Metoda Elementów Skończonych
Projekt na przedmiot
Równania Różniczkowe i Różnicowe

Paweł Pęczek

**Specjalne podziękowania dla
Jakuba Sroka**

AGH
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

1 Wprowadzenie

Postać równania
Rozwiązać numerycznie równanie różniczkowe wraz z warunkami brzegowymi:

$$\begin{cases} -u''(x) + k(x)u'(x) = f(x), x \in [0,2] \\ u'(0) = g_0 \\ u(2) = u_2 \end{cases}$$

Dla zadanej funkcji

$$k(x) = \begin{cases} 1, \text{dla} x \in [0,1) \\ 2, \text{dla} x \in [1,2] \end{cases}$$

oraz warunków brzegowych g_0, u_2 i funkcji prawej strony $f(x)$ zanych jako parametry programu.

Sformułowanie wariacyjne
Niech $v : [0,2] \to \Re$, wówczas:

$$-u''v + ky'v = fv$$

Całkując na przedziale $[0,2]$ otrzymujemy:

$$-\int_0^2 u''vdx + \int_0^2 ku'vdx = \int_0^2 fvdx$$

Całkując przez części człon $\int_0^2 u''vdx$ obniżony zostaje rząd pochodnej u'':

$$-u'(2)v(2) + u'(0)v(0) + \int_0^2 u'v'dx + \int_0^2 ku'vdx = \int_0^2 fvdx$$

Zadany warunek brzegowy Neumanna wprowadza kontrolę nad pochodną funkcji u w punkcie $x = 0$:

$$-u'(2)v(2) + \int_0^2 u'v'dx + \int_0^2 ku'vdx = \int_0^2 fvdx - g_0v(0)$$

W punkcie $x = 2$ zadany jest warunek Dirichleta (potencjalnie niejednorodny), więc następuje konstrukcja przesunięcia:
Niech $\overline{u} \in H^1((0,2)) \wedge \overline{u}(2) = u_2$, wówczas:
$w = u - \overline{u}$ takie, że $w \in H^1((0,2)) \wedge w(2) = 0$
Teraz zapisując $u = w + \overline{u}$:

$$-w'(2)v(2) + \int_0^2 (w'v' + kw'v)dx = \int_0^2 fvdx - \int_0^2 (\overline{u}'v' + k\overline{u}'v)dx - g_0v(0) + \overline{u}'(2)v(2)$$

Dążąc do tego, aby w oraz v należały do tej samej podprzestrzeni $H^1((0,2))$ żądamy by $v \in H^1((0,2)) \wedge w(2) = 0$, a zatem:

$$\int_0^2 (w'v' + kw'v)dx = \int_0^2 fvdx - g_0v(0) - \int_0^2 (\overline{u}'v' + k\overline{u}'v)dx$$

Oznaczając jako $A_1(w,v) = \int_0^2 (w'v' + kw'v)dx$, $A_1(\overline{u},v) = \int_0^2 (\overline{u}'v' + k\overline{u}'v)dx$ oraz $B(v) = \int_0^2 fvdx$ (wiedząc, że $A_1(w,v)$ i $A_1(\overline{u},v)$ to formy dwuliniowe):
Szukamy $w \in H^1((0,2)) \wedge w(2) = 0$,
które spełnia $A_1(w,v) = B(v) - g_0v(0) - A_1(\overline{u},v)$ dla każdego $v \in H^1((0,2)) \wedge v(2) = 0$
Oznaczmy dodatkowo $V = \{v \in H^1((0,2)) \wedge v(2) = 0\}$

Metoda Galerkina
Skoro A_1 to odwzorowanie dwuliniowe, to

$$A_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n, e_i) = B(e_i)$$

$$\alpha_1 A_1(e_1, e_i) + \alpha_2 A_1(e_2, e_i) + \cdots + \alpha_n A_1(e_n, e_i) = B(e_i)$$

A zatem wykorzystując wszystkie wektory bazy przestrzeni V można zapisać:

$$\begin{bmatrix} A_1(e_1,e_1) & A_1(e_2,e_1) & \dots & A_1(e_n,e_1) \\ A_1(e_1,e_2) & A_1(e_2,e_2) & \dots & A_1(e_n,e_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1(e_1,e_n) & A_1(e_2,e_n) & \dots & A_1(e_n,e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(e_1) \\ B(e_2) \\ \vdots \\ B(e_n) \end{bmatrix}$$

