5. SYMULACJA USTALONYCH PROCESÓW CIEPLNYCH

5.1. ZASADY OGÓLNE

Zjawiska cieplne zachodzące w stanie ustalonym opisuje równanie Fouriera w postaci:

$$div\left(k(t)grad(t)\right)+Q=0\,,$$

które może być zapisane też w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+Q=0\,, \tag{5.1}$$

gdzie:
$k_x(t)$, $k_y(t)$, $k_z(t)$ – anizotropowe współczynniki przewodzenia ciepła zależne od temperatury *t;*
Q – prędkość generowania ciepła.

Rozwiązanie równania (5.1) sprowadza się do zadania polegającego na poszukiwaniu minimum takiego funkcjonału, dla którego równanie (5.1) jest równaniem Eulera. Według rachunku wariacyjnego [5, 14, 17] funkcjonał taki będzie miał postać:

$$J=\int_V\frac{1}{2}\left(k_x(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+k_y(t)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+k_z(t)\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2-2Qt\right)dV\,. \tag{5.2}$$

Przy założeniu, że $k_x(t) = k_y(t) = k_z(t) = k(t)$ dla materiałów izotropowych funkcjonał wyraża się jako:

$$J=\int_V\left(\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right)dV\,. \tag{5.3}$$

Funkcja $t(x,y,z)$ musi spełniać określone warunki brzegowe na powierzchni rozpatrywanego obszaru. Możliwe są trzy typy warunków brzegowych:
– na powierzchni jest zadana temperatura *t*;
– na powierzchni zadany jest strumień ciepła *q* według prawa konwekcji:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\alpha_{konw}\left(t-t_\infty\right), \tag{5.4}$$

gdzie:

a_x, a_y, a_z – kosinusy kierunkowe wektora normalnego do powierzchni;

t_∞ – temperatura otoczenia;

α_{konw} – współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła;

– na powierzchni metalu zadany jest strumień cieplny *q* według prawa wymiany przez promieniowanie:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\sigma_{rad}\left(t^4-t_\infty^4\right), \tag{5.5}$$

gdzie:

σ_{rad} – współczynnik wymiany ciepła przez promieniowanie.

Przy wspólnym działaniu dwóch ostatnich warunków może być użyte prawo konwekcji:

$$k(t)\left(\frac{\partial t}{\partial x}a_x+\frac{\partial t}{\partial y}a_y+\frac{\partial t}{\partial z}a_z\right)=\alpha\left(t-t_\infty\right) \tag{5.6}$$

gdzie:

α – efektywny współczynnik wymiany ciepła, który można wyznaczyć według iteracyjnej formuły:

$$\alpha=\alpha_{konw}+\sigma_{rad}\left(t^2+t_\infty^2\right)\left(t+t_\infty\right). \tag{5.7}$$

Wyrażenie $\alpha(t_\infty-t)$ dotyczy wymiany ciepła z otoczeniem, a współczynnik α jest przyjmowany odpowiednio do istniejących warunków. Możliwa jest wymiana ciepła z gazem, powietrzem lub medium chłodzącym na powierzchniach swobodnych.

Bezpośrednie wprowadzenie warunków brzegowych do funkcjonału (5.3) nie jest możliwe. W praktyce narzuca się te warunki poprzez dodanie do funkcjonału (5.3) całki w postaci:

$$\int_S\frac{\alpha}{2}\left(t-t_\infty\right)^2dS+\int_S qtdS \quad , \tag{5.8}$$

gdzie:

S – powierzchnia, na której zadane są warunki brzegowe.

