Zadanie 3.

Paweł Balawender

29 września 2018

Problem

Rozstrzygnąć, czy istnieją takie parami różne liczby wymierne a, b, c, że wielomiany $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ i $Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$ mają wspólny pierwiastek niewymierny.

Rozwiązanie

Nie.

Dowód

$$P(x) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{1}$$

$$P(x) = Q(x) \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{2}$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + bx^2 + cx + a \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{3}$$

$$a(x^2 - 1) + bx(1 - x) + c(1 - x) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{4}$$

$$a(x + 1)(x - 1) - bx(x - 1) - c(x - 1) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{5}$$

$$(x - 1)(a(x + 1) - bx - c) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{6}$$

$$(x - 1 = 0 \quad \vee \quad a(x + 1) - bx - c = 0) \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{7}$$

$$(x = 1 \wedge Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q}) \quad \vee \quad (a(x + 1) - bx - c = 0 \wedge Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q}) \tag{8}$$

$$ax + a - bx - c = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{9}$$

$$(a - b)x + a - c = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \tag{10}$$

Skoro liczby a, b i c są wymierne, to zdanie to będzie prawdziwe tylko wtedy, gdy:

$$a - b = 0 \quad \wedge \quad a - c = 0 \tag{11}$$

Wtedy:

$$a = b \tag{12}$$

Co jest sprzeczne z warunkami zadania - liczby muszą być parami różne.