Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 2

19 października 2022 r.

Zajęcia 25 października 2022 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L2.1. 1 punkt Udowodnij, że dodatnia liczba rzeczywista ma skończone rozwinięcie dwójkowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $m/2^n$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi.

L2.2. 1 punkt Ustalmy liczbę $B \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

L2.3. **Włącz komputer!** 1 punkt Napisz program (np. w języku `PWO++` :-)) znajdujący wartości dziesiętne, **zapisane jako liczby mieszane**, wszystkich liczb zmiennopozycyjnych, które można przedstawić w postaci

$$x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4}e_{-5})_2 \cdot 2^{\pm c}, \qquad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, e_{-5}, c \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

gdzie $(\ldots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$? Wykonaj odpowiedni rysunek. Co z niego wynika?

L2.4. 1 punkt Przeczytaj tekst dostępny pod adresem http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/patriot.html mówiący o tym, że niefrasobliwe używanie arytmetyki zmiennopozycyjnej może prowadzić do prawdziwej tragedii (szczegóły patrz raport GAO/IMTEC-92-26). Streść, własnymi słowami, opisane tam zdarzenie i przedstaw istotę opisanego problemu.

L2.5. 1 punkt Zapoznaj się ze standardem IEEE 754[1] reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omów go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.6. 1 punkt Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;
u:=u+y*y;
d:=sqrt(u)
```

[1]Patrz np. http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość d należy do zbioru X_{fl}. Następnie zaproponuj `algorytm` wyznaczania d pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\mathrm{rd}\left(\sqrt{2}\max(|x|,|y|)\right) \in X_{\mathrm{fl}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

L2.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wytłumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku.

L2.8. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = 4044\dfrac{\sqrt{x^{13}+1}-1}{x^{13}}$. Jak już wiadomo z zadania **L1.1**, obliczanie przy pomocy komputera (tryb podwójnej precyzji) wartości $f(0.001)$ daje niewiarygodny wynik. Wytłumacz dlaczego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

L2.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dana będzie funkcja $f(x) := 12132\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. Jak wynika z zadania **L1.2**, obliczanie przy pomocy komputera (tryb pojedynczej lub podwójnej precyzji) wartości $f(10^{-i})$ dla $i = 11, 12, \ldots, 20$ daje niewiarygodne wyniki. Wytłumacz dlaczego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyników dokładniejszych. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

L2.10. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Można wykazać[2], że przy $x_1 = 2$ ciąg

$$x_{k+1} = 2^k\sqrt{2\left(1-\sqrt{1-(x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

jest zbieżny do π. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska. Przeprowadź odpowiednie **testy obliczeniowe**.

(–) Paweł Woźny

[2] Jeśli potrafisz to zrobić, przygotuj rozwiązanie przy pomocy systemu LaTeX i dostarcz je prowadzącem, a na pewno dostaniesz dodatkowe punkty.