Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

Martyna Śpiewak

Bootcamp Data Science

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Rozważmy doświadczenie losowe, wówczas:

- ω – zdarzenie elementarne (najprostszy możliwy wynik doświadczenia losowego),
- Ω – przestrzeń zdarzeń elementarnych (zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych).

Przestrzeń zdarzeń elementarnych — przykłady

- zdarzenie elementarne:
    - wylosowanie 6-ciu oczek podczas rzutu kostką;

Przestrzeń zdarzeń elementarnych — przykłady

- zdarzenie elementarne:
    - wylosowanie 6-ciu oczek podczas rzutu kostką;
    - wypadnięcie orła podczas rzutu monetą;

Przestrzeń zdarzeń elementarnych — przykłady

- zdarzenie elementarne:
    - wylosowanie 6-ciu oczek podczas rzutu kostką;
    - wypadnięcie orła podczas rzutu monetą;
- przestrzeń zdarzeń elementarnych:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych — przykłady

- zdarzenie elementarne:
  - wylosowanie 6-ciu oczek podczas rzutu kostką;
  - wypadnięcie orła podczas rzutu monetą;
- przestrzeń zdarzeń elementarnych:
  - w przypadku rzutu kostką, jest zbiór zdarzeń elementarnych składających się na wylosowanie jednego, dwóch, trzech, czterech, pięciu lub sześciu oczek, tj.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych — przykłady

- zdarzenie elementarne:
    - wylosowanie 6-ciu oczek podczas rzutu kostką;
    - wypadnięcie orła podczas rzutu monetą;
- przestrzeń zdarzeń elementarnych:
    - w przypadku rzutu kostką, jest zbiór zdarzeń elementarnych składających się na wylosowanie jednego, dwóch, trzech, czterech, pięciu lub sześciu oczek, tj.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

    - w przypadku rzutu monetą jest zbiór zdarzeń elementarnych składających się na wylosowanie orła, albo reszki, tj.

$$\Omega = \{O, R\}.$$

Przestrzeń zdarzeń losowych

Rodzina podzbiorów Ω, to $\mathcal{F}$ – **przestrzeń zdarzeń losowych**

- jeśli Ω jest zbiorem przeliczalnym, to $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich podzbiorów Ω;

Przestrzeń zdarzeń losowych

Rodzina podzbiorów Ω, to $\mathcal{F}$ – **przestrzeń zdarzeń losowych**

- jeśli Ω jest zbiorem przeliczalnym, to $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich podzbiorów Ω;
  Przykład: dla rzutu monetą:

$$\mathcal{F} = \Big\{\{O, R\}, \{O\}, \{R\}, \emptyset\Big\}$$

Przestrzeń zdarzeń losowych

Rodzina podzbiorów Ω, to $\mathcal{F}$ – **przestrzeń zdarzeń losowych**

- jeśli Ω jest zbiorem przeliczalnym, to $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich podzbiorów Ω;
  Przykład: dla rzutu monetą:
  $$\mathcal{F} = \Big\{\{O, R\}, \{O\}, \{R\}, \emptyset\Big\}$$
- jeśli Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym, to $\mathcal{F}$ jest pewną rodziną podzbiorów Ω, zwaną σ-**ciałem zdarzeń**.

σ-ciało

σ-ciało zdarzeń, spełnia następujące warunki:

- $\Omega \in \mathcal{F}$;
- jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to $A' \in \mathcal{F}$, gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A;
- jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, to $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

Działania na zbiorach

- $\omega \in A$ – zaszło zdarzenie A;
- $\omega \in A \cup B$ – zaszło co najmniej jedno ze zdarzeń A i B;
- $\omega \in A \cap B$ – zaszło zdarzenie A i zaszło zdarzenie B;
- $\omega \in A \backslash B$ – zaszło zdarzenie A i nie zaszło zdarzenie B;
- $A \subset B$ – zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B;
- $A \cap B = \emptyset$ – zdarzenie A i B wykluczają się (gdzie $\emptyset$ oznacza zdarzenie niemożliwe);

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;

e) zachodzą co najmniej dwa

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;

e) zachodzą co najmniej dwa — $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;
b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;
c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;
d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;
e) zachodzą co najmniej dwa — $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
f) zachodzi tylko jedno

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;

e) zachodzą co najmniej dwa — $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

f) zachodzi tylko jedno — $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$;

