# Problem kolorowania grafów planarnych (map).

## Historia Hipotezy o 4 barwach. Algorytm 6 i 5-kolorowania grafów planarnych.

Paweł Troka

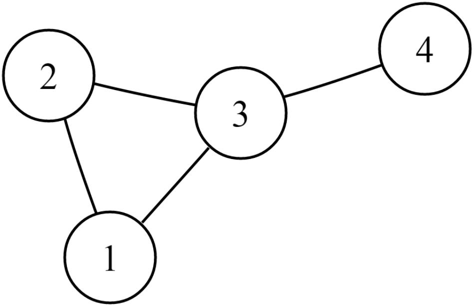
Informatyka
Katedra Algorytmów i Modelowania Systemów
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

Wybrane problemy algorytmiczne i technologiczne, 2014

# Spis treści

# Outline

Graf – podstawowy obiekt rozważań teorii grafów, struktura matematyczna służaca do przedstawiania i badania relacji miedzy obiektami. W uproszczeniu graf to zbiór wierzchołków, które moga być połaczone krawedziami w taki sposób, że każda krawedź kończy sie i zaczyna w którymś z wierzchołków.



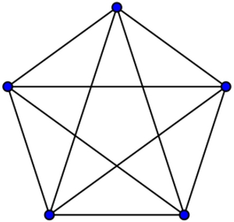
# Grafy
## Definicja (2)

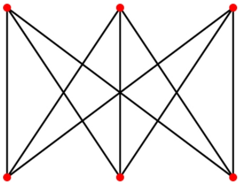
Wierzchołki grafu moga być numerowane i czasem stanowia reprezentacje jakichś obiektów, natomiast krawedzie moga wówczas obrazować relacje miedzy takimi obiektami Wierzchołki należace do krawedzi nazywane sa jej końcami. Krawedzie moga mieć wyznaczony kierunek, a graf zawierajacy takie krawedzie nazywany jest grafem skierowanym lub orgrafem. Krawedź grafu może posiadać wage, to znaczy przypisana liczbe, która określa, na przykład, odległość miedzy wierzchołkami (jeśli np. graf jest reprezentacja połaczeń miedzy miastami). W grafie skierowanym wagi moga być zależne od kierunku przechodzenia przez krawedź (np. jeśli graf reprezentuje trud poruszania sie po jakimś terenie, to droga pod górke bedzie miała przypisana wieksza wage niż z górki).

Za pierwszego teoretyka i badacza grafów uważa sie szwajcarskiego matematyka i fizyka Leonarda Eulera, który rozstrzygnał zagadnienie mostów królewieckich. Pierwsze użycie określenia „graf" przypisywane jest Jamesowi Josephowi Sylvesterowi – matematykowi angielskiego pochodzenia.

# Grafy planarne

- Graf planarny – graf, który można narysować na płaszczyźnie tak, by krzywe obrazujace krawedzie grafu nie przecinały sie ze soba. Odwzorowanie grafu planarnego na płaszczyzne o tej własności nazywane jest jego rysunkiem płaskim. Graf planarny o zbiorze wierzchołków i krawedzi zdefiniowanym poprzez rysunek płaski nazywany jest grafem płaskim.
- Kryterium Kuratowskiego - Dwa minimalne grafy, które nie sa planarne, to $K_5$ i $K_{3,3}$. Twierdzenie Kuratowskiego (1930) mówi, że graf skończony jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu homeomorficznego z grafem $K_5$ ani z grafem $K_{3,3}$.





