Paweł Tkacz 332168

0

$$\begin{cases} S = X_1 + X_2 + X_3 \\ \text{zmienne } X_i \text{ są niezależne i mają rozkład } f(x) = 6x(1-x),\ x \in [0,1] \\ \text{Wyznaczyć gęstość zmiennej } S. \end{cases}$$

Dokonajmy ~~przekształcenia~~ przekształcenia $(x_1, x_2, x_3) \to (s, p_1, p_2)$ takiego, że

$$\begin{cases} S = X_1 + X_2 + X_3 \\ P_1 = X_2 \\ P_2 = X_3 \end{cases} \quad \text{wtedy} \quad \begin{cases} X_1 = S - P_1 - P_2 \\ X_2 = P_1 \\ X_3 = P_2 \end{cases}$$

Wyznaczmy Jacobian tego odwzorowania:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial p_1} & \frac{\partial x_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s} & \frac{\partial x_3}{\partial p_1} & \frac{\partial x_3}{\partial p_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Wtedy, skoro x_1, x_2 i x_3 są niezależne to zmienna (x_1, x_2, x_3) ma rozkład o gęstości $h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3)$ na obszarze $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

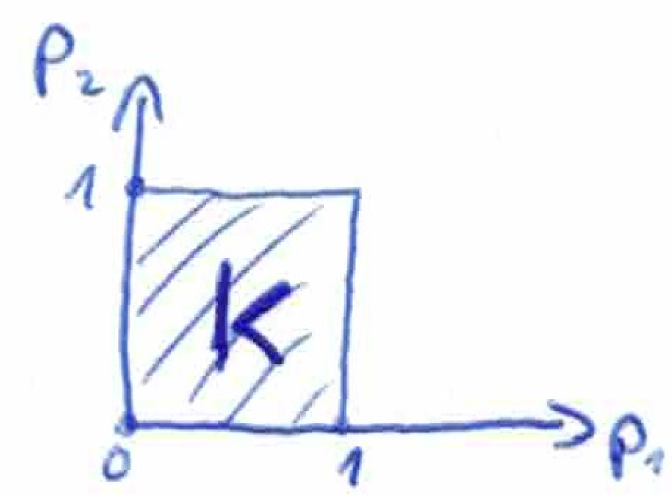
$$g(s, p_1, p_2) = h\big(x_1(s,p_1,p_2), x_2(s,p_1,p_2), x_3(s,p_1,p_2)\big) \cdot |J| = f\big(x_1(s,p_1,p_2)\big) \cdot f\big(x_2(s,p_1,p_2)\big) \cdot f\big(x_3(s,p_1,p_2)\big) =$$
$$= f(s-p_1-p_2) \cdot f(p_1) \cdot f(p_2) \cdot 1 = 216(s-p_1-p_2)p_1 p_2 (1-s+p_1+p_2)(1-p_1)(1-p_2)$$

Teraz skorzystam z tego, że rozkład zmiennej S to jeden z rozkładów ~~b~~ brzegowych trójwymiarowej zmiennej (S, P_1, P_2). Należy więc odpowiedzieć na pytanie jak dla ustalonego s zmieniają się p_1 i p_2.

$$g_1(s) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(s, p_1, p_2)\, dp_1\, dp_2$$

Skoro X_i mają rozkład określony na przedziale $[0,1]$ to można zapisać:

$$\begin{cases} 0 \leq X_1 \leq 1 \\ 0 \leq X_2 \leq 1 \\ 0 \leq X_3 \leq 1 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} 0 \leq S - P_1 - P_2 \leq 1 & a) \\ 0 \leq P_1 \leq 1 & b) \\ 0 \leq P_2 \leq 1 & c) \end{cases}$$



z warunków b) i c) wynika, że p_1 i p_2 muszą zawierać się w obszarze

z warunku a) wynika, że

$$-1 \leq P_1 + P_2 - S \leq 0$$
$$S - 1 \leq P_1 + P_2 \leq S$$
$$\boxed{S - 1 - P_1 \leq P_2 \leq S - P_1}$$

