

01.12.2023

Laboratorium problemowe 2 Stanowisko wahadła reakcyjnego.

Dawid Lisek 402382
Paweł Mańka 402697

Spis treści

1. Cel Ćwiczenia.....	2
2. Fizyczna interpretacja stanowiska.	3
3. Pomiary oraz identyfikacja parametrów fizycznych obiektu.	5
5. Równania Stanu	12
6. Stworzenie modelu do walidacji.....	13
7. Linearyzacja Modelu.....	19
8. Regulator LQR	21
Podsumowanie i wnioski	30

1. Cel Ćwiczenia

Celem tego laboratorium było zapoznanie się z metodami identyfikacji fizycznego obiektu - modelu wahadła reakcyjnego. Naszym zadaniem było stworzenie przybliżonego modelu obiektu na podstawie wykonanych pomiarów. W kolejnej części należało dobrać odpowiedni regulator umożliwiający płynne sterowanie pozycją wahadła przy pomocy silnika elektrycznego zamontowanego do koła zamachowego na jego końcu.



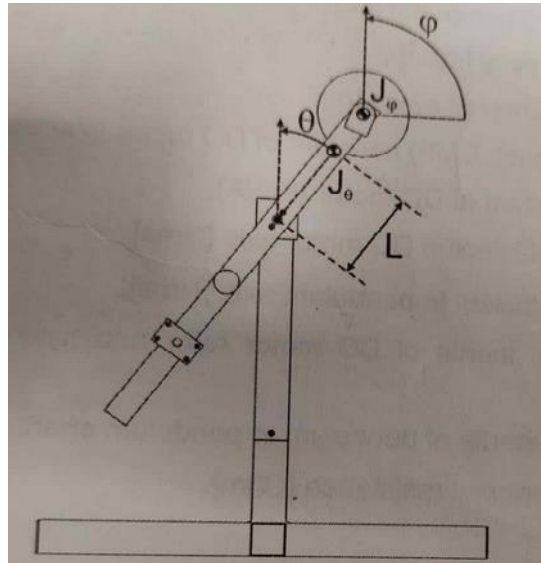
Rysunek 1 Model wahadła reakcyjnego

2. Fizyczna interpretacja stanowiska.

Po przeanalizowaniu i omówieniu pracy wahadła fizycznego, zostały zaproponowane następujące równania ruchu wahadła oraz silnika wynikające z II zasady dynamiki Newtona.

$$\ddot{\theta} = \frac{-MgL \sin \theta}{J_{\theta}} - \frac{k_t (u - k_e \dot{\varphi})}{J_{\theta} R} + \frac{\dot{\varphi} \mu_{\varphi}}{J_{\theta}} - \frac{\mu_{\theta} \dot{\theta}}{J_{\theta}}$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{k_t (u - k_e \dot{\varphi})}{J_{\varphi} R} - \frac{\dot{\varphi} \mu_{\varphi}}{J_{\varphi}}$$

Przyspieszenie kątowe wahadła jest wynikiem działania siły tarcia mniejszego koła, tarcia wahadła oraz ciężaru.



Rysunek 2 Rysunek techniczny modelu matematycznego wahadła.

W opisie matematycznym modelu zostały przyjęte następujące oznaczenia:

- θ – wychylenie wahadła,
- $\dot{\theta}$ – prędkość kątowa wahadła,
- φ – wychylenie silnika,
- $\dot{\varphi}$ – prędkość kątowa silnika,
- J_{θ} – moment bezwładności pochodzący od wahadła,
- J_{φ} – moment bezwładności pochodzący od silnika,
- $-MgL \sin \theta$ – moment siły pochodzący od siły grawitacji,
- k_t – stała mechaniczna silnika,
- k_e – stała elektryczna silnika,

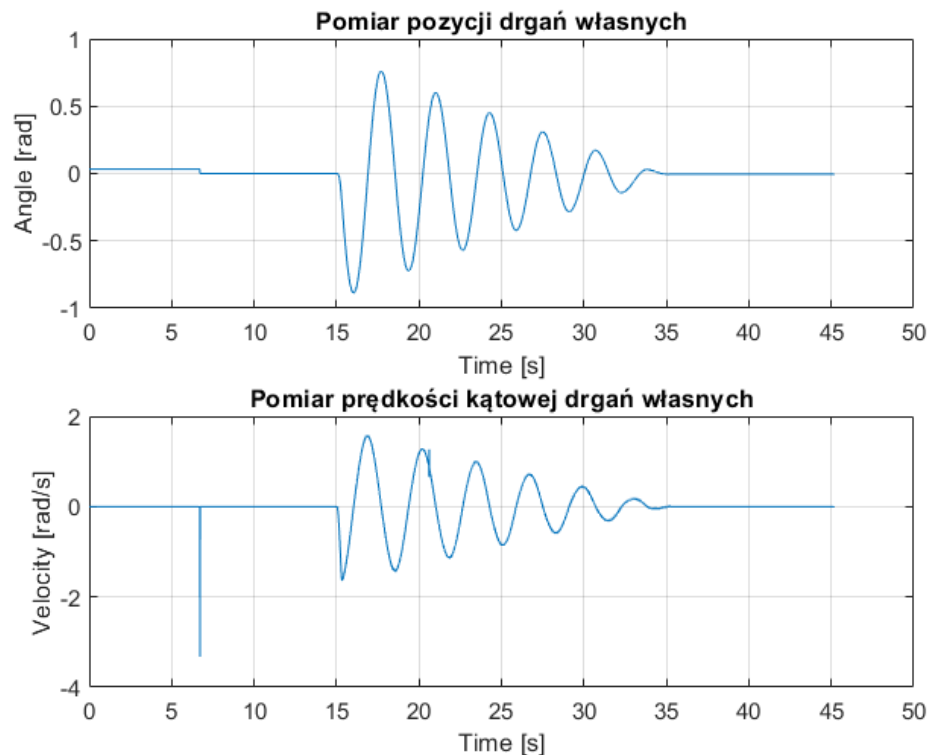
- R – rezystancja uzwojeń silnika,
- μ_φ – współczynnik tarcia w osi obrotu wahadła,
- μ_θ – współczynnik tarcia w osi obrotu silnika.

3. Pomiary oraz identyfikacja parametrów fizycznych obiektu.

1) Identyfikacja współczynnika tarcia w osi obrotu wahadła.

W celu identyfikacji współczynnika tarcia w osi obrotu zostały zmierzone drgania swobodne wahadła. Pomiary ruchu swobodnego wahadła polegały na puszczeniu wahadła z pewnego wychylenia oraz zarejestrowaniu drgań aż do ich wygaśnięcia.

Pomiar nr 1:



Rysunek 3 Pomiar drgań swobodnych nr 1

Na początku zmierzone zostały drgania dwóch kolejnych amplitud A_1 oraz A_2 oraz okres drgań własnych wahadła. Na podstawie logarytmicznego dekrementu tłumienia wyznaczony został współczynnik tarcia w osi obrotu całego wahadła:

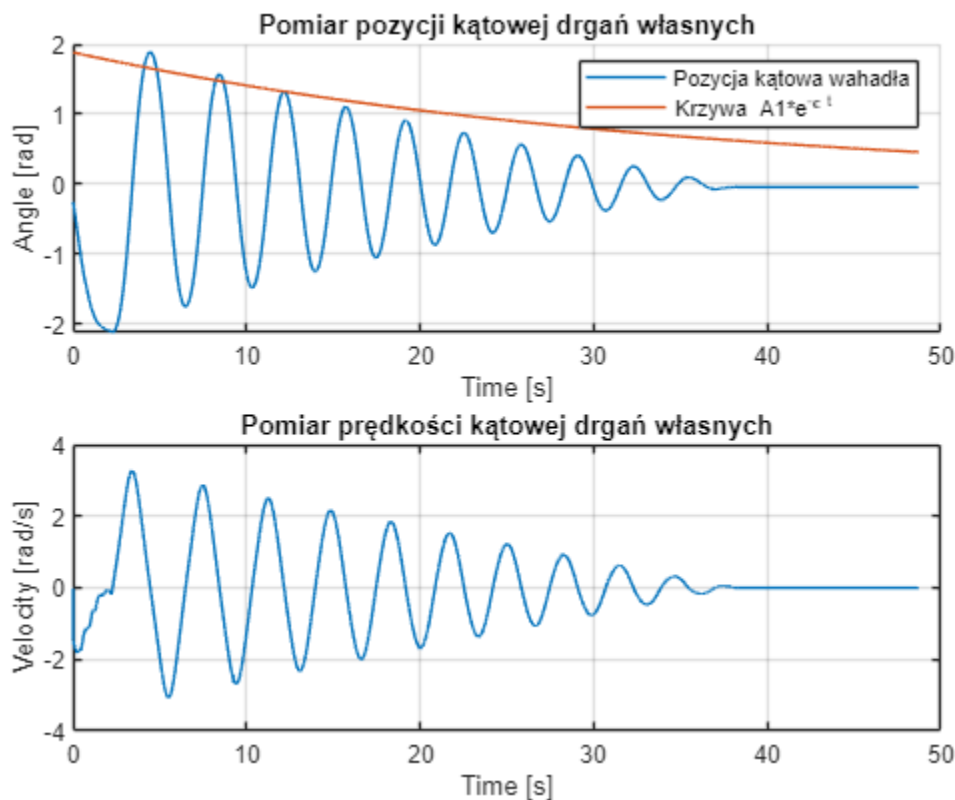
$$\sigma = \log(A_1/A_2)$$

$$\sigma = 0.1820$$

$$\epsilon = \sigma / \sqrt{4\pi^2 + \sigma^2}$$

$$\epsilon = 0.0290$$

Następnie do kolejnych pomiarów drgań swobodnych dopasowaliśmy krzywą $A1 * e^{-\varepsilon t}$, która jest widoczna na poniższym wykresie.