# Grafy planarne (2)

Wzór Eulera - Dowolny rysunek płaski grafu planarnego wyznacza spójne obszary płaszczyzny zwane ścianami. Dokładnie jeden z tych obszarów, zwany ściana zewnetrzna, jest nieograniczony. Zgodnie z wzorem Eulera, jeżeli $|V| \geq 3$ oraz G jest grafem spójnym i planarnym, to

$$|V| + |S| - |E| = 2$$

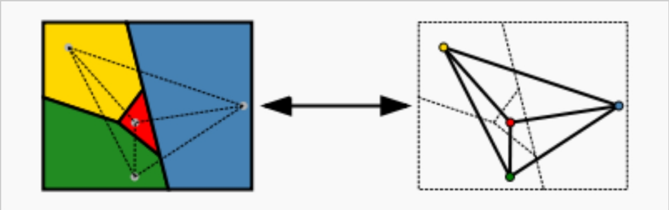
gdzie V – zbiór wierzchołków, E – zbiór krawedzi, S – zbiór ścian dowolnego rysunku płaskiego grafu G. Wnioski ze wzoru Eulera: Jeżeli G jest planarny, to

$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$$

Jeżeli G jest planarny, to wierzchołek o najmniejszym stopniu jest stopnia co najwyżej 5.

# Grafy planarne a mapy

Równoważność tych dwóch sformułowań z punktu widzenia problemu kolorowania łatwo zauważyć wyróżniajac w każdym kraju stolice i prowadzac drogi pomiedzy stolicami każdych dwóch sasiednich krajów. Przechodzimy wówczas z mapy politycznej do grafu planarnego. Analogicznie można przejść w przeciwna strone.



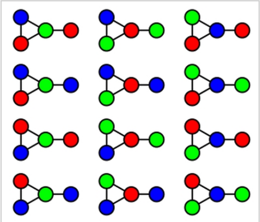
Równoważność zagadnienia dla mapy i dla grafu

# Outline

1. Problem kolorowania grafów planarnych
   - O grafach.
   - O kolorowaniu grafów.
2. Ile kolorów jest potrzebnych aby pokolorować graf planarny?
   - Co najwyżej $\Delta + 1$ ?
   - Czy wystarczy 6 kolorów?
   - Czy wystarczy 5 kolorów?
   - Czy da sie pokolorować czterema?
3. Historia hipotezy o 4 barwach.
   - Wczesne próby dowodu
   - Dowód przy pomocy komputera
   - Dopracowanie i weryfikacja

# Kolorowanie grafów

Kolorowanie grafu polega w ogólności na przypisaniu określonym elementom składowym grafu (najcześciej wierzchołkom, rzadziej krawedziom lub ścianom) wybranych kolorów według ściśle określonych reguł. Klasyczne (czyli wierzchołkowe) kolorowanie grafu jest zwiazane z przypisaniem wszystkim wierzchołkom w grafie jednej z wybranych barw w ten sposób, aby żadne dwa sasiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru. Innymi słowy, pewne pokolorowanie wierzchołkowe jest poprawne (legalne, dozwolone) wtedy, gdy końcom żadnej krawedzi nie przypisano tego samego koloru.



This graph can be 3-colored in 12 different ways.

# Kolorowanie grafów (2)

Klasyczne (wierzchołkowe) kolorowanie grafu - przyporzadkowywanie wierzchołkom grafu liczb naturalnych w taki sposób, aby końce żadnej krawedzi nie miały przypisanej tej samej liczby. Ze wzgledów historycznych oraz dla lepszego zobrazowania problemu mówi sie o kolorowaniu, przy czym różnym kolorom odpowiadaja różne liczby.
Pokolorowaniem wierzchołków grafu nazywamy jedno konkretne przyporzadkowanie kolorów wierzchołkom. Pokolorowanie jest legalne (dozwolone), gdy końcom żadnej krawedzi nie przyporzadkowano tego samego koloru.
Optymalnym pokolorowaniem danego grafu nazywamy legalne pokolorowanie zawierajace najmniejsza możliwa liczbe kolorów. Liczba chromatyczna grafu G nazywamy liczbe $\chi(G)$ równa najmniejszej możliwej liczbie kolorów potrzebnych do legalnego pokolorowania wierzchołków grafu G.