Problem z nieskończonym wymiarem V pokonujemy przez konstrukcję ciągu $V_n \subset V$ zbieżnego do V. Jedna z metod konstrukcji V_n polega na podziale zbioru, na którym określone jest równanie różniczkowe na n równych części, tak że $h = 1/n$, $x_{k+1} = x_k + h$, $x_{k-1} = x_k - h$ dla $k = 1, 2, ..., n-1$ oraz wyborze wektorów bazowych w postaci funkcji kształtu

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{h}, dla x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1} - x}{h}, dla x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Funkcje e_k na brzegu obszaru konstruujemy jeśli potrzeba wybierając odpowiednio:

$$e_0(x) = \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{h}, dla x \in [x_0, x_1] \\ 0, \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

lub:

$$e_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{h}, dla x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

2 Rozwiązanie

Postać macierzy
Należy zauważyć, że wartości $A_1(e_j, e_k)$ mogą być różne od 0 jedynie w przypadku, gdy $j \geqslant k-1 \wedge j \leqslant k+1$, co oznacza, że macierz A_1 jest trójdiagonalna.

Postać górnej przekątnej

$$A_1(e_{k+1}, e_k) = \int_0^2 (e'_{k+1} e'_k + k e'_{k+1} e_k) dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} k e'_{k+1} e_k dx = -\frac{1}{h} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} k e'_{k+1} e_k dx$$

Pora przypatrzeć się przypadkom, które występują podczas liczenia $I = \int_{x_k}^{x_{k+1}} k e'_{k+1} e_k dx$:
$k(x) = 1$ dla $x \in [x_k; x_{k+1}]$:

$$I = -\frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x_{k+1} x \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{2}$$

$k(x) = 2$ dla $x \in [x_k; x_{k+1}]$:

$$I = -\frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x_{k+1} x \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = 1$$

Przy liczeniu powyższych całek korzystano z faktu, iż $x_{k+1} = x_k + h$
W przypadku, gdy $a = 1$ oraz $x_k < a < x_{k+1}$:

$$I = -\frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x_{k+1} x \right]_{x_k}^{a} - \frac{2}{h^2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x_{k+1} x \right]_{a}^{x_{k+1}}$$

Przyjmując $a = x_k + \frac{h}{2}$, jako że punkt 1 może wystąpić jedynie na środku lub na brzegu przedziału $[x_k; x_{k+1}]$

$$I = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Postać dolnej przekątnej

$$A_1(e_{k-1}, e_k) = \int_0^2 (e'_{k-1}e'_k + ke'_{k-1}e_k)dx = -\frac{1}{h^2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} ke'_{k-1}e_k dx = -\frac{1}{h} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} ke'_{k-1}e_k dx$$

Pora przypatrzeć się przypadkom, które występują podczas liczenia $I = \int_{x_{k-1}}^{x_k} ke'_{k-1}e_k dx$:
$k(x) = 1$ dla $x \in [x_{k-1}; x_k]$:

$$I = -\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{x_k} = -\frac{1}{2}$$

$k(x) = 2$ dla $x \in [x_{k-1}; x_k]$:

$$I = -\frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{x_k} = -1$$

Tym razem pamiętając o fakcie, że $x_{k-1} = x_k - h$
W przypadku, gdy $a = 1$ oraz $x_{k-1} < a < x_k$:

$$I = -\frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{a} - \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{a}^{x_k}$$

Przyjmując $a = x_k - \frac{h}{2}$, jako że punkt 1 może wystąpić jedynie na środku lub na brzegu przedziału $[x_{k-1}; x_k]$

$$I = -\frac{1}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{7}{8}$$

Postać głównej przekątnej

$$A_1(e_k, e_k) = \int_0^2 (e'_k e'_k + ke'_k e_k)dx = \frac{1}{h^2}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} dx + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} ke'_k e_k dx = \frac{2}{h} + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} ke'_k e_k dx$$

