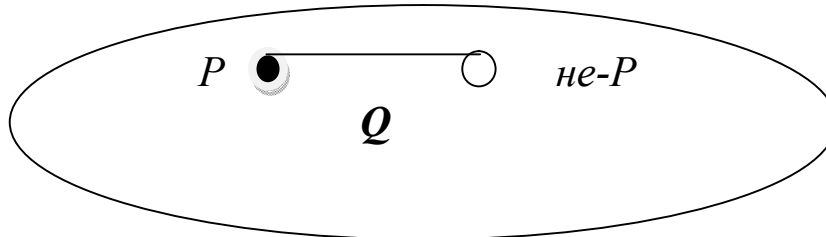
Динамика: смена информационных состояний. Но это только начало истории. Полное выявление того, что происходит в вопрос-ответных ситуациях не должно ограничиваться регистрацией истинности утверждений, имевших место до и после обмена информацией. Необходимо также смоделировать процесс смены информационных состояний непосредственно в терминах переходов между ними, представив их как компоненты некоторого объемлющего информационного пространства.



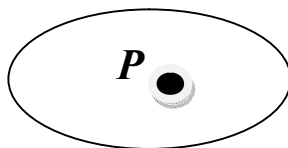
С этой целью нам необходимо будет «динамизировать» традиционную эпистемическую логику. Во-первых, последовательность информационных состояний, соответствующих порядку развертки любого разговора, может быть представлена эпистемическими моделями (M, s) , с миром s означающим реальное положение дел. Эти модели представляют собой как бы «мгновенные снимки» тех фрагментов информации, которые на данный момент доступны рассматриваемым агентам. Обычно фиксируется какая-нибудь одна модель M и затем производится оценка истинностных значений формул ϕ в некотором возможном мире. Однако в нашем случае необходимо

будет рассматривать целые последовательности таких моделей, поскольку речевые акты (в которых что-то утверждается или отрицается) приводят к изменению модели в соответствии с определенными правилами обновления (update rule).

Рассмотрим простейший пример вопрос-ответной ситуации, в которой Спрашивающий (*С*) не знает о том, имеет ли место *P*, а Отвечающий (*О*) заведомо знает правильный ответ:

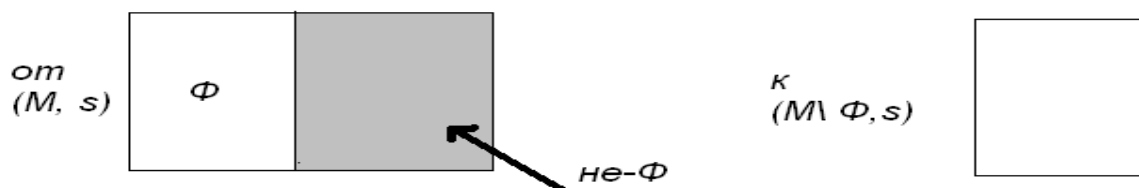


Чёрная точка соответствует действительному положению дел. (В данной модели подразумевается также и то, что – как того требуют правила эпистемической логики – *С* с определенностью знает, что *О* знает ответ на задаваемый *С* вопрос; тем не менее ясно, что в общем случае вовсе не обязательно, чтобы это ограничение имело место). На следующем шаге, в результате ответа *О* на заданный ему вопрос, вследствие элиминации варианта *не-P* происходит смена информационной модели, и в итоге имеет место следующая диаграмма:



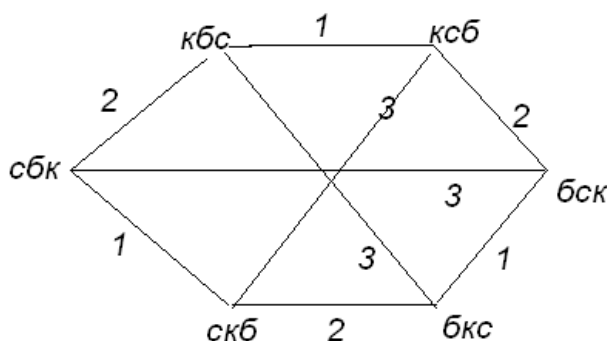
На данном этапе оказывается, что *P* стало общим для *С* и *О* знанием.

В общем случае динамика здесь может быть описана следующим образом. Публичное оглашение ϕ истинного утверждения ϕ элиминирует все те миры, достижимые из наличного мира, которые не удовлетворяют ϕ :



Там, где эпистемические модели оказываются значительно более сложными, подобная элиминация может сыграть существенную роль.

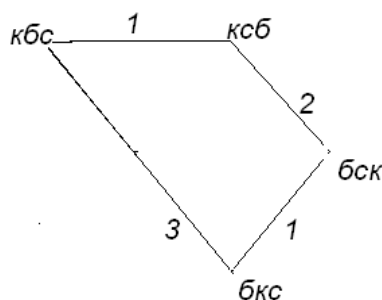
Игры. Карточные игры являются весьма показательным примером нетривиального обмена информацией даже в самых простейших случаях. Пусть имеется три игрока 1, 2 и 3, и три типа карт – красные (*κ*), белые (*б*) и синие (*с*), которые оказались розданными игрокам в следующем порядке: *кбс*. Каждый игрок видит только свою карту. Эпистемическая модель иллюстрируется следующей диаграммой:



Эту диаграмму следует читать следующим образом. Несмотря на то, что на руки сдана комбинация *кбс*, ни один игрок этого не знает. Поэтому анализ ситуации должен включать в себя все 6 возможностей (6 миров). Предположим теперь что

игрок 1 правдиво говорит: «У меня нет синей карты».

