Рассмотрим на $[-\pi; \pi]$

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$

1) Проверим, что в системе функций любая пара ортогональна

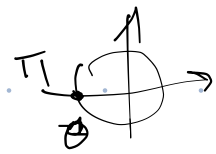
Скалярное пр-е: $(f_1, f_2) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx$

$f_1 \perp f_2 \iff (f_1, f_2) = 0$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot 1\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$= [u = nx \quad du = n\,dx]$

$$= \frac{\overset{=0}{\sin \pi n}}{n} - \frac{\sin(-\pi n)}{n}\Bigg|^{=0}_{=0}$$



$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = [u = nx \quad du = n\,dx] =$$

$$= \frac{1}{n}\int \sin u\,du = -\frac{1}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{n}\overset{=1}{\cos n\pi} + \frac{1}{n}\overset{=1}{\cos -n\pi} = 0.$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx\,dx \overset{\text{нечёт}}{=} 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos kx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(n-k)x + \cos(n+k)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(n-k)x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos(n+k)x\, dx =$$

$$= \left[\begin{matrix} u_1 = (n-k)x & du_1 = (n-k)\,dx \\ u_2 = (n+k)x & du_2 = (n+k)\,dx \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2(n-k)}\int \cos u_1\, du_1 + \frac{1}{2(n+k)}\int \cos(u_2)\, du_2 =$$

$$= \frac{\overbrace{\sin(n-k)x}^{=0}}{2(n-k)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\overbrace{\sin(n+k)x}^{=0}}{2(n+k)}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\, dx = \frac{x}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4n}\int \cos 2nx\, d2nx =$$

$$= \pi + \frac{\sin 2xn}{4n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

но!

$$\int \sin^2 nx\, dx = \pi \qquad \int 1^2 dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\begin{cases} \cos nx \perp \sin mx & \forall n, m \in \mathbb{N} \\ \sin nx \perp \sin mx & (n \neq m) \\ \cos nx \perp \cos mx & (n \neq m) \\ 1 \perp \cos nx \\ 1 \perp \sin nx \end{cases} \Rightarrow \text{сист. ортогональна}$$

$$\|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$ система нормированных векторов

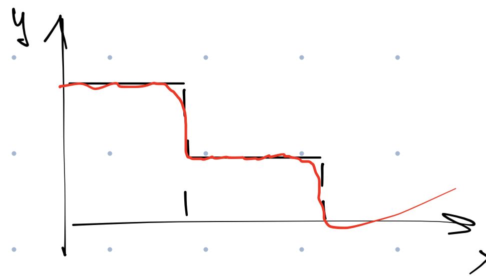
Нормирующие множители

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x;\ \ldots;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx}$$

ряд Фурье



Линейные операторы

$$A: V^n \to W^m$$

1) $x_1, x_2 \in V^n \Rightarrow A(x_1+x_2) = A(x_1) + A(x_2)$

2) $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in V^n \Rightarrow A(\alpha x) = \alpha A(x)$

1) Является ли отображение A лин. оператором, если:

а) $x = (v_1, v_2, v_3)^T \Rightarrow A(x) = (v_1, -v_2, v_3)^T$

$y = (u_1, u_2, u_3)^T$

$x+y=(v_1+u_1, v_2+u_2, v_3+u_3)^T$

$A(x+y) = \underset{A(x)}{(v_1-v_2, v_3)^T} + \underset{A(y)}{(u_1-u_2, u_3)^T} = (v_1-v_2+u_1-u_2, v_3+u_3)^T$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha A(x) = \alpha(v_1-v_2, v_3)$

$A(\alpha x) = (\alpha(v_1-v_2), \alpha v_3) = \alpha(v_1-v_2, v_3) = \alpha A(x)$

2) $x=(v_1, v_2, v_3)^T \in V^3 \Rightarrow A(x)=(v_1, (v_2+v_3)^2)$

$y=(u_1, u_2, u_3)$

$x+y_i = u_i+v_i$

$A(x) = (v_1 (v_2+v_3)^2)$

$A(y) = (u_1 (u_2+u_3)^2)$

$A(x+y) = (v_1+u_1, (v_2+v_3+u_2+u_3)^2)^T$

$A(x)+A(y) = (v_1+u_1 (v_2+v_3)^2+(u_2+u_3)^2)^T$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$A(\alpha x) = (\alpha v_1, (\alpha v_2+\alpha v_3)^2)^T \cancel{= \alpha A(x)}) =$

$= (\alpha v_1, \underset{\alpha^2(v_2+v_3)^2}{\alpha^2 v_2^2 + 2\alpha^2 v_2 v_3 + \alpha^2 v_3^2}) \neq \alpha A(x)$

$A: V \longrightarrow V$

$\{\bar{e}_1; \bar{e}_2; \dots; \bar{e}_n\}$ базис в V

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$

Найти $\bar{y} = A(\bar{x})$

$\bar{y} = A(x_1\bar{e}_1 + \dots x_n\bar{e}_n) = x_1 A(\bar{e}_1) + \dots + x_n A(\bar{e}_n)$

Надо подейств. оператором на базис. век.

$A(\bar{e}_1) = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + \dots + a_{1n}\bar{e}_n$

$\dots$

$A(\bar{e}_n) = a_{n1}\bar{e}_1 + a_{n2}\bar{e}_2 + \dots + a_{nn}\bar{e}_n$

$$?A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

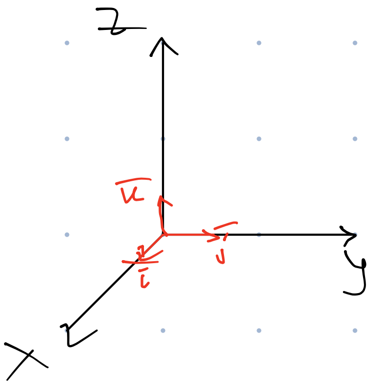
$$\bar{y} = A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Задача 3

$\mathcal{A}$ – проекция на плоскость XOZ в E^3

1) матрицу лин оператора $\mathcal{A}$

2) найти образ вектора $\bar{a} = (1, 2, 3)$



$\vec{i} = (1, 0, 0)$

$\bar{j} = (0, 1, 0)$

$\bar{k} = (0, 0, 1)$

$f(\bar{i}) = \bar{i}$

$f(\bar{j}) = \bar{0}$

$f(\bar{k}) = \bar{k}$

$3 \times 3 \qquad 3 \times 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (1, 2, 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A(\bar{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$