zmienna losowa X **dyskretna**: wynik rzutu sześcianem,
tutaj mamy skończoną przestrzeń stanów {1,2,3,4,5,6}

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$(x_i\text{-E(X)})^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$F(3.5) = \frac{1}{2}$

$E(X) = \sum x_i P(x_i) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \frac{6*7}{2} = 3.5;$

$Var(X) = \sum (x_i - E(X))^2 P(x_i) = (1/6)(6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.25) = \frac{35}{12};$

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = \sum x_i P(x_i) = 1*\frac{1}{12}+(2+3+4+5)\ 1/6 + 6*\frac{1}{4} = 29/12 + 18/12 = \frac{47}{12} = 3\frac{11}{12};$

$Var(X) = \sum (x_i - E(X))^2 P(x_i) = (1/6)(2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25) + \frac{1}{12} \times 6.25 + \frac{1}{4} \times 6.25 = \frac{35}{12};$

$D(X) = Var(X) =$

$E((X - E(X))^2) =$

$\{ = E(X^2 - 2X\,E(X) + E(X)^2) = E(X^2) - E(X * 2\,E(X)) + E(X)^2 = E(X^2) - 2\,E(X)\,E(X) + E(X)^2 = \}$

$= E(X^2) - E(X)^2$

$Var(\alpha X + Y + \beta) = |\alpha|^2\ Var(X) + Var(Y) + Cov(\alpha X, Y) = |\alpha|^2\ Var(X) + Var(Y) + |\alpha|\ Cov(X, Y)$

$Var(\alpha X - Y + \beta) = |\alpha|^2\ Var(X) - Var(Y) + Cov(\alpha X, Y) = |\alpha|^2\ Var(X) + Var(Y) + |\alpha|\ Cov(X, Y)$

k_n (unormowana kowariancja) $= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$

Cov(X,Y) = E(X*Y) - E(X)*E(Y);
Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne pomiędzy sobą, wtedy Cov(X,Y) = 0.
Jednak nie zawsze z tego, że Cov(X,Y) = 0 można wywnioskować niezależność X i Y.

zmienna losowa Y ciągła,
prz.1
przestrzeń stanów dla Y niech będzie $[0,+\infty]$
dystrybuanta: $F(y) = P(Y \le y)$
$F(4) = P(Y <= 4)$

$$F(y) = \begin{cases} 1 - c\,e^{-\lambda y}, & \text{dla } y > 0 \\ 0, & \text{dla } y \le 0 \end{cases}$$

prz.2 gęstość

f(y) = $\frac{d}{dy}$F(y),

gęstość rozkładu jednostajnego:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{dla } y \in [a, b] \\ 0, & \text{poza tym przedziałem} \end{cases}$$

$E(Y) = \int y\, f(y)\, dy$

$D(Y) = \int (y - E(Y))^2 f(y)\, dy$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy = 1$

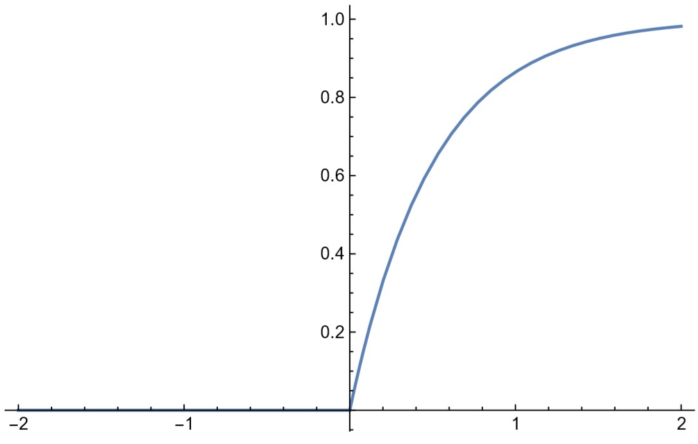
In[◦]:=
```
F1[y_] := If[y ≤ 0, 0, 1 - Exp[-2 y]];
```
operator warunk··· funkcja eksponenc

```
Integrate[ D[F1[y], y], {y, -∞, ∞}]
```
całka oblicz pochodną
```
Integrate[ y D[F1[y], y], {y, -∞, ∞}]
```
całka oblicz pochodną
```
Plot[ F1[y], {y, -2, 2}]
```
wykres

