

Procesy Stochastyczne

podstawowe wzory

Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych,

$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Omega)$ - rodzina podzbiorów (dokładniej σ -ciało) przestrzeni Ω ,

rozkład prawdopodobieństwa P jest miarą na $\mathcal{S}(\Omega)$.

Przestrzeń probabilistyczna (nazywana jeszcze probabilistyczną trójką) (Ω, \mathcal{S}, P) .

Zdarzenia A, B są niezależne, jeśli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A względem B takiego że $P(B) > 0$ nazywamy liczbę

$$P(A | B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

(Wzór prawdopodobieństwa całkowitego:) jeśli $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{S}$, $P(H_i) > 0$, $(\forall i = 1, \dots, n)$ oraz $H_i \cap H_j = \emptyset$, $(\forall i \neq j)$ i $\Omega = H_1 \cup \dots \cup H_n$, to

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A | H_i).$$

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ postaci

$$F_X(x) := P\{X \leq x\},$$

gdzie $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} := X^{-1}(-\infty, x]$.

Funkcję

$$F_{\vec{X}}(x_1, \dots, x_n) := P\left(\{X_1 \leq x_1\}, \dots, \{X_n \leq x_n\}\right), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

nazywamy dystrybuantą wektora losowego $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmie wartości z przedziału $[x_1, x_2)$ jest równa różnicy

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej X o wartościach $x_1 < x_2 < \dots$, które X przyjmuje z prawdopodobieństwami p_1, p_2, \dots , dystrybuenta $F_X(x)$ wyraża się następująco:
$$F_X(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k$$

Jeśli istnieje nieujemna funkcja f_X spełniająca $\forall x \in \mathbb{R}$ własności:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) ds = 1,$$

to f_X nazywa się funkcją gęstości zmiennej losowej X .

Dla każdej absolutnie ciągłej dystrybuenty F_X prawie wszędzie (p.w.) istnieje pochodna

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

która w sposób oczywisty p.w. równa się f_X , jako pochodna całki względem górnej granicy całkowania.

k -ty moment definiuje się jako całka Stieltjesa (uogólnienie zwykłej całki Riemanna)

$$m_k = E(x^k) := \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx & (\text{dla zm. los. ciągłej}) \\ \sum_k x^k p_k & (\text{dla zm. los. dyskretnej}) \end{cases}$$

Najważniejszym momentem dystrybuenty jest wartość oczekiwana lub średnia (pierwszy moment)

$$\mu := E(X) := \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & (\text{dla zm. los. ciągłej}) \\ \sum_i x_i^k p_i & (\text{dla zm. los. dyskretnej}) \end{cases}$$

Wartość oczekiwana, jak również i inne charakterystyki zależą od (miary) prawdopodobieństwa P .

Wariancja definiuje się jako 2-gi moment centralny postaci

$$\sigma^2 := D(X) := E((X - \mu)^2) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx & \text{dla zm. los. ciągłej} \\ \sum_k (x_k - \mu)^2 p_k & \text{dla zm. los. dyskretnej} \end{cases}$$

Często jest używane oznaczenie: $\text{Var}(X) = D(X)$. W konsekwencji zachodzi równość

$$\sigma^2 = D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2.$$

Standardowym odchyleniem X nazywa się liczba

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{D(X)}.$$

Własności:

$$E(\alpha X + \beta Y + \gamma) = \alpha E(X) + \beta E(Y) + \gamma$$

$$D(\alpha X + \beta) = D(\alpha X) = \alpha^2 D(X).$$

Kowariancja zmiennych losowych X i Y definiuje się jako

$$\text{Cov}(X, Y) := E \left\{ (X - E(X)) \cdot (Y - E(Y)) \right\} = E(XY) - E(X)E(Y) = .$$

Korelacja lub współczynnik korelacji liniowej (czasem nazywa się współczynnikiem 'r' Pearsona) definiuje się jako

$$r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Wartość współczynnika korelacji mieści się w przedziale domkniętym $[-1, 1]$.

