01.12.2023

**Dawid Lisek 402382**

**Paweł Mańka 402697**

Laboratorium problemowe 2 Stanowisko wahadła reakcyjnego.

Spis treści

[1. Cel Ćwiczenia 2](#_Toc152337857)

[2. Fizyczna interpretacja stanowiska. 3](#_Toc152337858)

[3. Pomiary oraz identyfikacja parametrów fizycznych obiektu. 5](#_Toc152337859)

[5. Równania Stanu 12](#_Toc152337860)

[6. Stworzenie modelu do walidacji 13](#_Toc152337861)

[7. Linearyzacja Modelu 19](#_Toc152337862)

[8. Regulator LQR 21](#_Toc152337863)

[Podsumowanie i wnioski 30](#_Toc152337864)

1. Cel Ćwiczenia

Celem tego laboratorium było zapoznanie się z metodami identyfikacji fizycznego obiektu - modelu wahadła reakcyjnego. Naszym zadaniem było stworzenie przybliżonego modelu obiektu na podstawie wykonanych pomiarów. W kolejnej części należało dobrać odpowiedni regulator umożliwiający płynne sterowanie pozycją wahadła przy pomocy silnika elektrycznego zamontowanego do koła zamachowego na jego końcu.

Obraz zawierający żółty

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 1 Model wahadła reakcyjnego

1. Fizyczna interpretacja stanowiska.

Po przeanalizowaniu i omówieniu pracy wahadła fizycznego, zostały zaproponowane następujące równania ruchu wahadła oraz silnika wynikające z II zasady dynamiki Newtona.

Przyspieszenie kątowe wahadła jest wynikiem działania siły tarcia mniejszego koła, tarcia wahadła oraz ciężaru.

Obraz zawierający szkic, antena, rysowanie, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 2 Rysunek techniczny modelu matematycznego wahadła.

W opisie matematycznym modelu zostały przyjęte następujące oznaczenia:

* – wychylenie wahadła,
* – prędkość kątowa wahadła,
* – wychylenie silnika,
* - prędkość kątowa silnika,
* – moment bezwładności pochodzący od wahadła,
* – moment bezwładności pochodzący od silnika,
* – moment siły pochodzący od siły grawitacji,
* – stała mechaniczna silnika,
* – stała elektryczna silnika,
* – rezystancja uzwojeń silnika,
* – współczynnik tarcia w osi obrotu wahadła,
* – współczynnik tarcia w osi obrotu silnika.

1. Pomiary oraz identyfikacja parametrów fizycznych obiektu.
2. **Identyfikacja współczynnika tarcia w osi obrotu wahadła.**

W celu identyfikacji współczynnika tarcia w osi obrotu zostały zmierzone drgania swobodne wahadła. Pomiary ruchu swobodnego wahadła polegały na puszczeniu wahadła z pewnego wychylenia oraz zarejestrowaniu drgań aż do ich wygaśnięcia.

Pomiar nr 1:

Obraz zawierający tekst, linia, diagram, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 3 Pomiar drgań swobodnych nr 1

Na początku zmierzone zostały drgania dwóch kolejnych amplitud A1 oraz A2 oraz okres drgań własnych wahadła. Na podstawie logarytmicznego dekrementu tłumienia wyznaczony został współczynnik tarcia w osi obrotu całego wahadła:

sigma = log(A1/A2)

sigma = 0.1820

epsilon = sigma/sqrt(4\*pi\*pi + sigma^2)

epsilon = 0.0290

Następnie do kolejnych pomiarów drgań swobodnych dopasowaliśmy krzywą , która jest widoczna na poniższym wykresie.

Obraz zawierający tekst, Czcionka, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 4 Pomiar drgań swobodnych nr 2 z dopasowaniem krzywej

Z powyższego wykresu wynika, że dobrany przez nas współczynnik tarcia najlepiej dopasowuje się przy dużych wychyleniach wahadła. W zakresie niskich amplitud drgań krzywa nie dopasowuje się wystarczająco dobrze. Wynika to z charakterystyki tarcia kinetycznego, która w modelu jest nieliniowa.

1. **Identyfikacja momentu pochodzącego od siły grawitacji oraz obliczenie momentu bezwładności wahadła.**

Moment pochodzący od siły grawitacji został wyznaczony poprzez zmierzenie masy niewyważenia wahadła. Na początku ustawiliśmy wahadło w poziomie tak aby sin(θ) był bliski wartości 1. Następnie pod wahadłem ustawiliśmy wagę i odczytaliśmy jej wskazanie.

