Rozwiązywanie równań różniczkowych – metody numeryczne

1. Równanie wahadła matematycznego y” = -siny

A dokładniej: Θ(t)” = $\frac{-l}{g} * \sin\theta(t)$,

gdzie Θ(t) - kąt w radianach

l - długość wahadła

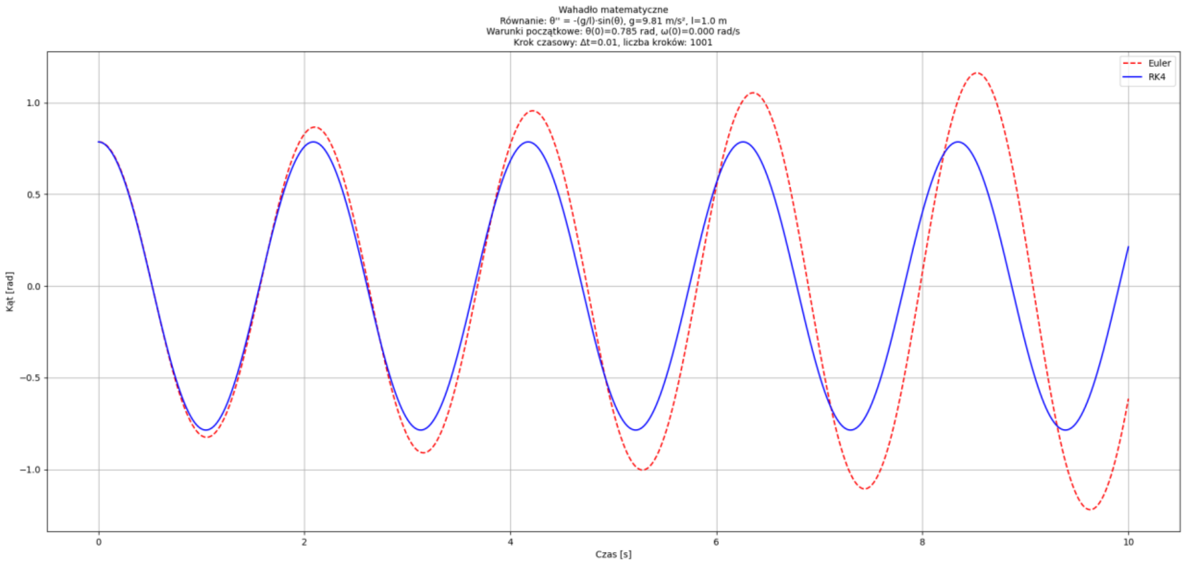
g – przyspieszenie ziemskie

przy przyjęciu g = 9.81m/s^2 oraz l = 1m

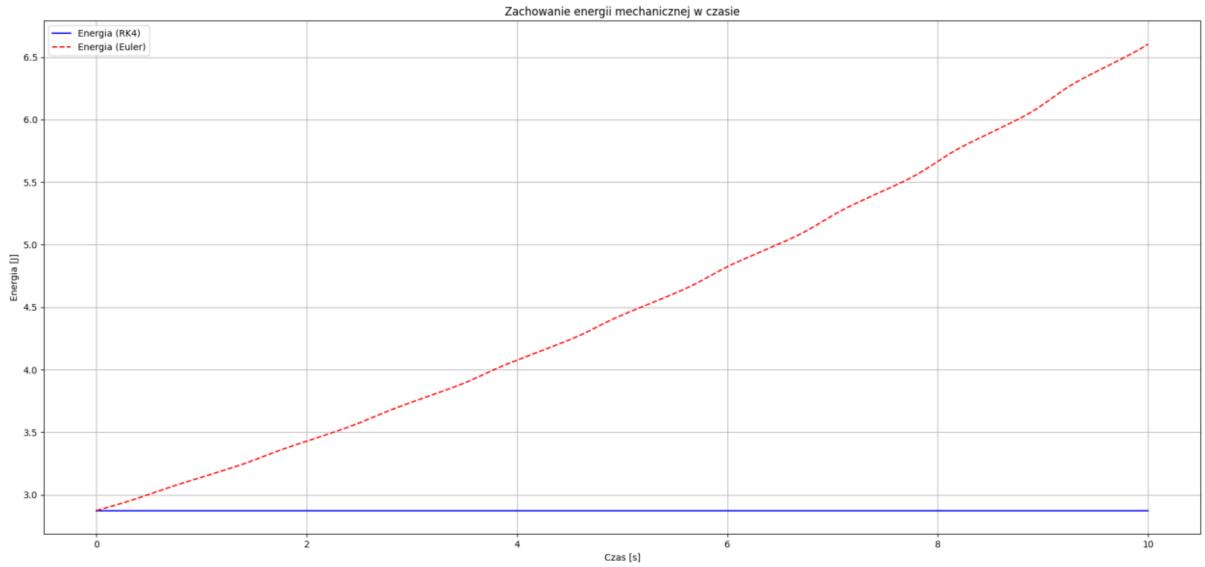
oraz warunków początkowych:

