Cyfrowe Przetwarzanie Sygnałów

Transformacje ortogonalne

prof. dr hab. inż. Tomasz Zieliński, dr inż. Jarosław Bułat

2025.03.12

1. Macierze transformacji (1 pkt)

Według poniższego wzoru wygeneruj wzorce kosinusowe w postaci wektorów i utwórz z nich macierz transformaty – macierz analizy $\mathbf{A}$ transformaty DCT-II. Niech

$$w_k(n) = s_k * \cos\left(\frac{\pi * k}{N} * (n+0.5)\right), \; N=20,\; k=0...N\text{-}1,\; n=0...N\text{-}1, \{ s_0 = \sqrt{\square}$$

oznacza k-ty wiersz macierzy analizy $\mathbf{A}$ (20x20) będącej bazą pewnej transformaty.

Sprawdź czy wszystkie wektory (wiersze macierzy) są do siebie ortonormalne (czy iloczyn skalarny wszystkich par jest równy zero: suma iloczynów odpowiadających sobie próbek).

Poniżej podano przykład obliczania iloczynu skalarnego różnymi metodami.

```
clear all; close all
w1 = [ 0 0 1 0 0 0 0 0 ];          % Wektor 1
w2 = [ 0 0 0 0 1 0 0 0 ];          % Wektor 2
w12 = w1 .* w2;                    % Iloczyn odpowiadających sobie próbek
prod1 = sum(w12)                   % ,,0'' oznacza że wektory są ortogonalne
prod2 = dot( w1, w2 )        % w przestrzeni Euklidesowej
prod3 = w1*w2'                     % bezpośrednie obliczenie (mnożenie wektorowe)
```

2. Transformacja odwrotna – perfekcyjna rekonstrukcja (1+0.25 pkt)

Wygeneruj macierz odwrotną (syntezy) $\mathbf{S}$=IDCT do macierzy DCT z pkt. 1 (transponuj macierz $\mathbf{A}$, czyli zamień wiersze na kolumny), sprawdź czy $\mathbf{SA}$==$\mathbf{I}$ (macierz identycznościowa), a następnie mając $\mathbf{A}$ i $\mathbf{S}$ wykonaj analizę:

$$X = Ax'$$

oraz rekonstrukcję (syntezę):

$$x_s = SX$$

sygnału sygnału losowego (funkcja `randn()`), sprawdź czy transformacja posiada właściwość perfekcyjnej rekonstrukcji, ($\mathbf{x}_s$==$\mathbf{x}$?).

<u>Dla dociekliwych (+0.25 pkt):</u> wygeneruj macierz kwadratową $\mathbf{A}$ za pomocą funkcji `randn()` dla N=20. Sprawdź ortonormalność jej wierszy (czy norma wierszy=1). Wyznacz macierz odwrotną `S=inv(A)`. Sprawdź, czy $\mathbf{AS}$==$\mathbf{I}$?, czyli czy sekwencja operacji $\mathbf{y}$=$\mathbf{Ax}$, $\mathbf{x}_s$=$\mathbf{Sy}$ posiada właściwość perfekcyjnej rekonstrukcji. Dokonaj analizy i syntezy dowolnego sygnału losowego jak powyżej oraz sprawdź czy $\mathbf{x}_s$==$\mathbf{x}$?

„Zepsute” DCT: wygeneruj macierz $\mathbf{A}$ dla DCT, podstawiając niepoprawne indeksy (wartości) częstotliwości, np. zastąp „k” przez „k+0.25” (wzór w pkt. 1). Sprawdź ortogonalność tej macierzy, sprawdź wynik analizy oraz perfekcyjną rekonstrukcję na sygnale szumowym i harmonicznym.

3. Analiza częstotliwościowa (3 pkt)

Przyjmij liczbę próbek sygnału N=100 i częstotliwość próbkowania f_s=1000 Hz. Wygeneruj sygnał x będący sumą trzech sinusoid o częstotliwościach f_1=50, f_2=100, f_3=150 Hz i amplitudach A_1=50, A_2=100, A_3=150 (odpowiednio).

Zbuduj macierze $\mathbf{A}$=DCT i $\mathbf{S}$=IDCT dla N=100 (patrz wzór w ćwiczeniu 1). Wyświetl w pętli wartości wszystkich wierszy macierzy $\mathbf{A}$ i kolumn macierzy $\mathbf{S}$, tzn. pierwszy wiersz $\mathbf{A}$, poniżej pierwsza kolumna $\mathbf{S}$, drugi wiersz macierzy $\mathbf{A}$ i druga kolumna macierzy $\mathbf{S}$, itd. Wyświetlaj oba przebiegi na jednym wykresie, użyj pętli i instrukcji `pause`.