# Algorytmy kolorowania grafów

Ze wzgledu na bardzo szerokie zastosowania, kolorowanie grafów jest przedmiotem rozległych badań. Problem znalezienia optymalnego pokolorowania, a także znalezienia liczby chromatycznej jest NP-trudny. Z tego wzgledu do kolorowania dużych grafów nadaja sie jedynie algorytmy przybliżone

- Algorytm LF (largest first)
- Algorytm SL (smallest last)
- Algorytm SLF (saturated largest first)

The first results about graph coloring deal almost exclusively with planar graphs in the form of the coloring of maps. While trying to color a map of the counties of England, Francis Guthrie postulated the four color conjecture, noting that four colors were sufficient to color the map so that no regions sharing a common border received the same color. Guthrie's brother passed on the question to his mathematics teacher Augustus de Morgan at University College, who mentioned it in a letter to William Hamilton in 1852. Arthur Cayley raised the problem at a meeting of the London Mathematical Society in 1879. The same year, Alfred Kempe published a paper that claimed to establish the result, and for a decade the four color problem was considered solved. For his accomplishment Kempe was elected a Fellow of the Royal Society and later President of the London Mathematical Society.

# Outline

# Co najwyżej $\Delta + 1$ ?

Tak!

**Twierdzenie**

Dla dowolnego grafu o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta$ zachodzi oszacowanie $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Dowód - przeprowadzimy indukcje wzgledem n:

- Jeżeli n $=$ 1, to nierówność oczywiście zachodzi.
- Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego $n > 0$.
- Dowodzimy przypadek, gdy graf G ma n $+$ 1 wierzchołków.

Usuńmy z G dowolny wierzchołek v. Dla grafu G – v z założenia indukcyjnego mamy: $\chi(G - v) \leq \Delta + 1$. Wierzchołek v ma w grafie G co najwyżej $\Delta$ sasiadów, wiec jeden spośród $\Delta + 1$ kolorów jest dla v dostepny, co pozwala uzyskać pokolorowanie G za pomoca co najwyżej $\Delta + 1$ barw.

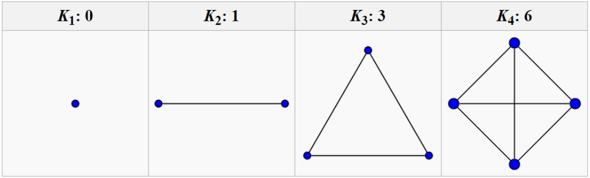
# A może mniej niż $\Delta + 1$ ?

Istnieje twierdzenie:

**Brooks, 1941**

Istnieja dwie klasy grafów, dla których $\chi(G) = \Delta + 1$: grafy pełne oraz cykle o nieparzystej liczbie wierzchołków.

Czy wiec można powiedzieć, że do pokolorowania każdego grafu planarnego wystarczy $\Delta$ kolorów?
Nie, ponieważ istnieja grafy planarne które sa grafami pełnymi.



# Outline

# Czy wystarczy 6 kolorów?

Tak!

## Twierdzenie

Każdy graf planarny jest 6-barwny

Dowód - zastosujemy indukcje wzgledem liczby wierzchołków grafu n:

- Jeżeli n = 1, to twierdzenie jest oczywiście poprawne.
- Zakładamy, że własność zachodzi dla wszystkich (n-1)-wierzchołkowych grafów planarnych.
- Niech G bedzie grafem planarnym o n wierzchołkach. Wiemy, że G posiada co najmniej jeden pak v (wierzchołek o stopniu mniejszym lub równym 5) - ze wzoru Eulera. Po usunieciu v mamy (n – 1)-wierzchołkowy graf planarny G – v, do którego stosujemy założenie indukcyjne otrzymujac jego 6- pokolorowanie. Wierzchołek v ma w G co najwyżej 5 sasiadów, wiec jeden z sześciu kolorów bedzie dla v dostepny. Stad G jest 6-barwny.