Rysunek 4 Pomiar drgań swobodnych nr 2 z dopasowaniem krzywej

Z powyższego wykresu wynika, że dobrany przez nas współczynnik tarcia najlepiej dopasowuje się przy dużych wychyleniach wahadła. W zakresie niskich amplitud drgań krzywa nie dopasowuje się wystarczająco dobrze. Wynika to z charakterystyki tarcia kinetycznego, która w modelu jest nieliniowa.

2) Identyfikacja momentu pochodzącego od siły grawitacji oraz obliczenie momentu bezwładności wahadła.

Moment pochodzący od siły grawitacji został wyznaczony poprzez zmierzenie masy niewyważenia wahadła. Na początku ustawiliśmy wahadło w poziomie tak aby $\sin(\theta)$ był bliski wartości 1. Następnie pod wahadłem ustawiliśmy wagę i odczytaliśmy jej wskazanie.



Rysunek 5 Pomiar masy niewyważenia wahadła.

Z wagi zostało odczytana masa niewyważenia oraz zmierzylismy odległość środka koła zamachowego od osi obrotu.

$$m = 0.062 \text{ kg.}$$

$$l = 0.175 \text{ m}$$

$$\text{masa_niewyważenia} = 0.062$$

$$\text{masa_niewyważenia} = 0.0620$$

$$MgL = \text{masa_niewyważenia} * 9.81 * 0.175$$

$$MgL = 0.1064$$

W kolejnym kroku obliczyliśmy moment bezwładności całego wahadła reakcyjnego korzystając ze średniego okresu oscylacji drgań swobodnych:

$$T_{\text{osc}} = 2.85$$

$$T_{\text{osc}} = 2.8500$$

$$J_0 = (T_{\text{osc}}^2 * MgL) / (4 * \pi^2)$$

$$J_0 = 0.0219.$$

4. Identyfikacja parametrów silnika.

Silnik elektryczny jest opisany równaniem:

$$\ddot{\phi} = \frac{k_t (u - k_e \dot{\phi})}{J_\phi R} - \frac{\dot{\phi} \mu_\phi}{J_\phi}$$

Powyższe równanie może zostać przekształcone do postaci:

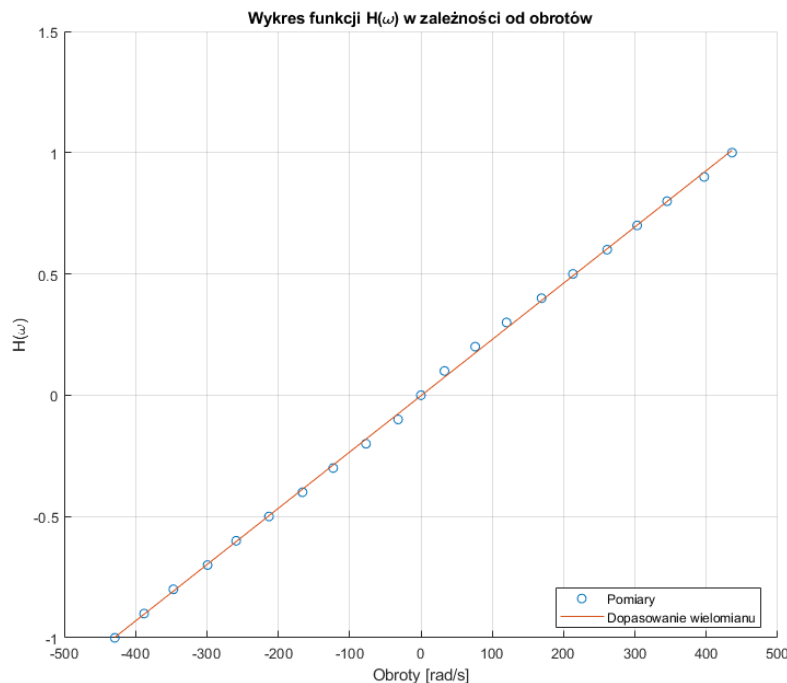
$$\ddot{\phi} = \frac{k_t}{J_\phi R} \left(u - \left(k_e + \frac{\mu_\phi R}{k_t} \right) \dot{\phi} \right)$$

W celu identyfikacji jego parametrów wykorzystane zostało podejście czarnej skrzynki oraz narzędzie z pakietu Matlab/Simulink Parameter Estimation. Jako model Simulink zostało stworzone poniższe równanie:

$$\ddot{\phi} = G(u - H(\dot{\phi}))$$

Gdzie charakterystyka $H(\dot{\phi})$ jest charakterystyką silnika w stanie ustalonym uwzględniającą wszystkie opory ruchu.

Zmierzone zostały obroty silnika w zależności od sterowania, a następnie na ich podstawie został obliczony wielomian symulujący charakterystykę.

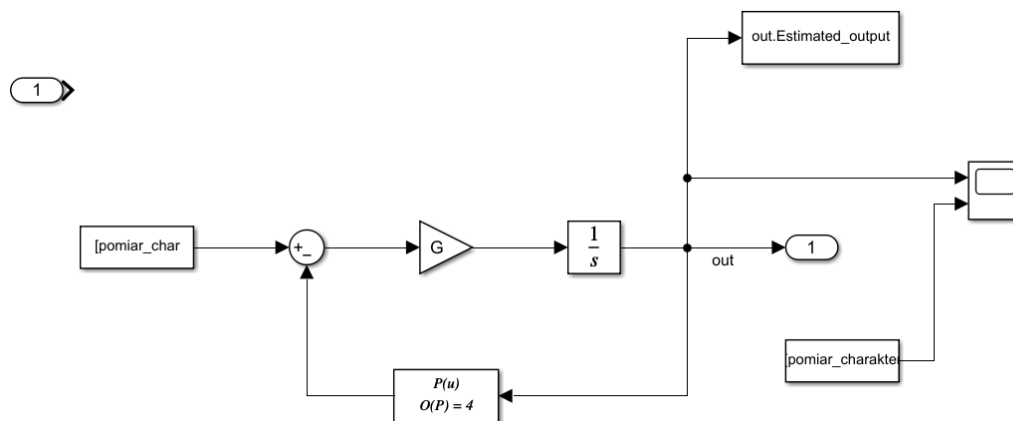


Rysunek 6 Wykres funkcji $H(\dot{\phi})$

Przebieg $H(\omega)$ został przybliżony wielomianem pierwszego stopnia przy pomocy funkcji polyfit. Posiada on postać:

$$H(\omega) = 0.0023\omega - 0.0022$$

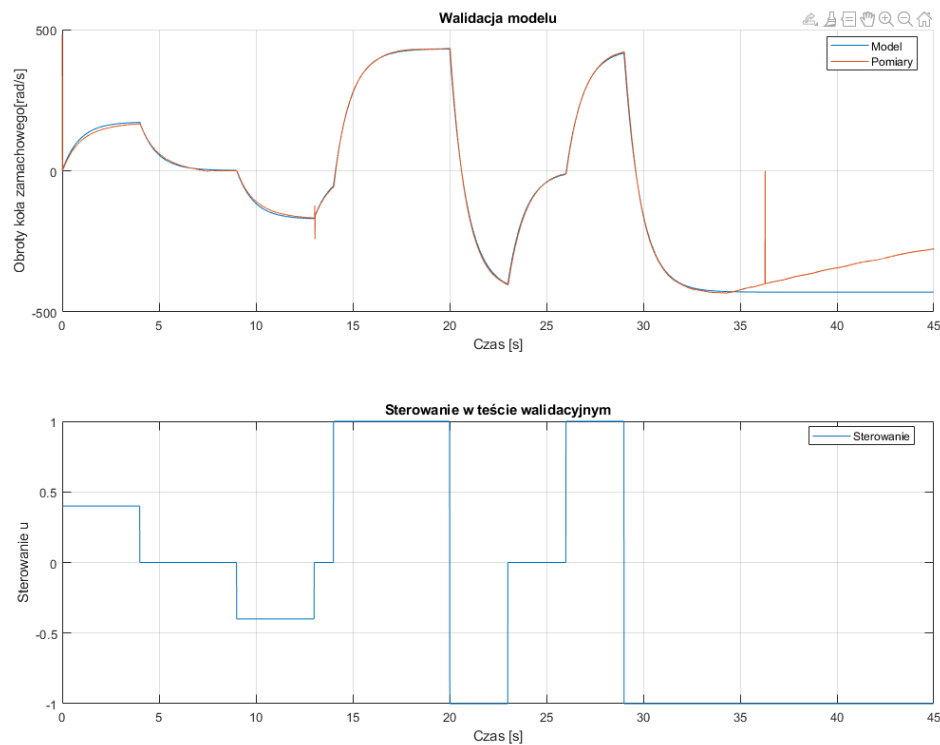
Następnie równanie opisujące silnik zostało zaimplementowane jako poniższy model Simulinkowy. Stworzony model został wykorzystany do wyznaczenia współczynnika G przy pomocy narzędzia Parameter Estimation.