Im większa jego wartość bezwzględna, tym silniejsza jest zależność liniowa między zmiennymi. $r(X, Y) = 0$ oznacza brak liniowej zależności między cechami, $r(X, Y) = 1$ oznacza dokładną dodatnią liniową zależność między cechami, natomiast $r(X, Y) = -1$ oznacza dokładną ujemną liniową zależność między cechami, tzn. jeżeli zmienna X rośnie, to Y maleje i na odwrót. Współczynnik korelacji liniowej można traktować jako znormalizowaną kowariancję.

Często błędnie zakłada się, że zależność statystyczna jest równoważna niezerowemu współczynnikowi korelacji lub niezerowej kowariancji. Tak nie jest. Wniosekować możemy tylko w jedną stronę: jeśli X, Y są niezależne, to stąd mamy, że $\text{Cov}(X, Y) = 0$ i $r(X, Y) = 0$. Przykład: niech zmienne X i Y związane zależnością: $Y = X^2$, jest to przykład ścisłej zależności. Jednak $\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2)$ może być równa zeru dla niektórych X .

Podstawowa własność:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y),$$

lub $D(\alpha X + \beta Y + \gamma) = D(\alpha X) + D(\beta Y) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) \pm 2\alpha\beta \text{Cov}(X, Y).$

Rozkład normalny (Rozkład Gaussa) wyznacza się przez gęstość

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ oznacza: X jest rozkładem normalnym o $E(X) = \mu$ i $D(X) = \sigma^2$. (Czasem stosuje się trochę odmienne oznaczenie: $X \sim N(\mu, \sigma)$, tzn. parametrem wskazuje się standardowe odchylenie, a nie wariancję). Standardowy rozkład normalny z definicji spełnia warunki:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \text{lub} \quad X = \sigma Z + \mu \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0, 1)$ jest tzw. całka Laplace'a

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

$$\text{Własność: } X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff \begin{cases} P\{X \leq x\} = F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ P\{y < X < x\} = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right). \end{cases}$$

Zmienne losowe X_1 i X_2 nazywamy niezależnymi, gdy ich łączny rozkład jest iloczynem, czyli gdy zachodzi równość

$$P\left(\{X_1 \leq x_1\}, \{X_2 \leq x_2\}\right) = P\{X_1 \leq x_1\} \cdot P\{X_2 \leq x_2\}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Niezależne zmienne losowe X i Y spełniają równania:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y), \quad D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Jeśli ciągła zmienna losowa X ma rozkład normalny, to gęstość zmiennej losowej postaci $aX + b$ ma postać

$$f_{aX+b}(x) = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}.$$

Procesem stochastycznym jednowymiarowym nazywamy zmienną losową, zależną dodatkowo od czasu i oznaczamy

$$X_t(\omega) \equiv X(t, \omega) \quad \text{lub krótko} \quad X \equiv X_t.$$

Dystrybuantą procesu X_t nazywamy funkcję 2-ch zmiennych $(t, x) \in \mathbb{R} \times T$ postaci

$$F_X(t, x) := P\{X_t \leq x\}.$$

Trajektorią procesu (albo *losową ścieżką* albo *realizacją procesu*) nazywamy funkcję od czasu postaci

$$T \ni t \longrightarrow X_t(\omega_0) \in \mathbb{R} \quad \text{dla ustalonego } \omega_0 \in \Omega.$$

Proces stochastyczny nazywamy ciągłym, gdy jego trajektorie są funkcje ciągłe.

Proces X_t nazywamy procesem o przyrostach niezależnych, jeśli niezależne są zmienne losowe

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n.$$

Jeśli proces X_t posiada gęstość f_X i dystrybucję F_X to k -ty moment definiuje się jako

$$E(X_t^k) := \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(t; x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(t, x) & \text{dla zm. los. ciągłej} \\ \sum_i x_i^k p_i(t) & \text{dla zm. los. dyskretnej} \end{cases}$$

Przy $k = 1$ jest to tzw. wartość oczekiwana procesu

$$m_X(t) \equiv E(X_t) := \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(t, x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(t, x) & \text{dla zm. los. ciągłej} \\ \sum_i x_i p_i(t) & \text{dla zm. los. dyskretnej} \end{cases}.$$