Что игроки теперь знают о розданных им картах? Устраняя из диаграммы комбинации, начинающиеся с «с», мы получаем следующую диаграмму:



Отсюда сразу становится понятным, что игрок 2 может знать действительный расклад, игрок 3 знает, что 2 это знает, а игрок 1 знает только то, что либо 2 либо 3 могут знать правильный ответ. Заметим, между прочим, что знание игрока 2 нельзя считать «общим»! Ведь первый игрок считает возможной такую ситуацию, что синяя карта может находиться у игрока 2, и в этом случае одного лишь первого высказывания явно не достаточно, чтобы помочь ему распознать действительный расклад. Диаграмма позволяет предсказать и дальнейшие варианты событий. Например, если бы теперь игрок 3 честно сказал «Я всё еще не знаю ответа», то это позволило бы оставить на диаграмме только самые левые миры, и игрок 2 сразу бы сумел вычислить действительный расклад.

Более общий случай обновления информации. Подобные модели помогают прояснить принцип устройства таких головоломок как «Чумазные дети» и проч., как показано в Fagin, Halpern, Moses & Vardi 1995. Простое изложение этих идей и тех общих вопросов, которые отсюда вытекают, можно найти в van Benthem 2001. Такого рода задачи послужили отправной точкой для целого ряда исследований, нацеленных на изучение более изощренных форм коммуникации, включающих в себя утаивание, забывание и намеренное введение в заблуждение. Здесь может сочетаться как публичная, так и приватная информация (как в случае с защищенными протоколами в Интернете), где агенты коммуникации могут систематически вводиться в заблуждение.

Одной из лучших систем такого рода является система обновления продуктов (*product update*) для состояний с действиями: см. Baltag-Moss-Solecki 1998, van Ditmarsch 2000⁵.

3 Логика эпистемических процессов

Динамическая логика Пришло время поговорить об исчислениях, отражающих природу процессов обновления, и способы рассуждения о них. Адекватной двухуровневой статично-динамической системой, отвечающей целям Динамического поворота, могла бы послужить система, заимствующая определенные идеи из computer science, главным образом, идею сосуществования пропозиций и выражений действия в *динамических логиках*.

Эти логики позволяют описывать истинные положения дел, возникающие по ходу совершения определенных действий:

$[a]\phi$ это читается так: ϕ имеет место после каждого удачного осуществления действия a .

По аналогии, мы можем фиксировать эпистемические эффекты коммуникации, такие как

$[A!]\mathcal{K}_j\phi$ это читается так: после правдивого публичного оглашения A , агент j знает, что ϕ .

Этот комбинированный язык сочетает в себе модальности динамической логики с эпистемическими модальностями. Порядок их употребления регистрирует процесс взаимодействия входных данных с выходными. Вот пример, который может показаться тривиальным на первый взгляд.

$[A!]\mathcal{C}_GA$ публичное оглашение A приводит к появлению общего знания \mathcal{C}_GA .

Ниже мы еще попытаемся разобраться в том, в какой мере эта формула может претендовать на роль общезначимого логического закона коммуникации. Другим примером может служить формальный принцип коммуникации, соотносящий исходное знание агентов коммуникации с тем знанием, которое может иметь место после публичного оглашения A :

$$[A!]\mathcal{K}_j\phi \leftrightarrow (A \rightarrow \mathcal{K}_j(A \rightarrow [A!]\phi))$$

Эта формула утверждает, что знание ϕ (на выходе) соответствует (определенным образом релятивизированной) версии исходного знания о ϕ . Это лишь один из законов рассуждения о коммуникации в рамках полной динамико-эпистемической системы, отражающей логику процессов публичного оглашения, о которой известно, что она является аксиоматизируемой и разрешимой. По-видимому, эта система является простейшим логическим исчислением процедур коммуникации⁶. Для более сложных информационных процессов существуют и более сложные системы их описания. В любом случае, динамико-эпистемическая логика обещает быть более или менее

⁵ В общем случае, по ходу развития разговора или игры, эпистемические модели, генерируемые продуктами обновления, могут разрастаться в размерах так, что это может даже приводить к ситуациям, когда будет отсутствовать непосредственная отсылка к общим знаниям о действительном мире!

⁶ Это исчисление состоит из базовой эпистемической логики и простых аксиом редукции, рекурсивно разлагающих выходные данные. Но тут имеются некоторые тонкости, поскольку аксиома редукции общеизвестного (уже оглашенного) знания требует обогащения статичного базового языка до более богатой эпистемической логики с оператором $\mathcal{C}G(A, \phi)$ (оператор общепринятого знания, релятивизированного по отношению к мирам, удовлетворяющих A). Таким образом, динамическая структурная надстройка может служить способом модификации базовой статичной структуры.

систематическим источником логической таксономии и понимания общих свойств коммуникации.

Анализ речевых актов Всё сказанное выше, по-видимому, вызывает к значительному пересмотру старых философских проблем. Рассмотрим, к примеру, *полные эпистемические спецификации* в теории речевых актов. Что нам становится известным благодаря публичному оглашению некоего ϕ ? Перечисленные выше принципы предлагают нам считать, что в результате мы всегда получаем некое *общеизвестное знание* касательно ϕ . Но это, очевидно, не верно в общем случае! Предположим, что на некий вопрос Отвечающий (O) ответил:

ϕ «Хоть вы и не знаете, но на самом деле P »,

Это утверждение было бы истинным лишь в момент его произнесения, поскольку информационное воздействие, которое несет с собой самый акт утверждения высказывания ϕ , немедленно привел бы к смене истинностного значения ϕ , потому что вопрошающий C теперь уже знает, что P ! Философы, разумеется, легко распознают здесь т.н. парадокс Мура, только воспроизведенный уже в рамках динамико-эпистемической логики⁷.

Иными словами, те логики, которые разрабатываются в рамках Динамического поворота, позволяют подойти к старым проблемам с новыми техническими средствами. Даже в такой простой формуле как $[A!]/K_i \phi$ оказываются закодированными идеи, взятые из философской эпистемологии, из лингвистики с ее понятием речевых актов, и логики программирования из computer science.