W rezultacie otrzymuje się:

$$\begin{aligned}J=&\int_V\left(\frac{k(t)}{2}\left(\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2\right)-Qt\right)dV+\\&+\int_S\frac{\alpha}{2}\left(t-t_\infty\right)^2dS+\int_S qtdS\end{aligned}. \tag{5.9}$$

Dyskretyzacja przedstawionego problemu polega na podzieleniu rozpatrywanego obszaru na elementy i przedstawieniu temperatury wewnątrz elementu, jako funkcji wartości węzłowych zgodnie z zależnością:

$$t=\sum_{i=1}^{n}N_it_i=\{N\}^T\{t\}. \tag{5.10}$$

Wprowadzając zależność (5.10) do funkcjonału (5.9) otrzymano:

$$\begin{aligned}J=&\int_V\left(\frac{k}{2}\left(\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T\{t\}\right)^2+\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\{t\}\right)^2+\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\{t\}\right)^2\right)-Q\{N\}^T\{t\}\right)dV+\\&+\int_S\frac{\alpha}{2}\left(\{N\}^T\{t\}-t_\infty\right)^2dS+\int_S q\{N\}^T\{t\}dS.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Minimalizacja funkcjonału (5.11) sprowadza się do obliczenia pochodnych cząstkowych tego funkcjonału względem wartości węzłowych temperatury $\{t\}$, co w rezultacie prowadzi do następującego układu równań:

$$\frac{\partial J}{\partial\{t\}}=\int_V\left(k\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\right)\{t\}-Q\{N\}\right)dV+$$
$$+\int_S\alpha\left(\{N\}^T\{t\}-t_\infty\right)\{N\}dS+\int_S q\{N\}dS=0 \tag{5.12}$$

Układ równań (5.12) zapisany w postaci macierzowej ma postać:

$$[H]\{t\}+\{P\}=0\,. \tag{5.13}$$

W równaniu (5.13) macierze $[H]$ i $\{P\}$ opisane są następującymi zależnościami:

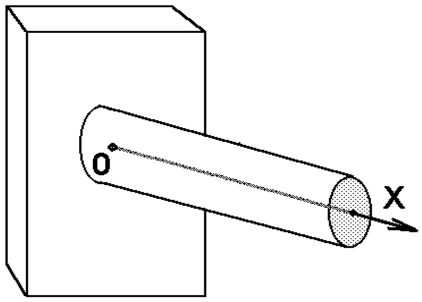
$$[H]=\int_V k(t)\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T+\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial z}\right\}^T\right)dV+$$
$$+\int_S\alpha\{N\}\{N\}^T dS, \tag{5.14}$$

$$\{P\}=-\int_S\alpha\{N\}t_\infty dS-\int_V Q\{N\}dV+\int_S q\{N\}dS\;. \tag{5.15}$$

W inny sposób minimalizacja funkcjonału (5.11) może być wykonana przez bezpośredni dobór węzłowych wartości temperatury za pomocą jednej z istniejących metod minimalizacji.

5.2. WYZNACZANIE USTALONEGO POLA TEMPERATURY W PRĘCIE

Rozpatrzmy proces ustalonego przewodnictwa ciepła w pręcie. Przypuśćmy, że wymiana ciepła będzie odbywała się tylko przez dwa końce tego pręta (rys. 5.1). Do zamocowanego końca pręta jest doprowadzony strumień ciepła q. Na wolnym końcu pręta zachodzi wymiana ciepła przez konwekcję. Współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła jest równy α, natomiast temperatura otoczenia jest równa t_∞.



Rys. 5.1. Schemat do zadania wyznaczenia pola temperatury w pręcie

Długość pręta równa jest L. Rozpatrzmy równanie różniczkowe Fouriera dla przypadku jednowymiarowego:

$$k\frac{d^2t}{dx^2}=0\,, \tag{5.16}$$

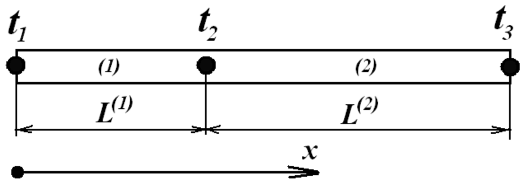
przy warunkach brzegowych:

$$k\frac{dt}{dx}+q=0 \quad \text{, gdy} \quad x=0; \qquad (5.17)$$

$$k\frac{dt}{dx}+\alpha(t-t_\infty)=0 \quad \text{, gdy} \quad x=L. \qquad (5.18)$$