Θ(0) = π/4, Θ(0)’ = 0 rd/s

Po zastosowaniu metody Rungego-Kutty (4 stopnia) i Eulera dostałem takie przybliżenia rozwiązania:




Oraz bazując na przybliżeniach Θ(t)”, Θ(t)’, czyli przyśpieszenia kątowego oraz prędkości kątowej w danych odcinkach czasowych udało mi się zsumować Energię kinetyczną i energię potencjalną otrzymując całkowitą energię mechaniczną – przybliżoną metodami RK4 i Eulera:




W przypadku:

a) Metody Eulera

Widać na powyższym wykresie, że energia całkowita rośnie co jest spowodowane niedokładnością tej metody, bo oczywiście w świecie „idealnym” – bez tarcia, oporów powietrza itp., energia mechaniczna układu powinna być zachowana.

b) Metody Rungego-Kutty

Widać na powyższym wykresie, że energia całkowita niemalże stoi w miejscu, co może być postulatem, że metoda działa dokładnie.

**Energia kinetyczna:**

$$Ekin = (m(l\omega)\verb|^|2)/2$$

**Energia potencjalna:**

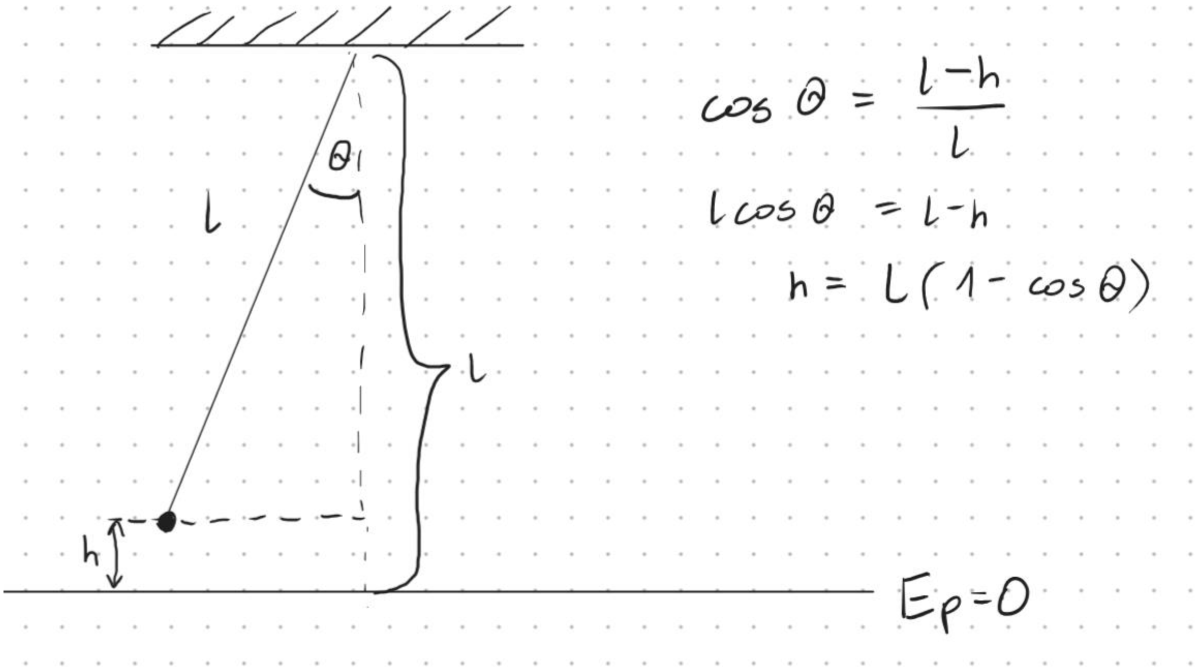
$$Epot = mgl(1 - cos\Theta)$$

**Energia całkowita:**

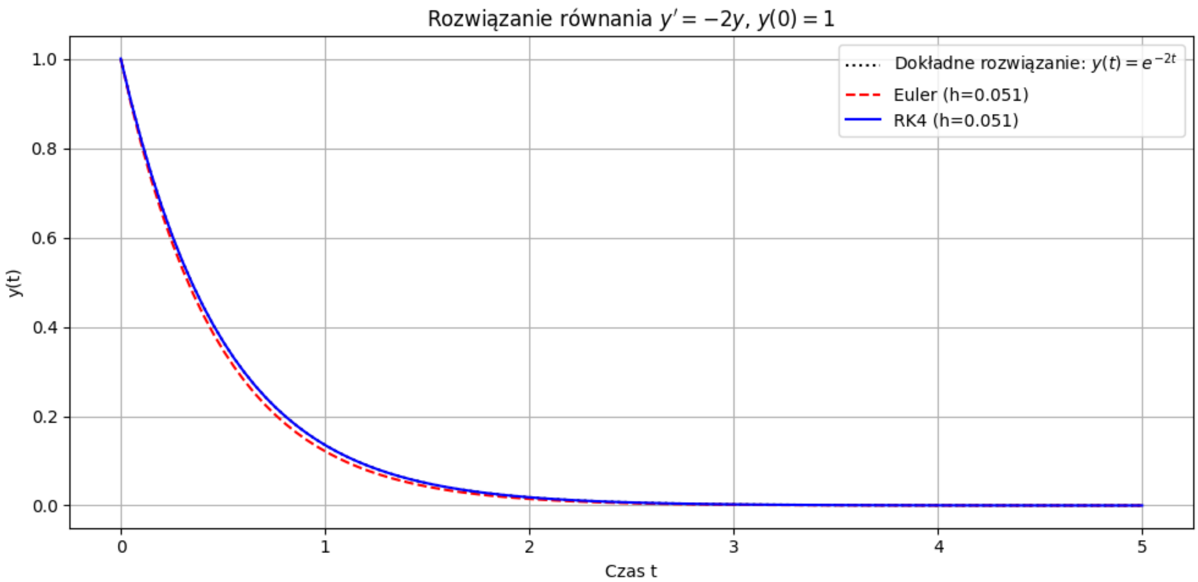
$$Ecałk = Ekin + Epot$$

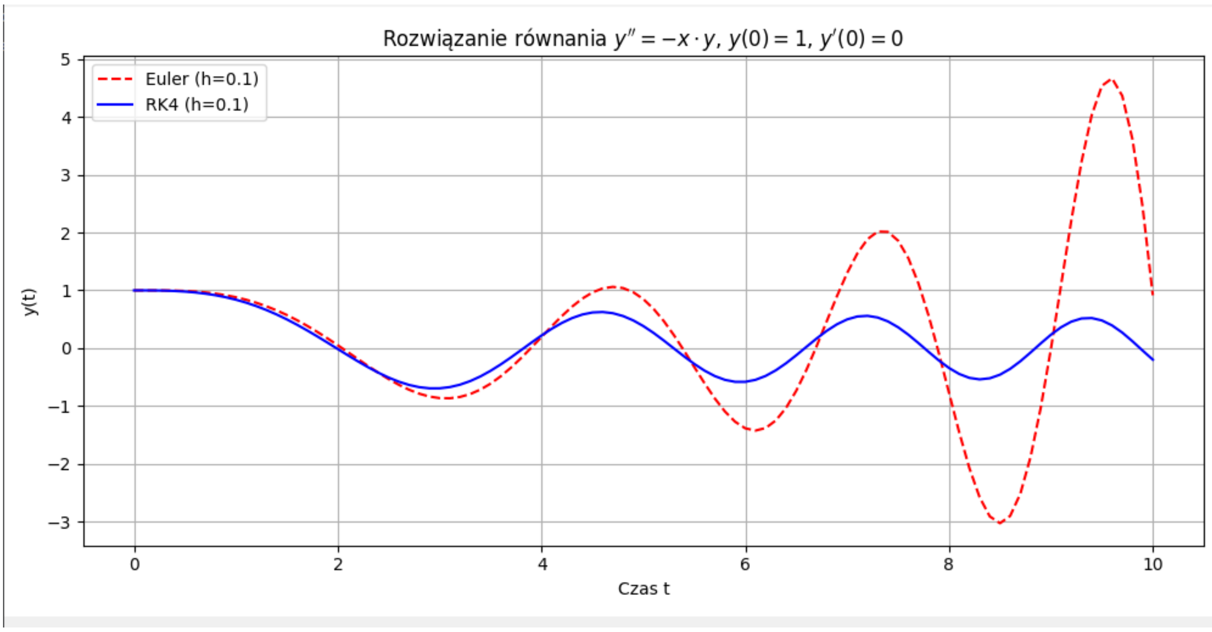
Wzory wyprowadzone z podstawienia Ekin = (mv^2)/2, gdzie v = $l\omega$

