Obliczenia Naukowe Lista 4

Paweł Prusisz

05.12.2021

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

W zadaniu 1 należy napisać funkcję, która oblicza ilorazy różnicowe oparte na podanych węzłach w funkcji nie korzystając z tablicy dwuwymiarowej.

1.2 Rozwiązanie

Ilorazy różnicowe można obliczyć na podstawie następjącego wzoru:

$f[x_0] = f(x_0)$

$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$

$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k})-f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1})}{x_k-x_i}$

Jeżeli zaczniemy od tablicy wypełnionej wartościami węzłów funkcji, a przy kolejnych iteracjach rzędów tablicy dwuwymiarowej będziemy aktualizować obliczone ilorazy przeliczając je kolejny raz od dołu, uzględnią one w ten sposób wcześniej wyliczone ilorazy różnicowe, od których są zależne.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

W zadaniu 2 należało napisać funkcję wyliczającą wartość wielomianu interpolowanego stopnia n w postaci Newtona w podanym punkcie przy pomcy uogólnionego sposobu Hornera w czasie liniowym.

2.2 Rozwiązanie

Wartość naszej fukcji można zapisać następującym wzorem:

$N_n(x) = \sum_{i=1}^{n} q_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$

gdzie q_i jest ilorazem różnicowym, a x_j węzłem interpolacji.
Powyższą zależność można przedstawić używając uogólnionego algorytmu Hornera:

$w_n(x) = f[x_0, ..., x_n]$

$w_k(x) = f[x_0, ..., x_k] + (x - x_k) * w_{k_1}(x), k\epsilon[n-1, 0]$

$N_n(x) = w_0(x)$

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

W zadaniu 3 należy napisać funkcję obliczającą współczynniki postacji naturalnej wielomianu interpolowanego w postaci newtona.

3.2 Rozwiązanie

W wielomianie interpolowanym dla którego ilorazy różnicowe są postaci $c_0, c_1, ...$ współczynnikiem a_n stojącym przy najwyzszej potędze x^n, jest c_n. Opierając się na tym fakcie możemy wyliczyć kolejne współczynniki zaczynając od najwyższych potęg i przy kolejnych przejściach aktualizując współczynniki przy obejmowanych aktualnie potęgach w ten sposób, aby były one na tą chwile w postaciach naturalnych. Przy kolejnych iteracjach aż do jedynki będziemy wykorzystywali obliczone wcześniej współczynniki cząstkowe postaci naturalnej do zaaktualizowania ich o nowe potęgi.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

W zadaiu 4 należało zaimplementować funkcję rysującą porówanie interpolacji stopnia n funkcji f na zadanym przedziale $[a, b]$ wraz z jej prawdziwym wykresem.

4.2 Rozwiązanie

Algorytm użyty w zadaniu 4 na podstawie danych otrzymanych z zaimplementowanych we wcześniejszych zadaniach funkcjach wyznacza ilorazy różnicowe i wartości wielomianu interpolowanego. Na początku algorytmu wyznaczamy warunki początkowe h i kh dla późniejszego obliczenia kolejnych, równoodległych od siebie węzłów wielomianu. Definiujemy rówież zmienną maxnodes mówiącą o maksymalnej liczbie węzłów użytych do wyznaczenia wielomianu. Następnie wyznaczamy kolejne węzły i liczymy w nich wartości dla zadanej funkcji $f(x)$ z krokiem h. W następnej kolejności liczymy ilorazy różnicowe na podstawie wyliczonych wartości. Dla uzyskania większej dokładności wykresu zwiększone zostje jego próbkowanie, wartości wielomianu zostają wyznaczone w $maxnodes* mult$ węzłach gdzie mult jest arbitralnie wybraną wartością, w tym przypadku $mult = 20$. Następnie wyliczane są wartości wielomianu interpolowanego dla zadanych węzłów za pomocą funkcji warNewton i na końcu rysowany jest odpowiedni wykres przy użyciu pakietu PyPlot.