# Algorytm 6-kolorowania grafów planarnych

Given an n vertex planar graph G in adjacency list form, this algorithm determines a 6-coloring of G.
Step 1. [Establish degree lists.] For each j where 0- j - n - 1, form a doubly ¡ ¡ linked list of all vertices of G of degree j.
Step 2. [Label vertices smallest degree last.] For i = n, n - 1, n*- 1,. . . , 1 designate the first vertex of the non-vacuous j degree list of smallest j as vertex t/i. Delete vi from the j degree list. For each vertex U' that was adjacent to tli in G and remains in some degree list, say f, delete u' from the jr degree list and insert u' in the j9 - 1 degree list.
Step 3. [Color vertices.] For i = 1,2,. . . , n, assign vertex t)i the smallest color value (which must be some integer between one and six) not occuring on the vertices adjacent to t)i that have already been colored.

# Outline

# Wystarczy 5

**Heawood, 1890**

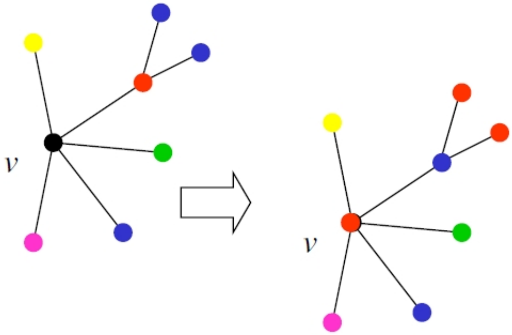
Każdy graf planarny jest 5-barwny

Dowód - podobnie jak w poprzednim twierdzeniu, stosujemy indukcje wzgledem n. Jeżeli wyznaczymy (z zał. ind.) 5-pokolorowanie $G - v$ (gdzie v jest pakiem) i wierzchołek v jest incydentny z co najwyżej 4 kolorami, to twierdzenie zachodzi. W przeciwnym wypadku rozważamy 2 sytuacje.

# Wystarczy 5 - przypadek szczególny 1

Przypadek 1:

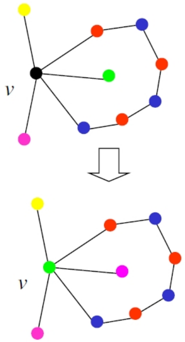
- Wierzchołki o kolorach czerwony, niebieski (sasiedzi v) należa do różnych składowych grafu indukowanego przez wierzchołki o kolorach czerwony, niebieski (w całym grafie G – v)
- Wtedy zamieniamy kolory czerwony i niebieski w składowej zawierajacej wierzchołek o kolorze czerwony (sasiedni z v)
- v otrzymuje kolor czerwony



# Wystarczy 5 - przypadek szczególny 2

Przypadek 2:

- Wierzchołki o kolorach czerwony, niebieski (sasiedzi v) wraz z v tworza cykl w G
- Wtedy w składowej spójności zawierajacej sasiada v o kolorze zielonym możemy zamienić kolory zielony i fioletowy
- v otrzymuje kolor zielony



# Algorytm 5-kolorowania grafów planarnych (1)

In 1996, Robertson, Sanders, Seymour, and Thomas described a quadratic four-coloring algorithm in their Ęfficiently four-coloring planar graphs". In the same paper they briefly describe a linear-time five-coloring algorithm, which is asymptotically optimal. The algorithm as described here operates on multigraphs and relies on the ability to have multiple copies of edges between a single pair of vertices. It is based on Wernicke's theorem, which states the following:

**Wernicke's Theorem**

Assume G is planar, nonempty, has no faces bounded by two edges, and has minimum degree 5. Then G has a vertex of degree 5 which is adjacent to a vertex of degree at most 6.

We will use a representation of the graph in which each vertex maintains a circular linked list of adjacent vertices, in clockwise planar order.