Obraz zawierający tekst, w pomieszczeniu, monitor komputerowy, książka

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 5 Pomiar masy niewyważenia wahadła.

Z wagi zostało odczytana masa niewyważenia oraz zmierzyliśmy odległość środka koła zamachowego od osi obrotu.

m = 0.062 kg.

l = 0.175m

masa\_niewywazenia = 0.062

masa\_niewywazenia = 0.0620

MgL = masa\_niewywazenia \* 9.81 \* 0.175

**MgL = 0.1064**

W kolejnym kroku obliczyliśmy moment bezwładności całego wahadła reakcyjnego korzystając ze średniego okresu oscylacji drgań swobodnych:

T\_osc = 2.85

T\_osc = 2.8500

J\_0 = (T\_osc^2 \* MgL)/(4\*pi^2)

J\_0 = 0.0219.

1. Identyfikacja parametrów silnika.

Silnik elektryczny jest opisany równaniem:

Powyższe równanie może został przekształcone do postaci:

W celu identyfikacji jego parametrów wykorzystane zostało podejście czarnej skrzynki oraz narzędzie z pakietu Matlab/Simulink Parameter Estimation. Jako model Simulink zostało stworzone poniższe równanie:

Gdzie charakterystyka jest charakterystyką silnika w stanie ustalonym uwzględniającą wszystkie opory ruchu.

Zmierzone zostały obroty silnika w zależności od sterowania, a następnie na ich podstawie został obliczony wielomian symulujący charakterystykę.

Obraz zawierający linia, diagram, tekst, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 6 Wykres funkcji H(φ ̇ )

Przebieg H(ω) został przybliżony wielomianem pierwszego stopnia przy pomocy funkcji polyfit. Posiada on postać:

Następnie równanie opisujące silnik zostało zaimplementowane jako poniższy model Simulinkowy. Stworzony model został wykorzystany do wyznaczenia współczynnika G przy pomocy narzędzia Parameter Estimation.

Obraz zawierający diagram, tekst, zrzut ekranu, Plan

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 7 Utworzony model w pakiecie Matlab/Simulink

Do wyznaczenia parametru G w Parameter Estimation została wykorzystana odpowiedź silnika na skok jednostkowy o amplitudzie 0.3 wykonany na poprzednich zajęciach. Wyznaczony współczynnik G był równy 488.648.

Przeprowadzona walidacja modelu:

Obraz zawierający tekst, diagram, Wykres, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 8 Walidacja modelu silnika

W stworzonym modelu widać rozbieżności w ostatniej fazie ruchu jednak powyższe równanie bardzo dobrze oddaje dynamikę tego silnika elektrycznego. Znajomość tej dynamiki jest najbardziej istotna z punktu widzenia sterowania modelem wahadła reakcyjnego.

Wartość współczynnika tarcia w silniku oraz stała elektryczna i mechaniczna silnika została wzięta z dokumentacji technicznej dostępnej na stanowisku:

Przy pomocy multimetru dokonaliśmy pomiaru rezystancji uzwojenia silnika R, które było równe 2.4 Ω.

Dodatkowo przy pomocy multimetru wykonaliśmy pomiary napięcia na silniku w zależności od sterowania:

|  | **Sterowanie u** | **Napiecie na silniku** |
| --- | --- | --- |
| **1** | -1.0000 | -11.7100 |
| **2** | -0.9000 | -10.6900 |
| **3** | -0.8000 | -9.5100 |
| **4** | -0.7000 | -8.3200 |
| **5** | -0.6000 | -7.1300 |
| **6** | -0.5000 | -5.9300 |
| **7** | -0.4000 | -4.7400 |
| **8** | -0.3000 | -3.5500 |
| **9** | -0.2000 | -2.3600 |
| **10** | -0.1000 | -1.1800 |
| **11** | 0 | 0 |
| **12** | 0.1000 | 1.6100 |
| **13** | 0.2000 | 2.3300 |
| **14** | 0.3000 | 3.5300 |
| **15** | 0.4000 | 4.6900 |
| **16** | 0.5000 | 5.9100 |
| **17** | 0.6000 | 7.1000 |
| **18** | 0.7000 | 8.2700 |
| **19** | 0.8000 | 9.4700 |
| **20** | 0.9000 | 10.6600 |
| **21** | 1.0000 | 11.7500 |

Przy pomocy tych pomiarów dopasowaliśmy wielomian pierwszego rzędu wyznaczający napięcie na silniku w zależności od sterowania. Wyznaczony wielomian ma postać:

Gdzie:

U – napięcie na silniku [V],

u – sterowanie w zakresie <-1;1>

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 9 Wykres napięcia na silniku w zależności od sterowania.