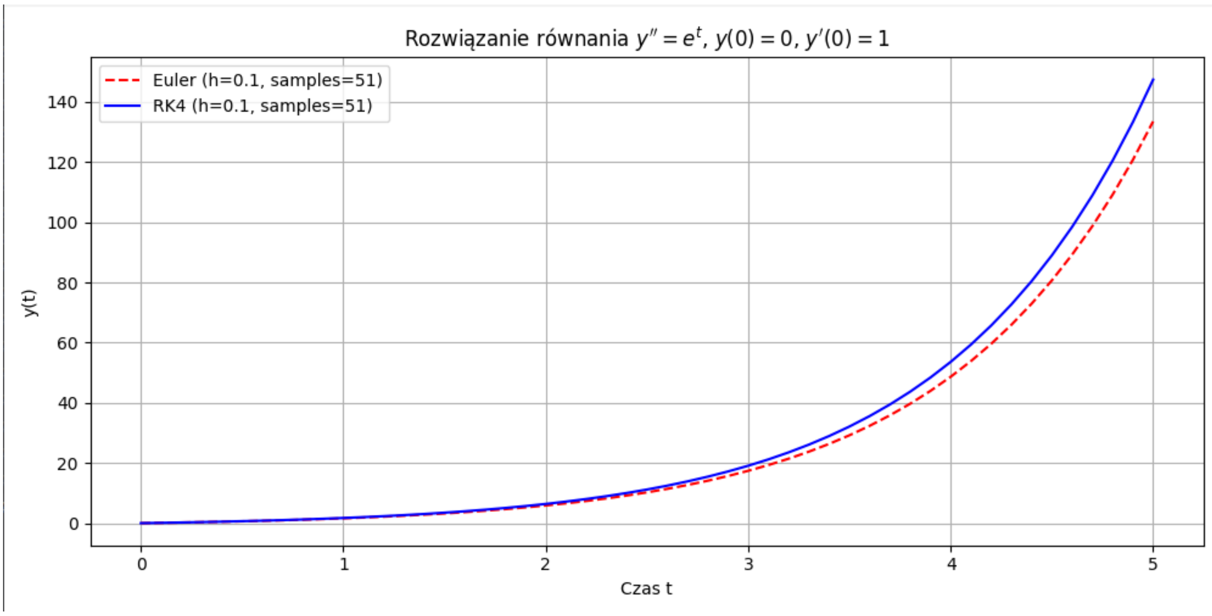
Oraz Epot = mgh, gdzie h jest wzięte z:




2. Poniżej podaję jeszcze parę przykładów użycia metod numerycznych:






Metoda Eulera jest prosta, ale mało dokładna – energia wahadła sztucznie rośnie, co zaburza symulację. Metoda RK4 daje znacznie lepsze wyniki, zachowując niemal stałą energię dzięki wyższej precyzji. Choć RK4 wymaga więcej obliczeń, pozwala używać większych kroków czasowych bez utraty dokładności. Metoda Eulera nadaje się tylko do szybkich testów, gdzie dokładność nie jest kluczowa.