Структура программ Аналогия между коммуникативными актами и компьютерными программами может быть проведена и далее. Компьютерные программы можно представлять себе как последовательность базовых действий, осуществляемых компьютерным «железом» благодаря программным *конструкциям*, таким как

сочетание	$S; T$
условный выбор	$IF P THEN S ELSE N,$
управляемая итерация	$WHILE P DO S.$

В особенности последняя структура является типичной для тех вычислений, когда заранее невозможно сказать, сколько раз компьютеру необходимо будет повторить определенную инструкцию. Но такого рода ситуации изобилуют и в коммуникации. Публичное оглашение тоже является базовой инструкцией, в соответствии с которой происходят изменения информационных состояний, скажем, на уровне наших общественных соглашений или же на уровне нашего мозга. Помимо этого, разумеется, можно говорить и об аналоге компьютерному софту – о «коммуникативных программах».

В процессе коммуникации имеет место обмен комплексными инструкциями типа «Сначала спроси, как у нее дела, а уж потом обращай со своей просьбой», или «Если учитель спросит A , то нужно сказать B , а иначе C ».

В этих инструкциях могут быть задействованы и итерации. Иными словами, процесс разговора можно представлять себе как разновидность императивного программирования, где роль «машин» играют социальные установки, на которые мы оказываем определенное воздействие.

⁷ Технический вопрос о том, какого рода формы эпистемических высказываний, по мере их публичного оглашения, продуцируют общеизвестное знание, до сих пор является открытым. О связи этой проблемы с парадоксом Фитча (Fitch paradox) см. van Benthem 2003.

Замечательным примером подобного итерирования может служить хорошо известная головоломка:

Чумазные дети: После игры на улице, двое из троих детей вернулись с грязью на лбу. Поскольку все они видят друг друга, но ни один из них не видит сам себя, то Отцу приходит в голову мысль задать им такую загадку: «По крайней мере один из вас с грязью на лбу. Кто-либо из вас сумеет догадаться, грязный ты или нет?». В правила игры входит то, что все должны говорить честно. Итак, как будет развиваться ход игры?

На первом этапе, разумеется, никто из них не знает правильного ответа. Но именно это обстоятельство служит сигналом к размышлению на втором этапе, поскольку каждый из двух детей, вернувшихся домой с грязью на лбу, теперь может рассуждать так:

«если бы я был чистым, то грязнуля, которую я вижу, видела бы только чистых детей перед ней, и тогда она сразу бы догадалась, что именно она вернулась с грязью на лбу. Но она молчит. Значит я тоже грязнуля!». Это рассуждение в одинаковой степени проходит для обоих чумазных детей, поэтому на втором этапе они оба могли бы догадаться о том, что именно они вернулись чумазными. А третий ребенок сумел бы вычислить то, что он чистый только на третьем этапе, после того, как первые два огласили бы свои рассуждения.

Эта головоломка с легкостью распространяется на любое количество грязнуль и чистюль. В ее решение всегда будет входить итерация вида «продолжай показывать свое незнание до тех пор пока нет возможности дедуцировать знание», которая может быть повторена произвольное число раз, в зависимости от комбинации детей.

Для того, чтобы произвести полный анализ этой головоломки, необходимо прибегнуть к средствам динамико-эпистемической логики, позволяющей конвертировать сложные действия π в утверждения типа $[\pi]\phi$. Аксиомы такого конструирования хорошо известны из программирования, как, например, закон программной редукции (program reduction law) $[S;T]\phi \leftrightarrow [S][T]\phi$.

Общая логика коммуникации Логика коммуникации – очень обширная тема. В работе van Benthem 2002 исследуются следующие типы новых задач:

Каким образом следует описывать наилучший из возможных исходов, достигаемых группой агентов коммуникации, нацеленных на оптимальное информирование друг друга?

Очень богатым источником является книга Baltag-Moss-Solecki 2003. Там, к примеру, содержится результат, что динамико-эпистемическая логика публичного информирования (logic of public update), допускающей итерации Клини * на поступающие утверждения, является неразрешимой. Это означает, в частности, что логика, лежащая в основании головоломок типа Чумазных детей⁸, достаточно богата для того, чтобы на ее языке можно было кодировать значимые математические проблемы! И это лишь один из многих «порогов сложности», очерчивающих спектр человеческой коммуникативной деятельности.

⁸ а также и в основании тех хмельных полуночных разговоров, когда мы начинаем многократно повторять сами себя...

4 Ревизия убеждений и ожиданий

От обновления к пересмотру Обновление – это лишь одна из форм нашей когнитивной деятельности. Другим ключевым моментом Динамического поворота является теория ревизии убеждений (belief revision), разработанная в (Gärdenfors & Rott 1995), и базирующаяся на взаимодействии трех процессов:

- (a) *обновления*, т.е. учета новых утверждений
- (b) *стирании информации*, т.е. игнорировании определенных утверждений
- (c) *ревизии убеждений*, т.е. смене исходных убеждений на новые.

Теория ревизии убеждений предлагает рассматривать не только определенные формы представлений информационных состояний, но и сам процесс ревизии основных постулатов, приводящий к альтернативным основоположениям, отражающим как консервативные, так и более радикальные стратегии трансформации убеждений. И здесь речь идет не просто об изменении информации, несомой пропозициями. Меняется также и структура убедительных, с точки зрения данных агентов, связей между возможными мирами, и система их предпочтений, и вообще любой параметр наличной логической семантики, допускающий какую бы то ни было разумную вариацию во времени⁹.

Остается еще открытым вопрос о том, как именно следует синтезировать эти идеи с эпистемическими логиками обновления, обсуждавшимися выше. Один из способов осуществления этого синтеза может оказаться связанным с «динамификацией» условной логики (conditional logic), благодаря тому, чтобы трактовать импликации $A \rightarrow B$ так:

B истинно во всех наиболее предпочтительных (или наиболее вероятных) мирах, удовлетворяющих *A*.

Итак, динамика совершаемых актов приводит к изменениям в структуре правдоподобных убеждений, а не только лишь к устранению миров или появлению неопределенных связей. На эту тему можно посмотреть Veltman 1996, Aucher 2003. Нечто подобное происходит и тогда, когда предметом нашего внимания становятся простейшие разговоры, как это будет показано ниже на примере игровых ситуаций.

