Peter a Pavol Hlavatý - S1

Úvod

Animácia je vizuálna reprezentácia zmeny. V minulosti bola využívaná najmä v zábavnom priemysle (animované filmy), neskôr však našla uplatnenie aj vo fyzike (vizualizácia časticových systémov) a chémii (zobrazenie molekúl).

Keyframes

V minulosti bola animácia kreslená ručne. Nebola však vytváraná chronologicky. Najprv boli vytvorené kľúčové snímky - keyframes a až potom boli dokreslené snímky medzi kľúčovými snímkami. Podobný systém funguje aj v súčastnosti, pri počítačovej animácií. Najprv sa vytvoria kľúčové snímky a následne počítač dopočíta snímky medzi nimi. Dopočítaniu snímku sa v tomto prípade hovorí interpolácia.

Interpolácia

Keď máme kľúčové snímky, každý z nich má určený čas, kedy sa má zobraziť a tiež svoje parametre, ako napríklad pozícia alebo farba. Podľa hodnôt jednotlivých parametrov, treba vypočítať nové hodnoty parametrov pre ostatné snímky. Tieto hodnoty sú vypočítané pomocou interpolačnej funkcie, ktorá zoberie parametre dvoch snímkov a vypočíta parametre pre nový snímok v určenom čase.

Existuje veľké množstvo interpolačných funkcií. Tu je niekoľko príkladov:

- Najbližší sused
- Lineárna interpolácia
- Bézierova Interpolácia
- SLERP
- Catmull-Rom interpolácia

Najbližší sused

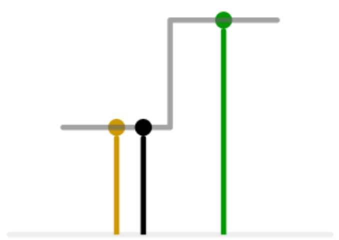
Jednoduchá metóda interpolácie, pri ktorej je vždy vybraná hodnota parametra z najbližšej kľúčovej hodnoty, pričom žiadne iné hodnoty nie sú zohľadňované.

Výhody

- Jednoduchá implementácia
- Vysoká rýchlosť výpočtu

Nevýhody

- Nefyzikálny pohyb
- Ostré prechody



Lineárna interpolácia

Pri tejto metóde sa parametre medzi dvoma kľúčovými snímkami menia lineárne.

Výpočet

$$p = (1 - s)p_i + sp_{i+1}$$

$$s = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

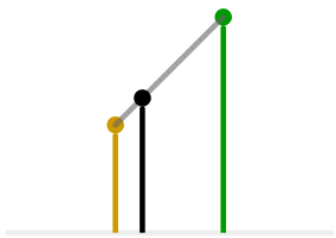
- $p_i \ a \ p_{i+1}$ sú hodnoty parametrov v kľúčových snímkoch
- p je hodnota parametra v interpolovanom snímku
- $t_i \ a \ t_{i+1}$ sú časy zobrazenia kľúčových snímkov
- t je čas zobrazenia interpolovaného snímku
- s vyjadruje v akom čase medzi kľúčovými snímkami sa nachádza interpolovaný snímok

Výhody

- Jednoduchá implementácia
- Vysoká rýchlosť výpočtu
- Plynulý pohyb medzi dvomi bodmi

Nevýhody

- Nezodpovedá fyzikálnym zákonom
- Pohyb je iba lineárny
- Prvá derivácia času pohybu je nespojitá, prechod cez kľúčové snímky je preto neplynulý



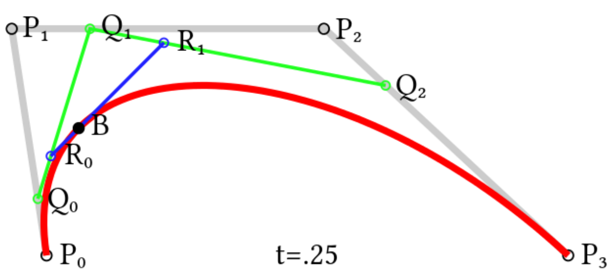
Bézierova interpolácia

Pri tejto interpolácii sa využíva Bézierova krivka, ktorá vytvára plynulé prechody medzi kľúčovými snímkami. Počíta sa na základe dvoch alebo viacerých kľúčových snímkov. Podľa toho, koľko snímkov sa využíva určujeme stupeň Bézierovej krivky. Všeobecná Bézierova krivka n-tého stupňa pre n+1 zadaných kontrolných bodov je pre $s \in < 0,1 >$ definovaná ako:

$$B^n(s) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (1 - s)^{n-i} s^i p_i$$