Rysunek 7 Utworzony model w pakiecie Matlab/Simulink

Do wyznaczenia parametru G w Parameter Estimation została wykorzystana odpowiedź silnika na skok jednostkowy o amplitudzie 0.3 wykonany na poprzednich zajęciach. Wyznaczony współczynnik G był równy 488.648.

Przeprowadzona walidacja modelu:



Rysunek 8 Walidacja modelu silnika

W stworzonym modelu widać rozbieżności w ostatniej fazie ruchu jednak powyższe równanie bardzo dobrze oddaje dynamikę tego silnika elektrycznego. Znajomość tej dynamiki jest najbardziej istotna z punktu widzenia sterowania modelem wahadła reakcyjnego.

Wartość współczynnika tarcia w silniku oraz stała elektryczna i mechaniczna silnika została wzięta z dokumentacji technicznej dostępnej na stanowisku:

$$\mu_{\varphi} = 1.32 - e06$$

$$k_t = 0.027$$

$$k_e = 0.025$$

Przy pomocy multimetru dokonaliśmy pomiaru rezystancji uzwojenia silnika R, które było równe 2.4 Ω .

Dodatkowo przy pomocy multimetru wykonaliśmy pomiary napięcia na silniku w zależności od sterowania:

	Sterowanie u	Napiecie na silniku
1	-1.0000	-11.7100
2	-0.9000	-10.6900
3	-0.8000	-9.5100
4	-0.7000	-8.3200
5	-0.6000	-7.1300
6	-0.5000	-5.9300
7	-0.4000	-4.7400
8	-0.3000	-3.5500
9	-0.2000	-2.3600
10	-0.1000	-1.1800
11	0	0
12	0.1000	1.6100
13	0.2000	2.3300
14	0.3000	3.5300
15	0.4000	4.6900
16	0.5000	5.9100
17	0.6000	7.1000
18	0.7000	8.2700
19	0.8000	9.4700
20	0.9000	10.6600
21	1.0000	11.7500

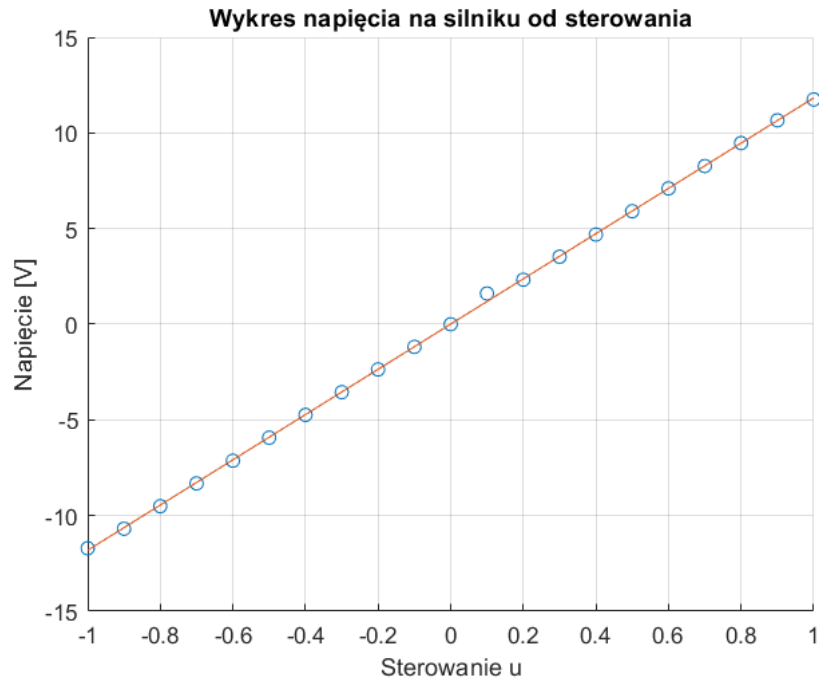
Przy pomocy tych pomiarów dopasowaliśmy wielomian pierwszego rzędu wyznaczający napięcie na silniku w zależności od sterowania. Wyznaczony wielomian ma postać:

$$U = 11.82u + 0.0095$$

Gdzie:

U – napięcie na silniku [V],

u – sterowanie w zakresie <-1;1>



Rysunek 9 Wykres napięcia na silniku w zależności od sterowania.

5. Równania Stanu

Na podstawie równań ruchu zostały wyprowadzone następujące równania stanu.

Wektor Stanu: $x = [x_1, x_2, x_3] = [\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}]$

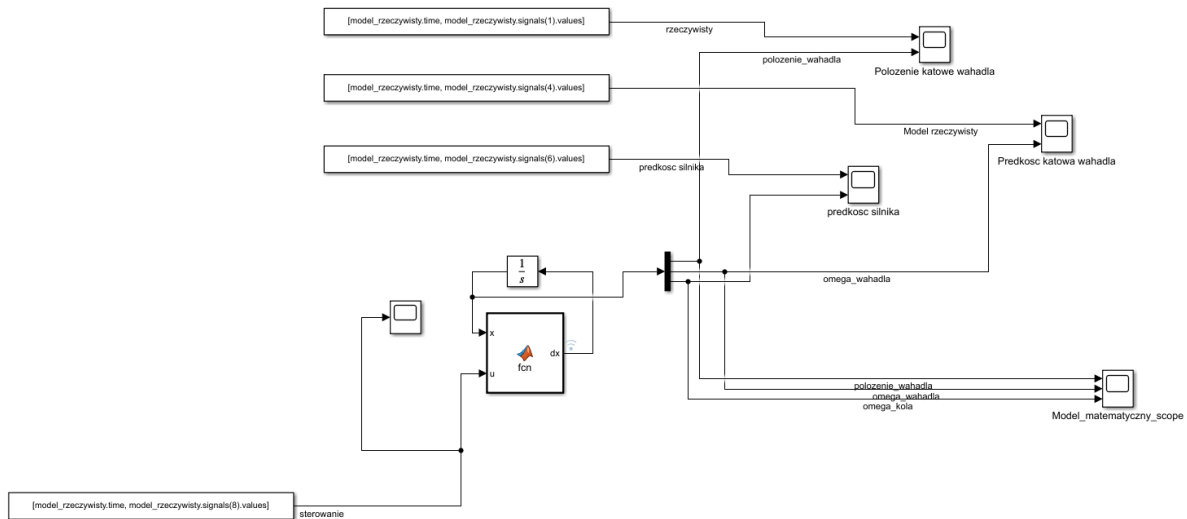
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-MgL \sin x_1}{J_\theta} - \frac{k_t (u - k_e x_3)}{J_\theta R} + \frac{x_3 \mu_\varphi}{J_\theta} - \frac{\mu_\theta x_2}{J_\theta}$$

$$\dot{x}_3 = G(u - H(x_3))$$

6. Stworzenie modelu do walidacji

Na podstawie równań stanu został utworzony model symulacyjny w Simulinku zawierający wszystkie zbadane przez nas parametry.



