

Zadanie 1.

Paweł Balawender

29 września 2018

Problem

Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH , który zawiera punkt H . Wyznaczyć miarę kąta BAC , jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

Rozwiązanie

Kąt ten ma miarę 60° .

Dowód

B' , C' : spodki wysokości trójkąta ABC opuszczonych z wierzchołków B , C .
Cechy kątów w trójkącie $B'CH$:

$$90^\circ + |B'CH| + |B'HC| = 180^\circ \quad (1)$$

$$|B'HC| = 180^\circ - 90^\circ - |B'CH| \quad (2)$$

Punkty A , B' i C są współliniowe, podobnie jak C , H i C' , więc:

$$|B'CH| = |ACC'| \quad (3)$$

Cechy kątów w trójkącie ACC' :

$$90^\circ + |C'AC| + |ACC'| \quad (4)$$

$$C'AC \equiv BAC = 180^\circ - 90^\circ - |ACC'| \quad (5)$$

Z równań (5) oraz (3) wynika:

$$BAC \equiv B'HC \quad (6)$$

Kontynuując:

$$|BAC| = |B'HC| = 180^\circ - |BHC| \quad (7)$$

Skoro kąty BHC i BSC są oparte na tym samym łuku:

$$BHC \equiv BSC \quad (8)$$

Ponadto możemy zastosować wzór na miarę kąta opartego na łuku którego wierzchołek leży poza okręgiem:

$$|BAC| = 1/2((360^\circ - |BOC|) - |BOC|) \quad (9)$$

$$|BAC| = 180^\circ - |BOC| \quad (10)$$

Korzystając z równości (7) i (9):

$$BOC \equiv BHC \quad (11)$$

Korzystając z równości (8) i (11):

$$BSC \equiv BOC \quad (12)$$

Odcinek SO jest dwusieczną kątów BOC oraz BSC , więc trójkąty BSO oraz CSO są równoramienne:

$$|BS| = |BO| \wedge |CS| = |CO| \quad (13)$$

Ponadto, skoro punkty B , S i C leżą na jednym okręgu to:

$$|OB| = |OS| \wedge |OC| = |OS| \quad (14)$$

Korzystając z równości (13) i (14):

$$|OB| = |BS| = |SO| \wedge |CS| = |SO| = |CS| \quad (15)$$

Skoro trójkąty BSO i CSO są równoboczne i, jak wyżej wspomniane, $|SO|$ to dwusieczna BSC :

$$|BSC| = 2 * \deg 60 = \deg 120 \quad (16)$$

Następnie korzystając z (10) i (12):

$$|BAC| = 180^\circ - |BOC| = 180^\circ - |BSC| \quad (17)$$

I korzystając z (16) i (17):

$$|BAC| = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \quad (18)$$