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;

e) zachodzą co najmniej dwa — $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

f) zachodzi tylko jedno — $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$;

g) zachodzą dokładnie dwa

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;

e) zachodzą co najmniej dwa — $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

f) zachodzi tylko jedno — $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$;

g) zachodzą dokładnie dwa $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$;

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko $A - A \cap B' \cap C'$;

b) zachodzą A i $B - A \cap B \cap C'$;

c) zachodzą wszystkie trzy $- A \cap B \cap C$;

d) zachodzi co najmniej jedno $- A \cup B \cup C$;

e) zachodzą co najmniej dwa $- (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

f) zachodzi tylko jedno $- (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$;

g) zachodzą dokładnie dwa $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$;

h) żadne nie zachodzi

Działania na zbiorach — przykład

Przykład: *Niech A, B, C oznaczają trzy dowolne zdarzenia. Zapisać następujące zdarzenia: spośród zdarzeń A, B oraz C*

a) zachodzi tylko A — $A \cap B' \cap C'$;
b) zachodzą A i B — $A \cap B \cap C'$;
c) zachodzą wszystkie trzy — $A \cap B \cap C$;
d) zachodzi co najmniej jedno — $A \cup B \cup C$;
e) zachodzą co najmniej dwa — $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
f) zachodzi tylko jedno — $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$;
g) zachodzą dokładnie dwa $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$;
h) żadne nie zachodzi — $A' \cap B' \cap C'$;

Prawdopodobieństwo (*A. Kołmogorow, 1933*)

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ przyporządkowującą każdemu zdarzeniu losowemu A liczbę $P(A)$, zwaną prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A, tak, że spełnione są następujące warunki:

A1 $P(A) \geq 0$, dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$;

A2 $P(\Omega) = 1$;

A3 jeżeli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ jest dowolnym ciągiem zdarzeń parami rozłącznych, tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Przestrzeń probabilistyczna

Trójkę uporządkowaną $(\Omega, P, \mathcal{F})$, gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ to przestrzeń zdarzeń losowych, a P jest prawdopodobieństwem, nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

Własności prawdopodobieństwa

W1 $P(\emptyset) = 0$;

W2 $\forall A \in \mathcal{F} \quad P(A) \leq 1$;

W3 jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to $P(A') = 1 - P(A)$;

W4 jeżeli $A, B \in \mathcal{F}$ oraz $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$;

W5 jeżeli $A, B \in \mathcal{F}$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Wśród pracowników pewnej firmy, 70% potrafi programować w Javie, 60% - w Pythonie, a 50% zna oba języki programowania.

Własności prawdopodobieństwa — przykład

Wśród pracowników pewnej firmy, 70% potrafi programować w Javie, 60% - w Pythonie, a 50% zna oba języki programowania.

A — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java, $P(A) = 0.7$;
B — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Python, $P(B) = 0.6$;
$A \cap B$ — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java i Python, $P(A \cap B) = 0.5$;

Własności prawdopodobieństwa — przykład

Wśród pracowników pewnej firmy, 70% potrafi programować w Javie, 60% - w Pythonie, a 50% zna oba języki programowania.

A — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java, $P(A) = 0.7$;
B — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Python, $P(B) = 0.6$;
$A \cap B$ — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java i Python, $P(A \cap B) = 0.5$;

Jaka część programistów:

a) nie zna języka Java?

Własności prawdopodobieństwa — przykład

Wśród pracowników pewnej firmy, 70% potrafi programować w Javie, 60% - w Pythonie, a 50% zna oba języki programowania.

A — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java, $P(A) = 0.7$;
B — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Python, $P(B) = 0.6$;
$A \cap B$ — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java i Python, $P(A \cap B) = 0.5$;

Jaka część programistów:

a) nie zna języka Java?
A' — zdarzenie, że pracownik nie zna języka Java

$$P(A') =$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

Wśród pracowników pewnej firmy, 70% potrafi programować w Javie, 60% - w Pythonie, a 50% zna oba języki programowania.

A — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java, $P(A) = 0.7$;
B — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Python, $P(B) = 0.6$;
$A \cap B$ — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java i Python, $P(A \cap B) = 0.5$;

Jaka część programistów:

a) nie zna języka Java?
A' — zdarzenie, że pracownik nie zna języka Java

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3.$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

b) zna język Java lub zna języka Python?