Rysunek 10 Schemat modelu walidacyjnego.

```
function dx = fcn(x, u)

% dane wyidentyfikowane
MgL = 0.1064;
g = 9.81;
kt = 0.027; % Nm/A
ke = 0.025;
R = 2.4; % Ohmy

mi_phi = 0.0000882;
mi_theta = 0.0290;

G = 488.648;
J = 0.0219; % kg*m^2

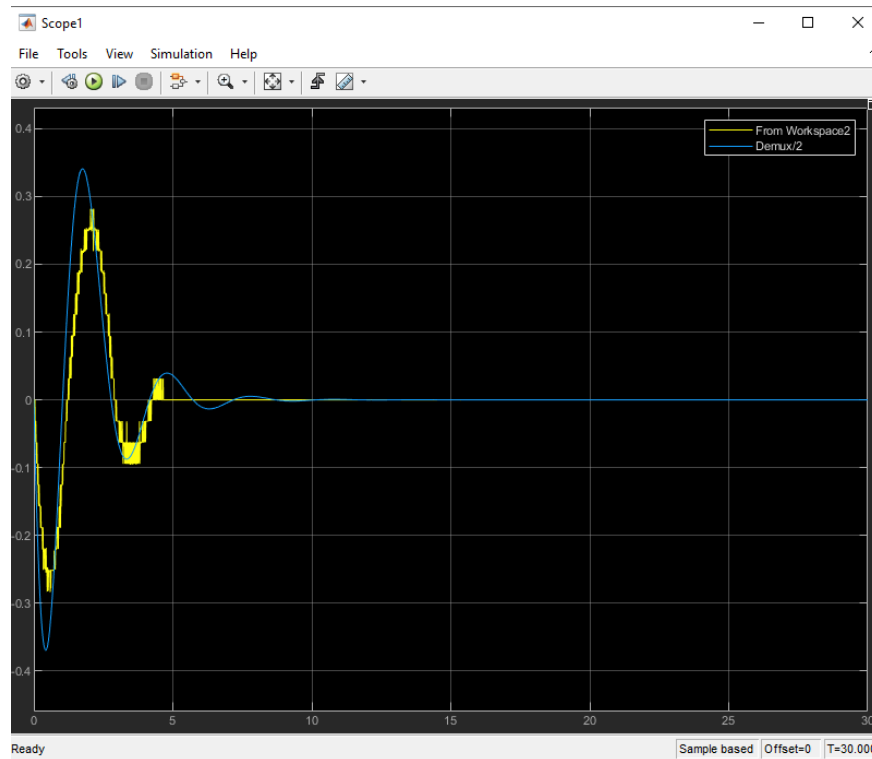
p = [0.002314296507890, -8.816367649105842e-04];
p_volt = [11.823766233766237, 0.009523809523809];

dx = [0 0 0];
dx(1) = x(2); % pochodna polozenia
dx(2) = (1/J)*(-MgL * sin(x(1)) - mi_theta * x(2) - ...
    (kt * (polyval(p_volt, u) - ke * x(3)) / R) + mi_phi * x(3)); % pochodna predkosci obrotowe belki
dx(3) = G * (u - polyval(p, x(3))); % pochodna predkosci smigla

end
```

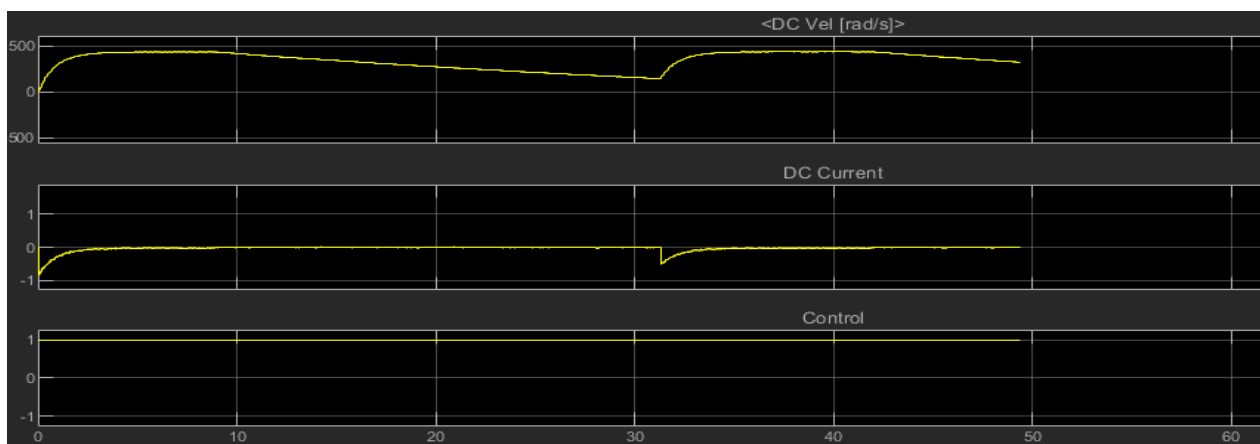
Rysunek 11 Bloczek Matlab Function

Równania stanu zostały zapisane w bločku Matlab Function. Następnie został wykonany test odpowiedzi modelu dla skoku jednostkowego. Na wykresie przedstawiono drugą zmienną stanu (prędkość kątowna wahadła).



Rysunek 12 Walidacja drugiej zmiennej stanu.

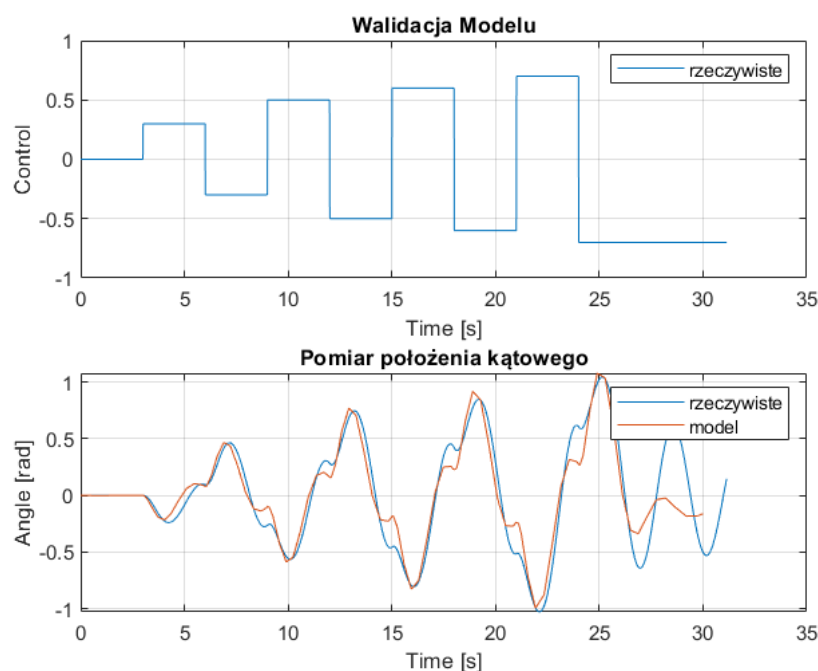
Podczas walidacji modelu okazało się, że model fizyczny posiada uszkodzenie, ponieważ silnik przy stałym sterowaniu nie utrzymywał stałych obrotów co zostało przedstawione na wykresie poniżej. Uszkodzeniem okazały się styki zasilania, które przy dużych wibracjach silnika powodowały zwarcia zacisków zasilania z obudową silnika. Po odgięciu styków problem został rozwiązany.



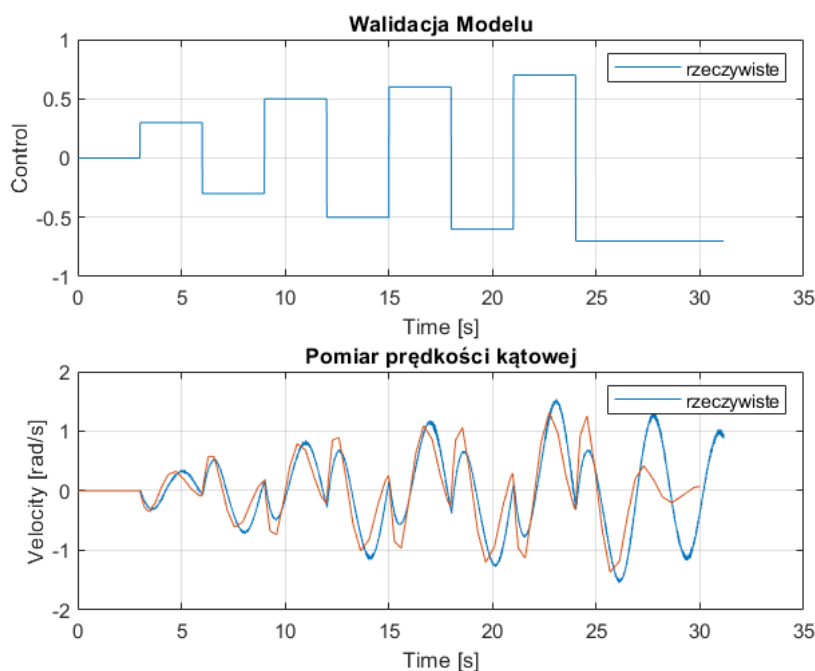
Rysunek 13 Brak utrzymywania stałych obrotów na silniku pomimo stałego sterowania.