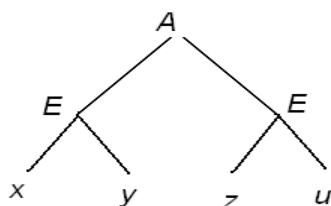
Теория обучения Очевидно, что люди придерживаются самых разных стратегий, когда дело доходит до пересмотра теорий или самых обычных мнений. Теория ревизии убеждений не является полноценной динамикой, поскольку сами процессы не представлены в ней в качестве полноправных (first class) объектов исчисления. Примером последнего может служить современная теория *механизмов обучения*, сочетающая в себе идеи из философии науки, математической топологии и computer science. В работе Hendricks 2002 показана неустраняемая значимость этого хода для весьма широкого спектра эпистемологических исследований. Информирование, ревизия и обучение совместно образуют согласованное проблемное поле, возрастающее по своей сложности и охватывающее самые разные формы когнитивного поведения, от краткосрочных до весьма продолжительных. Некоторые вопросы этого типа более детально рассматриваются в van Benthem 2003A.

5 Цели, стратегии и игры

Более широкий взгляд на коммуникацию Публичные оглашения являются строительными блоками процессов разговора или аргументации. Здесь однако существенным является не только то, *что* люди нам сообщают, но еще и вопрос *почему*

⁹ Подвергаться изменениям может даже сам язык, в котором представлены все базовые концепции.

они это делают. Ведь существенным является и то, чего хотят достигнуть собеседники, ибо на этой основе будут определяться и мои цели, в зависимости от которых я буду знать, что говорить или спрашивать. Рассмотрим, к примеру, такой игровой сценарий. Предположим *A* должен скрыто от *E* выбрать либо левую либо правую ветку диаграммы, и затем передать ход игроку *E*. В свою очередь *E* должен загадать одну из букв на левой и правой ветках – т.е одну из *x* или *y*, и одну из *z* или *u*. Понятно, что таким образом оказывается «объективно» заданной однозначно определяемая буква. Помимо этого игроки могут по очереди задавать друг другу вопросы. Выигрывает тот, кто первым вычислит букву, детерминированную исходными данными. Имеется в виду следующая диаграмма:



Предположим, что *A* спрашивает *E*:

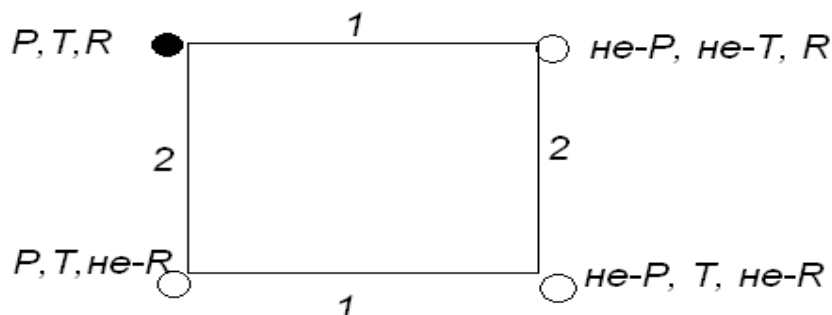
«Какую букву ты выбрал слева?»

Этот вопрос правомерен, так как *A* не знает ответа на него, и знает также, что *E* знает ответ на него. Однако за этим вопросом скрывается еще и дополнительная информация, которую не учитывают ранние версии эпистемической логики, ограничивающиеся подобными входными данными. А именно: *почему* *A* задал этот вопрос? Может показаться, что этот вопрос осмыслен только тогда, если *A* выбрал левую сторону диаграммы. Но тогда эта информация мгновенно бы сообщила *E* о действительном исходе игры, поскольку именно *E* знает итоговую комбинацию букв, и тогда для выигрыша у *E* не было бы даже необходимости задавать встречный вопрос. Напрашивается вопрос: обоснованным ли будет с точки зрения *E* такое рассуждение? Это зависит от множества факторов. Во-первых, от того, как именно оценивает *E* своего партнера: рациональным, тупым, и т.п. Во-вторых, существенным является и система распределения выигрыша. Если, к примеру, оглашение неверного ответа автоматически означает выигрыш противника, то *A* мог намеренно задать сбивающий с толку вопрос, чтобы вынудить *E* к оглашению неверного варианта...

Целью этого простого примера было обратить внимание на идею стратегического взаимодействия, возникающего на каждом очередном этапе разговора, и на необходимость учета возможности возникновения непредвиденных обстоятельств в будущем. Направление, в котором следовало бы развивать исследования по логикам обновления (update logics), подсказывается результатами *теории игр*. Фактически игры – это определенные модели поведения группы агентов, стремящихся достичь соответствующих целей посредством взаимодействия. Благодаря играм в дело может быть вовлечено еще два понятия, не использовавшихся ранее: понятие *предпочтений* агентов относительно возможных исходов и понятие долгосрочных *стратегий*, обеспечивающих успешные ответные действия. В частности, именно понятие стратегии позволяет перейти с микроуровня описания на уровень долгосрочного описания поведения.

Разговорные игры Рассмотрим беседу двух людей, информированных не одинаково. Предположим, что я не знаю, находимся ли мы уже в Голландии (*P*) или

еще нет ($\neg P$), и продолжается ли еще 2004 год (T) или уже нет ($\neg T$). Предположим, что вы точно знаете, что я не знаю наше местонахождение, но думаете, что я всё-таки могу знать точное время. Помимо этого я точно знаю, что мы с вами не просто так оказались в одном месте и одно время (R), в то время как вы этого не знаете. Эпистемическая модель данной ситуации представима следующей диаграммой, с черной точкой, указующей на действительное положение дел:



Задача стоит определить действительное положение дел. Выигрывает тот, кто первым сумеем его распознать. Правила игры такие: мы можем по очереди задавать друг другу вопросы, но только вопросы должны быть настоящими – т.е., в частности такими, на которые спрашивающий действительно не знает ответа. На любом этапе тот, кто догадался о правильном ответе, может огласить его и таким образом выиграть. (Здесь может быть предусмотрена и жеребьевка на тот случай, если оба игрока огласят свой ответ одновременно).

