# Zadanie 1.

Paweł Balawender

29 września 2018

## Problem

Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta $ABC$ przecinają się w punkcie $H$. Punkt $S$ jest środkiem tego łuku $BC$ okręgu opisanego na trójkącie $BCH$, który zawiera punkt $H$. Wyznaczyć miarę kąta $BAC$, jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

## Rozwiązanie

Przyjmijmy, bez straty ogólności, następującą modyfikację modelu:
punkt $H$ nie jest przecięciem się wysokości trójkąta $ABC$, a punktem przecięcia półprostych wychodzących z jego wierzchołków. Oznaczmy przez $O$ środek okręgu opisanego na trójkącie $BHC$, przez $D$ punkt przecięcia odcinków $BC$ i $SO$, a przez $A'$, $B'$ i $C'$ punkty przecięcia półprostych wychodzących odpowiednio z punktów $A$, $B$ i $C$, przechodzących przez punkt $H$. W pierwotnym modelu półproste te byłyby wysokościami trójkąta, szukamy więc taki takiej wartości kąta $BAC$, dla której kąty $AA'B$, $BB'C$ i $CC'A$ są proste.

Zauważmy, że gdy $SD = DO$, to też $SO = BO = CO$ oraz odcinek $BC$ jest symetralną promienia $SO$, więc trójkąty $BSO$ i $OSC$ są równoboczne, a kąt $BSC = 120°$. Ponadto $\angle BHC = \angle BSC$, bo kąty te są oparte na tym samym łuku, a więc $BHC = 120°$. Jeśli $SD > DO$, $BHC < 120°$, a jeśli $SD < DO$, $BHC > 120°$.

Skoro $AH = AS$ oraz $OH = OS$, czworobok $AHOS$ jest deltoidem, a prosta wyznaczona przez punkty $HS$ dwusieczną kąta $\angle AHO \equiv \angle ASO$

Zauważmy, że dla $SD > DO$, kąt $\angle BB'C$ zawsze będzie mniejszy niż $90°$,
natomiast dla $SD < DO$, kąt $\angle BB'C$ zawsze jest większy niż $90°$.

Jedyną więc sytuacją, w której kąt BB'C ma miarę 90°, jest sytuacja, w której $SD = DO$, czyli $BHC \equiv BOC = 120°$.

Z własności kąta opartego na łuku, którego wierzchołek leży na zewnątrz okręgu wiemy, że $\angle BAC = 1/2((360° - \angle BOC) - \angle BOC) = 1/2(360° - 2\angle BOC) = 180° - \angle BOC$ Z czego wynika, że $\angle BAC = 60°$.