Po usunięciu usterki przystąpiliśmy do walidacji modelu rzeczywistego z modelem symulacyjnym. Na obiekt rzeczywisty oraz model symulacyjny podany został identyczny sygnał sterujący, a następnie zarejestrowano odpowiedź modelu i obiektu.

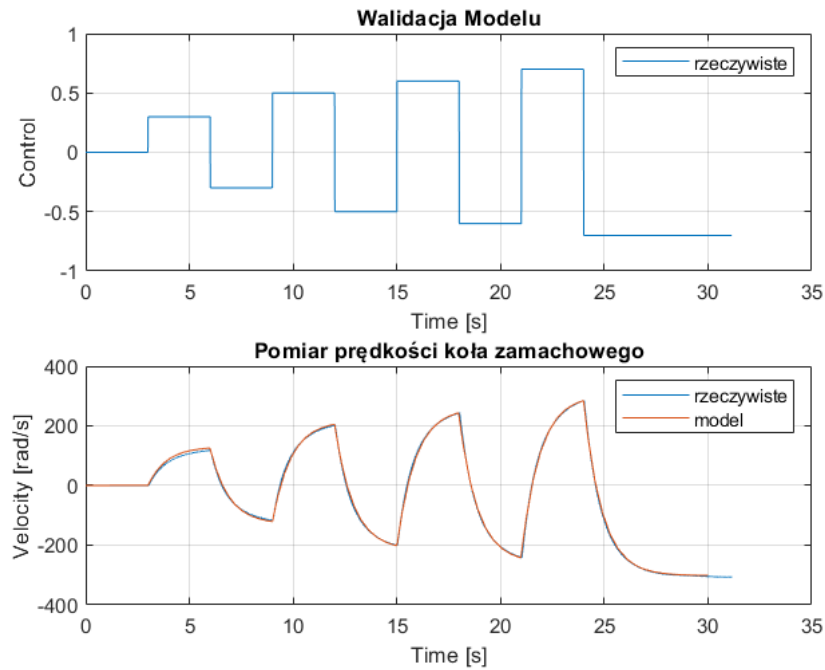
Walidacja modelu symulacyjnego z obiektem rzeczywistym nr 1:



Rysunek 14 Walidacja położenia kąowego wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

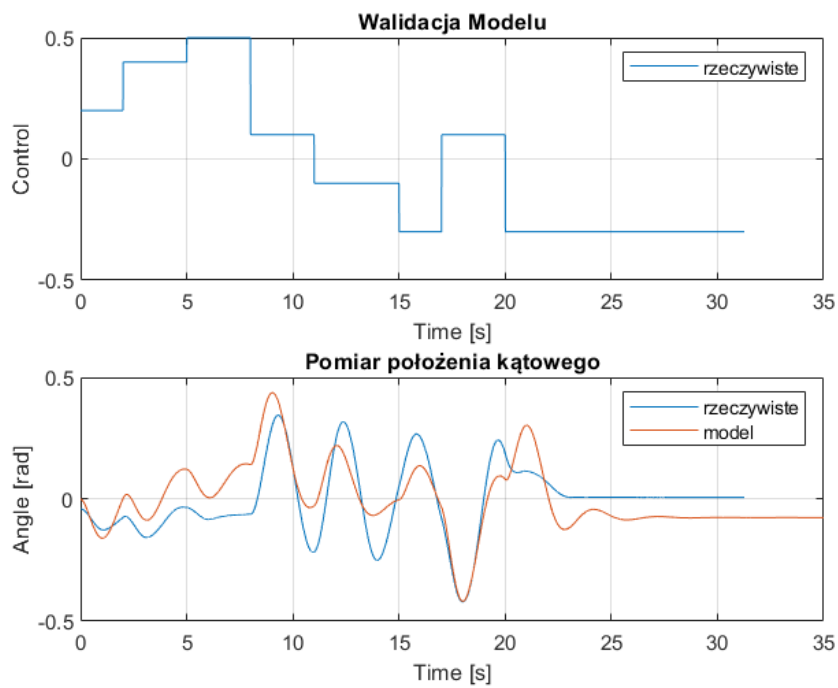


Rysunek 15 Walidacja prędkości kątowej wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

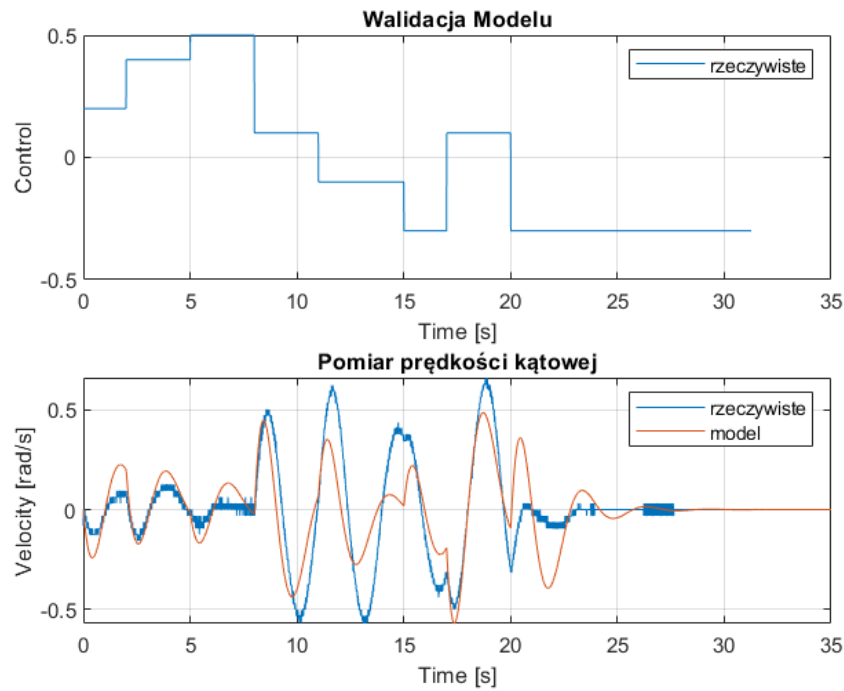


Rysunek 16 Walidacja prędkości kątowej silnika obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

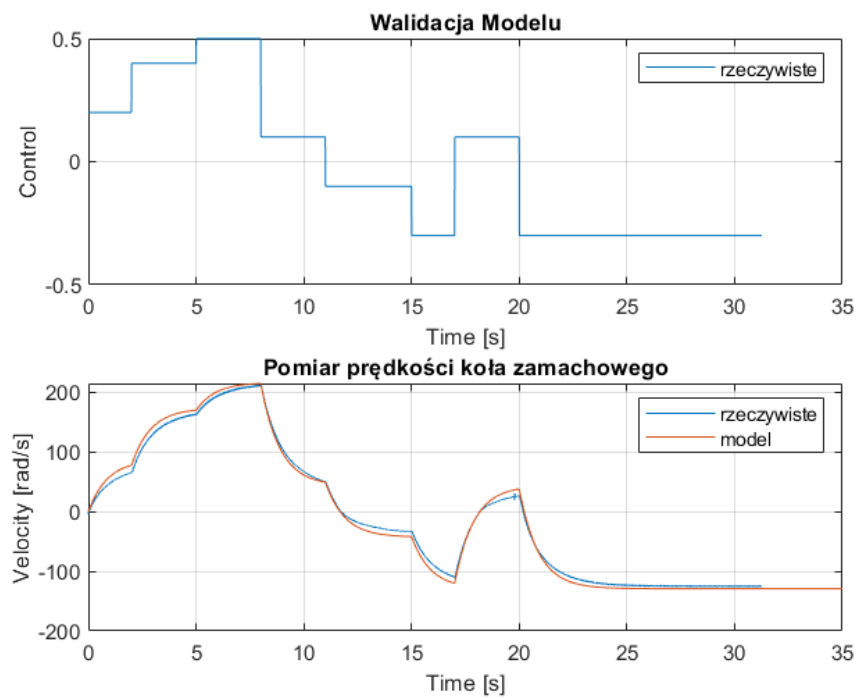
Walidacja modelu symulacyjnego z obiektem rzeczywistym nr 2:



Rysunek 17 Walidacja położenia kąтового wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.



Rysunek 18 Walidacja prędkości kątowej wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.



Rysunek 19 Walidacja prędkości kątowej silnika obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

Z powyższych testów walidacyjnych wynika nasz model symulacyjny najlepiej odwzorowuje obiekt rzeczywisty w zakresach dużych amplitud sterowania. Przy małych amplitudach widać większe rozbieżności pomiędzy modelem a obiektem. Wynika to z nieliniowości tarcia, które przy małych amplitudach nie jest stałe.