Предположим, что я спросил вас о времени. Отсюда вы немедленно заключите, что я не знаю, имеет ли место T , вследствие чего для вас устранится два нижних варианта диаграммы. Но тогда вам автоматически становятся известными все факты (включая неизвестное вам до этого отношение R , отрицание которого элиминировалось предыдущим ходом) и вы получите шанс мгновенно выиграть. Отсюда следует, что я должен спросить о месте (P), а не о времени. Благодаря этому вопросу вы не получите никакой дополнительной информации, которой бы у вас не было ранее, поскольку этот вариант совместим со всеми четырьмя вершинами диаграммы. Однако ваш положительный ответ тут же устранит два правых варианта, после чего я сумею заключить о реальном положении дел, в то время как вы этого сделать не сможете, поскольку для вас всё еще останется открытым вопрос об отношении R .

Выбор между удачными и неудачными вопросами (точнее, выбор между тем, что нужно и что ненужно говорить вообще) является краеугольным камнем разговорно-игровой динамики, совершаемой игроками посредством выбора таких вопросов, которые способствовали бы приросту информации у одного игрока, оставляя при этом противника в неведении как можно дольше.

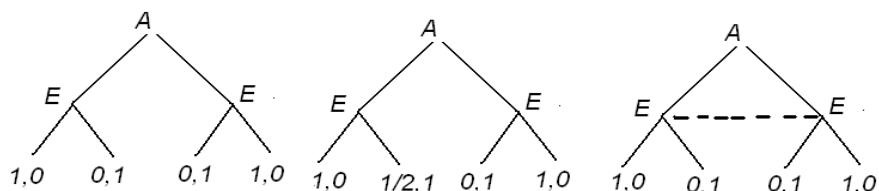
Осуществимо ли это или нет зависит не только от эпистемической модели, но и от графика вопросов и ответов. (Ясно, что в данной игре могли бы выиграть и вы, если первый ход числился за вами). Существенную роль играют также и ограничения по времени¹⁰.

Теория игр и логика Теория игр занимается исследованием разнообразных стратегий, нацеленных на оптимизацию долгосрочного поведения игроков, выигрыш которых определяется либо в терминах равновесия Нэша, либо в терминах иных

¹⁰ Вопрос о стратегиях успешного вопрошания в разговорных играх очень обширен; исследование подобных игр требует привлечения вероятностных методов (см. например van Rooy 2003).

подходящих критериев. В рамках такого подхода можно говорить практически о любых конкретных играх (экономика, война, состязание), а также и о более абстрактных феноменах, где игровая терминология может использоваться для исследования таких социальных действий как употребление языка или процесс логического рассуждения. Значительная часть математики, которую привлекают для теоретико-игрового анализа, нацелена как раз на поиск равновесия и анализ его свойств, проблематичность которых проистекает из того, что игроки обладают неодинаковым доступом к информации. В этом направлении уже разработано множество техник, начиная с анализа типа «от вершин-к-корню» (leaf-to-root analysis) до существенно более сложных результатов (Osborne & Rubinstein 1994). Несмотря на очевидные различия в сфере деятельности и целях, теория игр и логика всегда имели множество пересечений. В работах van Benthem 1999-2003 представлена панорама тех игр, которые оказываются причастными логике благодаря процессам моделирования семантических оценок, аргументации и другим формам деятельности. Идея *логической игры* может оказаться полезной при использовании игры как модели интерактивных вычислений. В результате мы получим слияние логического исчисления для программ и логического исчисления, определяющего ход игр, и сумеем изучить их вычислительные возможности (Parikh 1985, Abramsky 1998).

Игровые логики Другим аспектом взаимосвязи логики и теории игр являются логические исследования того, каким образом игроки должны рассуждать, принимать решения и осуществлять соответствующие действия. По сравнению с более ранними версиями логики обновления, случай с играми требует принятия во внимание процесса абстрагирования. Пусть у нас имеется дерево, отображающее последовательность всех возможных игровых комбинаций, вершины которого обозначают ходы игроков. Мы хотим проанализировать процесс выбора последовательности действий, который могли бы осуществлять игроки, способные к рефлексии над своими стратегиями. Рассмотрим для примера три следующих игровых дерева, с парами чисел внизу, соответствующими исходам игры для *A* и *E* соответственно:



Каждая из игр является моделью модальной логики, соответствующей основным типам игровых действий – «левых» и «правых» в данном случае. Игровые структуры и стратегии могут быть сформулированы здесь в стандартных терминах. К примеру, исходя из 4 возможных стратегий в первой игре (a), наилучшей стратегией для *E* была бы следующая:

«если *A* идет направо, то иди налево – если *A* идет налево, то иди направо».

#

Эта стратегия является простой программой, для исследования которой вполне достаточно средств стандартной динамической логики (van Benthem 2001B). Интерпретируя значение «1» как «выигрыш», мы видим, что это является *выигрышной стратегией* для игрока *E*: следуя ей, *E* выигрывает у *A* независимо от того, что делает *A*. Большинство логических игр не идет далее этого понятия. Однако во второй игре (b), с более сложным набором предпочтений относительно исходов игры, предсказания

могут быть улучшены. В случае «правого» хода A , игрок A также будет придерживаться стратегии $\#$ (при условии, что A действует рационально). Однако игрок A , с учетом сказанного, предпочтет сделать «левый» ход, поскольку это дает ему возможность сыграть ничью ($1/2$), в противоположность проигрышу (0) при «правом» ходе. Такой расклад предсказывает возможность получения равновесия Нэша, тем не менее, «левый» ход дает возможность игроку A реализовать выигрышную стратегию. В логических терминах, подобный аргумент вовлекает в себя выражения значений вершин (expressions for values of nodes), и возможно даже полноценную логику предпочтений (preference logic).