Pora przypatrzeć się przypadkom, które występują podczas liczenia $I = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} ke'_k e_k dx$:
$k(x) = 1$ dla $x \in [x_{k-1}; x_{k+1}]$:

$$I = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k+1}x\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = 0$$

$k(x) = 2$ dla $x \in [x_{k-1}; x_{k+1}]$:

$$I = \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k+1}x\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = 0$$

Tym razem pamiętając o fakcie, że $x_{k-1} = x_k - h$ oraz $x_{k+1} = x_k + h$.
W przypadku, gdy $a = 1$ oraz $x_k = a$:

$$I = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k+1}x\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

W przypadku, gdy $a = 1$ oraz $x_{k-1} < a < x_k$:

$$I = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{a} + \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{a}^{x_k} + \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k+1}x\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$I = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{8}$$

W przypadku, gdy $a = 1$ oraz $x_k < a < x_{k+1}$:

$$I = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k-1}x\right]_{x_{k-1}}^{x_k} + \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k+1}x\right]_{x_k}^{a} + \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_{k+1}x\right]_{a}^{x_{k+1}}$$
$$I = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

Lewy brzeg

Zadany na lewym brzegu warunek Neumanna i wybór przestrzeni rozwiązań v powodują, że konstrukcję macierzy należy rozważać dla n równań.
Zauważmy, że $e_0(x)$ jest dane:

$$e_0(x) = \begin{cases} \frac{x_{k+1}-x}{h}, dla x \in [x_0, x_1] \\ 0, \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$A_1(e_{-1}, e_0)$ oczywiście nie rozważamy, natomiast $A_1(e_0, e_1)$ obliczyć można w sposób podany dla przypadku $A_1(e_{k-1}, e_k)$. Na specjalną uwagę zasługuje przypadek $A_1(e_0, e_0)$ (dla uproszczenia zakładamy istnienie co najmniej jednego podziału, aby nie musieć rozpatrywać szczególnych przypadków).

$$A_1(e_0, e_0) = \int_0^2 (e_0'e_0' + ke_0'e_0)dx = \frac{1}{h^2}\int_{x_0}^{x_1} dx + \int_{x_0}^{x_1} ke_0'e_0 dx = \frac{1}{h} + \int_{x_0}^{x_1} ke_0'e_0 dx$$

Oznaczając $I = \int_{x_0}^{x_1} ke_0'e_0 dx$

$$I = \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x_1 x\right]_{x_0}^{x_1}$$

i pamiętając, że $x_1 = x_0 + h$, otrzymujemy:

$$I = -\frac{1}{2}$$

Prawy brzeg

Zgodnie z założeniem przestrzeni V (i konstruowanych podprzestrzeni V_n) - funkcje zerują się na prawym brzegu obszaru $(0, 2)$. Konstrukcja macierzy A_1 jest zatem zakończona.

Macierz sztywności

Oznaczmy przez $MD(i)$ przyporządkowanie elementowi na pozycji (i, i) w macierzy sztywności wartości na głównej przekątnej, analogicznie $LD(i)$ - przyporządkowanie wartości dolnej przekątnej macierzy trójdiagonalnej elementowi znajdującemu się na tej przekątnej oraz analogicznie $UD(i)$ dla górnej.
Wówczas omawiana macierz będzie miała postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} - \frac{1}{2} & UD(0) & 0 & \dots & 0 \\ LD(1) & MD(1) & UD(1) & \dots & 0 \\ 0 & LD(2) & MD(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & MD(n-2) & UD(n-2) \\ 0 & 0 & \dots & LD(n-1) & MD(n-1) \end{bmatrix}$$

Przesunięcie dirichletowskie
Do tej pory nie poczyniono żadnych konkretnych założeń odnośnie kształtu $\overline{u}$. Najwygodniej jest założyć, że

$$\overline{u} = \begin{cases} \frac{u_2(x-x_{k-1})}{h}, \text{dla x} \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$A_1(\overline{u}, v_k) = A_1(u_2 e_n, e_k) = 0, \text{dla k} = 0, 1, 2, ..., n-2$$

$$A_1(\overline{u}, v_{n-1}) = u_2 A_1(e_n, e_{n-1})$$

A to oznacza, że $A_1(\overline{u}, v_{n-1}) = u_2 A_1(e_{k+1}, e_k)$ dla $k = n-1$, przy czym zakładając co najmniej jeden podział $A_1(\overline{u}, v_{n-1}) = u_2(-\frac{1}{h} + 1)$