7. Linearyzacja Modelu

Linearyzacja modelu została wykonana przy pomocy toolboxa Model Linearizer dostępnego w pakiecie Matlab/Simulink. Pozwoliło to nam wygenerować macierze stanu opisujące symulacyjny model wahadła reakcyjnego w dolnym oraz górnym położeniu równowagi.

```
A = linsys1_dolne.A
```

```
A = 3x3
      0      1.0000      0
    -4.9764  -1.1417     0.0145
      0      0     -1.1309
```

```
B = linsys1_dolne.B
```

```
B = 3x1
      0
    -5.2369
    488.6480
```

```
C = linsys1_dolne.C
```

```
C = 3x3
      1      0      0
      0      1      0
      0      0      1
```

```
D = linsys1_dolne.D
```

```
D = 3x1
      0
      0
      0
```

```
eig(linsys1.A)
```

```
ans = 3x1 complex
    -0.5709 + 2.1565i
    -0.5709 - 2.1565i
    -1.1309 + 0.0000i
```

Następnie sprawdziliśmy wartości własne układu bez regulatora LQR. Z powyższych wartości własnych wynika, że jest to stabilny układ oscylacyjnie tłumiony, ponieważ posiada jedną parę sprzężoną oraz części rzeczywiste wartości własnych są ujemne.

```
co = ctrb(linsys1.A, linsys1.B)
```

```
co = 3x3
      0    -5.2369    13.0867
    -5.2369    13.0867     3.0816
    488.6480 -552.6005    624.9228
```

```
co_rank = rank(co)
```

```
ans = 3
```

Układ jest również sterowalny, ponieważ rząd macierzy sterowalności jest równy jej wymiarowi.

Następnie przystąpiliśmy do linearyzacji modelu w górnym położeniu wahadła:

```
A = linsys1_gorne.A
```

```
A = 3x3
      0      1.0000      0
  4.9764 -1.1417  0.0145
      0      0     -1.1309
```

```
B = linsys1_gorne.B
```

```
B = 3x1
      0
 -5.2369
 488.6480
```

```
C = linsys1_gorne.C
```

```
C = 3x3
      1      0      0
      0      1      0
      0      0      1
```

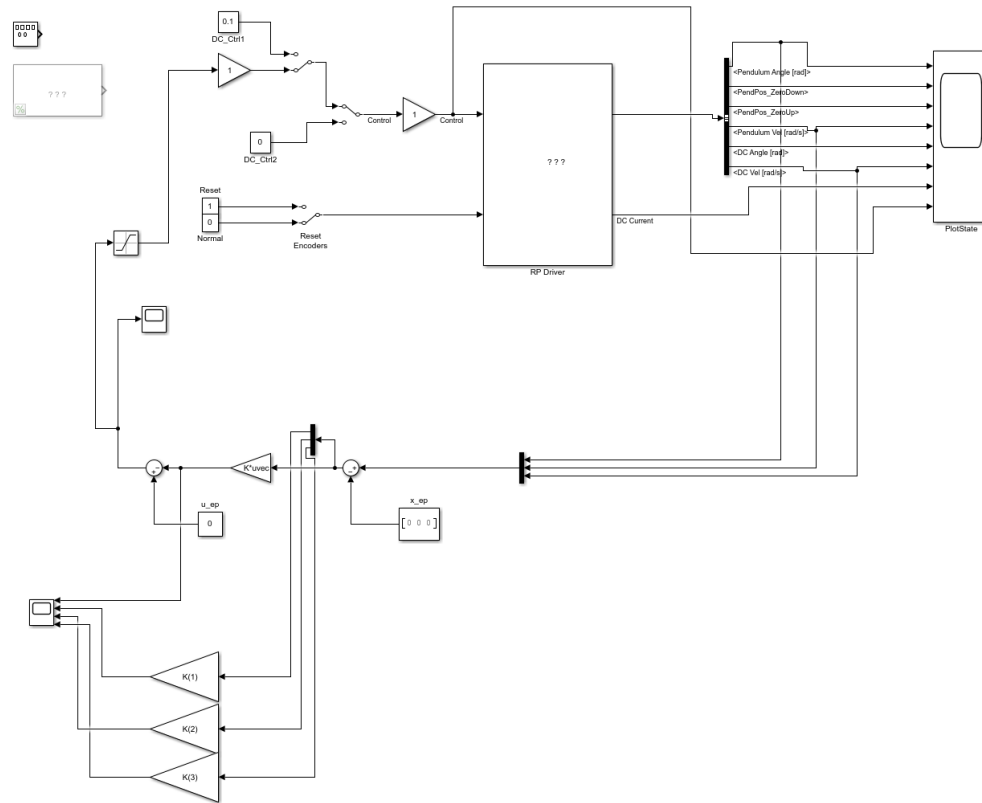
```
D = linsys1_gorne.D
```

```
D = 3x1
      0
      0
      0
```

Różnica w obydwu modelach polega tylko na zmianie znaku w części macierzy A odpowiadającej za moment pochodzący od siły grawitacji wahadła. Wynika to z własności funkcji trygonometrycznych w naszym modelu:

8. Regulator LQR

W Simulinku został utworzony model z regulatorem LQR:



Rysunek 20 Schemat regulatora LQR

Wzmocnienia regulatora LQR zostały wyznaczone przy pomocy funkcji `lqr()` dostępnej w Matlabie. Początkowo przyjęliśmy Q jako macierz jednostkową oraz macierz $R = 1$.

$$Q = \text{eye}(3)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

$$R = 1$$

$$[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 \times 3 \\ -0.0278 & -0.0041 & 0.9977 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

```

2.7316    0.1004    0.0010
0.1004    0.5259    0.0056
0.0010    0.0056    0.0021
E = 3x1 complex
102 x
-0.0057 + 0.0216i
-0.0057 - 0.0216i
-4.8868 + 0.0000i

```

Początkowe nastawy regulatora LQR nie przynosiły pożądanych efektów, więc posłużyliśmy się regułą Brysona. Dzięki, której udało nam się przeprowadzić poprawne strojenie regulatora. Reguła Brysona mówi, że element leżący na diagonalu macierzy Q powinien być równy odwrotności kwadratu maksymalnej akceptowalnej odchyłki zmiennej stanu.

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{maximum acceptable value of } X_i^2}$$

Elementy leżące na diagonalu macierzy R powinny być równe odwrotności kwadratu maksymalnej akceptowalnej wartości sterowania pochodzącej od danej zmiennej stanu.

$$R_{jj} = \frac{1}{\text{maximum acceptable value of } u_j^2}$$

W nawiązaniu do tej reguły napisane zostały poniższe macierze Q oraz R

```
Q = [100 0 0; 0 10 0; 0 0 1/1000]
```

```

Q = 3x3
100.0000    0    0
    0   10.0000    0
    0    0    0.0010

```

```
R = 15
```

```
R = 15
```

```
[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)
```

```

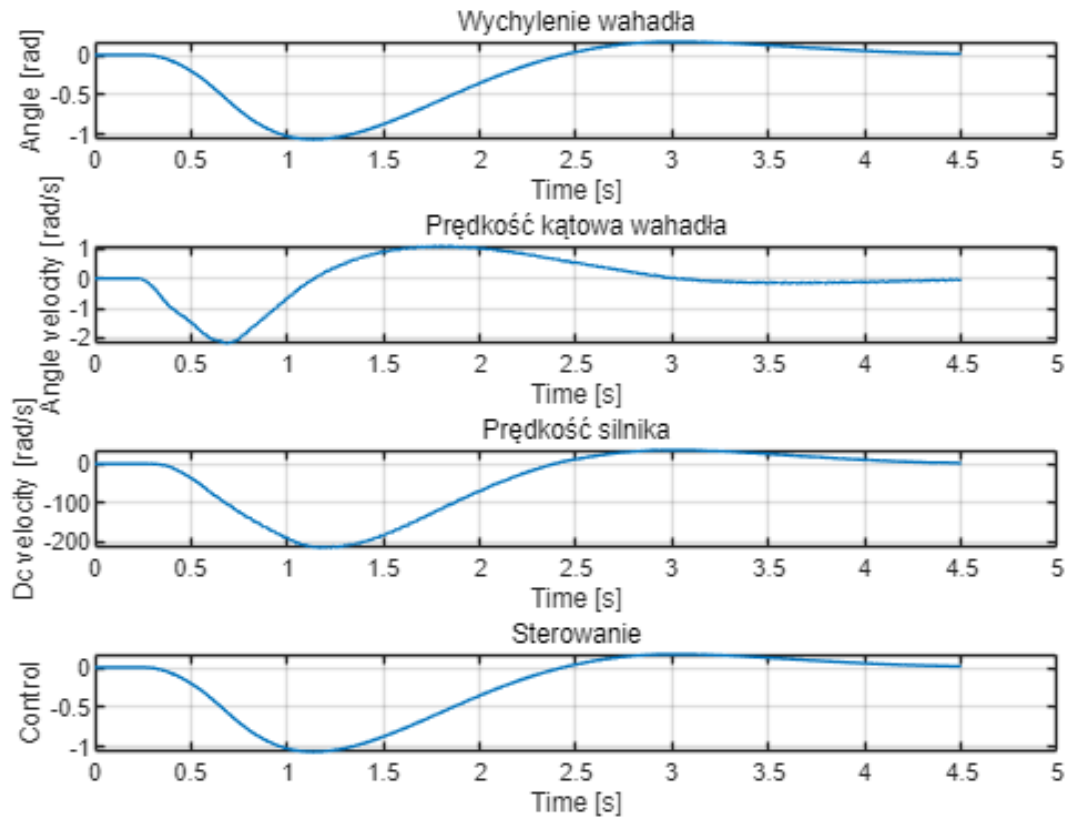
K = 1x3
-1.9606    -0.4539    0.0072
S = 3x3
51.8054    4.2540   -0.0146
 4.2540    6.7516    0.0584
-0.0146    0.0584    0.0008
E = 3x1 complex
-1.5820 + 1.2876i
-1.5820 - 1.2876i
-5.0142 + 0.0000i