Jednostkowy strumień ciepła q jest dodatni, jeżeli ciepło jest odprowadzane z pręta. Funkcjonał (5.9) dla rozpatrywanego przypadku można zapisać w sposób następujący:

$$J=\int_V \frac{1}{2}\left(k\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\right)\mathrm{dV}+\int_S \frac{\alpha}{2}(t-t_\infty)^2\mathrm{dS}+\int_S tq\ \mathrm{dS} \quad . \qquad (5.19)$$



Rys. 5.2. Schemat obliczeniowy pręta i jego podział na dwa elementy skończone

Rozpatrzmy proces minimalizacji funkcjonału (5.19). Rozdzielimy pręt na dwa elementy skończone z węzłami 1, 2, 3 (rys. 5.2), $L^{(1)}$ i $L^{(2)}$ są długościami elementów. Wówczas węzłowe wartości temperatury t_1, t_2, t_3 są niewiadomymi. Temperatura wewnątrz elementów jest zdefiniowana następująco:

$$t^{(1)}=N_1^{(1)}t_1+N_2^{(1)}t_2\,, \qquad (5.20)$$

$$t^{(2)}=N_2^{(2)}t_2+N_3^{(2)}t_3\,, \qquad (5.21)$$

$$N_1^{(1)}=\frac{x_2-x}{L^{(1)}}, \quad N_2^{(1)}=\frac{x-x_1}{L^{(1)}}, \qquad (5.22)$$

$$N_2^{(2)}=\frac{x_3-x}{L^{(2)}}, \quad N_3^{(2)}=\frac{x-x_2}{L^{(2)}}. \qquad (5.23)$$

Rozpatrzono całki funkcjonału (5.19):

$$\int_{S_1} qtdS=qt_1S_1\,, \qquad (5.24)$$

$$\int_{S_3}\frac{\alpha}{2}(t-t_\infty)^2dS=\frac{\alpha S_3}{2}\left(t_3^2-2t_3t_\infty+t_\infty^2\right), \qquad (5.25)$$

gdzie:

S_1 i S_3 – przekroje pręta w węzłach 1 i 4.

Obliczono całki objętościowe w funkcjonale (5.19). W tym celu wyznaczono pochodne temperatury względem x:

$$\frac{dt^{(1)}}{dx} = \frac{(-t_1 + t_2)}{L^{(1)}}, \tag{5.26}$$

$$\frac{dt^{(2)}}{dx} = \frac{(-t_2 + t_3)}{L^{(2)}} \tag{5.27}$$

Uwzględniając, że $dV=S^{(e)}dx$ i wykorzystując przekształcenie algebraiczne otrzymano:

$$\begin{aligned} &\int_V \frac{k}{2}\left(\frac{dt}{dX}\right)^2 dV = \\ &= \frac{k^{(1)}S^{(1)}}{2L^{(1)}}(t_2 - t_1)^2 + \frac{k^{(2)}S^{(2)}}{2L^{(2)}}(t_3 - t_2)^2. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Współczynnik przewodzenia ciepła k może być różny dla każdego elementu. Sumujemy wzory (5.24, 5.25 i 5.28) i otrzymujemy funkcjonał (5.19) w postaci funkcji węzłowych wartości temperatury:

$$\begin{aligned} J = &\frac{C^{(1)}}{2}(t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2) + \frac{C^{(2)}}{2}(t_2^2 - 2t_2t_3 + t_3^2) + \\ &qS_1t_1 + \frac{\alpha S_3}{2}(t_3^2 - 2t_3t_\infty + t_\infty^2). \end{aligned} \tag{5.29}$$

W równaniu (5.29) współczynniki C obliczono w sposób następujący:

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{S^{(1)}k^{(1)}}{L^{(1)}}, \\ C^{(2)} &= \frac{S^{(2)}k^{(2)}}{L^{(2)}}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

W związku z powyższym można rozważyć dwa warianty: minimalizacja bezpośrednia funkcji (5.29) przez dobór odpowiednich węzłowych wartości temperatury lub wykorzystanie warunku ekstremum funkcji. Ostatnia metoda wymaga różniczkowania wzoru (5.29) względem węzłowych zmiennych i przyrównania pochodnych do zera. W wyniku tej operacji otrzymamy tyle równań, ile jest niewiadomych. Założono, że $S^{(1)} = S^{(2)} = S$. Rozważono układ równań:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t_1} &= C^{(1)}t_1 - C^{(1)}t_2 + qS = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial t_2} &= -C^{(1)}t_1 + \left(C^{(1)} + C^{(2)}\right)t_2 - C^{(2)}t_3 = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial t_3} &= -C^{(2)}t_2 + \left(C^{(2)} + \alpha S\right)t_3 - \alpha S t_\infty = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{5.31}$$

Układ równań (5.31) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qS \\ 0 \\ -\alpha S t_\infty \end{Bmatrix} = 0, \tag{5.32}$$

lub:

$$[H]\{t\}+\{P\}=0\,, \qquad (5.33)$$

gdzie:

$[H]$ – macierz współczynników układu równań (5.31);

$\{P\}$ – wektor prawej części układu równań (5.31).

Należy zwrócić uwagę na fakt, że otrzymana macierz współczynników układu równań jest symetryczna i pasmowa. Rozpatrzono rozwiązanie tego samego problemu w oparciu o otrzymane ogólne rozwiązanie (5.13). Dla rozpatrywanego przypadku wzory (5.14) oraz (5.15) można zapisać następująco (dla dowolnego elementu skończonego):

$$[H]=\int_V k\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T dV+\int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS\,, \qquad (5.34)$$

$$\{P\}=-\int_S \alpha\{N\}t_\infty dS+\int_S q\{N\}dS\,. \qquad (5.35)$$

Wektory, wchodzące do równań (5.34) i (5.35) można zapisać następująco:

$$\{N\}=\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{x_j-x}{L}\\ \dfrac{x-x_i}{L}\end{Bmatrix},$$

$$\{N\}^T=\{N_i \quad N_j\}=\left\{\frac{x_j-x}{L};\quad \frac{x-x_i}{L}\right\},$$

$$\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{L}\end{Bmatrix},$$

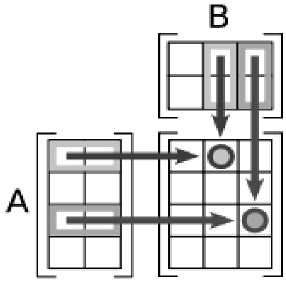
$$\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T=\left\{-\frac{1}{L}\quad \frac{1}{L}\right\}.$$

Wtedy można otrzymać macierz $[H]$ w następujący sposób:

$$[H]=\int_V k\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{L}\end{Bmatrix}\left\{-\frac{1}{L}\quad \frac{1}{L}\right\}dV+\int_S \alpha\begin{Bmatrix}\dfrac{x_j-x}{L}\\ \dfrac{x-x_i}{L}\end{Bmatrix}\left\{\frac{x_j-x}{L};\quad \frac{x-x_i}{L}\right\}dS$$

i po całkowaniu mamy:

$$[H]=k\begin{Bmatrix}-\dfrac{1}{L}\\ \dfrac{1}{L}\end{Bmatrix}\left\{-\frac{1}{L}\quad \frac{1}{L}\right\}SL+\alpha\begin{Bmatrix}N_i\\ N_j\end{Bmatrix}\{N_i \quad N_j\}S.$$