# Algorytm 5-kolorowania grafów planarnych (2)

In concept, the algorithm is recursive, reducing the graph to a smaller graph with one less vertex, five-coloring that graph, and then using that coloring to determine a coloring for the larger graph in constant time. In practice, rather than maintain an explicit graph representation for each reduced graph, we will remove vertices from the graph as we go, adding them to a stack, then color them as we pop them back off the stack at the end. We will maintain three stacks:

S4: Contains all remaining vertices with either degree at most four, or degree five and at most four distinct adjacent vertices (due to multiple edges).

S5: Contains all remaining vertices that have degree five, five distinct adjacent vertices, and at least one adjacent vertex with degree at most six.

Sd: Contains all vertices deleted from the graph so far, in the order that they were deleted.

# Algorytm 5-kolorowania grafów planarnych (3)

The algorithm works as follows:

1. In the first step, we collapse all multiple edges to single edges, so that the graph is simple. Next, we iterate over the vertices of the graph, pushing any vertex matching the conditions for S4 or S5 onto the appropriate stack.
2. Next, as long as S4 is non-empty, we pop v from S4 and delete v from the graph, pushing it onto Sd, along with a list of its neighbors at this point in time. We check each former neighbor of v, pushing it onto S4 or S5 if it now meets the necessary conditions.
3. When S4 becomes empty, we know that our graph has minimum degree five. If the graph is empty, we go to the final step 5 below. Otherwise, Wernicke's Theorem tells us that S5 is nonempty. Pop v off S5, delete it from the graph, and let v1, v2, v3, v4, v5 be the former neighbors of v in clockwise planar order, where v1 is the neighbor of degree at most 6. We check if v1 is adjacent to v3 (which we can do in constant time due to the degree of v1). There are two cases:

# Algorytm 5-kolorowania grafów planarnych (4)

1. If v1 is not adjacent to v3, we can merge these two vertices into a single vertex. To do this, we remove v from both circular adjacency lists, and then splice the two lists together into one list at the point where v was formerly found. Provided that v maintains a reference to its position in each list, this can be done in constant time. It's possible that this might create faces bounded by two edges at the two points where the lists are spliced together; we delete one edge from any such faces. After doing this, we push v3 onto Sd, along with a note that v1 is the vertex that it was merged with. Any vertices affected by the merge are added or removed from the stacks as appropriate.
2. Otherwise, v2 lies inside the face outlined by v, v1, and v3. Consequently, v2 cannot be adjacent to v4, which lies outside this face. We merge v2 and v4 in the same manner as v1 and v3 above.

# Algorytm 5-kolorowania grafów planarnych (5)

4. Go to step 2.

5. At this point S4, S5, and the graph are empty. We pop vertices off Sd. If the vertex was merged with another vertex in step 3, the vertex that it was merged with will already have been colored, and we assign it the same color. This is valid because we only merged vertices that were not adjacent in the original graph. If we had removed it in step 2 because it had at most 4 adjacent vertices, all of its neighbors at the time of its removal will have already been colored, and we can simply assign it a color that none of its neighbors is using.

# Outline

# Czy da sie pokolorować czterema?

Okazuje sie, że sie da.

**Wolfgang Haken i Kenneth Appel przy pomocy komputera, 1976**

Graf planarny daje sie zawsze pokolorować przy użyciu co najwyżej czterech kolorów.

Hipoteze o prawdziwości twierdzenia postawił już w roku 1840 August Ferdinand Möbius, a w roku 1852 (niezależnie) Francis Guthrie (1831–1899), wówczas student University College London, ale pełen dowód został przeprowadzony dopiero w 1976 roku przez Wolfganga Hakena i Kennetha Appela. Dowód wszakże był bardzo "brzydki", gdyż wymagał sprawdzenia 1936 przypadków szczególnych przy pomocy komputera.