Wykonaj analizę $\mathbf{y}$=$\mathbf{Ax}$ i wyświetl wartości `y(1:N)`: porównaj wartości współczynników niezerowych z wartościami amplitud składowych sygnału oraz porównaj numery współczynników niezerowych z wartościami częstotliwości składowych sygnału. Wyskaluj oś poziomą w częstotliwości: zastąp `n=1:N` przez `f=(0:N-1)*fs/N/2`. Czy teraz wynik analizy (pokazywane częstotliwości i amplitudy składowych sygnału) jest poprawny? Sprawdź perfekcyjną rekonstrukcję ($\mathbf{x_r}$=$\mathbf{Sy}$, $\mathbf{x_r}$==$\mathbf{x}$?).

Zmień częstotliwość f_2=100 Hz drugiej składowej sygnału na f_2=105 Hz, wykonaj analizę sygnału sumarycznego ($\mathbf{y}$=$\mathbf{Ax}$) i wyświetl wyskalowany w hercach wykres $y(f)$. Składowa o f_2=105 Hz jest teraz rozmyta, ponieważ jej wzorca nie ma w zestawie funkcji bazowych (w wierszach macierzy $\mathbf{A}$). Sprawdź czy mimo to jest możliwa perfekcyjna rekonstrukcja sygnału ($\mathbf{x_r}$=$\mathbf{Sy}$, $\mathbf{x_r}$==$\mathbf{x}$?).

Zwiększ wszystkie częstotliwości sygnału o 2.5 Hz (przesunięcie spowodowane przez zastosowanie niepoprawnej częstotliwości w konwerterze sygnału telekomunikacyjnego do pasma podstawowego wokół 0 Hz). Wyświetl wynik analizy. Zwróć uwagę na rozmycie wszystkich składowych.

Dlaczego niektóre współczynniki analizy ($\mathbf{y}$) mają duże wartości? Ponieważ analizowany sygnał dobrze koreluje się (iloczyn skalarny) z niektórymi wierszami macierzy $\mathbf{A}$ (wzorcami częstotliwości).

Dlaczego możliwa jest rekonstrukcja sygnału? Ponieważ wiedząc „ile" ($\mathbf{y}$) każdego wzorca częstotliwości jest w sygnale (wzorce znamy), można te wzorce częstotliwości wymnożyć przez „ile" i zsumować przeskalowane sygnały ($\mathbf{x_r}$=$\mathbf{By}$), odtwarzając w ten sposób analizowany sygnał (pierwsza próbka sygnału zrekonstruowanego jest sumą pierwszych próbek wszystkich przeskalowanych wzorców, druga ... sumą drugich, itd.; w kolumnach macierzy B mamy wzorce, które są wykorzystywane do rekonstrukcji, y to informacja o „ile").

4. Sygnały rzeczywiste (opcjonalnie – dla dociekliwych) (+0.25 pkt)

Wczytaj do Matlaba sygnał z pliku `mowa.wav`, lub inny własny plik, wykorzystując funkcję `[x, fs] = audioread('mowa.wav')` i wyświetl go (w osi x numer próbki). Następnie wybierz wzrokowo z tego sygnału M=10 różnych fragmentów x_k=$x(n_1{:}n_2)$ o długości N=256 próbek, k=1,2,3,..M, oblicz dla nich $y_k = Ax_k$. Następnie wyświetl w pętli dane na podzielonym rysunku: góra – k-ty fragment $x_k(n_1{:}n_2)$, dół – wynik analizy $y_k(f)$, wyskalowany w hercach. Jako macierz analizy przyjmij DCT z punktu 1.

5. Filtracja dźwięku z DCT/IDCT (+1 pkt)

Nagraj 3-4 sekundy fragmentu swojej własnej mowy z częstotliwością próbkowania `fs=8000Hz`, czyli jedno zdanie. Narysuj (`plot(x)`) i odsłuchaj sygnal (`soundsc(x,fpr)`). Wykonaj transformację DCT całego sygnału `c=dct(x)` lub jego części `c=dct(x(n1:n2))`. Wyświetl obliczone współczynniki transformaty `stem(c)`. Następnie dokonaj syntezy mowy z: 1) 25% wszystkich współczynników - wybierz pierwsze wartości, np. `y=idct([c(1:8000); zeros(lenght(c)-8000,1)])`, 2) 75% wszystkich współczynników - wybierz ostatnie wartości. Odsłuchaj wynik przetwarzania. Przykład 1: wszystkie wartości współczynników mniejsze od 50 możesz wyzerować w ten sposób: `c(c<50)=0`. Przykład 2: możesz wyzerować tylko współczynniki o indeksach od 100 do 200: `c([100:200])=0`.

Teraz dodaj zakłócenie sinusoidalne o częstotliwości 250 Hz do nagranej mowy:

```
x=x+0.5*sin(2*pi*250/fpr*(0:length(x)-1)')
```

(zwróć uwagę na orientację wektora, poziomy czy pionowy). Narysuj sygnał, odsłuchaj go, wykonaj DCT, zmodyfikuj współczynniki DCT (usuń zakłócenie), wykonaj odwrotne DCT, narysuj sygnał, odsłuchaj wynik przetwarzania.