Карнаухов Георгий M3101

Вариант 14

x	5	15	25	35	45	55
y	2,2	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9

Рассмотрим несколько случаев подбора аппроксимирующей функций $y = f(x, a, b)$

Решение

1. Линейная функция

Выберем значения коэффициентов a и b так, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальной.

Функция $S(a, b)$ будет принимать минимальное значение, если обращаются в нуль частные производные S'_a и S'_b

$$\begin{cases} S'_a(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) * x_i = 0 \\ S'_b(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) * 1 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * b = \sum_{i=1}^{n} x_i * y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * a + n * b = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{6} x_i = 180$, $\sum_{i=1}^{6} y_i = 15{,}6$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 7150$, $\sum_{i=1}^{6} x_i * y_i = 492$

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 7150 * a + 180 * b = 492 \\ 180 * a + 6 * b = 15{,}6 \end{cases}$$

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7150 & 180 \\ 180 & 6 \end{vmatrix} = 10500, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 492 & 180 \\ 15,6 & 6 \end{vmatrix} = 144,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7150 & 492 \\ 180 & 15,6 \end{vmatrix} = 22980$$

Тогда $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,013714281801$; $b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2,18818014286$.

Следовательно, искомая линейная функция будет иметь вид:

$$y = 0,013714281801x + 2,18818014286$$

2. Степенная функция

Найдем зависимость y от x в виде степенной функции $y = \beta * x^a$.

Прологарифмируем равенство $y = \beta * x^a$ по основанию e и получим $\ln y = a * \ln x + \ln \beta$.

Обозначим Y = $\ln y$, X = $\ln x$, b = $\ln \beta$.

Тогда получим линейную функцию Y = a * X + b, где переменные X и Y связаны следующей табличной зависимостью:

X = $\ln x$	1,6094379124	2,7080502011	3,2188758249	3,5553480615	3,8066624898	4,007333185232
Y = $\ln y$	0,78841803604	0,8754687374	0,955511445	0,993251773	1,02961941718	1,064710737150

Таким образом, данная задача свелась к задаче **1.1**

Система имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} \ln {x_i}^2\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i\right) * b = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i * \ln y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i\right) * a + n * b = \sum_{i=1}^{n} ln\, y_i \end{cases}$$

Коэффициенты системы:

$$\sum_{i=1}^{6} ln\, x_i = 18{,}90180076749, \sum_{i=1}^{6} ln\, y_i = 5{,}70701947,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \ln {x_i}^2 = 63{,}47488558180, \sum_{i=1}^{6} \ln x_i * \ln y_i = 221{,}8349238949$$

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 63{,}47488558180 * a + 18{,}90180076749 * b = 221{,}8349238949 \\ 18{,}90180076749 * a + 6 * b = 5{,}70701947 \end{cases}$$

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 63{,}47488558180 & 18{,}90180076749 \\ 18{,}90180076749 & 6 \end{vmatrix} = 23{,}4235308254,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 221{,}8349238949 & 18{,}90180076749 \\ 5{,}70701947 & 6 \end{vmatrix} = 1\,223{,}11430118046,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 63{,}47488558180 & 221{,}8349238949 \\ 18{,}90180076749 & 5{,}70701947 \end{vmatrix} = -3\,831{,}6938153471$$

Тогда $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 52{,}2173326768$ и $b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -163{,}58310128.$

$$\beta = e^b = 9{,}05235926109 \times 10^{-72}.$$

получаем искомую степенную функцию:

$$y = 9{,}05235926109 \times 10^{-72} * x^{52{,}2173326768}.$$

3. Показательная функция

Найдем зависимость y от x в виде показательной функции $y = \beta * e^{ax}$.

Прологарифмируем равенство $y = \beta * e^{ax}$ по основанию e и получим $\ln y = ax + \ln \beta$.

Обозначим Y = $\ln y$, b = $\ln \beta$.