V praxi sa často používa kubická Bézierova krivka (n=3). Určuje sa na základe štyroch riadiacich bodov pričom vždy prechádza prvým a posledným bodom a bodmi medzi nimi zvyčajne neprechádza. Vzťah pre túto krivku je tento:

$$B^3(s) = (1 - s)^3 p_0 + (1 - s)^2 sp_1 + (1 - s)s^2 p_2 + s^3 p_3$$



Reprezentácia orientácie v priestore

Orientáciu objektu v priestore môžme vyjadriť rôznymi spôsobmi. Medzi bežné spôsoby patria nasledovné:

- Eulerove uhly
- Orientácia zadaná osou otáčania a uhlom
- Kvaternión

Eulerove uhly

Tento spôsob reprezentácie orientácie využíva fakt, že každá orientácia sa dá vyskladať z 3 uhlov, ktoré reprezentujú rotácie okolo x-ovej, y-ovej a z-ovej súradnicovej osi. Tieto rotácie môžeme reprezentovať tromi rotačnými maticami:

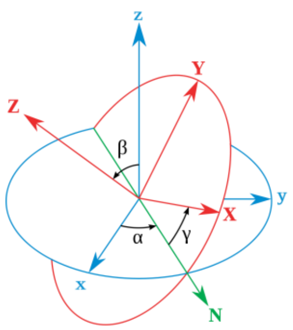
$$R_{x(\alpha)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} \quad R_{y(\beta)} = \begin{vmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{vmatrix} \quad R_{z(\gamma)} = \begin{vmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Výhody:

- Jednoduchosť implementácie cez matice
- Matice sa dajú použiť na všetky základné transformácie napríklad posun, rotácia alebo škálovanie

Nevýhody:

- Jedna orientácia môže byť zapísaná rôznymi kombináciami Eulerových uhlov
- Výsledná orientácia je závislá na poradí aplikovania rotácií
- Môže vzniknúť gimbal lock - strata jednej súradnice v dôsledku splynutia dvoch osí

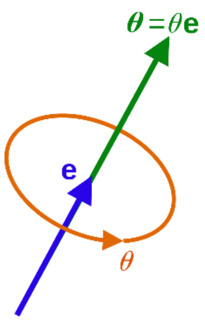


Orientácia zadaná osou otáčania a uhlom

Tento spôsob reprezentácie orientácie definuje každú orientáciu pomocou jednotkového vektora, ktorý je osou otáčania a uhla, ktorý reprezentuje otočenie okolo tejto osi.

Ak *u* je vektor, ktorý je osou otáčania a α je uhol reprezentujúci veľkosť rotácie, tak rotačnú maticu môžeme vypočítať nasledovným spôsobom:

$$R = P + (I - P)\cos(\alpha) - Q\sin(\alpha)$$



$$P = \begin{pmatrix} u_x u_x & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & u_y u_y & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & u_z u_z \end{pmatrix} = uu^T \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; Q = \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Kvaternión</u>

Kvaternióny sú číselný systém, ktorý rozširuje komplexné čísla. Všeobecne sú vyjadrené vo forme $q = a + bi + cj + dk$ kde *a, b, c* a *d* sú reálne čísla a *i, j* a *k* sú základné kvaterniónové jednotky. Kvaternión môžeme rozdeliť na skalárnu a vektorovú časť. Skalárna časť je a a vektorová časť je $bi + cj + dk$. Pre kvaternióny platia tieto vzťahy:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, \qquad ji = -k$$

$$ki = j, \qquad ik = -j$$

$$jk = i, \qquad kj = -i$$

Sčítavanie kvaterniónov p a q

$$p + q = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

Násobeniekvaterniónov p a q

$$\begin{aligned} pq &= (a + bi + cj + dk)\,(a' + b'i + c'j + d'k) \\ &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' + dc')i + (ac' + bd' + ca' + db')j \\ &\quad + (ad' + bc' + cb' + da')k \end{aligned}$$

