

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 13

25 stycznia 2023 r.

Zajęcia 31 stycznia 2023 r.  
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L13.1.** 1 punkt Wykaż, że dla dowolnej funkcji  $f$  ciągłej w przedziale  $[a, b]$  ciąg złożonych wzorów trapezów  $\{T_n(f)\}$  jest zbieżny do wartości całki  $\int_a^b f(x) dx$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .
- L13.2.** 1 punkt O funkcji ciągłej  $f$  wiadomo, że  $\max_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| < 2023$ . Załóżmy, że dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  potrafimy z dużą dokładnością obliczać  $f(x)$ . Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki  $\int_a^b f(x) dx$  z błędem bezwzględnym nie przekraczającym  $\varepsilon$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$  ( $a < b$ ) oraz  $\varepsilon > 0$  są dane.
- L13.3.** 1 punkt Jak należy dobrać  $n$ , aby stosując złożony wzór Simpsona  $S_n$  obliczyć przybliżoną wartość całki  $\int_{-2\pi}^{\pi/3} \cos(2x - \pi/6) dx$  z błędem względnym  $\leq 10^{-8}$ ?
- L13.4.** 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2} [T_n(f) + M_n(f)] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \quad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

- L13.5.** **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenia  $T_{m,k}$  ( $0 \leq m \leq 20$ ;  $0 \leq k \leq 20 - m$ ) następujących całek:

a)  $\int_{-3}^2 (2023x^{10} - 1977x^5 - 1939) dx$ ,   b)  $\int_{-5}^5 \frac{dx}{1+x^2}$ ,   c)  $\int_{-2\pi}^{\pi/3} \cos(2x - \pi/6) dx$ .

Skomentuj wyniki.

- L13.6.** 1 punkt Rozważmy zadanie obliczania przybliżonej wartości całki  $I := \int_{-3}^8 f(x) dx$  ( $f$  – funkcja ciągła) metodą Romberga. W **ilu**, i w **których**, punktach przedziału  $[-3, 8]$  **wystarczy** wyznaczyć wartość funkcji  $f$ , aby obliczyć przybliżenie  $T_{15,0}$  całki  $I$ ?
- L13.7.** 1 punkt Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji  $f \in C[a, b]$ , jest zbieżny do całki  $\int_a^b f(x) dx$ .

- L13.8.** 1 punkt Korzystając z faktu podanego na wykładzie, tzn. **bez konieczności** rozwiązywania układu równań nieliniowych, dobierz węzły  $x_0, x_1, x_2$  oraz współczynniki  $A_0, A_1, A_2$  kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość  $\int_{-3}^3 f(x) dx = Q_2(f)$  zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia  $\leq 5$ .

- L13.9.** 2 punkty W języku `PW0++` procedura `LegendreZeros(m)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe  $m$ -tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów  $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$  oraz współczynników  $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)}$ , że dla każdego wielomianu  $w$  stopnia mniejszego od  $2n + 2$  zachodzi

$$\int_{-5}^2 w(x) dx = Q_n(w),$$

gdzie  $Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$ .

- L13.10.** Dodatkowe zadanie programistyczne (do 7 lutego; do 6 punktów)<sup>1</sup>

Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą okazać się złym wyborem, gdy stopień jest wysoki.

Należy rozważyć kwadratury interpolacyjne dla całek postaci  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  z węzłami będącymi:

- (a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju  $T_n(x)$  w przedziale  $(-1, 1)$ ,

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

- (b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju  $U_{n-1}(x)$ , które są punktami ekstremalnymi  $T_n(x)$  w przedziale  $(-1, 1)$ ,

$$(1) \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

- (c) wartościami danymi wzorem (1) wraz z  $x_0 = 1$  i  $x_n = -1$ .

Podaj jawne wzory na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla **wielu** różnego rodzaju funkcji  $f$ . Skomentuj wyniki.

#### Literatura

- [1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

(-) *Paweł Woźny*

<sup>1</sup>Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.