

Zadanie 1.

Paweł Balawender

29 września 2018

Problem

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, \dots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli każda z cyfr danej liczby x występuje w niej taką samą liczbę razy, to sumę $s \in \mathbb{N}$ tych cyfr zapisać możemy w postaci:

$$s = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)n = 45n = 3 \cdot 15n \quad (1)$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą dziewięciokrotnie mniejszą niż długość liczby x w zapisie dziesiętnym. Następnie:

$$s = 3 \cdot 15n \iff 3|s \quad (2)$$

Na podstawie cechy podzielności przez 3 stwierdzamy, że:

$$3|s \iff 3|x \iff 3|2^k \quad (3)$$

co jest oczywistą sprzecznością, gdyż w wyniku rozkładu liczby 2^k na czynniki pierwsze otrzymamy iloczyn k dwójek, nie będzie to więc liczba podzielna przez 3.

Sprzeczność ta dowodzi, że nie istnieje taka liczba całkowita dodatnia k , że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, \dots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.