Def Произведение операторов (композиция)

AB - произведение $A : V \to W$ $B : U \to V$

$(AB)x = A(Bx)$, $x \in U$

Св-ва: - Lab Док-ть

1° $\lambda(AB) = (\lambda A)B$

2° $(A+B)C = AC + BC$

3° $A(B+C) = AB + A$

4° $A(BC) = (AB)C$

Note можно обобщить 4° на n равных A

Def $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$ - степень оператора

$A^{m+n} = A^n \cdot A^m$ св-во

2.3 Обратимость оператора

$A : V \to W$ так, что $AV = W$ и $\forall x_1 \neq x_2$
$x_{1,2} \in V$

Тогда A наз взаимно-однозначно действующим

$\left.\begin{aligned} y_1 &= Ax_1 \\ y_2 &= Ax_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 \neq y_2$

Note Проще сказать "линейной биекции изоморфизм"

Th Взаимооднозначный оператор переходит из ЛНЗ в ЛНЗ систему

$$\{x_i\} - \text{ЛНЗ} \xrightarrow[A]{Ax=y} \{y_i\} - \text{ЛНЗ}$$

$\triangle$ $\exists\, \mathcal{A}: V \to W$ и Θ_V, Θ_W — нули V и W соотв.

$\mathcal{A}(\Theta_V) = \Theta_W$: Введем базис $V: \{e_i\}_{i=1}^{k}$

1) Тогда $0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n = \Theta_V$

Тогда $\mathcal{A}(\Theta_V) = \mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} 0\cdot e_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} 0\cdot \mathcal{A} e_i = \Theta_W$

2) ~~Докажем~~, что если $\{x_i\} \subset V$ — ЛНЗ, то $\{y_i\} \subset W$ ЛНЗ

составим $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j y_j = \Theta_W$ (от противного)

$\exists$ $\{y_i\}$ — ЛНЗ, тогда $\exists\, \lambda_k \neq 0$.

При этом: $\forall j$ $y_j = \mathcal{A} x_j$ (т.к. $\mathcal{A}$ — взаимо-одн., то $n' = m'$: кол-во x_j и y_j равно)

$$\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A} x_j \overset{\text{линейн.}}{=\!=\!=} \mathcal{A}\left(\sum \lambda_j x_j\right) = \Theta_W$$

Т.к. $\mathcal{A}(\Theta_V) = \Theta_W$, то Θ_W — образ $x = \Theta_V$, но т.к. $\mathcal{A}$ — взаим.-одн., то $\nexists\, x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = \Theta_W$

Значит $\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = \Theta_V$, но $\exists\, \lambda_k \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_j\}$ — ЛЗ $\Longrightarrow$ противоречие

3) Пусть теперь $\{y_j\}$ — ЛНЗ, а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) — ЛЗ

$\mathcal{A}\cdot \Big| \sum_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \xlongequal{\exists \lambda_k \neq 0} \Theta_V \quad \sum \lambda_i \underbrace{\mathcal{A} x_i}_{} = \Theta_W$

y_i в таком же пор-ке, что и x_i

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \Rightarrow \{y_i\}$ — ЛЗ $\Rightarrow$ противоречие

Следствие $\dim V = \dim W \Leftarrow \mathcal{A}$ — лин изоморфизм

Def $\mathcal{B}: W \to V$ наз. обратным для $\mathcal{A}: V \to W$, если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$ (обозн. $\mathcal{B} \overset{\text{обозн}}{=} \mathcal{A}^{-1}$)

Следствие $\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} x = x$

Th $\mathcal{A}x = \Theta \quad \exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = \Theta$

D ($\Rightarrow$) $\mathcal{A}^{-1} \mathcal{A} x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}(\Theta_W) = \Theta_V$

$\quad \| $

$(\mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A}) x = \mathcal{I}_x = x$ ∎

Линейный изоморфизм обратим —

Th Н,ДУ сущ A^{-1}

A, A^{-1} — лин $\exists A^{-1} \Leftrightarrow A$ — вз.-одн.