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

W zadaniu 5 należało przetestować funkcję $rysujNnfx(f, a, b, n)$ na następujących przykładach:

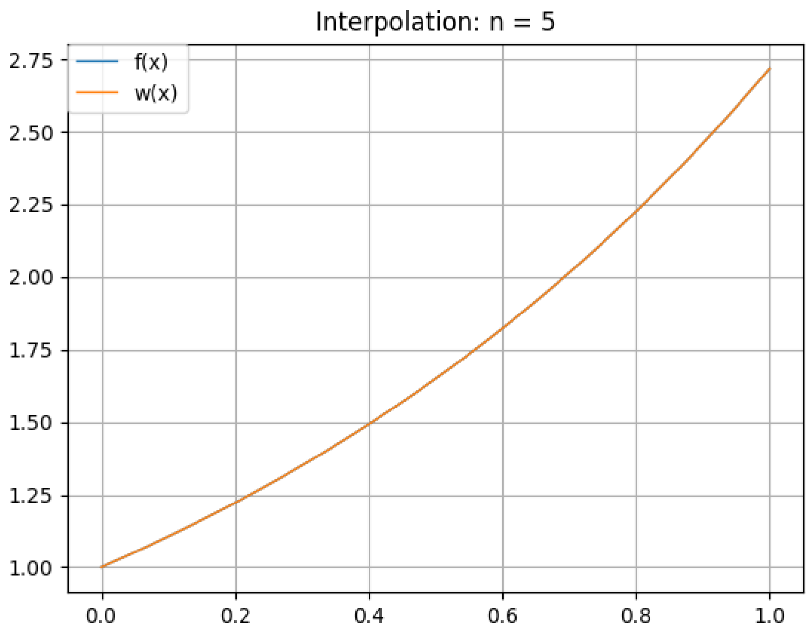
(a) e^x, $[0, 1]$, $n = 5, 10, 15$,

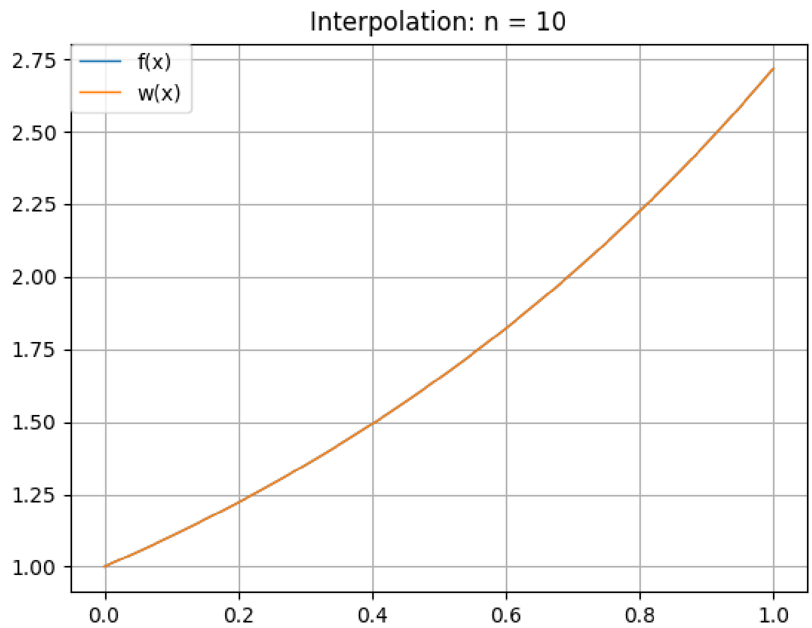
(b) $x^2 sinx$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$.

