

## 1. DFT sygnału harmonicznego (1 pkt)

Wyznacz macierz  $A$  transformacji DFT:

$$A(k, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{-kn}, \text{ gdzie } W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}, k, n = 0, \dots, N-1 \text{ to wiersze i kolumny macierzy } A$$

dla  $N=100$  i oblicz DFT ( $X=A x$ )<sup>1</sup> następującego sygnału  $x$ :

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$$

spróbkowanego z częstotliwością  $f_s=1000$  Hz, mającego  $N=100$  próbek i będącego sumą dwóch kosinusoid, o częstotliwościach  $f_1=100$  Hz i  $f_2=200$  Hz, amplitudach  $A_1=100$  i  $A_2=200$  oraz kątach fazowych  $\phi_1=\pi/7$  i  $\phi_2=\pi/11$ .

Narysuj widmo sygnału  $x$  (część rzeczywista, urojona, moduł, faza), wyskaluj oś częstotliwości w hercach. Zauważ, że część rzeczywista współczynnika widmowego mówi ile w sygnale jest kosinusa o danej częstotliwości, a część urojona – ile sinusa (do składowych sygnału zastosuj wzór na kosinusa sumy kątów:  $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ ). Zauważ, że część rzeczywista jest symetryczna względem częstotliwości  $f_s/2$  (próbka  $N/2+1$ ), a część urojona – asymetryczna (wartość zanegowana).

Wyznacz macierz rekonstrukcji  $B$  jako wynik sprzężenia zespolonego i transpozycji macierzy  $A$  ( $B=A'$ ). Zrekonstruuuj sygnał na podstawie  $X$  ( $x_r=B X$ ) i porównaj go z oryginałem  $x$  (czy  $x_r=x$ ?). Zastąp operację  $X=A*x$  poprzez  $X=\text{fft}(x)$ , zaś  $x_r=B*X$  – przez  $x_r=\text{ifft}(X)$ . Czy  $x$  i  $x_r$  są takie same jak poprzednio? O ile wartości nowego  $X$  są różne od poprzednich i czy jest to związane z wartością  $N$ ? Zmień  $f_1=100$  Hz na  $f_1=125$  Hz, oblicz i wyświetl widmo jak poprzednio.

## 2. DtFT (1 pkt)

Ustaw  $f_1=125$  Hz i przyjmij  $X_1=X$  (z poprzedniego ćwiczenia). Następnie zwiększ rozdzielczość częstotliwości poprzez dołączenie  $M=100$  zer na końcu sygnału  $x$  (otrzymujemy sygnał  $x_z$ ) oraz wykonaj skalowanie  $X_2=\text{fft}(x_z) ./ (N+M)$  (otrzymujemy  $X_2$ ), które jest obliczane według wzoru:

$$X_2(k) = \frac{1}{N+M} \sum_{n=0}^{N+M-1} x_z(n) e^{-j\frac{2\pi}{N+M}kn}$$

gdzie  $k=0,1,\dots,N+M$ . Zwróć uwagę, że sygnał  $x_z$  ma teraz długość  $N+M$  próbek i jest rozszerzony  $M$  zerami. Następnie oblicz  $X_3$  stosując wzór na DtFT( $x$ ):

$$X_3(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{f}{f_s}n}$$

stosując wartości  $f=0:0.25:1000$  Hz. Wyznacz trzy widma:

$X_1$  czyli DFT o długości  $N$ , sygnału próbkowanego częstotliwością  $f_s$  gdzie wektor częstotliwości można wyliczyć jako:  $f_{x1}=f_s*(0:N-1)/N/2$

$X_2$  (DFT z dodaniem zer), wyznacz odpowiedni wektor  $f_{x2}$

$X_3$  (DtFT), wyznacz odpowiedni wektor  $f_{x3}$ .

Narysuj wartości bezwzględne tych widm na jednym rysunku za pomocą instrukcji: `plot(fx1,X1,'o',fx2,X2,'bx',fx3,X3,'k-')`. Następnie oblicz  $X_3$  dla  $f=-2000:0.25:2000$  Hz ( $-2f_s:df:2f_s$ ) i ponownie narysuj trzy widma  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  na jednym rysunku. Jak widać obliczone widma  $X_1$  i  $X_2$  są (a)symetryczne, a widmo  $X_3$  jest okresowe. Dlatego wystarczy rysować widma tylko dla  $f=0:df:f_s/2$ .