И наконец, игра (с) демонстрирует нам новое свойство: *неполную информацию*. На своем ходе игрок E не знает, какой именно ход был сделан игроком A (обстоятельство, отображаемое пунктирной линией, соединяющей средние вершины). Ситуация неполной информации имеет место во многих играх, как правило, вследствие ограниченных возможностей наблюдения – как в карточных играх. Подобные игры являются моделями комбинированного динамико-эпистемического языка с базовыми действиями a, b, \dots , обозначающими ходы игроков, и эпистемическими операторами K_j , указывающими на знания игроков. В этом языке могут быть представлены специфические образцы информации об игре, такие как факт незнания игроком E того хода, который мог бы привести его к выигрышу:

$$\neg K_E \langle \text{right} \rangle WIN_E \wedge \neg K_E \langle \text{left} \rangle WIN_E$$

На нем также могут быть выражены общие законы, описывающие специальные типы агентов. В работе van Benthem 2001A приводятся типичные случаи взаимодействия логических и теоретико-игровых понятий. К примеру, у игроков j с *идеальной памятью* в отношении истории игры модель незнания будет удовлетворять следующей перестановочной аксиоме:

$$K_j[a]\phi \rightarrow [a]K_j\phi$$

Это похоже на приводившуюся выше аксиому, связанную с актами публичного оглашения, соотносящую $[A!]K_j\phi$ с $K_j[A!]\phi$.¹¹ В обоих случаях подразумевается, что все задействованные в игре агенты, обладают идеальной памятью. В противоположность этому случаю, поведение игроков с конечной *ограниченной памятью*, способных помнить историю игры лишь с точностью до некоторого фиксированного «просвета», будет подчиняться другим логическим законам.¹²

Информационное обновление в играх В играх, подобных обсуждаемым выше, ранние версии логики обновления всё еще имеют смысл. Интуитивно говоря, происходит следующее. Игроки продвигаются по игровому дереву по мере осуществления ходов. С каждым шагом увеличиваются их знания о происходящих событиях, в то время как горизонт возможных будущих сценариев постоянно сужается. Для начала рассмотрим первый процесс.

¹¹ Аксиома логики обновления устанавливает отношение эквивалентности между операторами $[K]$ и $K[]$. А новая импликация отображает еще и то, что устранение незнания у игроков никогда не происходит «спонтанно».

¹² На тему взаимодействия логики и теории игр см. также van Benthem 1999-2003, 2003B; а также на тему силы игроков, структурных понятий эквивалентности игр, операций конструирования новых игр и их алгебр, и анализа теоретико-игрового равновесия в терминах «логики неподвижных точек» (fixed-point logics). Множество прочих интересных направлений исследования можно найти в Stalnaker 1999, Pauly 2001.

Игры с неполной информацией кодируют структурную неопределенность процесса игры, систематически обновляющейся с каждым наблюдаемым ходом. Эту задачу можно пытаться решать средствами эпистемического обновления, механизм которой позволяет объяснять появление пунктирных линий (линий неопределенности) на вышеприведенных диаграммах. Движение начинается от корня дерева, возможно, с учетом наличия некоей исходной эпистемической модели M . В общем случае у игроков имеется лишь частичный доступ к наблюдению действий, совершаемых другими игроками. Это обстоятельство может быть закодировано с помощью эпистемической модели действий A , состоящей из конкретных событий, связанных отношениями неопределенности.

К примеру, я вижу, что вы сносите карту, но я при этом знаю лишь то, что вы сносите либо червовую королеву, либо пикового короля. Оба действия предусмотрены в A , но для меня здесь имеет место отношение неопределенности между соответствующими событиями. Последовательные слои игрового дерева есть результат последовательного вычисления update products в смысле разделе 2:

$M, M \times A, (M \times A) \times A$, и т.д.

Учитывая специфику этого механизма обновления, можно показать, что возникновение пунктирных линий в полном игровом дереве основывается на ряде допущений (одним из которых является идеальная память), которые можно выписать в явном виде. Более подробно это рассматривается в van Benthem 2001A.

Координация ожиданий Однако же обновление информации, сопутствующее ходу наблюдаемых событий, отнюдь не исчерпывает того многообразия явлений, которые задействуются в процессах рассуждения в играх. Даже тогда, когда игроки в совершенстве представляют себе игровую структуру, включая всю цепочку уже осуществленных ходов, к сути игры относятся еще и ожидания игроков относительно своих и чужих образов действия. Такого рода предвосхищение вообще является одним из ключевых моментов любой формы человеческой деятельности. Теоретико-игровое понятие стратегического равновесия как раз связано с идеей устойчивого прогноза. Разумеется, существуют самые разные типы ожиданий. Предположим, что у вас есть основания считать, что моя память вмещает лишь один бит информации, т.е. что у меня в памяти остается лишь последний ход игры, и что мои действия зависят лишь от самого последнего вашего действия. Однако, возможно, что по ходу игры придется пересмотреть некоторые из ваших ожиданий. Предположим, что E ожидал от A «левого» хода в игре (b), однако игрок A вместо этого сделал «правый» ход. В этом случае E будет вынужден пересмотреть свои ожидания относительно стратегии игрока A . Иными словами, мы здесь входим в область *ревизии убеждений*, которая вкратце уже упоминалась в разделе 4. Таким образом, можно сказать, что логические исследования игр находятся на пороге нового проблемного поля: необходимости учета и соответствующего синтеза типов анализа – обновления информации и координации ожиданий.¹³

¹³ Абстрактные игры и процессы обновления имеют многочисленные точки соприкосновения с ситуациями конкретного разговора. Допустим, что имеется игровое дерево и игроки уже определились с выбором стратегий, но теперь задача заключается в том, чтобы распознать, где именно завершится игра. Выигрывает тот, кто первым догадается об этом. Это, конечно же, является игрой с неполной информацией, поскольку информация здесь раскрывается постепенно по мере вопрошания и получения ответов. В частности, признание в