- *Nie je komutatívne*

Norma kvaterniónu $||q||$

$$||q|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

- Ak $||q|| = 1$ tak kvaternión je jednotkový

Konjugovaný kvaternión $\bar{q}$

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

Inverzný kvaternión q^{-1}

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{||q||^2}$$

Rotácia vektora v kvaterniónom q

$$v' = qvq^{-1}$$

- Kvaternión -*q* reprezentuje rovnakú rotáciu ako kvaternión *q*

Kompozícia rotácií kvaterniónov p a q

$$r = pq$$

Výhody

- Nevzniká gimbal lock
- Jednoduchá kompozícia rotácií
- Nezávislosť od súradnicového systému

Nevýhody

- Kvaternióny reprezentujú iba rotáciu
- Kvaterniónová matematika je komplikovaná

Kvaterniónová interpolácia

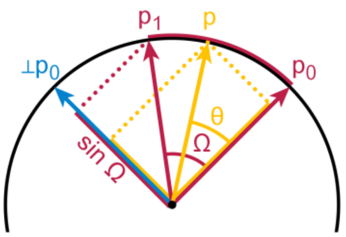
Sférická lineárna interpolácia - SLERP

Táto metóda je podobná ako lineárna interpolácia. Keď je táto interpolácia aplikovaná na jednotkové kvaternióny, tak generuje najkratšiu rotáciu s konštantnou uhlovou rýchlosťou medzi orientáciami *p* a *q*.

Pre dva vektory v_0 a v_1 a interpolačný parameter *t* z intervalu (0,1) je SLERP definovaný ako:

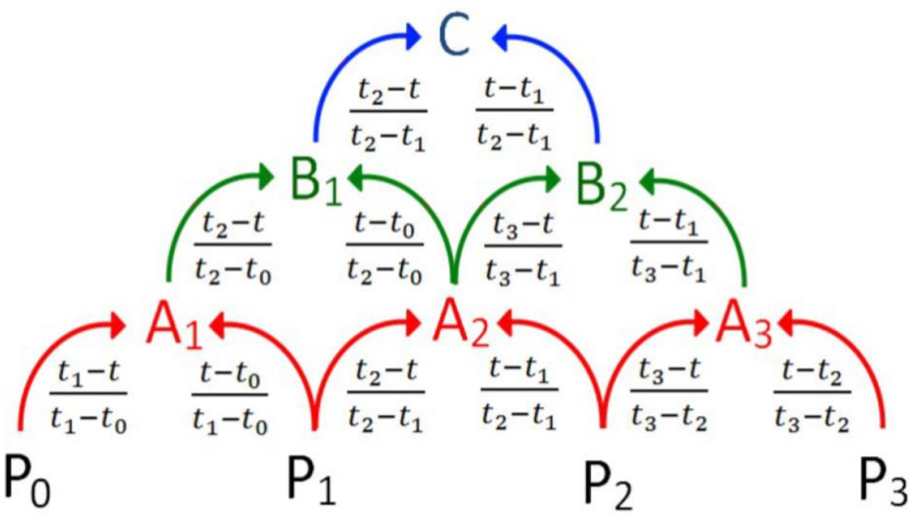
$$slerp(t, v_0, v_1) = \frac{\sin((1-t)a)}{\sin(a)} v_0 + \frac{\sin(ta)}{\sin a} v_1$$

- $a = \cos^{-1}(v_0 v_1)$, a je uhol medzi v_0 a v_1



Catmull-Rom

Táto metóda je podobná ako Bézierova interpolácia. Ak vstupné kvaternióny označíme ako $P_0,\ P_1,\ P_2$ a P_3 Catmull-Rom vypočítame tak, že použijeme SLERP niekoľkokrát po sebe s rôznymi parametrami, tak ako je to zobrazené na nasledovnej schéme:



Vzťah na výpočet SLERP je v tomto prípade takýto:

$$slerp(P_0, P_1, t) = \frac{\sin\big((1-t)*\theta\big)}{\sin(\theta)} P_0 + \frac{\sin(t*\theta)}{\sin(\theta)} P_1$$

pričom

$$\theta = \cos^{-1}(q_1 \cdot q_2)$$