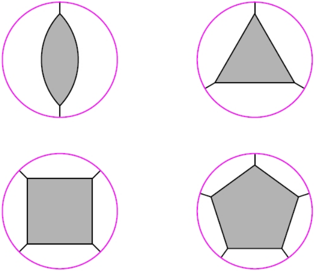
# Outline

# Poczatki

Gdy w październiku 1852 roku Francis Guthrie (były student Augustusa de Morgana) kolorował mape Anglii, zauważył, że cztery kolory wystarcza, by każde dwa sasiadujace hrabstwa różniły sie barwa. Pomyślał:
Czy cztery barwy wystarcza do pokolorowania dowolnej, nawet najbardziej skomplikowanej mapy?
Pytaniem zainteresowało sie zrazu kilku matematyków, w tym de Morgan i Sir William Rowan Hamilton, a później także Arthur Cayley, lecz pierwszy "dowód" pojawił sie dopiero w roku 1879. Przedstawił go Alfred Kempe, londyński prawnik, który studiował z Cayleyem w Cambridge, a później przez wiele lat piastował stanowisko skarbnika Royal Society. Był to zapewne najsłynniejszy fałszywy dowód w całej historii matematyki, choć kryło sie w nim także kilka dobrych pomysłów.

# Dowód Alfreda Kempe

Zakładamy, że wszystkie kraje na mapie poza jednym pokolorowaliśmy już czterema barwami, po czym pokazujemy, jak rozszerzyć to kolorowanie na ostatni, brakujacy kraj. Każda mape zawierajaca co najwyżej 4 kraje można oczywiście pokolorować czterema barwami zgodnie z regułami sasiedztwa, zatem taka metoda pozwoliłaby rozszerzyć kolorowanie na 5, 6, 7... krajów, czyli na wszystkie mapy. Otóż łatwo wywnioskować ze wzoru wielościennego Eulera, że na każdej mapie jest kraj, który ma co najwyżej pieciu sasiadów: dwukat (kraj o dwóch bokach), trójkat, kwadrat lub pieciokat. Kempe przeanalizował kolejno każdy z tych przypadków.

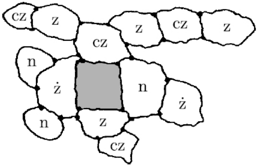


# Dowód Alfreda Kempe (2)

Jeśli mapa zawiera dwukat lub trójkat, ściagamy go do punktu. Mamy wtedy mniej krajów, potrafimy wiec pokolorować je czterema barwami. Gdy przywrócimy oryginalna figure, bedzie ona otoczona co najwyżej trzema krajami. Pozostanie zatem wolny kolor, którym możemy pokolorować ów dwukat lub trójkat zgodnie z regułami. Jeśli na mapie znajduje sie kwadrat, popatrzmy idac tropem rozumowania Kempego na dwa tylko kolory, powiedzmy, na czerwony kraj bezpośrednio nad kwadratem i zielony kraj bezpośrednio pod kwadratem i rozważmy nastepujace pytanie: czy czerwono-zielona cześć mapy nad kwadratem jest połaczona z czerwono-zielona cześcia mapy pod kwadratem?

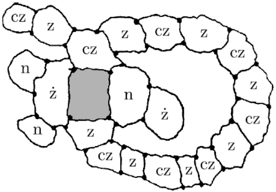
# Dowód Alfreda Kempe (3)

Jeśli NIE (rysunek 2), to nad kwadratem możemy zamienić kolory czerwony i zielony (czerwone kraje staja sie zielone i odwrotnie), w wyniku czego kraje leżace bezpośrednio nad i bezpośrednio pod kwadratem beda oba zielone - a wtedy możemy kwadrat pomalować na czerwono.




