

Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice

Laboratorium 3

Singular Value Decomposition

18 marca 2020

Przydatne funkcje

- Python NumPy: `linalg.svd`,
- Python SciPy: `misc.imread`

Zadanie 1 Przekształcenie sfery w elipsoidę

1. Korzystając z równania parametrycznego narysuj sferę jednostkową w 3D

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos(s) \sin(t) \\ \sin(s) \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

$$s \in [0, 2\pi], t \in [0, \pi]$$

2. Wygeneruj 3 różne macierze $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$, ($\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$), za ich pomocą dokonaj przekształcenia sfery w elipsoidę, a następnie przedstaw wizualizację uzyskanego wyniku.
3. Dokonaj rozkładu według wartości osobliwych (SVD) każdej macierzy \mathbf{A}_i . Na wykresie elipsoidy odpowiadającej przekształceniu \mathbf{A}_i dodaj wizualizację jej półosi wyznaczonych za pomocą SVD.
4. Znajdź taką macierz \mathbf{A}_i , aby stosunek jej największej i najmniejszej wartości osobliwej był większy od 100. Narysuj odpowiadającą jej elipsoidę.
5. Dla wybranej macierzy \mathbf{A}_i przedstaw wizualizacje $\mathbf{S}\mathbf{V}_i^T$, $\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{V}_i^T$ oraz $\mathbf{S}\mathbf{U}_i\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{V}_i^T$, gdzie

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{U}_i\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{V}_i^T,$$

a \mathbf{S} oznacza sferę z punktu 1.

Zadanie 2 Kompresja obrazu

1. Przygotuj przykładowe zdjęcie o rozmiarze 512×512 pikseli (np. *Lenna image*)
2. Oblicz SVD macierzy pikseli \mathbf{I} , a następnie dokonaj przybliżenia tej macierzy za pomocą *low rank approximation* (k pierwszych wartości osobliwych) uzyskując kompresję obrazu wejściowego.

$$\mathbf{I} \simeq \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

gdzie σ_i jest i -tą wartością osobliwą macierzy \mathbf{I} , \mathbf{u}_i jest lewym wektorem osobliwym, a \mathbf{v}_i - prawym wektorem osobliwym.

3. Porównaj obraz wynikowy z obrazem źródłowym dla różnych wartości k (np. przedstawiając różnicę pomiędzy nimi).