Zadanie 1.

Paweł Balawender

29 września 2018

Problem

$P(x) = 0 \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q}$
$\iff P(x) = Q(x) \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q}$
$\iff x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 + bx^2 + cx + a \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q}$
$\iff a(x^2 - 1) + bx(1 - x) + c(1 - x) = 0 \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q}$
$\iff a(x + 1)(x - 1) - bx(x - 1) - c(x - 1) = 0$
$\iff (x - 1)[a(x + 1) - bx - c] = 0$
$\iff (x - 1 = 0 \lor a(x + 1) - bx - c = 0)$
$\iff (x = 1 \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q}) \lor (a(x+1) - bx - c = 0 \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q})$
$\iff ax + a - bx - c = 0 \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q}$
$\iff (a - b)x + a - c = 0 \land Q(x) = 0 \land x \notin \mathbb{Q}$

Teraz, skoro a, b i c są wymierne, to również a-b oraz a-c są wymierne. Iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Suma liczby wymiernej i niewymiernej jest liczbą niewymierną. Zero jest wymierne, równość ta będzie więc spełniona tylko wtedy, gdy a-b = 0 = a-c, czyli b=c, co jest sprzeczne z treścią zadania.

Sprzeczność ta dowodzi, że nie istnieją takie trójki liczb a, b, c.