Rys. 2

# Dowód Alfreda Kempe (4)




Rys. 3

Jeśli jednak TAK (rysunek 3), to zamiana kolorów w niczym nie pomoże - kwadrat bedzie wciaż otoczony czterema barwami. W takim przypadku popatrzmy na niebieski kraj leżacy bezpośrednio na prawo i żółty kraj leżacy bezpośrednio na lewo od kwadratu. Niebieskie i żółte terytoria po prawej sa teraz oddzielone od takich samych terytoriów po lewej, gdyż rozdziela je pierścień czerwono-zielony. Możemy zatem po prawej stronie zamienić niebieski z żółtym bez szkody dla strony lewej, a nastepnie pokolorować kwadrat na niebiesko.

# Dowód Alfreda Kempe (5)

Wreszcie gdy mamy do czynienia z pieciokatem, Kempe proponuje podobne rozumowanie, wymagajace jednak tym razem dwukrotnej zamiany kolorów, w wyniku której pieciokat okaże sie otoczony tylko trzema barwami, a czwarta zostanie dla niego. Tak kończy sie dowód twierdzenia o czterech barwach.

# Obalenie dowodu Alfreda Kempe

Przez 11 lat rozumowanie Kempego było powszechnie akceptowane, m.in. przez Cayleya, wiec bomba podrzucona przez Percy'ego Heawooda w 1890 roku wywołała nie lada efekt. Heawood wskazał na fundamentalny bład w pracy Kempego, wykazujac, że nie zawsze można wykonać dwukrotna zamiane kolorów w przypadku pieciokata. Udało mu sie jednak uratować cześć rozumowania, wystarczajaca do udowodnienia, że każda mape można pokolorować piecioma barwami wynik wciaż jeszcze imponujacy.

# Spuścizna Kempe (1)

Tymczasem praca nad problemem czterech barw dawała efekty dość mierne. Choć trudno było naprawić bład Kempego, można było jednak wydobyć z jego artykułu dwa pomysły, które miały okazać sie przydatne w ostatecznym rozwiazaniu.
Pierwszy z nich to pojecie nieuniknionego zbioru konfiguracji. Jak stwierdziliśmy wyżej, każda mapa zawiera figure, która jest co najwyżej pieciokatem, zatem wymienione przy tej okazji konfiguracje (dwukat, trójkat, kwadrat, pieciokat) stanowia przykład nieuniknionego zbioru: w każdej mapie jedna z nich musi wystapić, nie można ich uniknać.

# Spuścizna Kempe (2)

Z pierwszymi trzema umiemy sobie poradzić, trudność sprawia jedynie pieciokat spróbujmy wiec zastapić go czymś innym. Można wykazać, że każda mapa niezawierajaca dwukata, trójkata ani kwadratu, zawiera nie tylko pieciokat, ale również albo dwa sasiadujace pieciokaty, albo pieciokat sasiadujacy z sześciokatem. Mamy zatem nowy nieunikniony zbiór: dwukat, trójkat, kwadrat, dwa sasiadujace pieciokaty, pieciokat sasiadujacy z sześciokatem. Widzieliśmy też, że dwukat, trójkat lub kwadrat jest konfiguracja redukowalna, co oznacza, że każde kolorowanie pozostałej cześci mapy czterema barwami można rozszerzyć tak, by objeło ono i te konfiguracje czego nie umiemy zrobić z pieciokatem.

# Spuścizna Kempe (3)

Widać zatem, że w celu udowodnienia, że cztery barwy wystarcza do pokolorowania każdej mapy, należy znaleźć nieunikniony zbiór konfiguracji redukowalnych, a wiec taki zbiór konfiguracji, że każda mapa zawiera co najmniej jedna z nich i ta, która zawiera, jest redukowalna.
Przez pierwsze dwie trzecie XX wieku poszukiwano albo nieuniknionych zbiorów konfiguracji, albo konfiguracji redukowalnych. Pierwszym, który połaczył te dwa pojecia, był niemiecki matematyk Herman Heesch. Spedził on 40 lat na poszukiwaniach właśnie nieuniknionego zbioru redukowalnych konfiguracji.