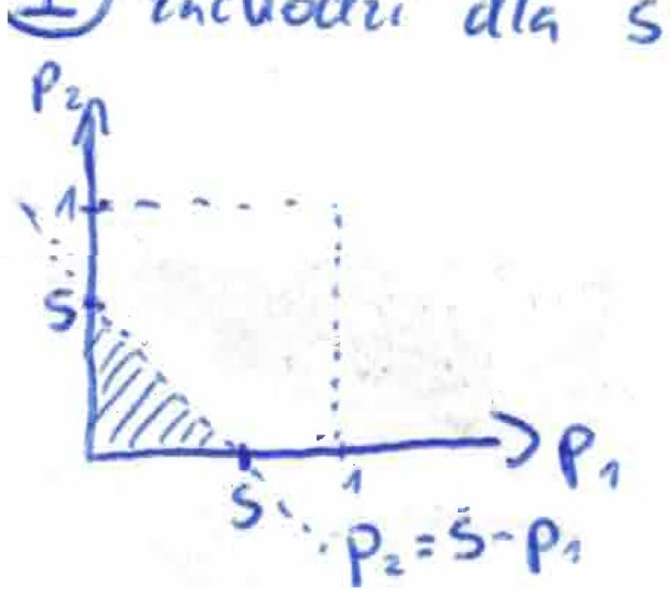
Pozostaje więc rozpatrzyć wszystkie 3 istotnie różne przypadki:

I) kiedy tylko prosta $S - P_1$ przecina obszar K

II) kiedy obie proste $S - P_1$ i $S - 1 - P_1$ przecinają obszar K

III) kiedy tylko prosta $S - 1 - P_1$ przecina obszar K

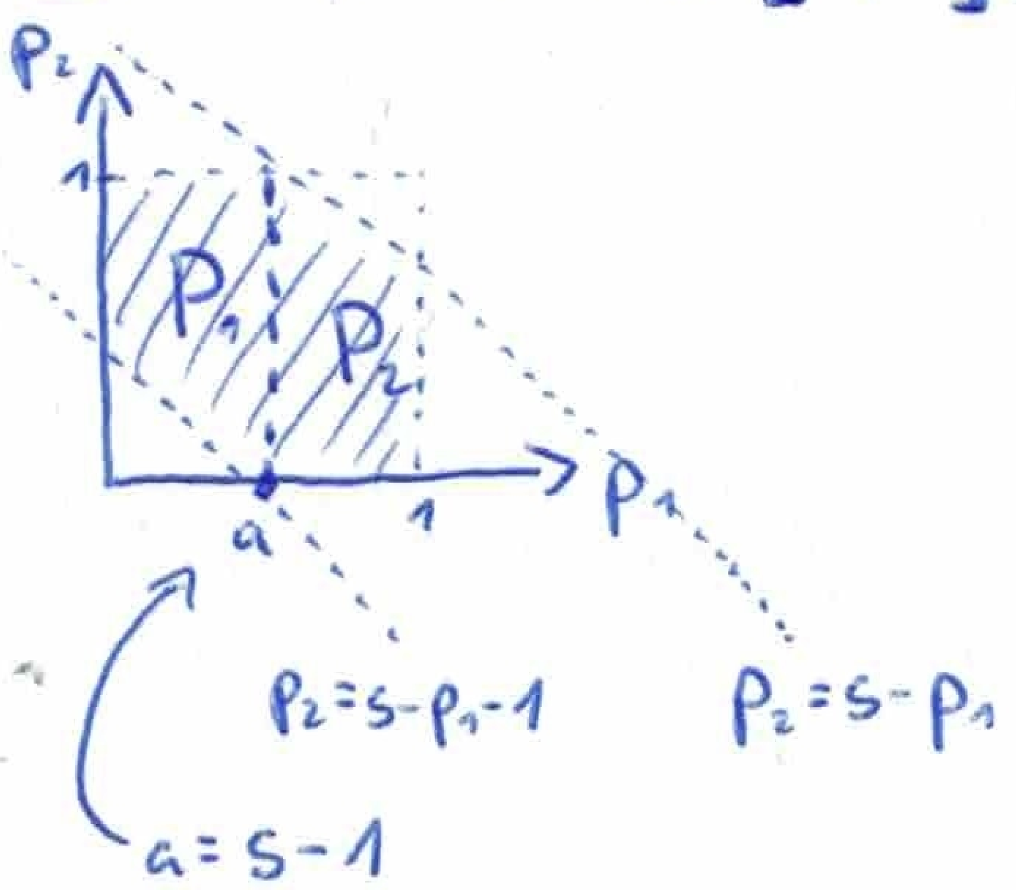
I) zachodzi dla $s \in (0,1)$. Wtedy:



$$g_1(s) = \int_0^s \int_0^{s-p_1} g(s, p_1, p_2)\, dp_2\, dp_1 = -\frac{3}{70} s^5 (s^3 - 12s^2 + 42s - 42)$$

Paweł Tkocz 332168

(II) zachodzi dla $s\in[1,2]$. Wtedy



$$g_1(s)=\overbrace{\left(\int_0^a\int_{s-p_1-1}^1 g(s,p_1,p_2)\,dp_2\,dp_1\right)}^{P_1}+\overbrace{\left(\int_a^1\int_0^{s-p_1} g(s,p_1,p_2)\,dp_2\,dp_1\right)}^{P_2}=$$