Rys. 5.4. Schemat mnożenia macierzy

Zgodnie z regułami pomnożenia macierzy A przez macierz B otrzymano macierz C, której elementy można otrzymać korzystając ze schematu, pokazanego na rys. 5.4. Wykorzystując zasady mnożenia macierzy i własności funkcji kształtu uzyskano macierz dla elementu skończonego numer 1 przedstawionego na rys. 5.2:

$$[H]^{(1)} = k\begin{bmatrix} \frac{1}{L^{(1)2}} & -\frac{1}{L^{(1)2}} \\ -\frac{1}{L^{(1)2}} & \frac{1}{L^{(1)2}} \end{bmatrix} SL^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} \\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & \frac{Sk}{L^{(1)}} \end{bmatrix},$$

oraz dla elementu skończonego numer 2 przedstawionego na rys. 5.2:

$$[H]^{(2)} = k\begin{bmatrix} \frac{1}{L^{(2)2}} & -\frac{1}{L^{(2)2}} \\ -\frac{1}{L^{(2)2}} & \frac{1}{L^{(2)2}} \end{bmatrix} SL^{(2)} + \alpha\begin{bmatrix} N_i N_i & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j N_j \end{bmatrix} S,$$

albo:

$$[H]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}} + \alpha S \end{bmatrix}.$$

Natomiast wektor obciążeń (strumieni cieplnych) wyrażony wzorem (5.35) można przekształcić do postaci:

$$\{P\} = -\int_S \alpha \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} t_\infty dS + \int_S q \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} dS .$$

Dla elementu skończonego 1 wektor $\{P\}$ jest równy:

$$\{P\}^{(1)} = q\begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} S = q\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} S = \begin{Bmatrix} qS \\ 0 \end{Bmatrix},$$

natomiast dla elementu skończonego 2:

$$\{P\}^{(2)} = -\alpha t_\infty S\begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = -\alpha t_\infty S\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\alpha t_\infty S \end{Bmatrix}.$$

W celu otrzymania układu równań dla całego obszaru należy dodawać do elementów macierzy globalnej [*H*] odpowiednie elementy macierzy lokalnej każdego elementu skończonego:

$$[H]=\sum_{e=1}^{n_e}[H]^{(e)} .$$

Przystępując do budowy macierzy sztywności dla całego obszaru należy w pierwszej kolejności zmienić indeksy elementów macierzy zgodnie z danymi o numeracji stopni swobody całego obszaru. Na przykład, dla elementu numer 2 (rys. 5.2) informacja taka jest zakodowana w macierzy połączeń:

	1	2
1	2, 2	2, 3
2	3, 2	4, 4

Suma macierzy elementów z uwzględnieniem miejsca elementów lokalnych macierzy w globalnej macierze [*H*] jest równa:

$$[H]=\begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} & 0 \\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & \frac{Sk}{L^{(1)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Sk}{L^{(2)}} & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ 0 & -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}}+\alpha S \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{Sk}{L^{(1)}} & -\frac{Sk}{L^{(1)}} & 0 \\ -\frac{Sk}{L^{(1)}} & Sk\left(\frac{1}{L^{(1)}}+\frac{1}{L^{(2)}}\right) & -\frac{Sk}{L^{(2)}} \\ 0 & -\frac{Sk}{L^{(2)}} & \frac{Sk}{L^{(2)}}+\alpha S \end{bmatrix}.$$

Natomiast dla wektora obciążeń otrzymano:

$$\{P\}=\begin{Bmatrix} qS \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha t_\infty S \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} qS \\ 0 \\ -\alpha t_\infty S \end{Bmatrix}.$$

Jak można zauważyć otrzymano ten sam wynik, który jest pokazany w równaniach (5.30)-(5.32).