Тогда получим линейную функцию $Y = ax + b$, где переменные x и Y связаны следующей табличной зависимостью:

x	5	15	25	35	45	55
$Y = \ln y$	0,78841803604	0,8754687374	0,955511445	0,993251773	1,02961941718	1,064710737150

Таким образом, задача свелась к задаче **1.1.**

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * b = \sum_{i=1}^{n} x_i * \ln y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * a + n * b = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \end{cases}$$

Коэффициенты системы:

$\sum_{i=1}^{6} x_i = 180$,

$\sum_{i=1}^{6} \ln y_i = 5{,}70701947$,

$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 7150$,

$\sum_{i=1}^{6} x_i * \ln y_i = 180{,}6178803506$.

Тогда система уравнений примет вид

$$\begin{cases} 7150 * a + 180 * b = 180{,}6178803506 \\ 180 * a + 6 * b = 5{,}70701947 \end{cases}$$

Определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7150 & 180 \\ 180 & 6 \end{vmatrix} = 10500,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 180{,}6178803506 & 180 \\ 5{,}70701947 & 6 \end{vmatrix} = 56{,}4437775036,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7150 & 180{,}6178803506 \\ 180 & 5{,}70701947 \end{vmatrix} = 8293{,}970747392.$$

Тогда $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0{,}0053755978180$ и $b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0{,}7899019759$.

$\beta = e^b = 2{,}2031804509$.

Получаем искомую показательную функцию

$y = 2{,}2031804509 * e^{\,0{,}0053755978180x}$.

4. *Квадратичная функция*

Найдем зависимость *y* от *x* в виде квадратичной функции *y* = $ax^2 + bx + c$. Выберем коэффициенты a, b и *c* так, чтобы сумма квадратов отклонений $S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$ была минимальной.

Функция *S (a, b, c)* будет принимать минимальное значение, если частные производные $S'_a(a,b,c)$, $S'_b(a,b,c)$, $S'_c(a,b,c)$обращаются в нуль:

$$\begin{cases} S'_a(a,b,c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) * x_i^2 = 0 \\ S'_b(a,b,c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) * x_i = 0 \\ S'_c(a,b,c) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) * 1 = 0 \end{cases}$$

Преобразуем уравнения системы следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) * a + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) * b + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 * y_i \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) * a + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * b + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i * y_i \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) * a + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) * b + n * c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Коэффициенты системы:

$\sum_{i=1}^{6} x_i^4 = 15193750$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^3 = 319500$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 7150$, $\sum_{i=1}^{6} x_i = 180$, $\sum_{i=1}^{6} x_i * y_i = 492$,

$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 * y_i = 19970$, $\sum_{i=1}^{6} y_i = 15{,}6$

Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 15193750 * a + 319500 * b + 7150 * c = 19970 \\ 319500 * a + 7150 * b + 180 * c = 492 \\ 7150 * a + 180 * b + 6 * c = 15{,}6 \end{cases}$$

Решим систему уравнений по формулам Крамера:

$$\Delta = 3920000000$$
$$\Delta_1 = -630000$$
$$\Delta_2 = 91560000$$
$$\Delta_3 = 8195950000$$

Тогда

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -0{,}0001607142857,$$
$$b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0{,}02335714286,$$
$$c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2{,}09080357143.$$

Следовательно, искомая квадратичная функция будет иметь вид:

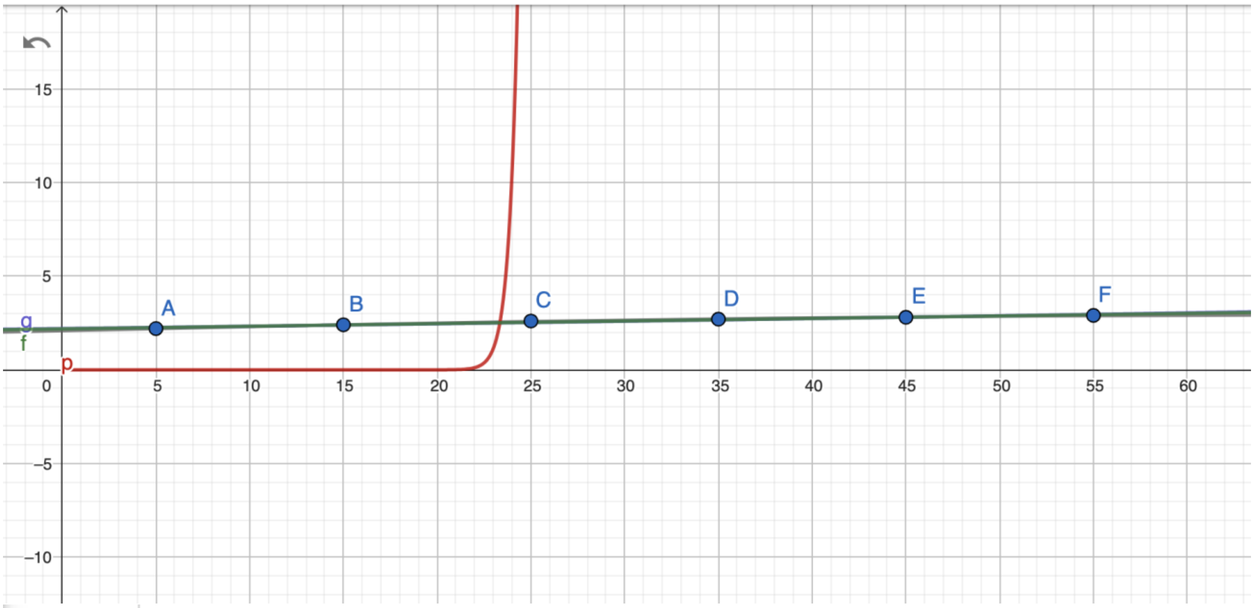
$$y = -0{,}0001607142857 * x^2 + 0{,}02335714286 * x + 2{,}09080357143$$

Вывод

Построим в плоскости *Oxy* графики полученных функций и нанесем экспериментальные точки.

Для этого составим таблицу значений полученных функций

x	5	15	25	35	45	55
y	2,2	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9
$y = 0{,}013714281801x + 2{,}18818014286$	2.256751551865	2.393894369875	2.531037187885	2.668180005895	2.8053228239049997	2.9424656419149997
$y = 9{,}05235926109 * 10^{-72} * x^{52{,}2173326768}$.	2.85147234063737e-35	2.3394313952738053e-10	89.83804169092309	3835981720.124782	1919152997789994.0	6.8211769697612644e+19
$y = 2{,}2031804509 * e^{0{,}0053755978180x}$.	2,2632	2,3882	2,52	2,6593	2,806	2.9611
$y = -0{,}0001607142857 * x^2 + 0{,}02335714286 * x + 2{,}09080357143$	2,2036	2,405	2,5743	2,71143	2,81643	2,8893



$$f: y = 0.013714281801\,x + 2.18818014286$$

$$g: y = 2.2031804509\,e^{0.005375597818x}$$

$$h: y = -0.0001607142857\,x^2 + 0.02335714286x + 2.09080357143$$

$$p: y = 9.05235926109 \cdot 10^{-72}\,x^{52.2173326768}$$

Сравним полученные результаты. Для этого найдем соответствующие суммарные погрешности.

$$S_1(a,b) = 0.010858062035536731$$

$$S_2(a,b) = 4.652845528963295e + 39$$

$$S_3(a,b) = 0.015950562093898973$$

$$S_4(a,b) = 0.0012135297999999999$$

В данной задаче лучшей *аппроксимирующей функцией* является квадратичная функция:

$$y = -0{,}0001607142857 * x^2 + 0{,}02335714286 * x + 2{,}09080357143$$