Własności prawdopodobieństwa — przykład

b) zna język Java lub zna języka Python?
$A \cup B$ — zdarzenie, że zna język Java lub zna języka Python

$$P(A \cup B) =$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

b) zna język Java lub zna języka Python?
$A \cup B$ — zdarzenie, że zna język Java lub zna języka Python

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8.$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

b) zna język Java lub zna języka Python?
$A \cup B$ — zdarzenie, że zna język Java lub zna języka Python

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8.$$

c) nie zna języka Java i nie zna języka Python?

Własności prawdopodobieństwa — przykład

b) zna język Java lub zna języka Python?
$A \cup B$ — zdarzenie, że zna język Java lub zna języka Python

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8.$$

c) nie zna języka Java i nie zna języka Python?
$A' \cap B'$ — zdarzenie, że nie zna języka Java i nie zna języka Python

$$P(A' \cap B') =$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

b) zna język Java lub zna języka Python?
$A \cup B$ — zdarzenie, że zna język Java lub zna języka Python

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8.$$

c) nie zna języka Java i nie zna języka Python?
$A' \cap B'$ — zdarzenie, że nie zna języka Java i nie zna języka Python

$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

d) zna język Java, ale nie zna języka Python?

Własności prawdopodobieństwa — przykład

d) zna język Java, ale nie zna języka Python?
$A \cap B'$ — zdarzenie, że zna język Java, ale nie zna języka Python

$$P(A \cap B') =$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

d) zna język Java, ale nie zna języka Python?
$A \cap B'$ — zdarzenie, że zna język Java, ale nie zna języka Python

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2.$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

d) zna język Java, ale nie zna języka Python?
   $A \cap B'$ — zdarzenie, że zna język Java, ale nie zna języka Python

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2.$$

e) zna język Python, ale nie zna języka Java?

d) zna język Java, ale nie zna języka Python?
$A \cap B'$ — zdarzenie, że zna język Java, ale nie zna języka Python

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2.$$

e) zna język Python, ale nie zna języka Java?
$A' \cap B$ — zdarzenie, że zna język Python, ale nie zna języka Java?

$$P(A' \cap B) =$$

Własności prawdopodobieństwa — przykład

d) zna język Java, ale nie zna języka Python?
$A \cap B'$ — zdarzenie, że zna język Java, ale nie zna języka Python

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2.$$

e) zna język Python, ale nie zna języka Java?
$A' \cap B$ — zdarzenie, że zna język Python, ale nie zna języka Java?

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.5 = 0.1.$$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona, tzn. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, a przy tym jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, czyli

$$P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n},$$

to prawdopodobieństwo zajścia dowolnego zdarzenia $A = \{\omega_{i_1}, \ldots \omega_{i_k}\}$, składającego się z k zdarzeń elementarnych wyraża się wzorem

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{k}{n},$$

gdzie A oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, zaś Ω, to liczba wszystkich zdarzeń elementarnych.

Schemat klasyczny — przykład

Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie symetryczną (uczciwą) monetą. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie symetryczną (uczciwą) monetą. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

$$\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, OOR, ORO, OOO\}.$$

Schemat klasyczny — przykład

Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie symetryczną (uczciwą) monetą. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

$$\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, OOR, ORO, OOO\}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zajścia następujących zdarzeń

a) A — orzeł pojawi się dwa razy;

Schemat klasyczny — przykład

Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie symetryczną (uczciwą) monetą. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

$$\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, OOR, ORO, OOO\}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zajścia następujących zdarzeń

a) A — orzeł pojawi się dwa razy;

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\{ROO, OOR, ORO\}}{\#\Omega} = \frac{3}{8};$$

Schemat klasyczny — przykład

Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie symetryczną (uczciwą) monetą. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

$$\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, OOR, ORO, OOO\}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zajścia następujących zdarzeń

a) A — orzeł pojawi się dwa razy;

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\{ROO, OOR, ORO\}}{\#\Omega} = \frac{3}{8};$$

b) B — orzeł pojawi się co najmniej dwa razy;

Schemat klasyczny — przykład

Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie symetryczną (uczciwą) monetą. Znaleźć przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

$$\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, OOR, ORO, OOO\}.$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zajścia następujących zdarzeń

a) A — orzeł pojawi się dwa razy;

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\{ROO, OOR, ORO\}}{\#\Omega} = \frac{3}{8};$$

b) B — orzeł pojawi się co najmniej dwa razy;

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{\#\{ROO, OOR, ORO, OOO\}}{\#\Omega} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś $B \in \mathcal{F}$ dowolnym ustalonym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie, tzn. $P(B) > 0$. **Prawdopodobieństwem warunkowym** zajścia zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy liczbę $P(A|B)$ określoną wzorem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe — przykład

Wśród pracowników pewnej firmy, 70% potrafi programować w Javie, 60% - w Pythonie, a 50% zna oba języki programowania.

