Obliczenia Naukowe Lista 2

Paweł Prusisz

21.11.2021

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

W pierwszym zadaniu należy zaimpelemtować funkcję która będzie znajdować miejsca zerowe funkcji metodą bisekcji.

1.2 Idea algorytmu

Podstawowym założeniem pozwalającym stosować metode bisekcji jest warunek ze funkcja $f(x)$ na podanym przedziale $[a, b]$ zmienia znak, czyli $f(a)f(b) < 0$. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, zwracamy $err = 1$ i kończymy działanie. Jeżeli jednak funkcja $f(x)$ zmienia zaczynamy działanie naszego algorytmu.

Krok 1.
Obliczamy środek przedziału $[a, b]$, aby uniknąć błedów najpierw obliczana jest wartość $\frac{b-a}{2}$ a następnie dodajemy ją do początku przedziału.

Krok 2.
Sprawdzamy następnie na którym z przedziałów, $[a, mid]$ czy $[mid, b]$, funkcja $f(x)$ zmienia znak. Przedział ten przyjmujemy za nowy przedział i wracam do kroku 1.

Warunkiem wyjśćia z pętli jest albo osiągnięcie pożądaniej dokładności $|f(x_0)| < \epsilon$ lub gdy wielkość przedziału $(b - a) < \delta$.

Aby uniknąć błędu w przypadku obliczania czy funkcja $f(x)$ zmienia znak na przedziale, zamiast sprawdania $f(a)f(b) < 0$ używamy

$SGN(f(a)) \neq SGN(f(b))$. Używając tej metody unikamy błędów w przypadku, gdy wartości $f(a), f(b)$ są albo bardzo bliskie zera, albo bardzo duże.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

W drugim zadaniu należy zaimplementować funkcję która będzie znajdować miejsca zerowe funkcji metodą stycznych (metodą Newtona).

2.2 Idea algorytmu

Metoda stycznych (metoda Newtona) wykorzystuje do obliczania miejsc zerowych metodę linearyzacji, czyli zastąpienie funckj f funkcją liniową. jest nią suma dwóch początkowych składników we wzorze Taylora dla funckji f. Jeżeli:

$f(x) = f(c) + f^{'}(c)(x - c) + \frac{1}{2!}f^{''}(c)(x - c)^2 + ...$

To wynikiem otrzymanej linearyzacji będzie funkcja liniowa l:

$l(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$

Jest to dobre przybliżenie funckji f w pobliżu argumentu c. Do obliczenia kolejnych przybliżeń pierwiastka r zadanej funkcji f wykorzystujemy następujący wzór:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$

Algorytm rozpoczyna swoje działanie od sprawdzenia czy pochodna funkcji f nie jest bliska 0 czyli sprawdzamy czy $f^{'}(x_0) < \epsilon$. W przypadku kiedy pochodna jest bliska zero, sygnalizujemy to ustawiając wartość $err = 2$. W przyeciwnym wypadku algorytm z góry narzuconą maksymalną liczbą iteracji $maxIt$ będzie wykonywał następujące kroki:

Krok 1.
Przy pomocy znanej już wartości x_n obliczamy x_{n+1}

Krok 2.
Jeżeli aktualna wartość x_n jest wystarczając dobrym przybliżeniem, czyli

$f(x_n) < \epsilon$ lub gdy $|x_n - x_{n+1}| < \delta$, algorytm kończy działanie. W przeciwnym wypadku wracamy do kroku 1.

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

W trzecim zadaniu należy zaimplementować funkcję która będzie znajdować miejsca zerowe funkcji metodą siecznych, pewnej modyfikacji metody Newtona.

3.2 Idea algorytmu

Metoda siecznych podobnie jak metoda stycznych jet metodą iteracyjną. Tym razem jednak nie korzystamy z wartości funkcji pochodnej $f'(x)$ ale na pewnym przybliżeniu, mianowicie:

$f'(x) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Skąd wzór dla metody siecznych:

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$

W przypadku tej metody, obliczenie x_{n+1} wymaga znania wartości 2 poprzednich x-ów więc jako parametry musimy podać 2 pukty początkowe x_0 i x_1. Metoda różni się od metody Newtona tym że styczna zosyaje zastąpiona sieczną wykresu fukcji f.