1. Równania Stanu

Na podstawie równań ruchu zostały wyprowadzone następujące równania stanu.

Wektor Stanu: x = [x1, x2, x3] =

1. Stworzenie modelu do walidacji

Na podstawie równań stanu został utworzony model symulacyjny w Simulinku zawierający wszystkie zbadane przez nas parametry.

Obraz zawierający diagram, tekst, Plan, Rysunek techniczny

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 10 Schemat modelu walidacyjnego.

Obraz zawierający tekst, zrzut ekranu, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 11 Bloczek Matlab Function

Równania stanu zostały zapisane w bloczku Matlab Function. Następnie został wykonany test odpowiedzi modelu dla skoku jednostkowego. Na wykresie przedstawiono drugą zmienną stanu (prędkość kątowa wahadła).

Obraz zawierający zrzut ekranu, Oprogramowanie graficzne, Wykres, Oprogramowanie multimedialne

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 12 Walidacja drugiej zmiennej stanu.

Podczas walidacji modelu okazało się, że model fizyczny posiada uszkodzenie, ponieważ silnik przy stałym sterowaniu nie utrzymywał stałych obrotów co zostało przedstawione na wykresie poniżej. Uszkodzeniem okazały się styki zasilania, które przy dużych wibracjach silnika powodowały zwarcia zacisków zasilania z obudową silnika. Po odgięciu styków problem został rozwiązany.

Obraz zawierający zrzut ekranu, linia

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 13 Brak utrzymywania stałych obrotów na silniku pomimo stałego sterowania.

Po usunięciu usterki przystąpiliśmy do walidacji modelu rzeczywistego z modelem symulacyjnym. Na obiekt rzeczywisty oraz model symulacyjny podany został identyczny sygnał sterujący, a następnie zarejestrowano odpowiedź modelu i obiektu.

**Walidacja modelu symulacyjnego z obiektem rzeczywistym nr 1:**

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 14 Walidacja położenia kątowego wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 15 Walidacja prędkości kątowej wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 16 Walidacja prędkości kątowej silnika obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

**Walidacja modelu symulacyjnego z obiektem rzeczywistym nr 2:**

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 17 Walidacja położenia kątowego wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 18 Walidacja prędkości kątowej wahadła obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 19 Walidacja prędkości kątowej silnika obiektu rzeczywistego i modelu symulacyjnego.

Z powyższych testów walidacyjnych wynika nasz model symulacyjny najlepiej odwzorowuje obiekt rzeczywisty w zakresach dużych amplitud sterowania. Przy małych amplitudach widać większe rozbieżności pomiędzy modelem a obiektem. Wynika to   
z nieliniowości tarcia, które przy małych amplitudach nie jest stałe.

1. Linearyzacja Modelu

Linearyzacja modelu została wykonana przy pomocy toolboxa Model Linearizer dostępnego w pakiecie Matlab/Simulink. Pozwoliło to nam wygenerować macierze stanu opisujące symulacyjny model wahadła reakcyjnego w dolnym oraz górnym położeniu równowagi.

A = linsys1\_dolne.A

A = 3×3

0 1.0000 0

-4.9764 -1.1417 0.0145

0 0 -1.1309

B = linsys1\_dolne.B

B = 3×1

0

-5.2369

488.6480

C = linsys1\_dolne.C

C = 3×3

1 0 0

0 1 0

0 0 1

D = linsys1\_dolne.D

D = 3×1

0

0

0

eig(linsys1.A)

ans = 3×1 complex

-0.5709 + 2.1565i

-0.5709 - 2.1565i

-1.1309 + 0.0000i

Następnie sprawdziliśmy wartości własne układu bez regulatora LQR. Z powyższych wartości własnych wynika, że jest to stabilny układ oscylacyjnie tłumiony, ponieważ posiada jedną parę sprzężoną oraz części rzeczywiste wartości własnych są ujemne.

co = ctrb(linsys1.A, linsys1.B)

co = 3×3

0 -5.2369 13.0867

-5.2369 13.0867 3.0816

488.6480 -552.6005 624.9228

co\_rank = rank(co)

ans = 3

Układ jest również sterowalny, ponieważ rząd macierzy sterowalności jest równy jej wymiarowi.