Dla przypomnienia:
A — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java, $P(A) = 0.7$;
B — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Python, $P(B) = 0.6$;
$A \cap B$ — zdarzenie losowe, że pracownik zna język Java i Python, $P(A \cap B) = 0.5$;

Jaka część programistów:

f) jeśli zna Javę, to zna też Python?

g) jeśli zna Pythona, to zna również Javę?

Prawdopodobieństwo warunkowe — przykład

f) $B|A$ — zdarzenie, że jeśli zna Javę, to zna też Python

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe — przykład

f) $B|A$ — zdarzenie, że jeśli zna Javę, to zna też Python

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6}.$$

g) $A|B$ — zdarzenie, że jeśli zna Pythona, to zna również Javę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7}.$$

Prawdopodobieństwo całkowite

Zdarzenia $H_1, \ldots . H_n \in \mathcal{F}$ tworzą **układ zupełny zdarzeń** w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, jeśli spełnione są następujące warunki

- $H_1 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$;
- $H_i \cap H_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ (zdarzenia są parami rozłączne);
- $P(H_i) > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeśli zdarzania $H_1, \ldots . H_n \in \mathcal{F}$ tworzą układ zupełny zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, to dla dowolnego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ zachodzi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Prawdopodobieństwo całkowite — przykład

W każdej z trzech urn znajduje się po 100 kul. W pierwszej urnie znajduje się 60 kul białych i 40 kul czarnych, w drugiej urnie 40 kul białych i 60 kul czarnych, zaś w urnie trzeciej po połowie kul każdego koloru. Zakładając, że wybór jednej z trzech urn oraz wybór kuli z wybranej urny jest losowy, oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

Prawdopodobieństwo całkowite — przykład

H_1 — zdarzenie losowe polegające, na wyborze urny I;

H_2 — zdarzenie losowe polegające, na wyborze urny II;

H_3 — zdarzenie losowe polegające, na wyborze urny III;

A — zdarzenie losowe polegające na wylosowaniu kuli białej;

$A|H_1$ — zdarzenie losowe polegające na wylosowaniu kuli białej z urny I;

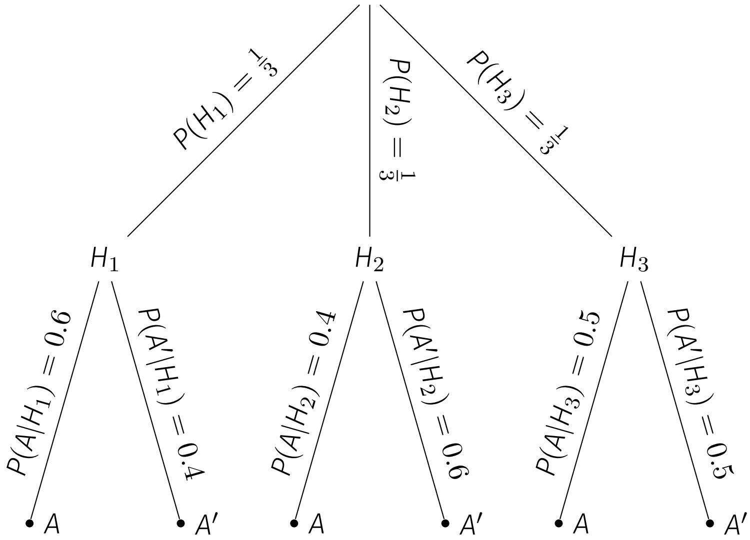
$A|H_2$ — zdarzenie losowe polegające na wylosowaniu kuli białej z urny II;

$A|H_3$ — zdarzenie losowe polegające na wylosowaniu kuli białej z urny III;

