

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 1

12 października 2022 r.

Zajęcia 18 października 2022 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L1.1.** Włącz komputer! 1 punkt Niech dana będzie funkcja $f(x) = 4044 \frac{\sqrt{x^{13} + 1} - 1}{x^{13}}$. Napisz program, który działając w trybie podwójnej precyzji (**double**) obliczy wartość $f(0.001)$. Czy wynik jest wiarygodny? **Odpowiedź uzasadnij.**
- L1.2.** Włącz komputer! 1 punkt Niech dana będzie funkcja $f(x) := 12132 \frac{x - \sin x}{x^3}$. Przy pomocy komputera oblicz w arytmetyce pojedynczej (**single**) i podwójnej precyzji (**double**) wartości $f(10^{-i})$ dla $i = 11, 12, \dots, 20$. Czy otrzymane wyniki są poprawne? **Odpowiedź uzasadnij.**
- L1.3.** Włącz komputer! 1 punkt Liczby rzeczywiste y_0, y_1, \dots są zdefiniowane rekurencyjnie w następujący sposób:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -\frac{1}{7}, \quad y_{n+2} = \frac{146}{7}y_{n+1} + 3y_n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Użyj komputera i podanej zależności do obliczenia (w pojedynczej lub podwójnej precyzji) kolejno wartości liczb y_2, y_3, \dots, y_{50} . Skomentuj otrzymane wyniki. Czy są one wiarygodne? **Odpowiedź uzasadnij.**

- L1.4.** Włącz komputer! 2 punkt Sprawdź, że całki

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x + 2022} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$(1) \quad I_n = \frac{1}{n} - 2022I_{n-1} \quad \left(n = 1, 2, \dots; I_0 = \ln \frac{2023}{2022} \right).$$

Następnie wykorzystaj związek (1) do wyznaczenia wartości całek I_1, I_2, \dots, I_{20} (w takiej właśnie kolejności) wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji używając pętli **for**. Rozważ osobno podciągi I_1, I_3, \dots, I_{19} oraz I_2, I_4, \dots, I_{20} . Czy w obu wypadkach wyniki są wiarygodne? **Odpowiedź uzasadnij.**

- L1.5.** Włącz komputer! 1 punkt Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

należy użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-6} . Następnie wykonaj odpowiedni eksperyment obliczeniowy przy pomocy komputera w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji. Co z niego wynika?

- L1.6.** 1 punkt Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź, że do obliczenia wartości $\ln 2$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ trzeba użyć ok. dwóch milionów wyrazów szeregu

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

dla $x = 2$. Wykaż, że zastosowanie prostego związku $\ln 2 = \ln[e(2/e)]$ może znacznie przyspieszyć obliczenia.

- L1.7.** 1 punkt W języku programowania **PW0++**¹ funkcja **ACTG**(x) oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\arctg(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $|x| \leq 1$. Wykorzystując funkcję **ACTG**, zaproponuj szkic **algorytmu** wyznaczającego w języku **PW0++** wartości funkcji **arcus cotangens** z dużą dokładnością także dla $|x| > 1$.

- L1.8.** **Włącz komputer!** 2 punkty Na wykładzie pokazano, że użycie wzoru

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (h - \text{małe})$$

do przybliżenia wartości $f'(x)$ nie jest dobrym pomysłem. Uzasadnij, że

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

a następnie zbadaj doświadczalnie **dla wielu** doborów f oraz x przydatność wyrażenia

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (h - \text{małe})$$

do wyznaczania przybliżonej wartości pochodnej funkcji f w punkcie x . Czy stosowanie drugiego wzoru coś zmienia? Jak to wytłumaczyć?

(-) *Paweł Woźny*

- Czyli, że zasadniczo Pan się musi na tym rozeznąć całkowicie żeby wiedzieć ile i gdzie...
- Dotychczas tak było, ale teraz mamy komputer. Może Pan pisać co tylko Pan chce to nie ma żadnego znaczenia.
- Komputer?
- Eeee, on się i tak zawsze pomyli przy dodawaniu, proszę pana. Nie było miesiąca, żeby się nie pomylił.
- Czyli, że teraz nie trzeba się tak znać na robocie?
- A teraz już nie. Teraz jest dużo łatwiej, jest proszę pana.
- Komputer...

Miś, reż. S. Bareja, 1980 (1:24:28).

P.S. Film można **obejrzeć przed ćwiczeniami**, ale nie jest to konieczne do zaliczenia listy.

¹Jak powszechnie wiadomo od wielu lat, jest to najlepszy język programowania. Dlatego rekomendujemy jego używanie nie tylko na analizie numerycznej, ale i na co dzień ;-)