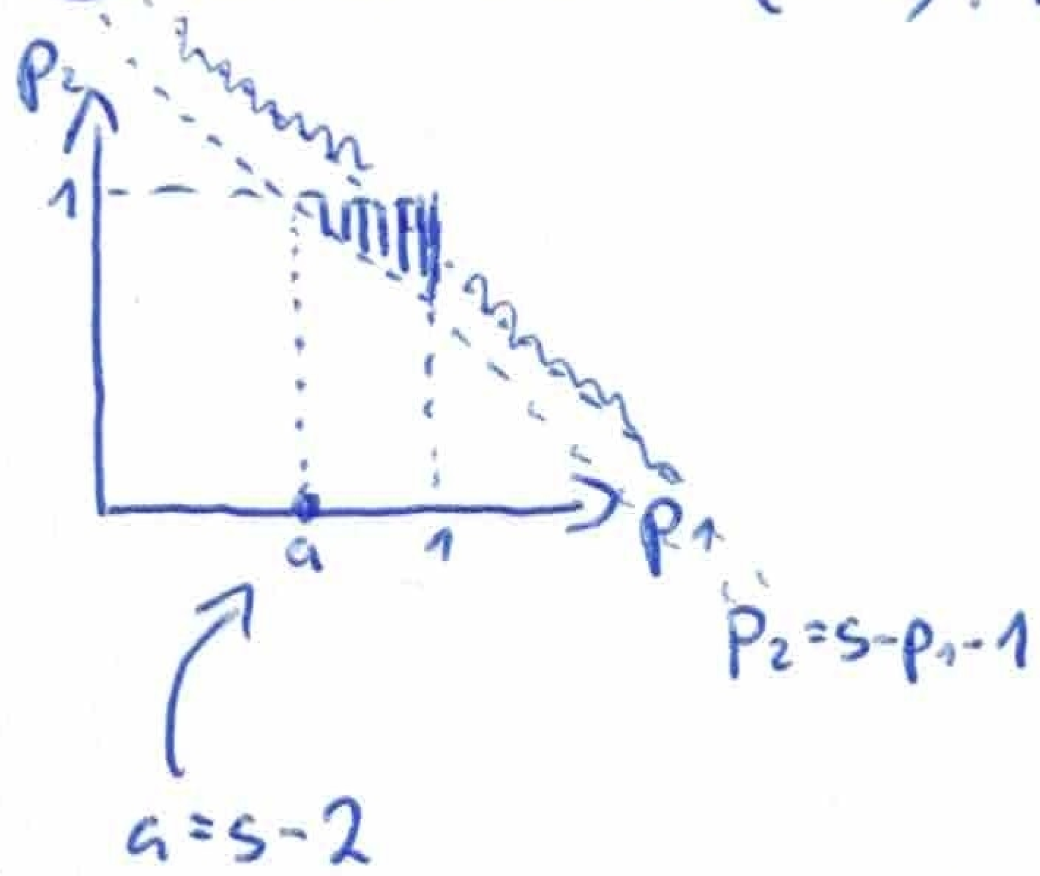
$$=\frac{3}{70}(s-1)^2\left(s^6-10s^5+21s^4+66s^3-309s^2+324s-9\right)+$$

$$\frac{3}{70}(s-2)^2\left(s^6-8s^5+6s^4+42s^3-66s^2+72s-36\right)=$$

$$=\frac{3}{35}s^8-\frac{36}{35}s^7+\frac{18}{5}s^6-27s^4+\frac{324}{5}s^3-\frac{333}{5}s^2+\frac{1161}{35}s-\frac{459}{70}=$$

$$=-\frac{3}{70}\left(-2s^8+24s^7-84s^6+630s^4-1512s^3+1554s^2-774s+153\right)$$

(III) zachodzi dla $s\in(2,3)$. Wtedy



$$g_1(s)=\int_a^1\int_{s-p_1-1}^1 g(s,p_1,p_2)\,dp_2\,dp_1=-\frac{3}{70}(s-3)^5\left(s^3+3s^2-3s-3\right)$$

Zatem ostatecznie gęstość zmiennej S wynosi:

$$g(s)=\begin{cases}-\frac{3}{70}s^5\left(s^3-12s^2+42s-42\right) & \text{, dla } s\in(0,1)\\ -\frac{3}{70}\left(-2s^8+24s^7-84s^6+630s^4-1512s^3+1554s^2-774s+153\right) & \text{, dla } s\in[1,2]\\ -\frac{3}{70}(s-3)^5\left(s^3+3s^2-3s-3\right) & \text{, dla } s\in(2,3)\\ 0 & \text{, dla } s\in(-\infty,0]\cup[3,\infty)\end{cases}$$