```

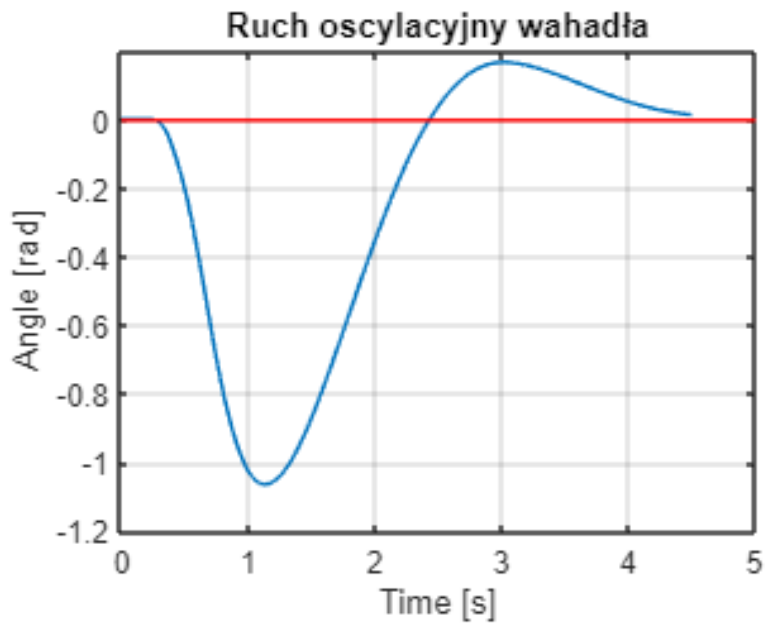
Jak widać układ nadal posiada dwie urojone wartości własne sprzężone, więc jest oscylacyjnie tłumiony. Dodatkowo obliczone zostało tłumienie układu.

```
ksi = abs(real(E(2)))/abs(E(2))
```

$\text{ksi} = 0.7756$



Rysunek 21 Zmienne stanu układu oscylacyjnego z regulatorem LQR



Wskaźnik jakości	Wartość
bezwzględny całkowity wskaźnik uchybu	143.4015
angle_max	0.1703 rad
angle_min	-1.0647 rad
przeregulowanie	15.9929 %
dc_max	35.0840 V
dc_min	-268.1913 V
t_ustalone	4.41 s

Układ posiada delikatne przesterowanie, które jest spowodowane jego oscylacyjnym charakterem.

$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 & 0; & 0 & 50 & 0; & 0 & 0 & 1/1000 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \begin{matrix} 300.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 50.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0010 \end{matrix} \end{matrix}$

$R = 15$

$R = 15$

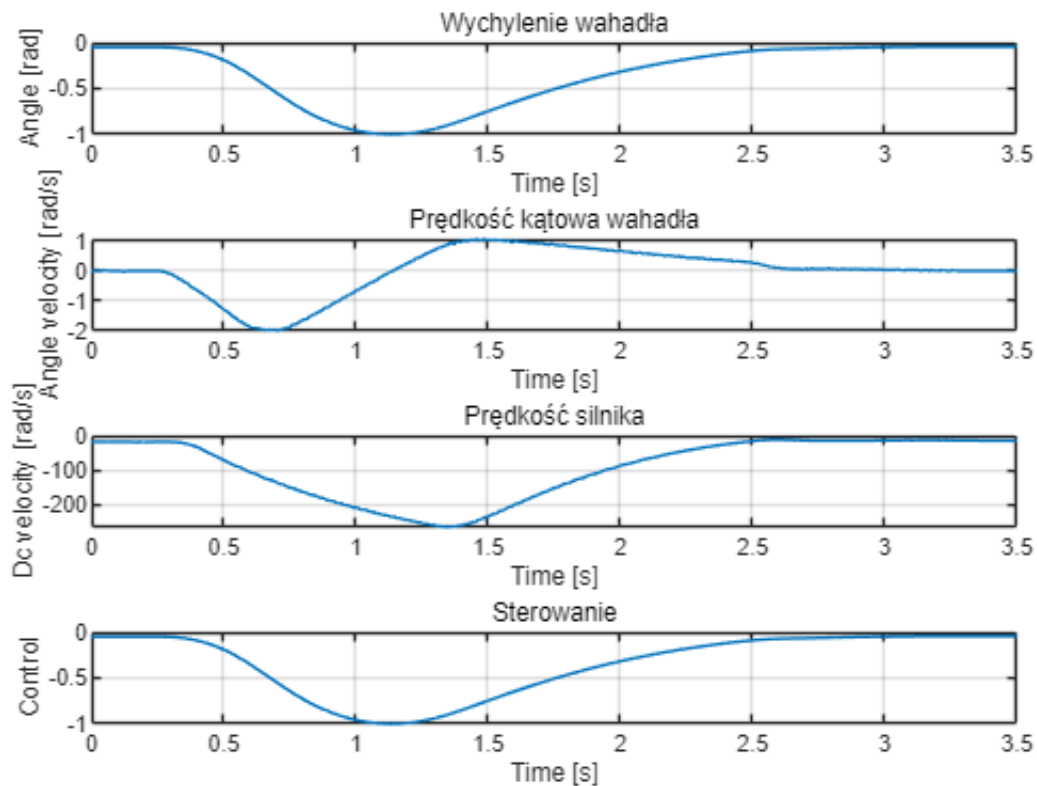
```
[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)
```

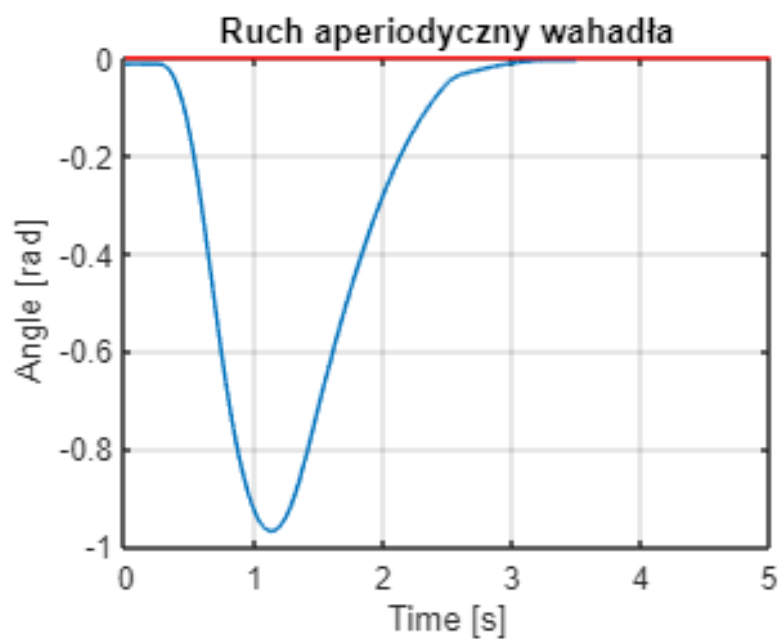
```
K = 1x3
    -4.1293    -1.2095     0.0085
S = 3x3
    160.5055     4.4442    -0.0791
     4.4442     16.1800     0.1363
    -0.0791     0.1363     0.0017
E = 3x1
    -1.3391
    -1.6280
    -9.7735
```

```
ksi = abs(real(E(2)))/abs(E(2))
```

```
ksi = 1
```

Powyższy układ posiada rzeczywiste wartości własne dzięki którym jest asymptotycznie stabilny. Współczynnik tłumienia jest równy 1 ze względu na brak części urojonej pierwiastków.