Wariancja (dyspersja) procesu definiuje się jako 2-gi moment centralny

$$\begin{aligned} D(X_t) \equiv \text{Var}(X_t) &:= E\left((X_t - E(X_t))^2\right) = E(X_t^2) - E^2(X_t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_X(t; x) - E^2(X_t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X_t))^2 f_X(t, x) & \text{dla zm. los. ciągłej} \\ \sum_i (x_i - E(X_t))^2 p_i(t) & \text{dla zm. los. dyskretnej} \end{cases} \end{aligned}$$

Standardowym odchyleniem X_t nazywa się funkcja

$$t \longmapsto \sigma_t := \sqrt{D(X_t)} \equiv \sqrt{\text{Var}(X_t)}.$$

Funkcja korelacyjna procesu X_t definiuje się jako funkcja dwóch zmiennych rzeczywistych $t, s \in T$ postaci

$$R_X(t, s) := E(X_t \cdot X_s).$$

Funkcja kowariancyjna procesu X_t definiuje się jako kowariancja X_t i X_s i jest funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych $t, s \in T$ postaci

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= \text{Cov}(X_t, X_s) = E \left\{ (X_t - E(X_t)) \cdot (X_s - E(X_s)) \right\} = \\ &= E \left\{ (X_t - m_X(t)) \cdot (X_s - m_X(s)) \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 dF_X(t, s; x_1, x_2) - m_X(t) m_X(s) = \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_X(t, s; x_1, x_2) dx_1 dx_2 - m_X(t) m_X(s) & \text{dla zm. los. ciągłej} \\ \sum_{i,j} x_i x_j \tilde{p}_{x_i, y_j}(t, s) - \sum_i (x_i p_{x_i}(t, s)) \sum_j (y_j p_{y_j}(s)) & \text{dla zm. los. dyskretnej} \end{cases} \end{aligned}$$

jeśli proces X_t przyjmuje wartość x_i w chwili t z prawdopodobieństwem $p_{x_i}(t)$, proces Y_s przyjmuje wartość y_j w chwili s z prawdopodobieństwem $p_{y_j}(s)$, a łącznie procesy X_t i Y_s przyjmują wartość $x_i \cdot y_j$ z prawdopodobieństwem \tilde{p}_{x_i, y_j} ; zauważmy, że \tilde{p}_{x_i, y_j} wcale nie musi być równe iloczynowi $p_{x_i}(t) \cdot p_{y_j}(s)$.

Zachodzi nierówność Cauchy'ego

$$|\text{Cov}(X_t, X_s)|^2 \leq D(X_t) \cdot D(X_s).$$

Zachodzą równości

$$K_X(t, t) = \sigma_t^2 = D(X_t) \quad \text{oraz} \quad K_X(t, s) = R_X(t, s) - m_X(t) m_X(s).$$

Jak widać ze wzorów, funkcja $K_X(t, s)$ wyraża się przez 2-wymiarowe dystrybuantę $F_X(t, s; x_1, x_2)$ lub gęstość $f_X(t, s; x_1, x_2)$ procesu X_t (zdefiniowane trochę niżej).

Unormowaną funkcją kowariancyjną procesu X nazywamy:

$$\rho_X(t, s) := \frac{K_X(t, s)}{\sigma_t \cdot \sigma_s}.$$

W przypadku, gdy funkcja kowariancyjna dotyczy dwóch procesów, definiujemy ją następująco:

$$\begin{aligned} K_{XY}(t, s) &= \text{Cov}(X_t, Y_s) = E \left\{ (X_t - E(X_t)) \cdot (Y_s - E(Y_s)) \right\} \\ &\equiv E \left\{ (X_t - m_X(t)) \cdot (Y_s - m_Y(s)) \right\}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$D(X_t + Y_s) = D(X_t) + D(X_s) + 2\text{Cov}(X_t, Y_s).$$

Macierzą kowariancyjną procesu X_t w momentach $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ nazywamy macierz

$$\mathbf{K}_T := \left[K(t_i, t_j) \right]_{i,j=1}^n = \left[\text{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j}) \right]_{i,j=1}^n$$

z wyznacznikiem $\det \mathbf{K}_T$.