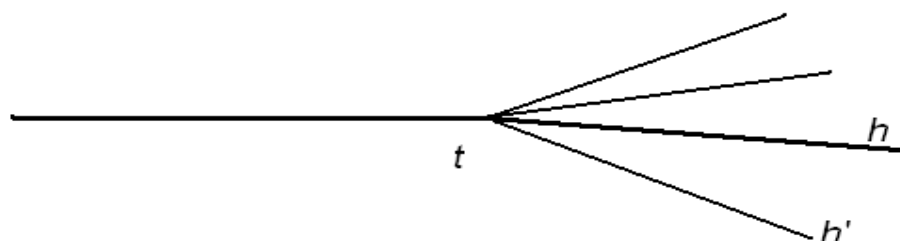
6 Эволюция во времени

Мы начали с рассмотрения логики простых актов коммуникации и соответствующих им обновлений «информационных состояний», совершаемой агентами коммуникации. Далее мы рассмотрели закономерности более длительных форм игрового поведения, где игроки пытаются добиться своих целей посредством конечных последовательностей действий, осуществляемых в ответ на действия противников. Это уже потребовало введения в игру более сильных типов логики, включающих в себя рассуждения о стратегиях. Но и это еще не всё: ведь коммуникация и игры включены в еще более широкий временной контекст, охватывающий самые разнообразные человеческие практики. Ниже мы коротко рассмотрим некоторые аспекты этой более широкой перспективы.

Конечное vs. бесконечное Игры, как и разговоры, и доказательства, ограничены во времени. Однако computer science изучает также и различные бесконечные процессы работы операционной системы, позволяющие осуществлять массу специальных конечных заданий. Подобную дихотомию можно усмотреть и в отношении когнитивных процессов в рамках Динамического поворота. Некоторые типы деятельности подразумеваются конечными во времени, а некоторые же играющими роль оперативной системы для первых. Примерами последних являются логические системы доказательств, или же, скажем, хорошо известные максимы Грайса, организующие возможность разговора. По аналогии с этим, теория игр изучает также и бесконечные игры вместе с соответствующими формами поведения игроков, такие как Дилемма заключенного, постоянно возобновляемая в рамках социального взаимодействия.

Временная логика Для изучения подобных феноменов логические системы, описанные выше, необходимо погрузить в подходящие временные системы, которые позволили бы ввести в игру, например, понятие эпистемического мульти-агентного протокола (и т.п.) Понятие протокола используется для того, чтобы кодировать самые общие закономерности, относящиеся к коммуникации, такие как знание одним агентом того, что его собеседник говорит правду только в половине случаев. Типичной картинкой здесь является ветвящееся дерево:

неспособности распознать точку завершения игры, содержит в себе полезную информацию, позволяющую исключить определенные ходы (см. van Benthem 2004).



Подобные временные универсы, с дополнительной эпистемической структурой, являются подходящими аренами, в рамках которых можно пытаться соединить отдельные акты обновления, конечные формы игровой деятельности и соответствующие бесконечные процессы, на фоне которых всё это происходит.^{14 15}

Динамическая логика и динамические системы Бесконечные аспекты той арены, где разворачивается современная теория игр, приводят нас к *эволюционным* идеям, где коллективное поведение анализируется в терминах равновесных свойств, которыми обладают бесконечные динамические системы, функция переходных состояний которых нередко аналогична функциям биологическим (см. Osborne & Rubinstein 1994). Это существенно иной стиль математического мышления о долгосрочных формах поведения, где устойчивые структуры являются результатом статистических свойств рассматриваемых популяций. В свете этой трудности задача согласования логического подхода, защищаемого в данной статье, с эволюционными процессами становится еще более заманчивой.

7 От анализа к синтезу

Последняя существенная деталь Динамического поворота, на которую хотелось бы обратить особое внимание, лежит в иной плоскости. Большая часть логических исследований до сих пор была нацелена на анализ и понимание *данных форм поведения*, говорят ли тут об использовании языка или о процессах рассуждения. Однако не меньший интерес представляет и тот неопровержимый факт, что результатом логических исследований является также и *создание новых способов*

¹⁴ Здесь следует упомянуть модели компьютерных вычислений Fagin et al. 1995, бесконечные игры Abramsky 1996, модель протоколирования сообщений Parikh & Ramanujam 2003, универсум обучающих механизмов Kelly 1996, и, скажем, философскую теорию рассуждения и действия Belnap et al. 2001.

¹⁵ Неопределенность, возникающая между конечными последовательностями действий в этих моделях естественным образом обобщает понятия динамической логики, введенные ранее. Например, в древообразных структурах эпистемическое обновление продуктов гарантирует, что две последовательности X и Y неразличимы, если они имеют одинаковую длину и все их соответствующие элементы X_i и Y_i неразличимы. Однако те системы, в основе памяти которых лежат конечные автоматы, неразличимы уже с точностью до некоторого фиксированного конечного числа предшествующих состояний.

выражения, рассуждения и вычисления. Хорошо известными примерами из computer science являются формальные языки спецификации, или логические программы. Но аналогичный ход от анализа к *конструированию* имеет смысл во всех когнитивных сферах. К примеру, любая целесообразная процедура голосования является конструктивным фрагментом «социального софта» (Parikh 2002), где нами создаются новые образцы поведения, нацеленные на извлечение определенной выгоды. Даже анализ подобных вещей является очень непростым занятием¹⁶: что уж говорить о том, насколько трудной может оказаться задача конструирования такого рода процессов! То же самое может быть сказано и о потоке новых игр, непрестанно зарождающихся в нашем мире, которые затем включаются в естественный ассортимент человеческой деятельности¹⁷. Системы, рассмотренные в данной статье, могут использоваться и в более «активистском» ключе, как способ формирования нового образа действий и, стало быть, изменения мира. Вот пример одной из самых первых логик обновления, так называемая Московская головоломка (van Ditmarsch 2002):

«Игрок *A* получает 1 карту, *B* и *C* получают по 3 карты. Что должны *B* и *C* сказать друг другу в присутствии *A*, чтобы они могли догадаться о выпавшем раскладе, а *A* нет?».