Następnie przystąpiliśmy do linearyzacji modelu w górnym położeniu wahadła:

A = linsys1\_gorne.A

A = 3×3

0 1.0000 0

4.9764 -1.1417 0.0145

0 0 -1.1309

B = linsys1\_gorne.B

B = 3×1

0

-5.2369

488.6480

C = linsys1\_gorne.C

C = 3×3

1 0 0

0 1 0

0 0 1

D = linsys1\_gorne.D

D = 3×1

0

0

0

Różnica w obydwu modelach polega tylko na zmianie znaku w części macierzy A odpowiadającej za moment pochodzący od siły grawitacji wahadła. Wynika to z własności funkcji trygonometrycznych w naszym modelu:

1. Regulator LQR

W Simulinku został utworzony model z regulatorem LQR:

Obraz zawierający diagram, Rysunek techniczny, szkic, Plan

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 20 Schemat regulatora LQR

Wzmocnienia regulatora LQR zostały wyznaczone przy pomocy funkcji lqr() dostępnej w Matlabie. Początkowo przyjęliśmy Q jako macierz jednostkową oraz macierz R = 1.

Q = eye(3)

Q = 3×3

1 0 0

0 1 0

0 0 1

R = 1

R = 1

[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)

K = 1×3

-0.0278 -0.0041 0.9977

S = 3×3

2.7316 0.1004 0.0010

0.1004 0.5259 0.0056

0.0010 0.0056 0.0021

E = 3×1 complex

102 ×

-0.0057 + 0.0216i

-0.0057 - 0.0216i

-4.8868 + 0.0000i

Początkowe nastawy regulatora LQR nie przynosiły pożądanych efektów, więc posłużyliśmy się regułą Brysona. Dzięki, której udało nam się przeprowadzić poprawne strojenie regulatora. Reguła Brysona mówi, że element leżący na diagonali macierzy Q powinien być równy odwrotności kwadratu maksymalnej akceptowalnej odchyłki zmiennej stanu.

Obraz zawierający tekst, Czcionka, linia, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

Elementy leżące na diagonali macierzy R powinny być równe odwrotności kwadratu maksymalnej akceptowalnej wartości sterowania pochodzącej od danej zmiennej stanu.

Obraz zawierający tekst, Czcionka, linia, biały

Opis wygenerowany automatycznie

W nawiązaniu do tej reguły napisane zostały poniższe macierze Q oraz R

Q = [100 0 0; 0 10 0; 0 0 1/1000]

Q = 3×3

100.0000 0 0

0 10.0000 0

0 0 0.0010

R = 15

R = 15

[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)

K = 1×3

-1.9606 -0.4539 0.0072

S = 3×3

51.8054 4.2540 -0.0146

4.2540 6.7516 0.0584

-0.0146 0.0584 0.0008

E = 3×1 complex

-1.5820 + 1.2876i

-1.5820 - 1.2876i

-5.0142 + 0.0000i

Jak widać układ nadal posiada dwie urojone wartości własne sprzężone, więc jest oscylacyjnie tłumiony. Dodatkowo obliczone zostało tłumienie układu.

ksi = abs(real(E(2)))/abs(E(2))

ksi = 0.7756

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, numer

Opis wygenerowany automatycznie

Rysunek 21 Zmienne stanu układu oscylacyjnego z regulatorem LQR

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

|  |  |
| --- | --- |
| Wskaźnik jakości | Wartość |
| bezwzględny całkowy wskaźnik uchybu | 143.4015 |
| angle\_max | 0.1703 rad |
| angle\_min | -1.0647 rad |
| przeregulowanie | 15.9929 % |
| dc\_max | 35.0840 V |
| dc\_min | -268.1913 V |
| t\_ustalone | 4.41 s |

Układ posiada delikatne przesterowanie, które jest spowodowane jego oscylacyjnym charakterem.

Q = [300 0 0; 0 50 0; 0 0 1/1000]

Q = 3×3

300.0000 0 0

0 50.0000 0

0 0 0.0010

R = 15

R = 15

[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)

K = 1×3

-4.1293 -1.2095 0.0085

S = 3×3

160.5055 4.4442 -0.0791

4.4442 16.1800 0.1363

-0.0791 0.1363 0.0017

E = 3×1

-1.3391

-1.6280

-9.7735

ksi = abs(real(E(2)))/abs(E(2))

ksi = 1

Powyższy układ posiada rzeczywiste wartości własne dzięki którym jest asymptotycznie stabilny. Współczynnik tłumienia jest równy 1 ze względu na brak części urojonej pierwiastków.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Równolegle

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

|  |  |
| --- | --- |
| Wskaźnik jakości | Wartość |
| bezwzględny całkowy wskaźnik uchybu | 122.8721 |
| angle\_max | 0.0046 rad |
| angle\_min | -1.0100 rad |
| przeregulowanie | 0,05% |
| dc\_max | -12.0635 V |
| dc\_min | -268.1913 V |
| t\_ustalone | 3.0200 s |

Dzięki temu, że układ w zamkniętej pętli sterowania jest aperiodycznie stabilny możemy zaobserwować całkowity brak przeregulowania, które występowało w układzie oscylacyjnym.