Zachodzi wówczas własność

$$K_{XY}(t, s) = K_{YX}(s, t)$$

Dwa procesy X_t i Y_s nazywamy nieskorelowanymi, jeśli $\forall t, s \in T$ mamy

$$K_{XY}(t, s) = 0.$$

Proces stochastyczny $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$ o przyrostach niezależnych nazywamy jednorodnym, jeśli $X_0(\omega) = 0$ i dla $\forall t_1 < t_2$ rozkład różnicy $X_{t_2} - X_{t_1}$ zależy tylko od różnicy $t_2 - t_1$ (nie zależy od t_1).

0.1 Przykłady procesów.

Proces Gaussa.

Procesem normalnym (Gaussa) nazywa się proces, dla którego: dla każdego skończonego zbioru indeksów $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ zmienna losowa $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ ma rozkład normalny.

Proces normalny charakteryzuje się dwoma parametrami - wartością oczekiwaną i wariancją (obie jako funkcję czasu !). Też jego można określić przez wartość oczekiwaną i kowariancję, bowiem dla procesu normalnego zachodzi twierdzenie:

dla dowolnej funkcji m określonej w T i dowolnej dodatnie określonej funkcji K w $T \times T$ istnieje jedyny proces normalny $\{X_t : t \in T\}$, dla którego

$$\begin{aligned} E(X_t) &= m(t), \\ E(X_{t_1} X_{t_2}) &= K(t_1, t_2) + m(t_1)m(t_2). \end{aligned}$$

n -Wymiarowe dystrybuanta i gęstość procesu Gaussa X_t wyrażają się przez funkcję $m(t)$ i $K(t, s)$ (wzór w dodatku lub w wykładzie).

Proces Wienera.

Proces Gaussa o czasie ciągłym $\{X_t : t \geq 0\}$ taki że $X_0 = 0$ posiadający parametry

$$E(X_t) = 0, \quad \text{Cov}(X_t, X_s) = \min\{t, s\}, \quad t, s \geq 0,$$

nazywamy standardowym procesem Wienera (lub ruchem Browna).

Zręczną do sprawdzenia, czy proces jest procesem Wienera jest następująca definicja:

- 1) $W_0 = 0$;
- 2) W jest procesem o przyrostach niezależnych: $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$, zmienne losowe $W_2 - W_1, W_3 - W_2, \dots, W_n - W_{n-1}$ są niezależne; (inny wariant definicji: $\forall t > 0$ przyszłe przyrosty $W_{t+u} - W_t$ dla $u \geq 0$ są niezależne od poprzednich wartości $W_s, s \leq t$);

- 3) rozkład przyrostów $W_{t+u} - W_t$ jest normalnym o wartości oczekiwanej 0 i wariancji u , wkrótce $W_{t+u} - W_t \sim N(0, u)$;

- 4) trajektorie procesu W są ciągle względem t .

Dla takiego procesu $E(W_t) = 0$, $\text{Var}(W_t - W_s) = t - s$ przy $t > s$, a w szczególności $\text{Var}(W_t) = t$, $\text{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s)$.

Uogólnieniem procesów Gaussa (i też Wienera) są zespolone procesy Hilberta (tzw. procesy o skończonych momentach rzędu drugiego), dla których też zachodzi podobne twierdzenie o funkcji kowariancyjnej (szczegóły w wykładach).

Proces Poissona. Proces stochastyczny $\{X_t: t \geq 0\}$ spełniający warunek $P\{X(0) = 0\} = 1$ jest nazywany procesem Poissona z parametrem $\lambda \geq 0$, jeżeli przyrosty $X_t - X_s$ tego procesu są niezależne i mają rozkład Poissona, czyli przyjmują tylko wartości całkowite i nieujemne oraz

$$P\{X_t - X_s = k\} = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall t > s \geq 0.$$

Dla $s = 0$ mamy:

$$P\{X_t = k\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \forall t \geq 0.$$

