

## Zadanie 1.

Paweł Balawender

29 września 2018

### Problem

Rozstrzygnąć, czy istnieją takie parami różne liczby wymierne  $a, b, c$ , że wielomiany  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  i  $Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$  mają wspólny pierwiastek niewymierny.

### Rozwiązanie

Nie.

### Dowód

$$P(x) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (1)$$

$$P(x) = Q(x) \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (2)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + bx^2 + cx + a \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (3)$$

$$a(x^2 - 1) + bx(1 - x) + c(1 - x) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (4)$$

$$a(x + 1)(x - 1) - bx(x - 1) - c(x - 1) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (5)$$

$$(x - 1)(a(x + 1) - bx - c) = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (6)$$

$$(x - 1 = 0 \quad \vee \quad a(x + 1) - bx - c = 0) \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (7)$$

$$(x = 1 \wedge Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q}) \quad \vee \quad (a(x + 1) - bx - c = 0 \wedge Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q}) \quad (8)$$

$$ax + a - bx - c = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (9)$$

$$(a - b)x + a - c = 0 \quad \wedge \quad Q(x) = 0 \wedge x \notin \mathbb{Q} \quad (10)$$

Skoro liczby  $a, b$  i  $c$  są wymierne, to zdanie to będzie prawdziwe tylko wtedy, gdy:

$$a - b = 0 \quad \wedge \quad a - c = 0 \quad (11)$$

Wtedy:

$$a = b \quad (12)$$

Co jest sprzeczne z warunkami zadania - liczby muszą być parami różne.