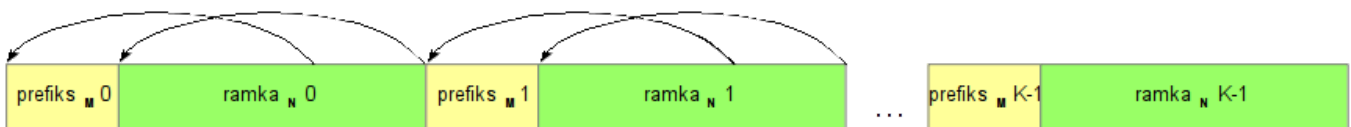
<sup>1</sup> Konwencja zapisu transformaty Fouriera jest taka, że jej wynik (wektor  $X$ ) jest zapisywany dużą literą, natomiast wektor wejściowy  $x$  jest pisany małą literą. Jest to trochę mylące, ponieważ  $X$  sugeruje macierz, a w tym kontekście jest wektorem o rozmiarze takim samym jak  $x$ .

### 3. DtFT, rola funkcji okien i liczby próbek (2 pkt)

Dla sygnału z ćwiczenia 1 ustaw  $f=0:0.1:500$  (dla DtFT),  $N=100$ ,  $f_1=100$  Hz i  $f_2=125$  Hz,  $A1=1$  i  $A2=0.0001$ . Oblicz DtFT i wyświetl widmo. Czy widzisz obie składowe sygnału? Następnie wymnóż próbki sygnału kolejno z oknem prostokątnym, Hamminga, Blackmana, Czebyszewa (tłumienie 100 dB) i Czebyszewa (tłumienie 120 dB), oblicz DtFT i wyświetl moduły pięciu widm na jednym rysunku. Następnie ustaw w ostatnim zadaniu  $N=1000$  i powtórz go ale tylko dla różnych wartości tłumienia okna Czebyszewa.

### 4. Analiza częstotliwościowa sygnału ADSL (1 pkt)

Wykonaj analizę częstotliwościową dostarczonego sygnału ADSL. Sygnał zawiera  $K=8$  ramek o długości  $N=512$  próbek z prefiksem  $M=32$  położonych jak na rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Ramki sygnału ADSL

Każda ramka  $N$  próbek ma zaalokowanych kilkanaście różnych podkanałów częstotliwościowych czyli dane znajdują się na odpowiednich „harmonicznych”. Ramki sygnału rozpoczynają się od początku sygnału, tak więc  $m$ -ty prefiks rozpoczyna się w próbce  $m*(N+M)+1$ .

Zadania:

- wykonać  $N$ -punktowe DFT (FFT) każdej ramki (po usunięciu prefiksu)
- wyznaczyć, które harmoniczne były w niej używane.

Sygnał do analizy znajduje się w pliku `lab_03.mat`. Użyj sygnału ze wektora o nazwie `x_??` gdzie `??` jest liczbą otrzymaną jako rezultat wykonania: `mod(twoj_numer_indeksu, 16)+1`.

### 5. Analiza sygnału rzeczywistego - EKG (opcjonalnie, +1 pkt)

Pobierz z internetu kilka sygnałów EKG, np. ze strony <https://www.physionet.org/cgi-bin/atm/ATM> lub skorzystaj z sygnału EKG dołączonego do laboratorium.

Wyznacz częstotliwość pracy serca, korzystając z DFT (`X=fft(x)`) i DtFT (programy z listingu 4.2 ze skryptu *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Instrukcje laboratoryjne - Lato 2025*). Pokaż sygnały EKG (wyskaluj oś czasu w sekundach) oraz ich widma DFT i DtFT (wyskaluj oś częstotliwości w hercach). Narysuj widma w skali liniowej i decybelowej.

### 6. Filtracja częstotliwości w dziedzinie współczynników DFT: (opcjonalnie, +1 pkt)

Pobierz z internetu, np. strony internetowej *FindSounds* dwa dźwięki spróbkowane z tą samą częstotliwością, ale różniące się widmem DFT: jeden powinien zawierać niskie częstotliwości (np. warkot silnika samochodu), a drugi wysokie częstotliwości (np. śpiew ptaka). Osobno oblicz i wyświetl ich widma DFT: zapisz wartości graniczne zakresów częstotliwości. Następnie dodaj do siebie oba sygnały (krótszy dopełnij na końcu zerami). Oblicz i wyświetl DFT sumy.

Następnie wyzeruj w widmie współczynniki DFT w większości związane z jednym sygnałem (np. warkotem silnika). Pamiętaj, że musisz usunąć zarówno składową o częstotliwości dodatniej jak i ujemnej. Potem wykonaj transformatę IDFT i wyświetl otrzymany wynik. Jeśli sygnał jest zespolony to znaczy, że źle wyzerowałeś (usunąłeś) częstotliwości i wymagana symetria widma DFT została przez ciebie naruszona - popraw błąd albo weź tylko część rzeczywistą wyniku. Odsłuchaj sygnał.