Zadanie 2.

Paweł Balawender

29 września 2018

Problem

Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH, który zawiera punkt H. Wyznaczyć miarę kąta BAC, jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

Rozwiązanie

Kąt ten ma miarę 60°.

Dowód

B', C': spodki wysokości trójkąta ABC opuszczonych z wierzchołków B, C. Cechy kątów w trójkącie $B'CH$:

$$90° + |B'CH| + |B'HC| = 180° \tag{1}$$

$$|B'HC| = 180° - 90° - |B'CH| \tag{2}$$

Punkty A, B' i C są współliniowe, podobnie jak C, H i C', więc:

$$|B'CH| = |ACC'| \tag{3}$$

Cechy kątów w trójkącie ACC':

$$90° + |C'AC| + |ACC'| \tag{4}$$

$$C'AC \equiv BAC = 180° - 90° - |ACC'| \tag{5}$$

Z równań (5) oraz (3) wynika:

$$BAC \equiv B'HC \tag{6}$$

Kontynuując:

$$|BAC| = |B'HC| = 180° - |BHC| \tag{7}$$

Skoro kąty BHC i BSC są oparte na tym samym łuku:

$$BHC \equiv BSC \tag{8}$$

Ponadto możemy zastosować wzór na miarę kąta opartego na łuku którego wierzchołek leży poza okręgiem:

$$|BAC| = 1/2((360° - |BOC|) - |BOC|) \tag{9}$$

$$|BAC| = 180° - |BOC| \tag{10}$$

Korzystając z równości (7) i (9):

$$BOC \equiv BHC \tag{11}$$

Korzystając z równości (8) i (11):

$$BSC \equiv BOC \tag{12}$$

Odcinek SO jest dwusieczną kątów BOC oraz BSC, więc trójkąty BSO oraz CSO są równoramienne:

$$|BS| = |BO| \wedge |CS| = |CO| \tag{13}$$

Ponadto, skoro punkty B, S i C leżą na jednym okręgu to:

$$|OB| = |OS| \wedge |OC| = |OS| \tag{14}$$

Korzystając z równości (13) i (14):

$$|OB| = |BS| = |SO| \wedge |CS| = |SO| = |CS| \tag{15}$$

Skoro trójkąty BSO i CSO są równoboczne i, jak wyżej wspomniane, $|SO|$ to dwusieczna BSC:

$$|BSC| = 2 * \deg 60 = \deg 120 \tag{16}$$

Następnie korzystając z (10) i (12):

$$|BAC| = 180° - |BOC| = 180° - |BSC| \tag{17}$$

I korzystając z (16) i (17):

$$|BAC| = 180° - 120° = 60° \tag{18}$$