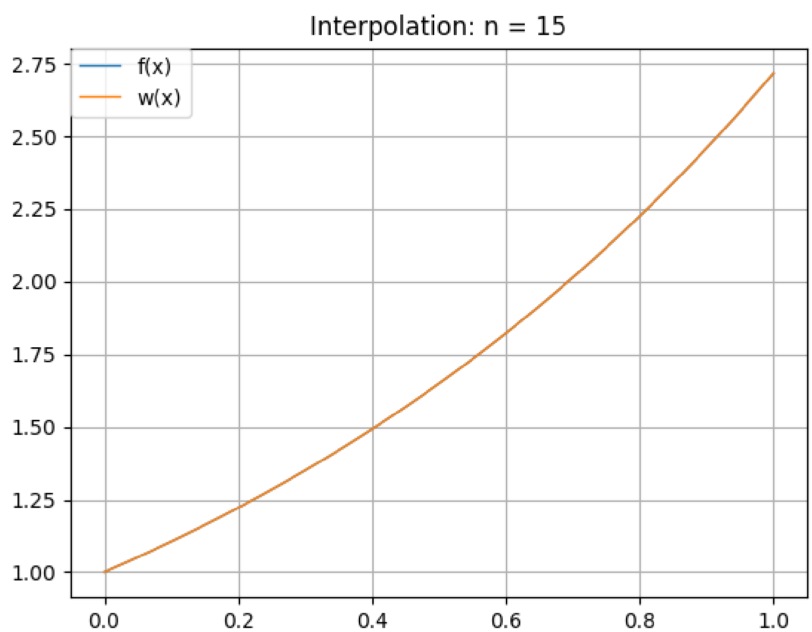
5.2 Rozwiązanie

Otrzymane wykresy prezentują się nastepująco:

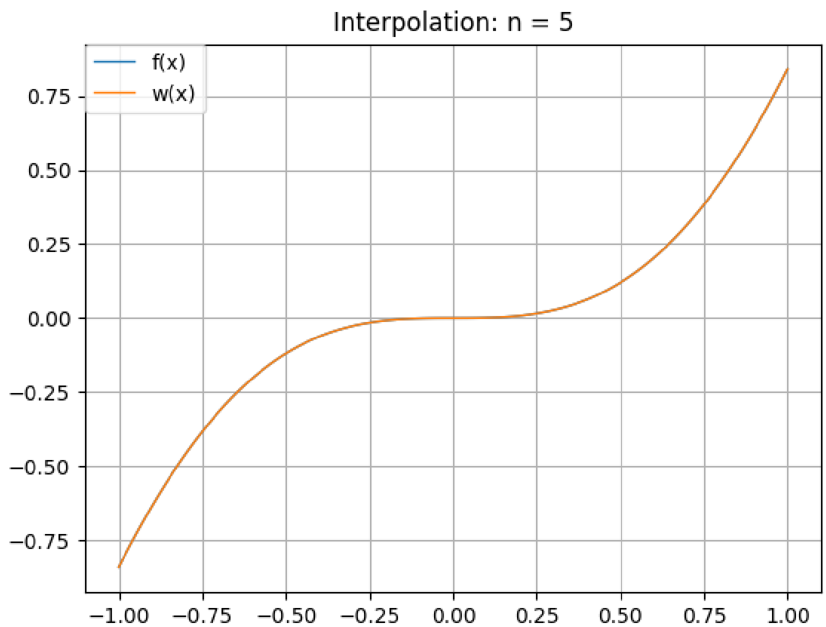
Dla podpunktu (a), funkcji e^x:

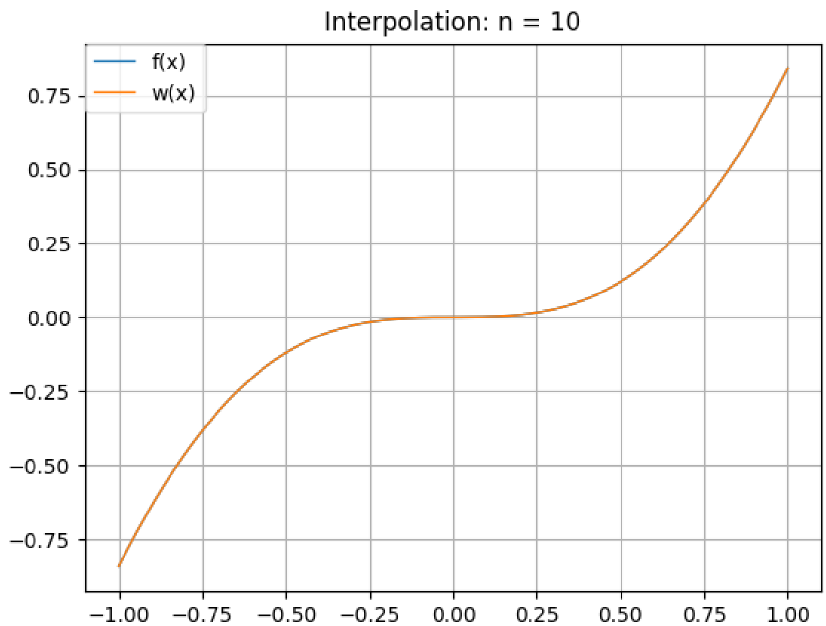


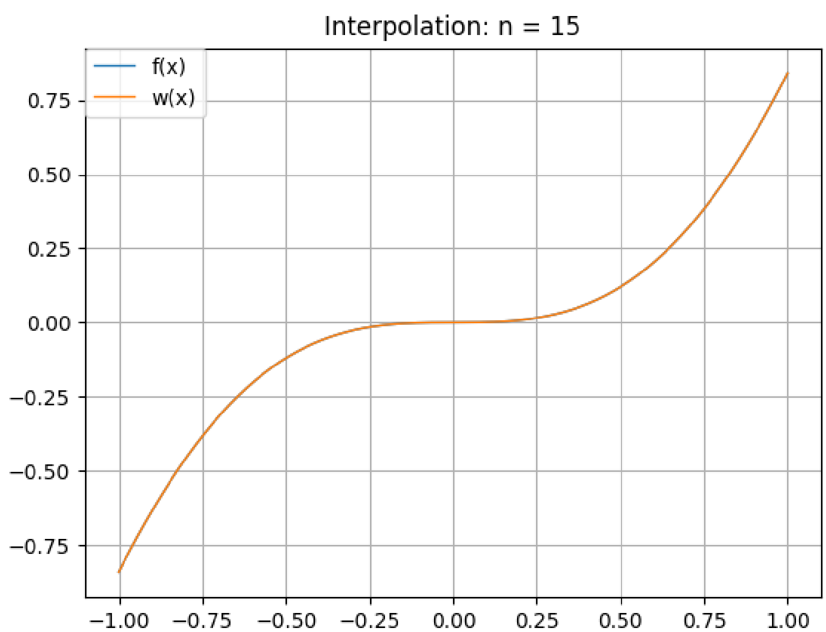

Interpolation: n = 10
f(x)
w(x)
2.75
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Interpolation: n = 15
f(x)
w(x)
2.75
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Dla podpunktu (b), funkcji $x^2 sin x$:




Interpolation: n = 10
f(x)
w(x)
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00


Interpolation: n = 15
f(x)
w(x)
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

Jak widać w obu przypadkach, nawet dla dość małych stopni wielomianu interpolowanego wykresy pokrywają się bardzo dobrze. Nie widać poprawy w zmianie n z 5 na 15, gdyż już dla n = 5 wykresy są prakycznie identyczne.