Działanie algorytmu rozpoczynamy od wyliczenia wartości funkcji f w punktach x_0 i x_1. Następnie algorytm próbuje znaleźć pierwiastek w maksymalnie $maxIt$ iteracjiach.

Krok 1.
Sprawdzamy czy $|f(x_0)| > |f(x_1)|$ i w razie potrzeby zamieniamy wartości x_0 i x_1. Ma to na celu zapewnienie że moduły funkcji f w kolejnych iteracjiachnie rosną.

Krok 2.
W kolejnym kroku obliczamy wartość x_{n+1} przy pomocy wzoru podanego wcześniej, jeżeli wartość funkcji $|f(x_{n+1})| < \epsilon$ lub różnica między

$|x_{n+1} - x_n| < \delta$ konczymy działanie algorytmy, w przeciwnym wypadku powtarazmy Krok 1.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

W zadaniu 4 należy wyznaczyć pierwiastki równania $sin(x) - (\frac{x}{2})^2 = 0$ przy pomocy napisanych w zadaniach 1-3 algorytmów.

Parametry wywołania dla odpowiednych funkcji prezentują się następująco:

1. bisekcji z przedziałem początowym $[1.5, 2]$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
2. Newtona z przybliżeniem początkowym $x0 = 1.5$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$
3. siecznych z przybliżeniami początkowym $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$

4.2 Rozwiązanie

Wyniki obliczeń poszczególnych funkcji prezentują się castępująco:

Metoda	r	v	it	err
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
stycznych	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4,	0
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

Najwięcej iteracji przy obliczaniu pierwiastka potrzebowała metoda bisekcji, 16 iteracji a najmniej metody stycznych i siecznych po 4 iteracje.

Uzyskane wyniki potwierdzają zbieżność kazdej z metod determinowaną przez współczynnik zbieżność α. Dla metody bisekcji otrzymano zbierzność kwadratową $\alpha = 1$, dla metody stycznych zbieżność liniową $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a metoda stycznych zbieżność nadliniową $\alpha = 2$.

