https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=487

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 3

26 października 2022 r.

Zajęcia 8 listopada 2022 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L3.1. Włącz komputer! | 2 punkty | Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $(x + \sqrt{x^2 + 2022^2})^{-1}$, **b)** $\log_3 x - 7$, **c)** $4\cos^2 x - 3$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te **działają w praktyce**.

L3.2. Włącz komputer! | 1 punkt | Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie `algorytm` obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. **Przeprowadź testy** dla odpowiednio dobranych wartości a, b i c pokazujące, że Twój algorytm jest lepszy od *metody szkolnej* bazującej jedynie na dobrze znanych wzorach $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

L3.3. 1 punkt | Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x.

L3.4. 2 punkty | Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli:

a) $f(x) = (x + 2022)^5$, **b)** $f(x) = \cos x$, **c)** $f(x) = (1 + x^4)^{-1}$.

L3.5. 2 punkty | Załóżmy, że dla każdego $x \in X_{fl}$ zachodzi $\mathrm{fl}(\sin(x)) = \sin(x)(1 + \varepsilon_x)$, gdzie $|\varepsilon_x| \leq 2^{-t}$, natomiast t oznacza liczbę bitów przeznaczoną na zapamiętanie mantysy. Niech dane będą liczby maszynowe y_1, y_2, y_3, y_4 oraz taka liczba maszynowa x, że $x \cdot 2^{-8}$ też jest liczbą maszynową. Sprawdź czy poniższy algorytm obiczania wartości wyrażenia $\sum_{i=1}^{4} y_i \sin(4^{-i}x)$ jest numerycznie poprawny:

```
S:=0;

  for i from 1 to 4
    do
      S:=S+y[i]*sin(4^(-i)*x)
    od;

Return(S)
```

L3.6. 2 punkty | Sprawdź czy podany niżej algorytm obliczania wartości wyrażenia $\dfrac{b + c + bd}{a(d + 1)}$ jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
S:=d+1;
S:=c/S;
S:=b+S;
S:=a/S;
S:=1/S;

Return(S)
```

L3.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Zbadaj czy podany niżej algorytm wyznaczania iloczynu liczb maszynowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (zakładamy zatem, że $\mathrm{rd}(x_k) = x_k$, $1 \le k \le n$) jest algorytmem numerycznie poprawnym.

```
I:=x[1];

  for k=2 to n
    do
      I:=I*x[k]
    end;

return(I)
```

L3.8. $\boxed{\textbf{Dodatkowe zadanie programistyczne}\text{ (do 2 grudnia; do 5 punktów)}}$ [1]

W zadaniu **L1.8** przedstawiono dwa sposoby aproksymowania pochodnej funkcji:

$$(1) \qquad f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \qquad f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \qquad (h \text{ – małe}).$$

Przybliżenia pochodnej funkcji znajdują zastosowanie m.in. w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych, w tym tzw. *równań ruchu*. Znając położenie i prędkość obiektu w chwili t (w wypadku drugiego wzoru, odpowiednio, $t - h$ oraz t), jak również działające na niego siły, z użyciem powyższych wzorów można **przybliżyć** jego położenie oraz prędkość w chwili $t + h$.

Rozpatrujemy ruch układu ciał oddziałujących wzajemnie na siebie poprzez siłę grawitacji (przyda się znane ze szkoły prawo powszechnego ciążenia Newtona: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$). Celem jest określenie, na podstawie początkowego położenia ciał i ich prędkości w chwili t, jaki będzie stan układu w kolejnych ustalonych chwilach, np. $t + h, t + 2h, t + 3h, \ldots$

(a) Wyprowadź układ równań ruchu dla **dwóch** ciał wzajemnie się przyciągających.

(b) Sprawdź na przykładzie dwóch ciał, które z powyższych przybliżeń pochodnej lepiej sprawdza się w praktyce (dla tego samego h).

Wskazówka nr 1. Bardzo dobrze będzie to widać, jeżeli układ przypomina planetę krążącą wokół słońca.

[1] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Wskazówka nr 2. Metodę wykorzystującą pierwszy z wzorów (1) można znaleźć w literaturze pod nazwą *metody Eulera* przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych.

(c) Choć dla dwóch przyciągających się ciał znane jest jawne rozwiązanie analityczne, to w wypadku trzech (tzw. **problem trzech ciał**) lub więcej obiektów — wzorów takich nie ma. Zadanie można rozwiązywać wyłącznie w sposób przybliżony stosując metody numeryczne. Korzystając z podanych możliwości aproksymowania pochodnej, znajdź przybliżone rozwiązanie problemu trzech (lub więcej) ciał dla kilku istotnie różnych układów (np. układ Słońce-Ziemia-Księżyc, planeta krążąca wokół gwiazdy podwójnej, wykorzystanie zjawiska asysty grawitacyjnej, ...).

Autor zadania: *Filip Chudy.*

(–) Paweł Woźny