Wiemy, że

$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$

$P(A|H_1) = 0.6$, $P(A|H_2) = 0.4$, $P(A|H_3) = 0.5$


$P(H_1) = \frac{1}{3}$
$P(H_2) = \frac{1}{3}$
$P(H_3) = \frac{1}{3}$
H_1
H_2
H_3
$P(A|H_1) = 0.6$
$P(A'|H_1) = 0.4$
$P(A|H_2) = 0.4$
$P(A'|H_2) = 0.6$
$P(A|H_3) = 0.5$
$P(A'|H_3) = 0.5$
A
A'
A
A'
A
A'

Prawdopodobieństwo całkowite — przykład

Korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wzór Bayesa

Twierdzenie Bayesa

Niech zdarzenia $H_1, \ldots . H_n \in \mathcal{F}$ tworzą układ zupełny zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i niech $A \in \mathcal{F}$ będzie dowolnym ustalonym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie, tzn. $P(A) > 0$. Wówczas prawdziwy jest wzór

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)},$$

gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$.

Twierdzenie Bayesa — przykład

W każdej z trzech urn znajduje się po 100 kul. W pierwszej urnie znajduje się 60 kul białych i 40 kul czarnych, w drugiej urnie 40 kul białych i 60 kul czarnych, zaś w urnie trzeciej po połowie kul każdego koloru. Zakładając, że wybór jednej z trzech urn oraz wybór kuli z wybranej urny jest losowy, oblicz prawdopodobieństwo, że jeśli wylosowana kula jest biała, została wylosowana z urny 2.

Korzystając z oznaczeń dla przykładu dla prawdopodobieństwa całkowitego i wzoru Bayesa, otrzymujemy

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{15}.$$

Niezależność zdarzeń

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $A, B \in \mathcal{F}$. Mówimy, że zdarzenia A i B są **niezależne** jeśli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Mówimy, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są **wzajemnie niezależne** jeśli dla każdego $1 \leq k \leq n$ oraz dla każdego ciągu indeksów $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ zachodzi

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_k}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}).$$

Niezależność zdarzeń — przykład

Program komputerowy jest testowany przez 2 niezależne testy. Jeśli w programie istnieje błąd, testy te wykrywają go z prawdopodobieństwami, odpowiednio, 0,2 i 0,3. Przypuśćmy, że program zawiera błąd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden z testów go wykryje?

A — zdarzenie, że pierwszy test wykryje błąd, $P(A) = 0.2$;
B — zdarzenie, że drugi test wykryje błąd, $P(B) = 0.3$;

Niezależność zdarzeń — przykład

Program komputerowy jest testowany przez 2 niezależne testy. Jeśli w programie istnieje błąd, testy te wykrywają go z prawdopodobieństwami, odpowiednio, 0,2 i 0,3. Przypuśćmy, że program zawiera błąd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden z testów go wykryje?

A — zdarzenie, że pierwszy test wykryje błąd, $P(A) = 0.2$;
B — zdarzenie, że drugi test wykryje błąd, $P(B) = 0.3$;
$A \cup B$ — zdarzenie, że przynajmniej jeden z testów wykryje błąd, $P(A \cup B) = ?$;

Niezależność zdarzeń — przykład

Program komputerowy jest testowany przez 2 niezależne testy. Jeśli w programie istnieje błąd, testy te wykrywają go z prawdopodobieństwami, odpowiednio, 0,2 i 0,3. Przypuśćmy, że program zawiera błąd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden z testów go wykryje?

A — zdarzenie, że pierwszy test wykryje błąd, $P(A) = 0.2$;
B — zdarzenie, że drugi test wykryje błąd, $P(B) = 0.3$;
$A \cup B$ — zdarzenie, że przynajmniej jeden z testów wykryje błąd, $P(A \cup B) = ?$;

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= 0.2 + 0.3 - 0.2 \cdot 0.3 = 0.44. \end{aligned}$$

Zmienna losowa

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie dowolną przestrzenią probabilistyczną.
Zmienną losową nazywamy dowolną funkcję rzeczywistą X określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω taką, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}.$$

Oznacza to, że przeciwobrazy przedziałów $(-\infty, x]$ są zdarzeniami losowymi.