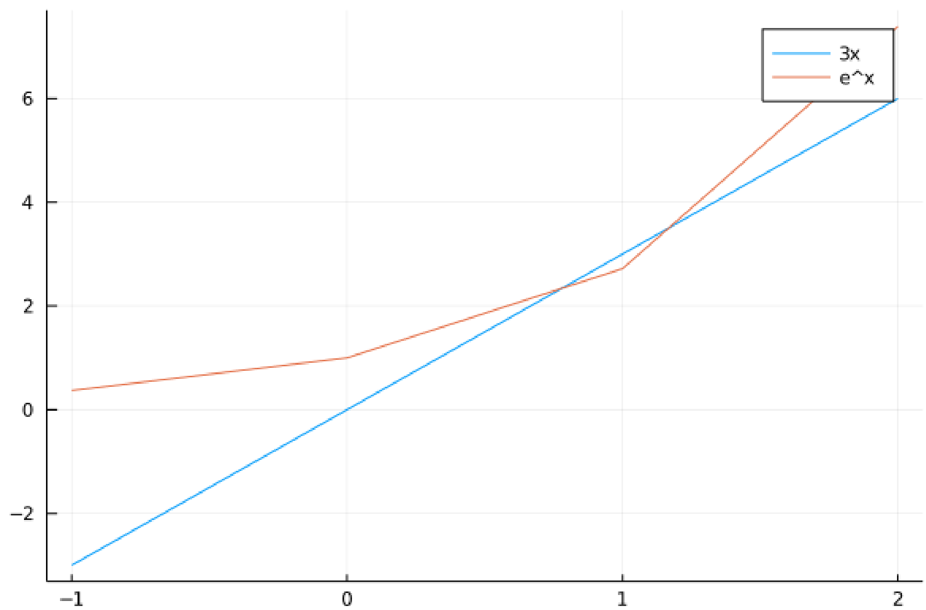
5 Zadanie 5

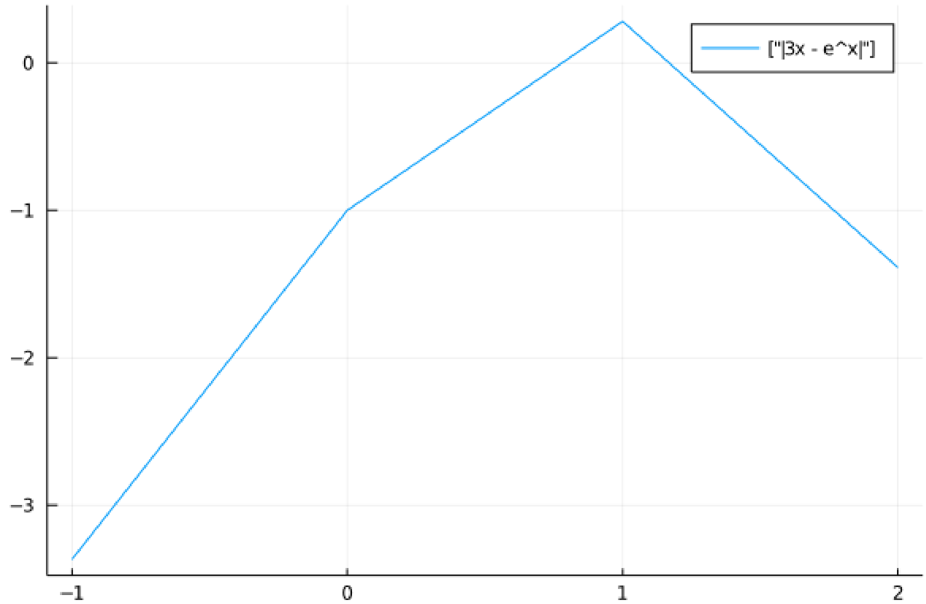
5.1 Opis problemu

W zadaniu 5 używając zaimplementowanej w zadaniu 1 metody bisekcji należy znaleźć wartości zmiennej x dla których przecinają się wykresy funkcji $y = e^x$ i $y = 3x$.

5.2 Rozwiązanie

W tym zadaniu w pierwszej kolejności zbadałem jakie są potencjalne przedziały na których wywolywanie metody bisekcji miało by sens. W tym celu przy użyciu pakieto Plots w julii narysowałem na jednym wykresie obie badane funkcję $y = e^x$ i $y = 3x$, oraz wykres różnicy tyc funkcji czyli $y = 3x - e^x$.





Jak widać z powyższych wykresów miejsc zerowych powinniśmy szukać gdzieś w przedziałach $[0, 1]$ oraz $[1, 2]$.

Wyniki zwrócone przez metodę bisekcji na podanych przedziałach prezentują się następująco:

Przedział	r	v	it	err
[0,1]	0.6190643310546875	3.4790879874790903e-6	16	0
[1,2]	1.5121345520019531	-5.28692645218598e-10	18	0

Warto dodać że wywołanie metody bisekcji na przedziale $[0, 2]$ zakończy się zwróceniem wyniku z $err = 1$ gdyż fukcja ma ten sam znak na obu końcach przedziału, aby znaleźć wartości pierwiastków musimy znaleźć i podać przedział na którym fukcja zmienia swój znak.