Wskaźnik jakości	Wartość
bezwzględny całkowity wskaźnik uchybu	122.8721
angle_max	0.0046 rad
angle_min	-1.0100 rad
przeregulowanie	0,05%
dc_max	-12.0635 V
dc_min	-268.1913 V
t_ustalone	3.0200 s

Dzięki temu, że układ w zamkniętej pętli sterowania jest aperiodycznie stabilny możemy zaobserwować całkowity brak przeregulowania, które występowało w układzie oscylacyjnym.

Następnym krokiem było zaimplementowanie regulatora LQR w górnym położeniu wahadła. W tym celu ponownie przystąpiliśmy do linearyzacji modelu.

Macierz Q, R oraz wzmocnienia regulatora LQR wynoszą:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1000 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \begin{matrix} 100.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 10.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0010 \end{matrix} \end{matrix}$$

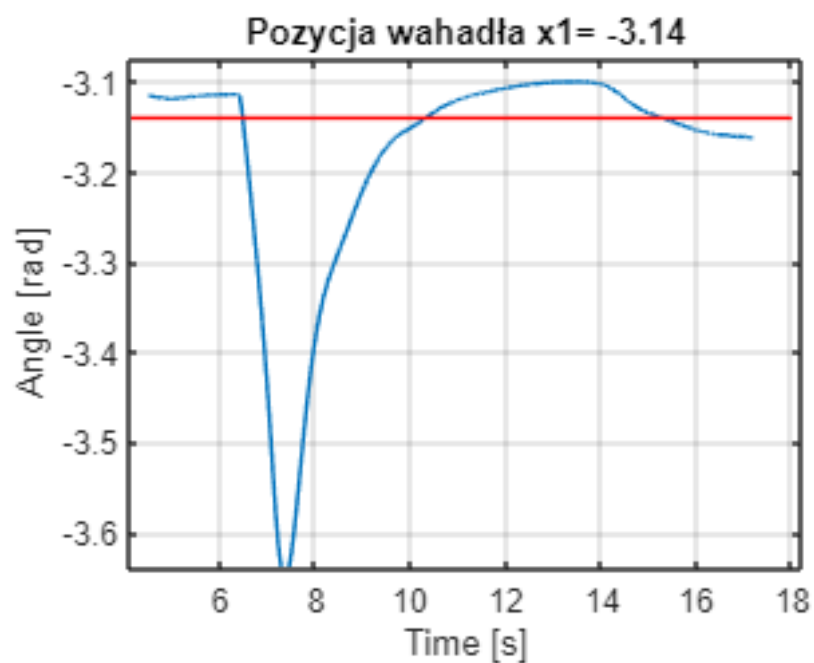
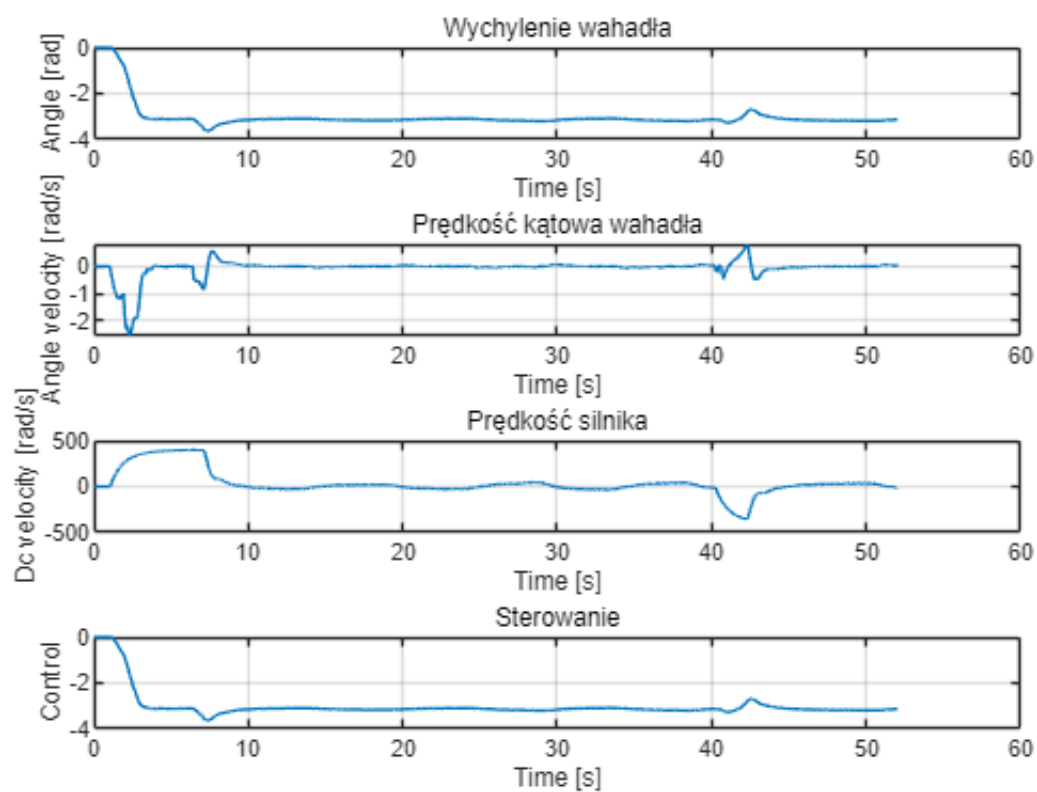
$$R = 15$$

$$R = 15$$

$$[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

$$\begin{matrix} K = 1 \times 3 \\ \begin{matrix} -8.4592 & -2.9173 & -0.0150 \end{matrix} \\ S = 3 \times 3 \\ \begin{matrix} 311.9907 & 97.7984 & 0.7884 \\ 97.7984 & 34.1298 & 0.2762 \\ 0.7884 & 0.2762 & 0.0025 \end{matrix} \\ E = 3 \times 1 \\ \begin{matrix} -1.1237 \\ -3.1002 \\ -5.9886 \end{matrix} \end{matrix}$$

Warto zauważyć, że dla identycznej macierzy Q oraz R w dolnym położeniu wahadła układ miał charakter oscylacyjny, zaś w górnym położeniu układ nie posiada oscylacji.



Wskaźnik jakości	Wartość
angle_max	-3.0998
angle_min	-3.6505 rad
przeregulowanie	7.8723%
dc_max	398.6565 V
dc_min	-357.4148 V
t_ustalone	7 s

Układ działa poprawnie i zapewnia stabilizację w górnym położeniu wahadła.

Podsumowanie i wnioski

Dzięki naszej pracy nad układem wahadła, odkryliśmy, jak doskonale można zastosować fundamentalne prawa fizyki oraz narzędzia matematyczne do analizy i sterowania skomplikowanym obiektem dynamicznym. Kluczowym narzędziem okazał się pakiet Simulink, w którym opracowaliśmy matematyczny model (patrz Rysunek 8). Następnie, korzystając z pakietu Model Linearizer, uzyskaliśmy zlinearyzowane macierze A, B, C, D. Dzięki wykorzystaniu Matlab Simulink dokonaliśmy skutecznej walidacji, umożliwiając jednocześnie łatwą korektę pewnych zidentyfikowanych parametrów fizycznych, takich jak na przykład współczynnik tarcia.

W trakcie laboratoriów przeprowadziliśmy również proces strojenia regulatora LQR na rzeczywistym obiekcie. Obserwowaliśmy, jak zmienia się charakterystyka pracy układu wraz z modyfikacją jego wartości własnych. Istotnym aspektem podczas całego ćwiczenia było uchwycenie związku pomiędzy wartościami własnymi układu a jego fizycznymi parametrami. Dzięki temu zdołaliśmy przekształcić układ, początkowo oscylacyjnie tłumiony, w układ asymptotycznie stabilny, pozbawiony przeregulowania. Dodatkowo, praktycznie wypracowaliśmy metodę dostrajania regulatora przy użyciu macierzy Q i R. Na początku, macierz Q przyjęła postać $\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Jednakże po dokładnej analizie błędów w trzeciej zmiennej stanu x_3 , czyli prędkości obrotowej koła zamachowego, zauważono, że nawet niewielka zmiana napięcia (0.1) powoduje osiągnięcie przez koło zamachowe prędkości 30 rad/s. Po uwzględnieniu tego błędu, macierz Q została dostosowana do postaci $\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1000 \end{bmatrix}$, co znacząco poprawiło funkcjonowanie układu regulacji.

Następnym etapem rozwoju naszej pracy mogłoby być porównanie różnych metod regulacji i identyfikacji obiektu. W celu stworzenia bardziej precyzyjnego modelu rozważalibyśmy wykorzystanie sieci neuronowych, na przykład w formie feedforward. Takie podejście pozwoliłoby również na opracowanie regulatora o mniejszych błędach przeregulowania i uchybie niż te przedstawione w naszym sprawozdaniu. Kolejnym krokiem rozwoju byłoby również utworzenie obserwatora, który umożliwiłby jeszcze dokładniejsze monitorowanie zachowania systemu.