- W procesie Poissona prawdopodobieństwo tego, że w przedziale (t_1, t_2) nie nastąpi zmiana stanu (przejście) jest równe $\exp(-\lambda(t_2 - t_1))$. Jest to prawdopodobieństwo tego że trajektorja jest funkcją stałą w przedziale (t_1, t_2) . Prawdopodobieństwo wystąpienia skoku jednostkowego w przedziale (t_1, t_2) jest równe $\lambda(t_2 - t_1) \exp(-\lambda(t_2 - t_1))$ itd.
- Traektorje procesu Poissona są funkcjami schodkowymi, niemalejącymi, bowiem z prawdopodobieństwem **1** różnica $X_{t_2} - X_{t_1}$ przyjmuje tylko wartości nieujemne i prawdopodobieństwo nienastąpienia stanu w przedziale (t_1, t_2) jest dodatnie.

Proces Poissona jest wykorzystywany w wielu zagadnieniach, mających do czynienia z losowymi wartościami całkowitymi. Na przykład, często przyjmuje się, że procesem Poissona jest: liczba wezwań w centrali telefonicznej w ciągu czasu t ; liczba cząstek substancji radioaktywnej, które uległy rozpadowi w ciągu czasu t ; liczba uszkodzeń pewnego systemu w ciągu czasu t , w zagadnieniach dotyczących teorii obsługi masowej, modelowanie szumu śróutowego itd.

Niektóre własności procesu Poissona

- 1° Jeśli $X_0(\omega) \equiv 0$, to oczywiście X_t ma taki sam rozkład jak różnica $X_t - X_0$, czyli jednowymiarowy rozkład procesu Poissona w chwili t jest taki sam, jak rozkład przyrostu w ciągu czasu t .
- 2° Gdy X_t oznacza liczbę zdarzeń, które nastąpiły w przedziale czasu $[0, t)$, wówczas różnica $X_{t_2} - X_{t_1}$ jest liczbą zdarzeń, które nastąpiły w przedziale $[t_1, t_2)$
- 3° Niech $Y(\omega) = t''(\omega) - t'(\omega)$, wówczas Y jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, bowiem dystrybuanta zmiennej losowej Y ma postać

$$\begin{aligned} P(\{\omega : Y(\omega) < y\}) &= 1 - P(\{\omega : Y(\omega) \geq y\}) = \\ &= 1 - P(\{\omega : X_{t'+y}(\omega) - X_{t'}(\omega) = 0\}) = 1 - e^{-\lambda y}. \end{aligned}$$

Otrzymany wynik można sformułować w następujący sposób: czas przebywania procesu w każdym ze stanów ma rozkład wykładniczy.

Charakterystyki liczbowe procesu Poissona:

$$E(X_t) = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t$$

Dla dowolnych t_1, t_2 mamy

$$K_X(t_1, t_2) = \lambda \cdot \min\{t_1, t_2\}.$$

Zatem, wariancja jest równa

$$D(X_t) = K_X(t, t) = \lambda t.$$

Proces stacjonarny. Własność stacjonarności procesu oznacza niezależność jego wartości oczekiwanej i kowariancji od czasu $t \in T$.

Proces $\{X_t : t \in T\}$ spełniający założenie $E(|X_t|^2) < \infty$ nazywamy stacjonarnym w szerszym sensie (nazywany też krótko stacjonarnym), jeśli $\forall t, s \in T$ takich że $t - s \in T$ mamy

$$E(X_t) = \text{const}, \quad \text{Cov}\{X_t, X_s\} = C(t - s),$$

tzn., że $\text{Cov}\{X_t, X_s\}$ jako funkcja na $T \times T$ zależy tylko od różnicy $t - s$.

Proces Markowa.