6 Zadanie 6

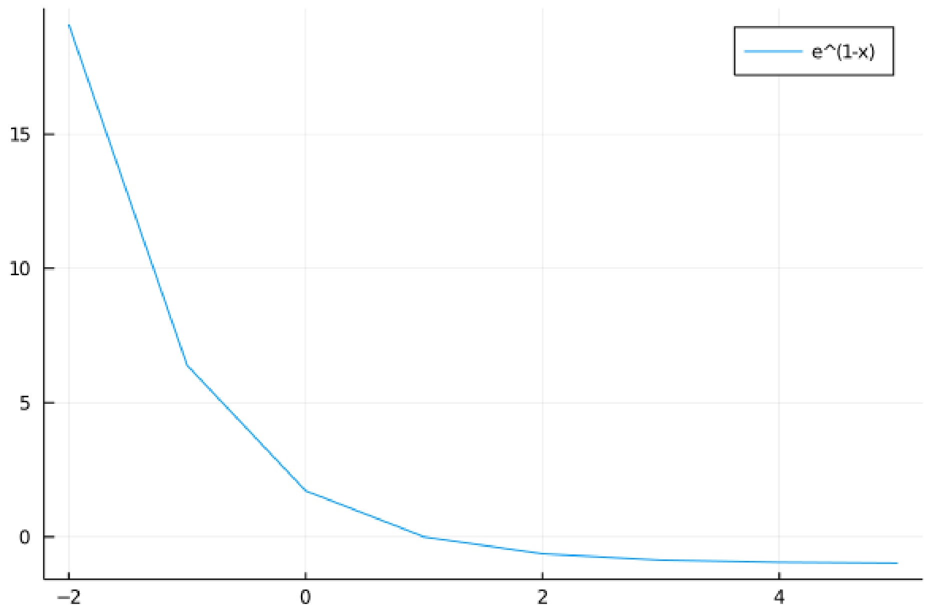
6.1 Opis problemu

W zadaniu 6 należy znaleźć miejsca zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-e}$ za pomocą metody bisekcji, Newtona i siecznych. Przy dokładności obliczeń: $\delta = 10^{-5}$ i $\epsilon = 10^{-5}$. Następnie w 2 części zadania należy zbadać co się stanie gdy dla metody Newtona dla f_1 wybierzemy $x_0 \in (1, \infty)$, a dla f_2 wybierzemy $x_0 > 1$, czy można wybrać $x_0 = 1$ dla f_2?

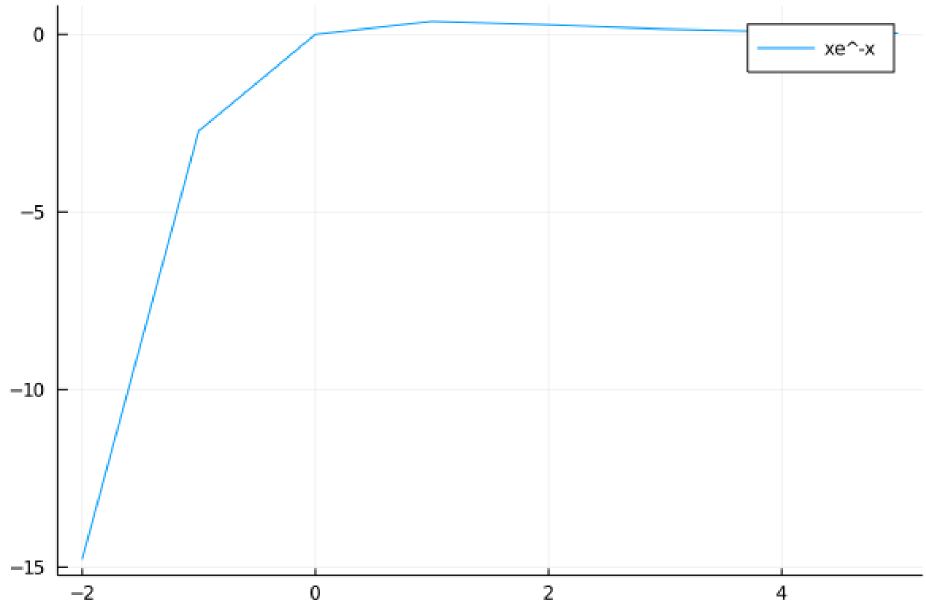
6.2 Rozwiązanie

Wykresy badanych w tym zadaniu funkcji prezentują się następująco:

Funkcja 1:



Funkcja 2:



Wyniki dla funkcji 1 dla metody bisekcji na wybranych przedziałach:

Przedział	r	v	it	err
[0,2]	1.0	0.0	1	0
[-2,2]	1.0	0.0	2	0
[0.1,1.9]	0.9999999999999999	0.0	1	0
[0.999,200]	0.9999963562488556	3.6437577828341006e-6	22	0

Wyniki dla funkcji 2 dla metody bisekcji na wybranych przedziałach:

Przedział	r	v	it	err
[-1,2]	7.62939453125e-6	7.62933632381113e-6	17	0
[-2,2]	0.0	0.0	1	0
[-0.1,2.1]	3.0517578125025235e-6	3.0517484992909882e-6	16	0
[-0.001,200]	99.9995	3.721917869413468e-42	1	0

Jak widać w tym przypadku metoda bisekcji znalazła pierwiastek $r = 99.9995$ gdzie wartość funkcji była rowna $v = 3.721917869413468 * 10^{-42} < \epsilon$, funkcja 2 zbiega do 0 i od pewnego momentu wszytkie wartość funkcji mniejsze od zadanego epsilon są traktowane jako miejsca zerowe.

Wyniki dla funkcji 1 dla metody Newtona dla wybranych x_0:

x_0	r	v	it	err
-1.0	0.9999922654776594	7.734552252003368e-6	5	0
0.0	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
1.0	1.0	0.0	1	0
1.1	0.99999999991094	8.905987058938081e-11	3	0
2.0	0.9999999810061002	1.8993900008368314e-8	5	0
4.0	0.9999999995278234	4.721765201054495e-10	21	0
8.0	NaN	NaN	100	1
16.0	16.0	-0.9999996940976795	0	2

Widzimy jak w przypadku funkcji 1 dla metody Newtona liczba iteracji rośnie wraz ze wzrostem $x_0 > 1$ a od pewnego momentu wartości pochodnej są bardzo bliskie 0, co zasygnalizowane jest dla $x_0 = 16$. Metoda Newtona kończy swoje działanie w znacznie mniejszej liczbie iteracji niż metoda bisekcji.

Wyniki dla funkcji 2 dla metody Newtona dla wybranych x_0:

x_0	r	v	it	err
-1.0	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7,	5	0
0.0	0.0	0.0	1	0
1.0	1.0	0.36787944117144233	0	2
1.1	14.272123938290509	9.040322779745447e-6	3	0
2.0	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	10	0
4.0	14.398662765680003	8.036415344217211e-6	9	0
8.0	14.636807965014	6.438155219843286e-6	6	0
16.0	16.0	1.8005627955081459e-6	0	2

Podobnie jak w przypadku funkcji 1, tym razem dla $x_0 = 1$ i dla $x_0 = 16$ pochodna jest bliska 0 co sygnalizowane jest przez $err = 2$, widzimy też że dla wartości $x_0 > 1$ funkcja znajduje pierwiastek $r \approx 14$ aż do momentu $x_0 = 16$ gdzie wartość pochodnej jest znowu bardzo bliska zeru. Pomimo że metoda Newtona jest znacznie szybsza od metody bisekcji, widzimy na tym przypadku że w przeciwieństwie do metody bisekcji nie jest ona globalnie zbieżna.

Wyniki dla funkcji 1 dla metody siecznych dla wybranych x_0, x_1:

x	x	r	v	itt	err
-2.0	2.0	1.0000000080618678	-8.061867839970205e-9	8	0
0.0	2.0	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	0
-0.3	1.8	1.0000003464708873	-3.4647082725047795e-7	6	0

Wyniki dla funkcji 2 dla metody siecznych dla wybranych x_0, x_1:

x	x	r	v	itt	err
-2.0	2.0	14.294924723787231	8.85064549833867e-6	15	0
0.0	2.0	0.0	0.0	1	0
-0.3	1.8	14.661140570698615	6.293834366782407e-6	14	0

Widzimy że metoda siecznych wykonuje mniej kroków od metody bisekcji, ale więcej niż metoda Newtona.