Konstrukcja układu równań
Uwzględniając przesunięcie dirichletowskie, a także warunek Neumanna na lewym brzegu - zapisać można

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} - \frac{1}{2} & UD(0) & 0 & \dots & 0 \\ LD(1) & MD(1) & UD(1) & \dots & 0 \\ 0 & LD(2) & MD(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & MD(n-2) & UD(n-2) \\ 0 & 0 & \dots & LD(n-1) & MD(n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(e_0) - g_0 \\ B(e_1) \\ B(e_2) \\ \vdots \\ B(e_{n-2}) \\ B(e_{n-1}) - u_2(-\frac{1}{h} + 1) \end{bmatrix}$$

Całkowanie numeryczne
Wykorzystując metodę Simpsona

$$\int_a^b g(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right)$$

a ponieważ

$$B(e_k) = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f e_k dx$$

i jednocześnie

$$e_k(x_{k+1}) = 0$$

$$e_k(x_{k-1}) = 0$$

$$e_k(x_k) = 1$$

$$f\left(\frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}\right) = f\left(\frac{x_k - h + x_k + h}{2}\right) = f(x_k)$$

to

$$B(e_k) \approx \frac{4}{3} f(x_k) h$$

Przy czym istotną subtelnością jest fakt, że $B(e_0)$ należy traktować inaczej, mianowicie

$$B(e_0) = \int_{x_0}^{x_1} f e_k dx$$

$$B(e_0) \approx \frac{h}{6}\left(f(0)e_0(0) + 4f\left(\frac{h}{2}\right) v_0 \left(\frac{h}{2}\right) + g(h) v_0(h)\right)$$

W szczególności:

$$e_0(0) = 1$$

$$e_0(h) = 0$$

$$e_0\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

A zatem:

$$B(e_0) \approx \frac{h}{6}\left(f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right)\right)$$

3 Implementacja

```
# Counting upper diagonal values
def upper_diagonal(h, i):
    result = -1 / h
    x_k = i * h
    if x_k + h <= 1:
        result += 0.5
    elif x_k >= 1:
        result += 1
    else:
        result += 5 / 8
    return result
```

```
# Counting lower diagonal values
def lower_diagonal(h, i):
    result = -1 / h
    x_k = i * h
    if x_k <= 1:
        result -= 0.5
    elif x_k - h >= 1:
        result -= 1
    else:
        result -= 7 / 8
    return result
```

```
# Counting main diagonal values
def main_diagonal(h, i):
    result = 2 / h
    x_k = i * h
    if x_k == 1:
        result -= 0.5
    elif ((x_k - h < 1) and (x_k > 1)) or ((x_k < 1) and (x_k + h > 1)):
        result -= 1 / 8
    return result
```

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as la
import matplotlib.pyplot as plt

def fem(g0, u2, f, n):
    h = 2.0 / n
    matrix = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        matrix[i][i] = main_diagonal(h, i)
        if i > 0:
            matrix[i - 1][i] = upper_diagonal(h, i - 1)
            matrix[i][i - 1] = lower_diagonal(h, i)
    matrix[0][0] = 1 / h - 0.5
    vector_r = np.zeros((n, 1))
    # Simpson approximation of integrals
    for i in range(n):
        vector_r[i] = 4 / 3 * f(h * i) * h
    # Special case B(e_0)
    vector_r[0] = (f(0) + 2 * f(h / 2)) * h / 6
    # Neumann condition
    vector_r[0] -= g0
    # Dirichlet shift
    vector_r[n - 1] -= u2 * (-1 / h + 1)
    result = la.solve(matrix, vector_r)

    # Showing results
    points = np.linspace(0.0, 2.0, n + 1)
    values = np.zeros(n + 1)
    for i in range(n):
        values[i] = result[i]
    values[n] = u2
    plt.plot(points, values)
    plt.show()
```