# Outline

# Dowód przy pomocy komputera

Wreszcie w 1976 roku pomysł Heescha został zrealizowany przez dwóch matematyków z Uniwersytetu stanu Illinois, Kennetha Apple'a i Wolfganga Hakena, wspomaganych w sprawach komputerowych przez studenta Johna Kocha. Po czterech latach poszukiwań z użyciem najpoteżniejszych komputerów owego czasu znaleźli oni nieunikniony zbiór 1936 redukowalnych konfiguracji; po pewnym czasie udało im sie go zmniejszyć do 1482 redukowalnych konfiguracji, a uzyskane rozwiazanie opublikowali w 1977 roku

# Filozoficzne nastepstwa dowodu przy użyciu komputera

Dowód wspomagany obliczeniami komputerowymi budził wówczas duża podejrzliwość i rodził wiele filozoficznych pytań. Czy można uznać za poprawny dowód, którego nie możemy sprawdzić recznie, nawet jeśli udział komputera sprowadzał sie do rutynowego zweryfikowania przypadków? Ale czy rzeczywiście powinniśmy pokładać wiare w reczny, ale niezmiernie długi dowód, powiedzmy, twierdzenia Feita-Thompsona o grupach rozwiazalnych, albo w dowód Wilesa dla Wielkiego Twierdzenia Fermata, gdzie możliwość ludzkiego błedu jest ogromna?

# Outline

# Dopracowanie i weryfikacja

W latach 90. XX wieku czterech matematyków: Neil Robertson, Dan Sanders, Paul Seymour i Robin Thomas, przedstawiło bardziej strukturalny dowód twierdzenia o czterech barwach. Zastosowali oni podobne komputerowo wspomagane podejście co Apple i Haken, ale objeło ono tylko 600 redukowalnych konfiguracji, które można sprawdzić na laptopie w ciagu kilku godzin. Wiekszość matematyków chetnie przyjmuje ten dowód, nawet jeśli mieli watpliwości wobec dowodu Apple'a-Hakena. Nie mamy jednak, jak dotad, żadnego dowodu, który obywałby sie całkowicie bez komputera.

# Współczeność

Since the proving of the theorem, efficient algorithms have been found for 4-coloring maps requiring only $O(n^2)$ time, where n is the number of vertices.
In 2005, Benjamin Werner and Georges Gonthier formalized a proof of the theorem inside the Coq proof assistant. This removed the need to trust the various computer programs used to verify particular cases; it is only necessary to trust the Coq kernel (Gonthier 2008).

# Podsumowanie

- Każdy graf planarny daje sie zawsze pokolorować przy użyciu co najwyżej czterech kolorów.
- Istnieja efektywne algorytmy kolorujace grafy planarne w czasie $O(n^2)$.

Wynik typu TWIERDZENIE:

**Twierdzenie o czterech barwach**

Graf planarny daje sie zawsze pokolorować przy użyciu co najwyżej czterech kolorów.

# Bibliografia I


- http://pl.wikipedia.org/wiki/Graf_planarny
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://pl.wikipedia.org/wiki/Kolorowanie_grafu
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie_o_czterech_barwach
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem
  *dostep:* 21.10.2014.

# Bibliografia II


- http://akademia.mini.pw.edu.pl/kolorowanie_map.pdf
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://mimuw.edu.pl/delta/artykuly/delta0604/4barwy.pdf
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_grafow/2011/04/21/O_dwoch_takich_co_kolorowali_mape
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://www.wiw.pl/delta/cztery_barwy.asp
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://www.uz.zgora.pl/~tbartnic/pliki/BartnickiDR.pdf
  *dostep:* 21.10.2014.
- http://kaims.pl/~deren/ag/wyklady/14_kolorowanie.pdf
  *dostep:* 21.10.2014.

# Bibliografia III


http://pl.wikipedia.org/wiki/Graf_(matematyka)
*dostep:* 22.10.2014.

http://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(mathematics)
*dostep:* 22.10.2014.