Out[◦]= 1

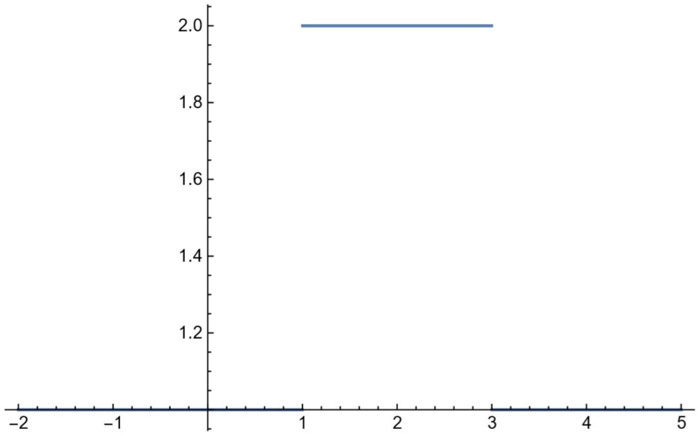
Out[◦]= $\frac{1}{2}$

Out[◦]=



```
f1[x_] := If[1 ≤ x ≤ 3, 2, 1];
          operator warunkowy
Plot[f1[x], {x, -2, 5}];
wykres
```

Out[◦]=



Rzucamy 2 kostki (sześciany),
wyznaczamy zmienną losową Y jako sume oczek na tych kostkach.
Obliczyć :

a; $F(3.5) = P(Y \le 3.5) = P(Y = 2 \text{ albo } Y = 3) = P(Y = 2) + P(Y = 3) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} = \frac{1}{12}$;

b; $P(2.5 < Y < 4.5) = ?$ $(= F(4.5) - F(2.5))$

$= P(Y = 3 \text{ albo } Y = 4) = \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{5}{36}$;

Zagadnienie .

Trzech strzelców o celności - A : 100 %, B : 80 %, C : 50 %;

Strzały do siebie oddają jednocześnie po rundach.

1) A->B, B->A,C->A

P(A przeżywa) = (1-0.8)*(1-0.5) = 0.2*0.5 = 0.1

P(B przeżywa) = 0

P(C przeżywa) = 1

2) P(A przeżywa) = 1-0.5 = 0.5

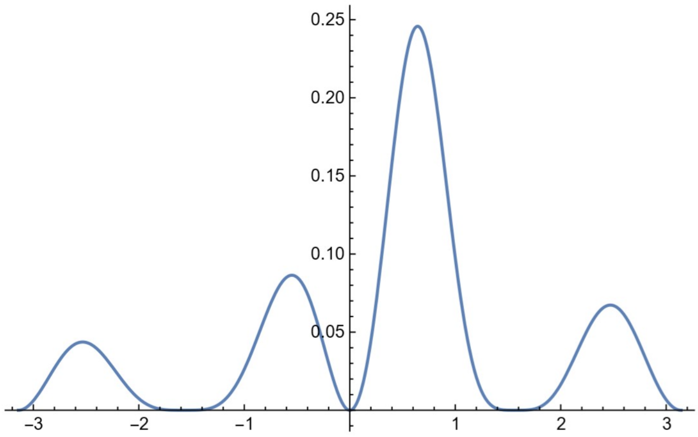
P(C przeżywa) = 0

P(A przeżywa) = 0.1*0.5 = 0.05

P(B przeżywa) = 0

P(C przeżywa) = 0.9 * 1 + 0.1*0 = 0.9

In[•]:= $\text{Plot}\left[\text{Sin}[x]^2\,\text{Cos}[x]^4 \big/ (2 - \text{Cos}[x] - \text{Sin}[x]),\ \{x, -\pi, \pi\}\right]$
wykres cosinus sinus

Out[•]=


In[•]:= $P\ (\text{i} - \text{ta litera jest literą 'A'}) = \frac{1}{26};$

$P\ (\text{i} - \text{ta litera jest literą 'A' oraz } (i+1) - \text{wsza litera jest literą 'B'}) = \frac{1}{26} * \frac{1}{26};$

Exp[Log[a] + Log[b]]
fu··· logarytm logarytm

••• Set: Tag Times in P (i – jest litera ta A′ literą′) is Protected.

••• Set: Tag Times in P (i – (1 + i) jest litera oraz ta A′ literą′ – jest litera wsza B′ literą′) is Protected.

