# Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
# Laboratorium 9
# Faktoryzacja QR

21 maja 2020

## Przydatne funkcje

- Python NumPy: `numpy.linalg.qr`

## Ogólne uwagi

Każdy kolejny krok rozwiązania powinien być opisany, a na końcu każdego zadania powinny zostać przedstawione wnioski. Jeśli przedstawione są wyniki powinny być zinterpretowane. Zadanie najlepiej przesłać jako Jupyter notebook zawierający kod oraz tekst sprawozdania.

## Zadanie 1 Faktoryzacja QR metodą Grama-Schmidta

1. Napisz funkcję dokonującą faktoryzacji QR macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A} = [\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}]$ ($\mathbf{a_i}$ to kolejne kolumny macierzy A) klasyczną metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta:

---

Dla $k = 1$:

$$\mathbf{u_1} \leftarrow \frac{\mathbf{a_1}}{||\mathbf{a_1}||} \tag{1}$$

Dla $k > 1$:

$$\mathbf{u_k} \leftarrow \mathbf{a_k} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \mathbf{u_i}, \mathbf{a_k} \rangle \mathbf{u_i} \tag{2}$$

$$\mathbf{u_k} \leftarrow \frac{\mathbf{u_k}}{||\mathbf{u_k}||} \tag{3}$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{a_1} \rangle & \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{a_2} \rangle & \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{a_3} \rangle & \ldots \\ 0 & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{a_2} \rangle & \langle \mathbf{u_2}, \mathbf{a_3} \rangle & \ldots \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{u_3}, \mathbf{a_3} \rangle & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

gdzie $\langle a, b \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów $a, b$.

2. Przetestuj zaimplementowaną metodę porównując wyniki uzyskane z jej pomocą z wynikami zwracanymi przez funkcję biblioteczną. W testach wykorzystaj 4-5 macierzy losowych o różnym rozmiarze.

3. Wygeneruj 30-50 przykładowych macierzy $8 \times 8$ o różnym wskaźniku uwarunkowania $\mathbf{cond}(\mathbf{A_i})$ (stosunek największej do najmniejszej wartości osobliwej). Wykorzystaj w tym celu SVD oraz biblioteczną funkcję realizującą dekompozycję QR (potrzebne będą dwie losowe macierze ortogonalne oraz diagonalna macierz odpowiednio szybko malejących wartości osobliwych).

4. Dla każdej z uzyskanych w ten sposób macierzy $\mathbf{A}_i$ wyznacz faktoryzację QR korzystając z zaimplementowanej funkcji ($\mathbf{A}_i = \mathbf{Q}_i\mathbf{R}_i$). Przedstaw zależność $\|\mathbf{I} - \mathbf{Q}_i^T\mathbf{Q}_i\|$ od $\mathbf{cond}(\mathbf{A}_i)$.

5. Zinterpretuj wyniki. Jaka jest przyczyna uzyskanych rozbieżności? Od czego zależy wielkość rozbieżności?

## Zadanie 2 Rozwiązywanie układów równań metodą QR

Bezpośrednie rozwiązywanie układu równań przy pomocy równań normalnych jest obarczone dużym błędem jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest źle uwarunkowana (jej współczynnik uwarunkowania jest wysoki). Lepszym sposobem jest wykorzystanie dekompozycji QR w tym celu.

Napisz funkcję rozwiązującą nadokreślony układ równań liniowych metodą QR korzystając z własności macierzy ortogonalnych: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$, a także z mechanizmu *back substitution*. Następnie wykorzystaj ją do rozwiązania problemu aproksymacji średniokwadratowej dla zbioru punktów podanego tabeli poniżej. Przyjmij model postaci:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

. Przedstaw wizualizację uzyskanego wyniku (punkty oraz funkcja aproksymująca $f$).

| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 7 | 9 | 12 | 13 | 14 | 14 | 13 | 10 | 8 | 4 |