5.3. ZADANIA RACHUNKOWE

***Zadanie* 5.1.** Obliczyć wartość temperatury w węzłach siatki elementów skończonych dla problemu ustalonego przepływu ciepła w pręcie (rys. 5.2).
Przyjęto następujące dane wyjściowe:
k=50 W/mK, α=10 W/m^{2}K, S=2 m^2,
L=5 m, $L^{(1)}$=2.5 m, $L^{(2)}$=2,5 m, q= -150 W/m^2, t_∞=400 K

Rozwiązanie.
Obliczenie współczynników układu równań (5.32):

$$C^{(1)} = \frac{Sk}{L^{(1)}} = \frac{2m^2 \; 50 \frac{W}{mK}}{2{,}5m} = 40\frac{W}{K} = C^{(2)} \; ;$$

$$\alpha S = 10 \frac{W}{m^2 K} \cdot 2m^2 = 20 \frac{W}{K} \; ;$$

$$qS = -150 \frac{W}{m^2} \cdot 2m^2 = -300\,W \; ;$$

$$\alpha S t_\infty = 10 \frac{W}{m^2 K} \cdot 2\, m^2 \cdot 40K = 8000\,W \; .$$

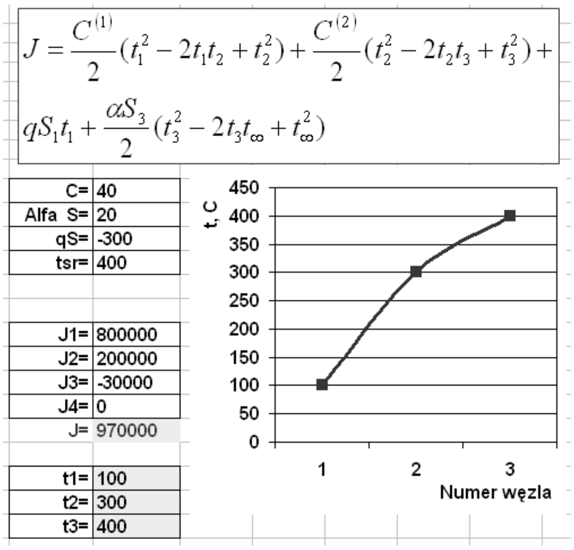
Stąd, otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 40 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & -40 \\ 0 & -40 & 60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -300 \\ 0 \\ -8000 \end{Bmatrix} = 0$$

Po jego rozwiązaniu względem *t* uzyskano {t}={430, 422.5, 415}.

***Zadanie* 5.2.** Obliczyć wartość temperatury w węzłach siatki elementów skończonych z zadania 5.1 za pomocą bezpośredniej minimalizacji funkcjonału (5.29).

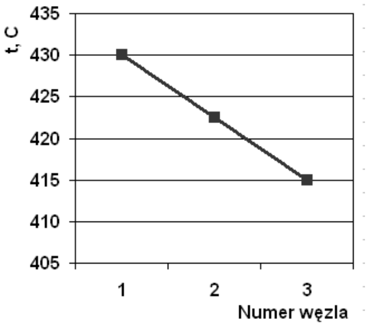
Rozwiązanie.
Zadanie można rozwiązać za pomocą programu EXCEL. Niezbędnym jest również instalacja narzędzia SOLVER. Dane początkowe i wyniki bezpośredniej minimalizacji funkcjonału (5.29) są pokazane na rys. 5.4-5.5.



Rys. 5.4. Arkusz EXCEL z zadanym początkowym rozkładem temperatury.

$$J=\frac{C^{(1)}}{2}(t_1^2-2t_1t_2+t_2^2)+\frac{C^{(2)}}{2}(t_2^2-2t_2t_3+t_3^2)+qS_1t_1+\frac{\alpha S_3}{2}(t_3^2-2t_3t_\infty+t_\infty^2)$$

C=	40
Alfa S=	20
qS=	-300
tsr=	400
J1=	1125,01
J2=	1124,98
J3=	-129000
J4=	2250,01
J=	-124500
t1=	430
t2=	422,5
t3=	415



Rys. 5.5. Arkusz EXCEL po wykonaniu minimalizacji funkcjonału.