Out[•]= a b

$X = \text{liczbę oczek otrzymanych przy rzucie kostką } (1, 2, 3, 4, 5, 6);$
$A = X \leq 3$
$B = X \geq 3$

$$P\ (A \mid B) = P\ (X \leq 3 \mid X \geq 3) = \frac{P\ (X \leq 3 \bigcap X \geq 3)}{P\ (X \geq 3)} = \frac{P\ (X = 3)}{P\ (X \geq 3)} = \frac{1/6}{4/6} = \frac{1}{4};$$

$$P\ (X \leq 5 \mid X \geq 3) = \frac{P\ (X \leq 5 \bigcap X \geq 3)}{P\ (X \geq 3)} = \frac{P\ (X = 3 \mid X = 4 \mid X = 5)}{P\ (X \geq 3)} = \frac{3/6}{4/6} = \frac{3}{4};$$

$H_1 = (X = 1 \mid X = 2 \mid X = 3);$
$H_2 = (X = 4 \mid X = 5);$
$H_3 = (X = 6);$

$$P\ (A) = \sum_{i} P\ (H_i)\ P\ (A \mid H_i) = P\ (H_1) * P\ (A \mid H_1) + P\ (H_2) * P\ (A \mid H_2) + P\ (H_3) * P\ (A \mid H_3);$$
$A = (X \text{ jest parzyste});$
$$P\ (A) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

```
E[ α X + β Y + γ ] = α E[X] + β E[Y] + γ;
```
liczba Eulera liczba Eu·· liczba Eulera

```
E[ α X - β Y ] = α E[X] - β E[Y];
```
liczba Eulera liczba Eu·· liczba Eulera

```
E[X * Y] ≠ E[X] * E[Y]; (* naogół... gdy X i Y  NIE są niezależne *)
```
liczba Eulera liczba··· liczba Eulera

```
Cov[X, Y] = E[X * Y] - E[X] * E[Y];
```
liczba Eulera liczba··· liczba Eulera

```
X, Y są niezależne → Cov[X, Y] == 0 → E[X * Y] == E[X] * E[Y];
```
liczba Eulera liczba··· liczba Eulera

$Y = a X + b;$

$a > 0;$

$$F_Y[y] = P[Y \le y] = P[a X + b \le y] = P\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left[\frac{y-b}{a}\right];$$

$a < 0;$

$$F_Y[y] = P[Y \le y] = P[a X + b \le y] = P\left[X \ge \frac{y-b}{a}\right] = 1 - P\left[X < \frac{y-b}{a}\right] =$$

$$= 1 - P\left[X < \frac{y-b}{a}\right] - P\left[X = \frac{y-b}{a}\right] + P\left[X = \frac{y-b}{a}\right] =$$

$$= 1 - P\left[X \le \frac{y-b}{a}\right] + P\left[X = \frac{y-b}{a}\right] =$$

$$= 1 - F_X\left[\frac{y-b}{a}\right] + P\left[X = \frac{y-b}{a}\right];$$

$Y = b X + c;$

$D[Y] = ?;$

oblicz pochodną

$$D[Y] = E\left[Y^2\right] - E[Y]^2 = E\left[(b X + c)^2\right] - E[b X + c]^2 =$$

oblicz ··· liczba Eulera liczba Eulera

$$E\left[b^2 X^2 + 2 b c X + c^2\right] - (b E[X] + c)^2 =$$

liczba Eulera

$$= b^2 E\left[X^2\right] + 2 b c E[X] + c^2 - b^2 E[X]^2 - 2 b c E[X] - c^2 =$$

liczba Eulera liczba Eulera liczba Eulera

$$= b^2 \left(E\left[X^2\right] - E[X]^2\right) = b^2 D[X];$$

liczba Eulera oblicz pochodną

$X_t = U * t$

U – znana, posiada rozkład jednostajny, tzn.

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{jeśli } a \le u < b \\ 0, & \text{poza} \end{cases};$$

$$F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(v)\,dv = \begin{cases} = \int_{-\infty}^{u} 0\,dv = 0, \text{ jeśli } u \le a \\ = \int_{-\infty}^{a} 0\,dv + \int_a^u \frac{1}{b-a}\,dv = \frac{u-a}{b-a}, \text{ jeśli } a \le u < b; \\ = \int_{-\infty}^{a} 0\,dv + \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dv + \int_b^u 0\,dv = 1, \text{ jeśli } u \ge b \end{cases}$$

$$F_X(t, x) = P(X_t \le x) = P(U * t \le x) = P\left(U \le \frac{x}{t}\right) = F_U\left(\frac{x}{t}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ jeśli } \frac{x}{t} \le a \\ \frac{\frac{x}{t}-a}{b-a}, \text{ jeśli } a \le \frac{x}{t} < b \\ 1, \text{ jeśli } \frac{x}{t} \ge b \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } x \le a\,t \\ \frac{x-at}{t\,(b-a)}, \text{ jeśli } a\,t \le x < b\,t; \\ 1, \text{ jeśli } x \ge b\,t \end{cases}$$