Łańcuch Markowa jest najprostszym uogólnieniem procesów o niezależnych wartościach. Te procesy charakteryzuje niezależność zachowania procesu w przyszłości od zachowania w przeszłości

Łańcuch Markowa definiuje się jako dyskretny proces $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ o skończonym lub przeliczalnym zbiorze wartości $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ taki, że

$$P\{X_i = x_i \mid X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}\} = P\{X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}\},$$

tzn. że warunkowe prawdopodobieństwo zdarzenia

$$\{\omega : X_i(\omega) = x_i\}$$

zależy wyłącznie od zdarzenia poprzedniego

$$\{\omega : X_{i-1}(\omega) = x_{i-1}\}$$

i nie zależy od zdarzeń wcześniejszych

$$\{\omega: X_1(\omega) = x_1\}, \dots, \{\omega: X_{i-2}(\omega) = x_{i-2}\}.$$

Łańcuch Markowa charakteryzuje się macierzą prawdopodobieństw warunkowych

$$\left[p_{ij} \right]_{i,j=1}^n, \quad \text{gdzie} \quad p_{ij} := \mathbb{P} \left\{ X_i = x_j \mid X_{i-1} = x_i \right\}.$$

Uogólnieniem łańcuchu Markowa jest proces Markowa.

Proces rzeczywisty $\{X_t: t \in T\}$ nazywamy procesem Markowa, jeśli $\forall t_j \in T: t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k$, ($j = 1, \dots, k$) oraz $\forall k > 1$ i dowolnego zbioru borelowskiego B na osi \mathbb{R}^1 zachodzą równości

$$\mathbb{P} \left\{ X_{t_k} \in B \mid X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_{k-1}} = x_{k-1} \right\} = \mathbb{P} \left\{ X_{t_k} \in B \mid X_{t_{k-1}} = x_{k-1} \right\},$$

gdzie x_1, \dots, x_k są to dowolne wartości zmiennej losowej X_t .

n -wymiarowe dystrybuanta i gęstość. Dystrybuantą n -wymiarową procesu stochastycznego X nazywamy dystrybuantę odpowiadającą n -wymiarowej zmiennej losowej $\vec{X} = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ w dowolnych momentach czasu $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Czyli, jeśli oznaczymy n -wymiarową dystrybuantę procesu X symbolem F_n to zgodnie z definicją mamy

$$F_n(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \equiv F_n(\vec{t}, \vec{x}) := P\left(\{X_{t_1} \leq x_1\}, \dots, \{X_{t_n} \leq x_n\}\right).$$

Jeśli dla procesu X o n -wymiarowej dystrybuancie F_n istnieje nieujemna funkcja $f_n \geq 0$ taka, że $\forall \vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ oraz $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ zachodzi równość

$$F_n(\vec{t}, \vec{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_n(\vec{t}, \vec{x}) d\vec{x}, \quad d\vec{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

gdzie $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\vec{t}, \vec{x}) d\vec{x} = 1$, to funkcję f_n nazywamy n -wymiarową gęstością procesu X .

W punktach ciągłości gęstości f_n mamy

$$\frac{\partial^n F_n(t_1, t_2, \dots, t_n, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(t_1, t_2, \dots, t_n, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Należy podkreślić, że nie każda funkcja F_n która dla ustalonego wektora $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ jest dystrybuantą n -wymiarowej zmiennej losowej $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$, może być traktowana jako n -wymiarowa dystrybuanta procesu stochastycznego. Muszą zachodzić dodatkowe warunki Kołmogorowa (tutaj nie umieszczałem - są w pliku wykładów)

n -Wymiarowa dystrybuanta i gęstość procesu Gaussa X_t dla momentów czasu $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ mają odpowiednio postać

$$\begin{aligned} F_n(\vec{t}, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}_{\vec{t}}}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m}_X) \mathbf{K}_{\vec{t}}^{-1} (\vec{x} - \vec{m}_X)^* \right\} d\vec{x}, \\ f_n(\vec{t}, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}_{\vec{t}}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m}_X) \mathbf{K}_{\vec{t}}^{-1} (\vec{x} - \vec{m}_X)^* \right\}, \end{aligned} \quad (0.1)$$

gdzie $\vec{m}_X = (m_X(t_1), \dots, m_X(t_k))$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $d\vec{x} = (dx_1, \dots, dx_k)$, $\vec{t} = (t_1, \dots, t_k)$.

n -wymiarowa gęstość prawdopodobieństwa procesu Wienera ma postać

$$\begin{aligned} f(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \exp \left(-\frac{x_1^2}{2t_1} \right) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp \left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right). \end{aligned}$$