Размышляя о подобных головоломках, возникает вопрос и о процессе создания новых игр, или новых практик, прояснение которого представляется возможным методами динамических логик, средства которых позволяют очерчивать горизонт возможностей, а также целенаправленно держать в поле зрения сферу намеренных следствий.

8 Заключение

Задачей статьи было создание максимально широкой перспективы видения логики, какой она рисуется в контексте коммуникации, вычислительной и познавательной деятельности. Это позволяет синтезировать традиционные формы анализа рассуждения и определения с такими идеями как ревизия убеждений, планирование действий, игровые практики, а также рассмотреть эти феномены на фоне закономерностей, возникающих у длительных социальных процессов. Мы привели некоторые примеры того, как это можно было бы осуществить – хотя, разумеется, большей частью мы здесь имеем дело с красивыми пожеланиями, а не с устоявшейся практикой. Тем не менее, даже имеющийся в этом вопросе незначительный опыт подсказывает нам, что мечты имеют шанс осуществиться...

¹⁶ Хорошим примером тут является непостижимая процедура выбора Дожа, официально принятая в Венеции в 1268 г., со всеми ее защитными механизмами, призванными обеспечивать учет интереса всех сторон, кланов и партий, и включающими в себя многоступенчатое голосование и жеребьевку партиями. В своей *Истории Венеции* (Norwich, History of Venice, NY, 1989) Норвич говорит, что это «можно расценивать как поистине одно из самых сложных институциональных изобретений цивилизованного человечества».

¹⁷ Сравните также с исследованиями по «стратегическому проектированию» (mechanism design) в рамках современной теории игр.

9 Литература

S. Abramsky, 1998, 'From Computation to Interaction, towards a science of information', CS/IEE Turing Lecture.

G. Aucher, 2003, *A Joint System of Update Logic and Belief Revision*, Master of Logic Thesis, ILLC University of Amsterdam.

A. Baltag, L. Moss & S. Solecki, 1998, 'The Logic of Public Announcements, Common Knowledge and Private Suspicions', *Proceedings TARK 1998*, 43-56, Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos. Updated version, 2003, department of cognitive science, Indiana University, Bloomington, and department of computing, Oxford University.

N. Belnap, M. Perloff & M. Xu, 2001, *Facing the Future*, Oxford University Press, Oxford.

J. van Benthem, 1996, *Exploring Logical Dynamics*, CSLI Publications, Stanford.

J. van Benthem, 1999 Ð 2003, *Logic in Games*, electronic lecture notes, ILLC, Amsterdam & philosophy Stanford (occasional paper versions).

J. van Benthem, 2001A, 'Dynamic Epistemic Logic', *Bulletin of Economic Research* 53:4, 219-248 (Proceedings LOFT-4, Torino).

J. van Benthem, 2001B, 'Extensive Games as Process Models', *Journal of Logic, Language and Information* 11, 289-313.

J. van Benthem, 2001C, 'Logics for Information Update', *Proceedings TARK VIII (Siena 2001)*, Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos, 51-88.

J. van Benthem, 2002, 'One is a Lonely Number: on the logic of communication', Tech Report PP-2002-27, ILLC Amsterdam. To appear in P. Koepke et al. eds., *Colloquium Logicum, Muenster 2001*.

J. van Benthem, 2003A, 'Logic and the Dynamics of Information', in L. Floridi, ed., *Minds and Machines* 13:4, 503-519.

J. van Benthem, 2003B, 'Rational Dynamics and Epistemic Logic in Games', in S. Vannucci, ed., *Logic, Game Theory and Social Choice III*, University of Siena, department of political economy, 19-23.

J. van Benthem, 2003C, 'What One may Come to Know', Tech Report PP-2003-22, ILLC Amsterdam. To appear in *Analysis*, 2004.

J. van Benthem, 2004, 'Representing Arbitrary Games through Conversation', manuscript, ILLC Amsterdam.

H. van Ditmarsch, 2000, *Knowledge Games*, dissertation DS-2000-06, ILLC Amsterdam and University of Groningen.

H. van Ditmarsch, 2002, 'Keeping Secrets with Public Communication', department of computer science, University of Otago.

R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses & M. Vardi, 1995, *Reasoning about Knowledge*, The MIT Press, Cambridge (Mass.).

P. Gärdenfors & H. Rott, 1995, 'Belief Revision', in D. M. Gabbay, C. J. Hogger & J. A. Robinson, eds., *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming* 4, Oxford University Press, Oxford 1995.

V. Hendricks, 2002, 'Active Agents', PHILOG Newsletter, Roskilde. In J. van Benthem & R. van Rooij, eds., special issue on Information Theories, *Journal of Logic, Language and Information* 12:4, 469-495.

M. Osborne & A. Rubinstein, 1994, *A Course in Game Theory*, The MIT Press, Cambridge (Mass.).

R. Parikh, 1985, The Logic of Games and its Applications, *Annals of Discrete Mathematics* 24, 111-140.

R. Parikh, 2002, 'Social Software', *Synthese* 132, 187-211.

R. Parikh & R. Ramanujam, 2003, 'A Knowledge Based Semantics of Messages', CUNY New York & Chennai, India. In J. van Benthem & R. van Rooij, eds., special issue on Information Theories, *Journal of Logic, Language and Information* 12:4, 453-467.

M. Pauly, 2001, *Logic for Social Software*, dissertation DS-2001-10, Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam.

R. van Rooij, 2003, 'Quality and Quantity of Information Exchange. In J. van Benthem & R. van Rooij, eds., special issue on Information Theories, *Journal of Logic, Language and Information* 12:4, 423-451.

R. Stalnaker, 1999, Extensive and Strategic Form: Games and Models for Games, *Research in Economics* 53:2, 93-291.

F. Veltman, 1996, 'Defaults in Update Semantics', *Journal of Philosophical Logic* 25, 221-261.