$A: V \to W$

$\Rightarrow$ $\exists A^{-1}$, но $\neg A$ — не вз.-одн. т.е. $\exists x_1, x_2 \in V$, $x_1 \neq x_2$

$Ax_1 = Ax_2 \Leftrightarrow Ax_1 - Ax_2 = \theta \Leftrightarrow A(\underbrace{x_1 - x_2}_{x}) = \theta_W$

$\exists A^{-1} \Rightarrow x = \theta_V \Leftrightarrow x_1 = x_2$ — противоречие

($\Leftarrow$) Т.к. A — изоморфизм (не уч. линейность), то $\exists A'$ — обратное (не обяз. лин.)

Д-м, что $A': W \to V$ — лин. оператор

? $A'\left(\sum \lambda_i y_i\right) = \sum \lambda_i A' y_i = \sum \lambda_i x_i$

A — вз. одн. $\Leftrightarrow \forall x_i \longleftrightarrow y_i \mid \cdot \lambda_i, \sum$

$A(\underbrace{\sum \lambda_i x_i}_{x}) \xrightarrow{\text{обозн.}} Ax = y = \underbrace{\sum \lambda_i y_i}_{y}$ и y им. единств. прообраз

Применим A' к $y = \sum \lambda_i y_i$ $A'y \xrightarrow{\text{обр.}} x = \sum \lambda_i x_i$

Д.к-о. A' переводит лин. комб. прообразов, т.е. A' — линейно: $A' = A^{-1}$

(2.4) Матрица ЛО

$$Ax = y = \sum_{i=1}^{m} b_i f_i$$

$$A: V^n \to W^n$$

Возьмём вектор $x \in V^n$ и разложим по к-либо базису V^n $\{e_j\}_{j=1}^{n}$

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{Ae_j}_{=?}$$

Ae_j — образ базис. вектора y_i: $\{f_i\}$ — базис W^m $\sum^m$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} c_j Ae_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum \sum a_{ij} c_j f_i =$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j}_{= b_i} f_i}$$

Иллюстрация

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{\text{вектор } x \text{ в базисе } \{e\}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{вектор } y \text{ в базисе } \{f\}}$$

Def Матрица $A=\{a_{ij}\}_{\substack{i=1..n\\ j=1..m}}$ наз. матрицей оператора $\mathcal{A}: V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ пр-ва V^n

<u>Вопросы</u>

1) Для всякого ли оператора $\mathcal{A}$ существует A?

2) $\forall ?\ A\ \exists\ \mathcal{A}$

3) если $\exists A$ для $\mathcal{A}$, то единств?

4) если $\exists \mathcal{A}$ для A, то единств?

Ответы:

1) При выбранном базисе $\{e_j\}$ $\forall \mathcal{A}\ \exists A$ (смот. опр. выше)

3) При выбранном базисе такая A единств. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A}$ $A_e \neq A_{e'}$

2) $\forall A_{m\times n}$ и вазьм пару ЛП V^n, W^m и опр.

$\mathcal{A}: V^n \to W^m$ по правилу $\mathcal{A}e_v = e'_w$, т.е

$$\begin{pmatrix} a_1 & & a \\ & \ddots & \\ a & & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m\end{pmatrix}$$

4) Док от противного

<u>Nota</u> Далее б. решать две задачи:

1) преобразование координат как действ оператора

2) поиск наиболее простой матрицы в нек. базисе

2.5 Ядро и образ оператора

Def Ядро оператора — $\ker \mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \Theta_W\}$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{A}: V \to W \\ \mathcal{A}x = y \end{array}\right)$$

Def Образ оператора — $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \{y \in W \mid y = \mathcal{A}x\}$

Note $\ker \mathcal{A}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — п/пр-ва