Następnym krokiem było zaimplementowanie regulatora LQR w górym położeniu wahadła. W tym celu ponownie przystąpiliśmy do linearyzacji modelu.

Macierz Q, R oraz wzmocnienia regulatora LQR wynoszą:

Q = [100 0 0; 0 10 0; 0 0 1/1000]

Q = 3×3

100.0000 0 0

0 10.0000 0

0 0 0.0010

R = 15

R = 15

[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R)

K = 1×3

-8.4592 -2.9173 -0.0150

S = 3×3

311.9907 97.7984 0.7884

97.7984 34.1298 0.2762

0.7884 0.2762 0.0025

E = 3×1

-1.1237

-3.1002

-5.9886

Warto zauważyć, że dla identycznej macierzy Q oraz R w dolnym położeniu wahadła układ miał charakter oscylacyjny, zaś w górnym położeniu układ nie posiada oscylacji.

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Równolegle

Opis wygenerowany automatycznieObraz zawierający tekst, linia, Wykres, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

|  |  |
| --- | --- |
| Wskaźnik jakości | Wartość |
| angle\_max | -3.0998 |
| angle\_min | -3.6505 rad |
| przeregulowanie | 7.8723% |
| dc\_max | 398.6565 V |
| dc\_min | -357.4148 V |
| t\_ustalone | 7 s |

Układ działa poprawnie i zapewnia stabilizację w górnym położeniu wahadła.

Podsumowanie i wnioski

Dzięki naszej pracy nad układem wahadła, odkryliśmy, jak doskonale można zastosować fundamentalne prawa fizyki oraz narzędzia matematyczne do analizy i sterowania skomplikowanym obiektem dynamicznym. Kluczowym narzędziem okazał się pakiet Simulink, w którym opracowaliśmy matematyczny model (patrz Rysunek 8). Następnie, korzystając z pakietu Model Linearizer, uzyskaliśmy zlinearyzowane macierze A, B, C, D. Dzięki wykorzystaniu Matlaba Simulink dokonaliśmy skutecznej walidacji, umożliwiając jednocześnie łatwą korektę pewnych zidentyfikowanych parametrów fizycznych, takich jak na przykład współczynnik tarcia.

W trakcie laboratoriów przeprowadziliśmy również proces strojenia regulatora LQR na rzeczywistym obiekcie. Obserwowaliśmy, jak zmienia się charakterystyka pracy układu wraz z modyfikacją jego wartości własnych. Istotnym aspektem podczas całego ćwiczenia było uchwycenie związku pomiędzy wartościami własnymi układu a jego fizycznymi parametrami. Dzięki temu zdołaliśmy przekształcić układ, początkowo oscylacyjnie tłumiony, w układ asymptotycznie stabilny, pozbawiony przeregulowania. Dodatkowo, praktycznie wypracowaliśmy metodę dostrajania regulatora przy użyciu macierzy Q i R. Na początku, macierz Q przyjęła postać [100 0 0; 0 10 0; 0 0 1]. Jednakże po dokładnej analizie błędów w trzeciej zmiennej stanu x3, czyli prędkości obrotowej koła zamachowego, zauważono, że nawet niewielka zmiana napięcia (0.1) powoduje osiągnięcie przez koło zamachowe prędkości 30 rad/s. Po uwzględnieniu tego błędu, macierz Q została dostosowana do postaci [100 0 0; 0 10 0; 0 0 1/1000], co znacząco poprawiło funkcjonowanie układu regulacji.

Następnym etapem rozwoju naszej pracy mogłoby być porównanie różnych metod regulacji i identyfikacji obiektu. W celu stworzenia bardziej precyzyjnego modelu rozważalibyśmy wykorzystanie sieci neuronowych, na przykład w formie feedforward. Takie podejście pozwoliłoby również na opracowanie regulatora o mniejszych błędach przeregulowania i uchybie niż te przedstawione w naszym sprawozdaniu. Kolejnym krokiem rozwoju byłoby również utworzenie obserwatora, który umożliwiłby jeszcze dokładniejsze monitorowanie zachowania systemu.