$$f_X(t, x) = \frac{d}{dx} F_X(t, x) = \begin{cases} 0, \text{ jeśli } x \le a\,t \\ \frac{1}{t\,(b-a)}, \text{ jeśli } a\,t \le x < b\,t; \\ 0, \text{ jeśli } x \ge b\,t \end{cases}$$

$$E(Y) = \int y\, f(y)\; dy;$$
liczba Eulera

$$D(Y) = \int (y - E(Y))^2 f(y)\; dy;$$
oblicz pochodną

$$E[U] = \int u\, f_U(u)\; du = \int_{-\infty}^{a} u * 0\,du + \int_a^b u \frac{1}{b-a}\,du + \int_b^{+\infty} u * 0\,du =$$
liczba Eulera

$$= 0 + \frac{u^2}{2}\frac{1}{b-a}\,\Big|_a^b + 0 = \frac{b^2}{2\,(b-a)} - \frac{a^2}{2\,(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$\mathrm{Var}[U] = \int (u - E(U))^2\; f_U(u)\; du = \int_{-\infty}^{a}\left(u - \frac{a+b}{2}\right)^2 * 0\,du +$$

$$\int_a^b \left(u - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,du + \int_b^{+\infty}\left(u - \frac{a+b}{2}\right)^2 * 0\,du =$$

$$(*\ \left(u - \frac{a+b}{2}\right)^2 = u^2 - u\,(a+b) + \frac{(a+b)^2}{4}\ *)$$

$$= 0 + \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}\,(a+b) + u\,\frac{(a+b)^2}{4}\right)\frac{1}{b-a}\,\Big|_a^b + 0 =$$

$$\frac{b^2}{2\,(b-a)} - \frac{a^2}{2\,(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} = \frac{a+b}{2};$$

$$m_X(t) = E[X_t] = E[U * t] = t\,E[U] = t\,\frac{a+b}{2};$$
liczba E⋯ liczba Eulera liczba Eulera

$$t = s : \mathrm{Cov}[X_t, X_t] = E\left[X_t^2\right] - E[X_t]^2 = \mathrm{Var}[X_t];$$
liczba Eulera

Var[X_t] = Var[U * t] = t^2 Var[U];
Cov[X, Y] - charakterystyka liczbowa, która odpowiada na pytanie :
' na ile są zależne pomiędzy sobą zm.los. X i Y';

R_X[t, s] = E[X_t * X_s];
liczba Eulera

K_X[t, s] = Cov[X_t, X_s] = E[X_t * X_s] - E[X_t] * E[X_s] =
liczba Eulera liczba··· liczba Eulera

$$= E[X_t * X_s] - t\,\frac{a+b}{2}\,s\,\frac{a+b}{2} = E[U*t*U*s] - t\,s\,\frac{(a+b)^2}{4} =$$

liczba Eulera liczba Eulera

$$= t\,s\,E\left[U^2\right] - t\,s\,\frac{(a+b)^2}{4} = t\,s\,\frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} - t\,s\,\frac{(a+b)^2}{4} =$$

liczba Eulera

$$= t\,s\left(\frac{b^2+a\,b+a^2}{3} - \frac{a^2+2\,a\,b+b^2}{4}\right) = \frac{t\,s}{12}\left(a^2 - a\,b + b^2\right);$$

$$\mathrm{Var}[U] = E\left[U^2\right] - E[U]^2 \rightarrow E\left[U^2\right] = \mathrm{Var}[U] + E[U]^2;$$

liczba Eulera liczba Eulera

E[a] = a, D[a] = 0, przy $a \in R$;
liczba Eul··· oblicz pochodną

$D[\alpha U + \beta V + \gamma] = \alpha^2 D[U] + \beta^2 D[V] + 2\,\alpha\,\beta\,\mathrm{Cov}[U, V]$;
oblicz pochodną oblicz po··· oblicz pochodną

In[2]:=
$$\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}(a+b) + u\,\frac{(a+b)^2}{4}\right) /.\ u \rightarrow b - \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2}(a+b) + u\,\frac{(a+b)^2}{4}\right) /.\ u \rightarrow a;$$

```
% // FullSimplify
```
uprość pełniej

Out[3]=
$$-\frac{\left(a^3 - 12\,b + 3\,a\,b^2\right)\left(a^6 - 6\,a^3\,b + 36\,b^2 - 18\,a\,b^3 + 6\,a^4\left(3+b^2\right) + 9\,a^2\left(12 + 6\,b^2 + b^4\right)\right)}{5184}$$