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

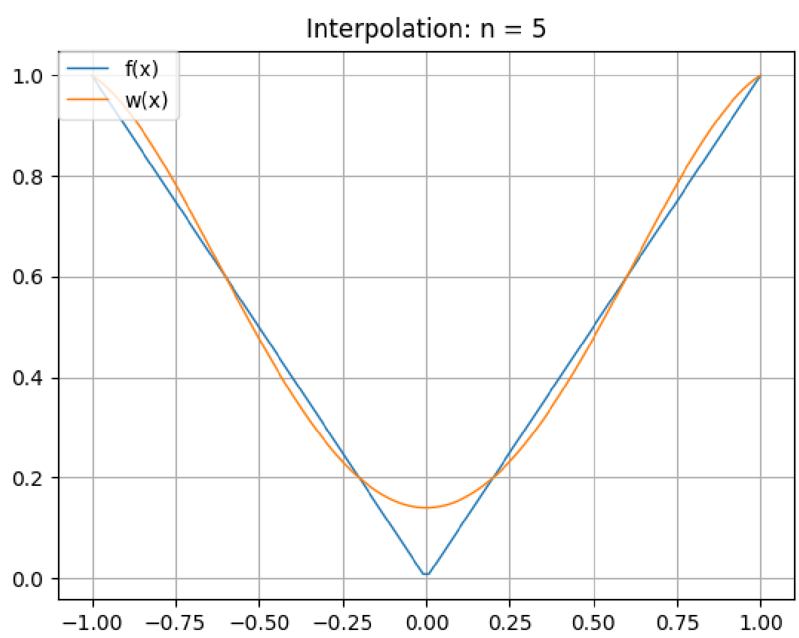
W zadaniu 6 znowu należy przetestować funkcję $rysujNnfx(f, a, b, n)$, tym razem dla następujących funkcji:

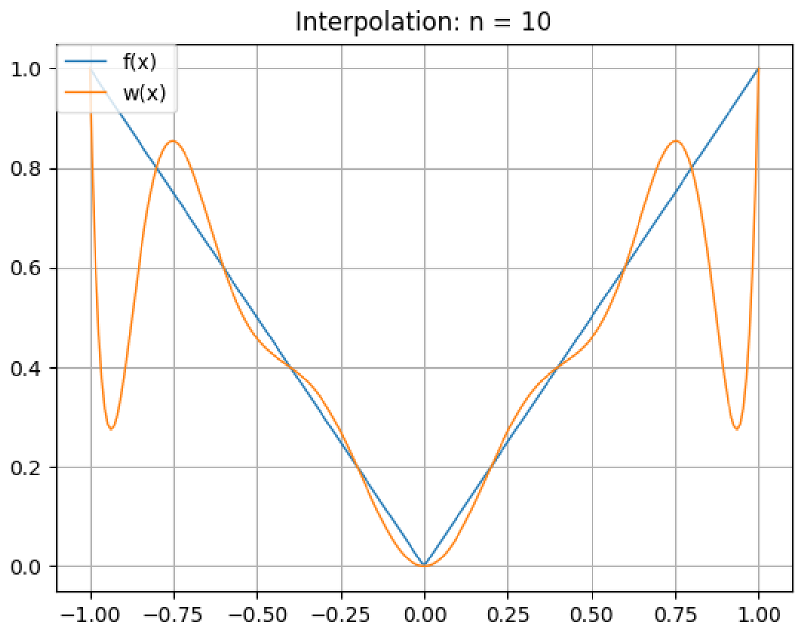
(a) $|x|$, $[-1, 1]$, $n = 5, 10, 15$,

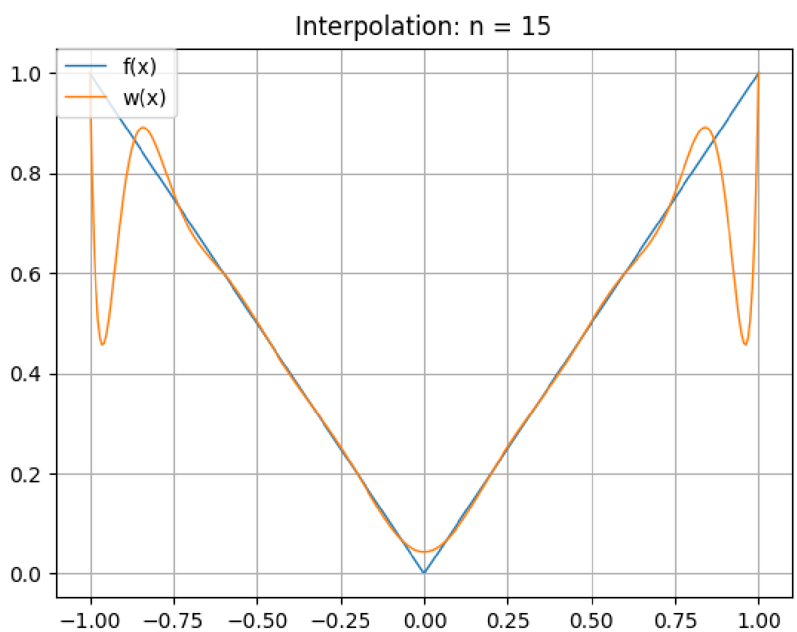
(b) $\frac{1}{1+x^2}$, $[-5, 5]$, $n = 5, 10, 15$.

6.2 Rozwiązanie

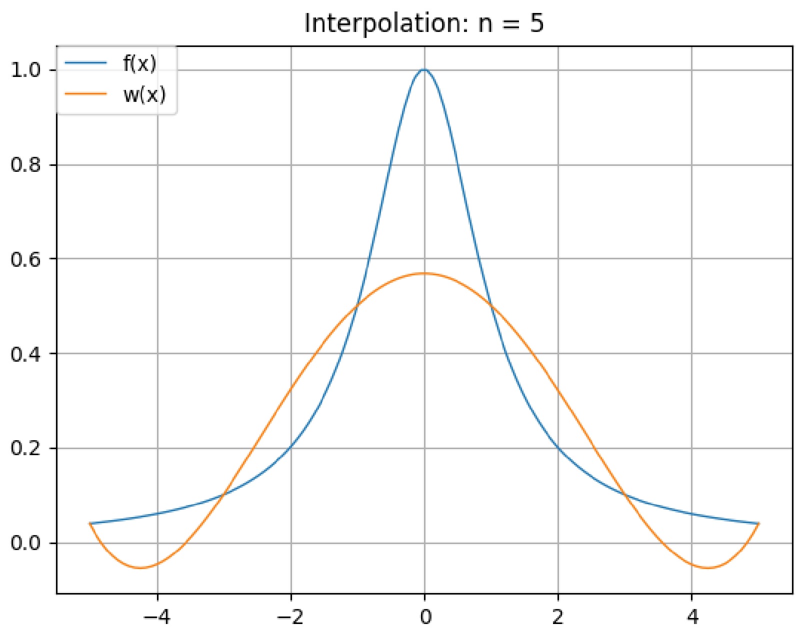
Dla podpunktu (a), funkcji $|x|$:

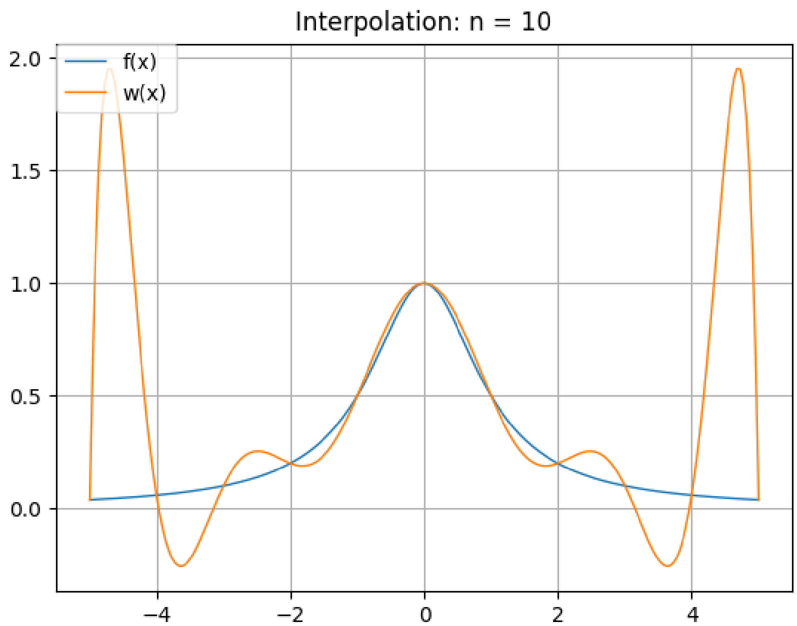


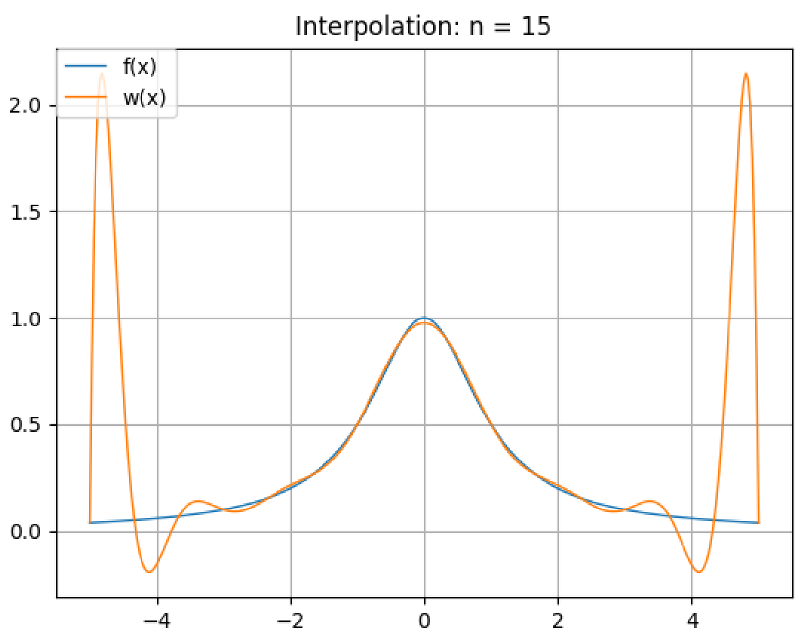

Interpolation: n = 10
f(x)
w(x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00


Interpolation: n = 15
f(x)
w(x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

Dla podpunktu (b), funkcji $\frac{1}{1+x^2}$:




Interpolation: n = 10
f(x)
w(x)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−4
−2
0
2
4


Interpolation: n = 15
f(x)
w(x)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−4
−2
0
2
4

Jak widzimy w przypadku funkcji $|x|$ oraz $\frac{1}{1+x^2}$ wykresy nie pokrywają się tak dobrze jak w przypadku zadaniua 5. W przypadku funkcji $f(x) = |x|$ zjawisko rozbieżności pomiędzy samą funkcją fa a jej wielomianem interpolacyjnym wynika z faktu, że funkcja $|x|$ nie jest różniczkowalna. Dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ mamy do czynienia ze zjawiskiem zwanym efektem Runge'go. Jest to typowe zjawisko dla przypadku, gdy węzły dla wielomianu interpolowanego są równo od siebue odległe, a sam wielomian interpolacyjny jest wysokiego stopnia, co powoduje znaczne odchylenia wartości wielomianu od wartości funkcji f na końcach przedziału $[a, b]$. Aby zapobiec temu efektowi stosuje się interpolację, w której węzły są gęściej rozmieszczone na końcach przedziału, na którym funkcja jest interpolowana.