Zmienna losowa — przykład

Rzucamy uczciwą kostką do gry. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 10 zł, jeżeli wypadnie nieparzysta liczba oczek większa od 1, to przegrywamy 5 zł, a gdy wypadnie jedno oczko, nic nie wygrywamy i nic nie przegrywamy. Niech zmienna losowa X oznacza wygraną. Podaj rozkład zmiennej losowej X.

Zmienna losowa — przykład

Rzucamy uczciwą kostką do gry. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 10 zł, jeżeli wypadnie nieparzysta liczba oczek większa od 1, to przegrywamy 5 zł, a gdy wypadnie jedno oczko, nic nie wygrywamy i nic nie przegrywamy. Niech zmienna losowa X oznacza wygraną. Podaj rozkład zmiennej losowej X.

Niech X oznacza zmienną losową oznaczającą wielkość wygranej, wówczas zmienna losowa przyjmuje postać

$$X(\omega) = \begin{cases} 10 & \text{dla} \quad \omega \in \{2, 4, 6\} \\ -5 & \text{dla} \quad \omega \in \{3, 5\} \\ 0 & \text{dla} \quad \omega \in \{1\} \end{cases}$$

Zmienna losowa — przykład

Rzucamy uczciwą kostką do gry. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek, to wygrywamy 10 zł, jeżeli wypadnie nieparzysta liczba oczek większa od 1, to przegrywamy 5 zł, a gdy wypadnie jedno oczko, nic nie wygrywamy i nic nie przegrywamy. Niech zmienna losowa X oznacza wygraną. Podaj rozkład zmiennej losowej X.

Niech X oznacza zmienną losową oznaczającą wielkość wygranej, wówczas zmienna losowa przyjmuje postać

$$X(\omega) = \begin{cases} 10 & \text{dla} \quad \omega \in \{2, 4, 6\} \\ -5 & \text{dla} \quad \omega \in \{3, 5\} \\ 0 & \text{dla} \quad \omega \in \{1\} \end{cases}$$

Musimy wyznaczyć prawdopodobieństwa z jakim przyjmowane są kolejne wartości zmienne losowej X.

Zmienna losowa — przykład

Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, wówczas

$$P(X = 10) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\Omega} = \frac{1}{2},$$
$$P(X = -5) = \frac{\#\{3,5\}}{\#\Omega} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 0) = \frac{\#\{1\}}{\#\Omega} = \frac{1}{6}.$$

Zmienna losowa — przykład

Niech $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, wówczas

$$P(X = 10) = \frac{\#\{2, 4, 6\}}{\#\Omega} = \frac{1}{2},$$
$$P(X = -5) = \frac{\#\{3, 5\}}{\#\Omega} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 0) = \frac{\#\{1\}}{\#\Omega} = \frac{1}{6}.$$

Rozkład zmiennej losowej X ma postać

x_i	-5	0	10
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

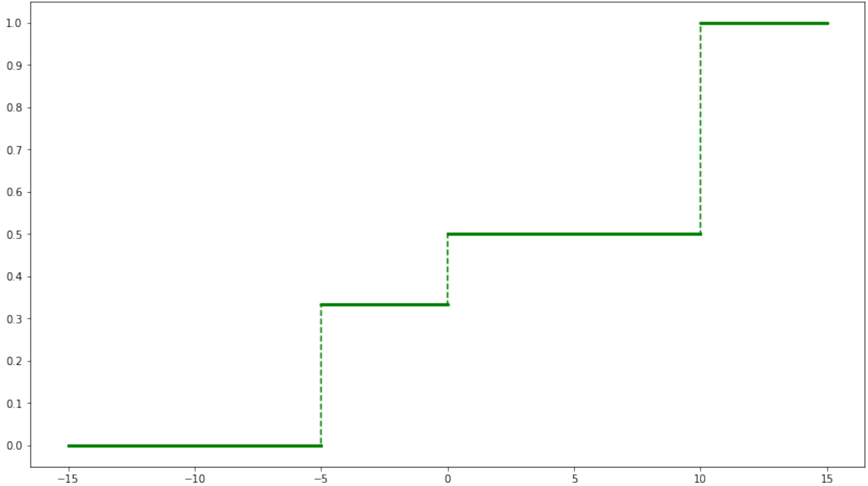
Dystrybuanta zmiennej losowej

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję rzeczywistą F określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x).$$

Dystrybuanta zmiennej losowej — przykład

Dla zmiennej losowej X dystrybuanta ma postać:



Własności dystrybuanty

Dystrybuanta F posiada następujące własności

W1 $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F(x) \leq 1$;

W2 F jest funkcją niemalejącą;

W3 F jest funkcją co najmniej prawostronnie ciągłą;

W4 $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

W5 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$;

W6 $P(X = x_0) = F(x_0) - F(x_0^-)$, gdzie $F(x_0^-)$ oznacza lewostronną granicę dystrybuanty w punkcie x_0.

Zmienna losowa typu dyskretnego

Zmienna losowa X jest typu **dyskretnego**, jeżeli przyjmuje co najwyżej przeliczalną liczbę wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ oraz

$$P(X = x_i) = p_i, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots$$

przy czym

$$\sum_{i=1} p_i = 1,$$

gdzie górna granica sumowania wynosi n lub ∞ stosowanie do tego czy zbiór wartości jest skończony czy przeliczalny, ale nieskończony.

Zmienna losowa typu dyskretnego

W przypadku zmiennej losowej typu dyskretnego **rozkład prawdopodobieństwa** wygodnie jest przedstawiać przy użyciu tablicy

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

Dystrybuanta zmiennej losowej typu dyskretnego X wyraża się wzorem

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Zmienna losowa typu ciągłego

Zmienna losowa X jest typu **ciągłego**, jeżeli istnieje nieujemna funkcja f — zwana **gęstością** — taka, że dystrybuantę tej zmiennej losowej można przedstawić w postaci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Jeżeli zmienna losowa X jest typu **ciągłego** o gęstości f, to zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) = 1$$

oraz w punktach ciągłości gęstości f

$$F'(x) = f(x).$$

Parametry zmiennych losowych jednowymiarowych

- miary położenia — wartość oczekiwana, kwantyl rzędu α (w szczególności mediana, kwartyl dolny i kwartyl górny), moda;
- miary rozproszenia — wariancja, odchylenie standardowe, odchylenie przeciętne, współczynnik zmienności;
- charakterystyki kształtu — współczynnik skośności, współczynnik skupienia;

Wartość oczekiwana

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_i,$$

gdy zmienna losowa ma rozkład **dyskretny** $P(X = x_i) = p_i$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

gdy zmienna losowa ma rozkład **ciągły** o gęstości f.

Moment

Momentem zwykłym rzędku k zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_i x_i^k p_i,$$

gdy zmienna losowa ma rozkład **dyskretny** $P(X = x_i) = p_i$, oraz

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

gdy zmienna losowa ma rozkład **ciągły** o gęstości f.

Kwantyl

Kwantylem rzędu α, $0 < \alpha < 1$, zmiennej losowej X o dystrybuancie F nazywamy liczbę q_α spełniającą zależność

$$F(q_\alpha^-) \leq \alpha \leq F(q_\alpha).$$

W szczególności:

- **mediana** — kwantyl $q_{0.5}$ rzędu 0.5;
- **kwartyl dolny** — kwantyl $q_{0.25}$ rzędu 0.25;
- **kwartyl górny** — kwantyl $q_{0.75}$ rzędu 0.75;

Interpretacja: Kwantyl q_α jest to liczba, której nie przekracza $\alpha \cdot 100\%$ masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2.$$

W szczególności może wyprowadzić: $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Odchyleniem przeciętnym zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathrm{d}(X) = \mathbb{E}|X - \mathbb{E}(X)|.$$

Współczynnik skośności

Współczynnikiem skośności (współczynnikiem asymetrii) zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^3}{\sigma^3}.$$

- $\gamma = 0$ — rozkład symetryczny;
- $\gamma > 0$ — rozkład prawoskośny (asymetria dodatnia);
- $\gamma < 0$ — rozkład lewoskośny (asymetria ujemna).

Kurtozą (współczynnikiem spłaszczenia) zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\eta = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^4}{\sigma^4}.$$

Im wyższa wartość η, tym większa wysmukłość rozkładu. Małe wartości tej miary oznaczają rozkład spłaszczony.

Przyjmuje się:

- $\eta = 3$ — rozkład normalny;
- $\eta < 3$ — rozkład spłaszczony;
- $\eta > 3$ — rozkład wysmukły.

Rozkład dwupunktowy - Bern(p)

Zmienna losowa X ma **rozkład dwupunktowy** z parametrem $0 < p < 1$, jeżeli

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Interpretacja: Zmienna losowa X opisuje pojedyncze doświadczenie, o którym można myśleć w kategorii „sukces–porażka":

- zmienna przyjmuje wartość 1 z prawdopodobieństwem p, jeżeli w danym doświadczeniu zaistniał **„sukces"**, oraz
- zmienna przyjmuje wartość 0 z prawdopodobieństwem $1 - p$, jeżeli w doświadczeniu zaistniała **„porażka"**.

Rozkład dwumianowy - Bin(n, p)

Zmienna losowa X ma **rozkład dwumianowy** z parametrami $0 < p < 1$ oraz $n \in \mathbb{N}$, jeżeli

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Interpretacja: Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie „sukcesów" w n niezależnych doświadczeniach z prawdopodobieństwem sukcesu p w każdym z nich.

W szczególności zmienną X możemy przedstawić jako

$$X = S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

gdzie $X_i \sim \text{Bern}(p)$ oraz $(X_i)_{i=1}^n$ są wzajemnie niezależne.

Zmienna losowa X ma **rozkład jednostajny** na przedziale $[a, b]$, jeżeli gęstość f jest postaci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin [a, b] \end{cases}$$

Wartość oczekiwana i wariancja dane są wzorami

$$\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Rozkład normalny - $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Zmienna losowa X ma **rozkład normalny** z parametrami $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, jeżeli jej gęstość f jest postaci

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\Big(- \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \Big) \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wartość oczekiwana i wariancja dane są wzorami

$$\mathbb{E}X = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Standaryzacja

Dowolny rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ można sprowadzić do rozkładu normalnego o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowym odchyleniu standardowym, tzn. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Jeżeli zmienna losowa $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, wówczas zmienna losowa

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Własność ta jest o tyle istotna, że rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$ zwany **rozkładem normalnym standardowym**, jest stablicowany, co bardzo ułatwia dokonywanie obliczeń.

Rozkład gamma - $\Gamma(\alpha, \beta)$

Zmienna losowa X ma rozkład gamma z parametrami $\alpha > 0$ i $\beta > 0$, jeżeli jej gęstość f jest postaci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \text{dla} \quad \alpha > 0.$$

Warto zauważyć, że

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1) \quad \text{dla} \quad \alpha > 1.$$

W szczególności

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rozkład gamma - $\Gamma(\alpha, \beta)$

Wartość oczekiwana i wariancja dane są wzorami

$$\mathbb{E}X = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Parametr α nazywa się **parametrem kształtu** parametr β jest **parametrem skali**.

Zmienna losowa X ma rozkład t-Studenta o $n \in \mathbb{N}_+$ stopniach swobody, jeżeli jej gęstość f jest postaci

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wartość oczekiwana (dla $n > 1$) i wariancja (dla $n > 2$), dane są wzorami

$$\mathbb{E}X = 0, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n}{n-2}.$$

Rozkład wykładniczy - Exp(λ)

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$, jeżeli jej gęstość f jest postaci

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp\{-\lambda x\} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

Wartość oczekiwana i wariancja, dla $n > 1$, dane są wzorami

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Rozkład wykładniczy jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma $\Gamma(1, \lambda)$.

Rozkład wykładniczy odgrywa dużą rolę np. w teorii niezawodności związanej z czasem poprawnej pracy elementu, urządzenia itp. W wielu przypadkach zakłada się, że czas działania elementu ma rozkład wykładniczy.

Rozkład chi-kwadrat — $\chi^2(n)$

Zmienna losowa X ma rozkład chi-kwadrat o $n \in \mathbb{N}_+$ stopniach swobody, jeżeli jej gęstość f jest postaci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} \exp\{-\frac{x}{2}\} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x \leq 0, \end{cases}$$

Wartość oczekiwana i wariancja dane są wzorami

$$\mathbb{E}X = n, \quad \mathrm{Var}(X) = 2n.$$

Rozkład chi-kwadrat jest szczególnym przypadkiem rozkładu gamma $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

Materiały na podstawie

- Grzegorzewski P., Bobecka K., Dembińska A., Pusz J., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka, WSISiZ, Warszawa, wyd. V - 2008.
- Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel, Rachunek prawdopodobieństwa dla prawie każdego, Script, Warszawa, 2006.
- J. Koronacki, J. Mielniczuk, Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2001.