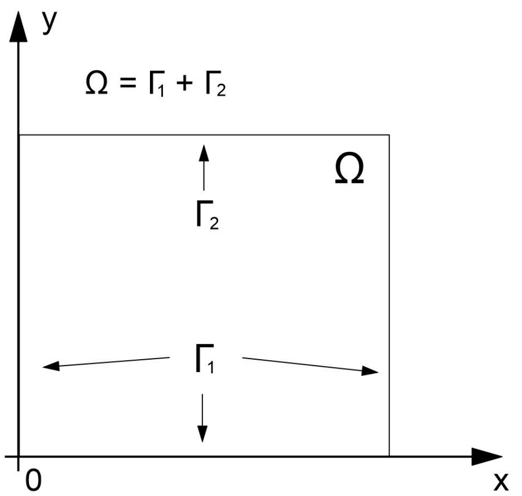
Autorzy:
Krystian Fudali 299057
Paweł Gilewicz 299058
Kierunek studiów: MiPM
Zespół 1
Data: 26.09.2022r.

PROJEKT ZALICZENIOWY
LID DRIVEN CAVITY FLOW

1. Cel projektu

Celem projektu jest opracowanie algorytmu, który efektywnie rozwiązuje nieściśliwe, zależne od czasu równania Naviera-Stokesa opisane przez równania (**1**). Trudność w ich rozwiązywaniu wynika z faktu, że prędkość i ciśnienie są sprzężone poprzez warunek zerowej dywergencji pola prędkości. W związku z tym konieczne jest opracowanie metod pozwalających tę trudność ominąć. W ramach projektu przeprowadzono implementację metody projekcyjnej **Pressure - Correction (schemat TMVdV)** w wariancie N = 2, M = 1.

2. Zadanie testowe



Rys. 2.1. Lid driven cavity flow: sformułowanie problemu.

Zadanie polega na wyznaczeniu rozwiązania zagadnienia początkowo - brzegowego w obszarze $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\ \overrightarrow{v} = -\nabla p + \nu \triangle \overrightarrow{v} + \overrightarrow{f} \\ \overrightarrow{v}\ |_{\Gamma_1} = \overrightarrow{0}, \qquad \overrightarrow{v}\ |_{\Gamma_2} = U(t,x)\overrightarrow{e}_x \\ \nabla \cdot \overrightarrow{v}\ |_{\Omega} = 0 \\ \overrightarrow{v}\ |_{t=0} = \overrightarrow{0} \end{cases} \tag{1}$$

Pole prędkości na Γ_2 to $U(t,x)\overrightarrow{e}_x$, gdzie U(t,x) jest zadana i taka, że U(0,x) = 0 oraz U(t,0) = U(t,1) = 0. Problem testowy (benchmark) ma tak dobrane dane, aby istniało rozwiązanie analityczne. Stosujemy podejście zwane "**manufactured solution**". W pierwszej kolejności zbudujmy pole prędkości spełniające warunek zerowej dywergencji i warunki brzegowe:

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}(t,x,y) = u(t,x,y)\overrightarrow{e}_x + v(t,x,y)\overrightarrow{e}_y \\ u(t,x,y) = A(t)(1-\cos 2\pi x)y(2-3y) \\ v(t,x,y) = -A(t)2\pi \sin 2\pi x \cdot y^2(1-y) \end{cases} \tag{2}$$

Istotnie:

$$v(t,x,y)\ |_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \qquad u\ |_{\Gamma_1} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{v}\ |_{\Gamma_1} = 0$$

Na brzegu Γ_2 mamy: $u(t, x, 1) = A(t)[\cos 2\pi x - 1]$. Zadajemy dowolną funkcję A(t) taką, aby A(0) = 0. Wtedy prawa strona powyższego równania to rozwiązanie szczególne U(t,x). Weźmy więc funkcję A(t) = t. Korzystając ze swobody wyboru p i $\overrightarrow{f}$ zadajemy dowolne pole ciśnienia:

$$p(t, x, y) = \nu \left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

Pozostaje wyznaczyć $\overrightarrow{f}$ tak, aby para ($\overrightarrow{v}$, p) była rozwiązaniem, czyli:

$$\overrightarrow{f} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \nabla)\, \overrightarrow{v} + \nabla p - \nu \triangle \overrightarrow{v}$$

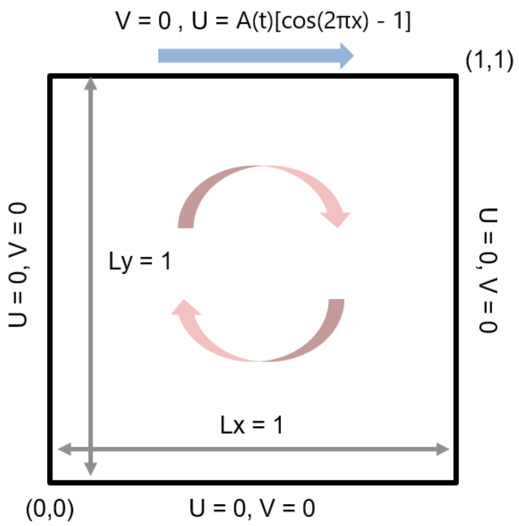
Po wykonaniu odpowiednich operacji i przekształceniach otrzymamy:

$$\begin{aligned} f_x &= (1 - \cos 2\pi x) y (2 - 3y) + 2\pi t^2 \sin 2\pi x (1 - \cos 2\pi x) y^2 (2 - 3y)^2 - \\ &- 2\pi t^2 \sin 2\pi x (1 - \cos 2\pi x) y^2 (1 - y)(2 - 6y) + 2\nu \left(x - \frac{1}{2}\right) - \\ &- \nu \left(4t\pi^2 y (2 - 3y) \cos 2\pi x - 6t (1 - \cos 2\pi x)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f_y &= -2\pi y^2 (1 - y) \sin 2\pi x - 4t^2\pi^2 (1 - \cos 2\pi x) y^3 (2 - 3y)(1 - y) \cos 2\pi x + \\ &+ 4t^2\pi^2 y^2 (1 - y)(2y - 3y^2) \sin^2 2\pi x + 2\nu \left(y - \frac{1}{2}\right) - \\ &- \nu \left(8\pi^3 t y^2 (1 - y) \sin 2\pi x - 2\pi t (2 - 6y) \sin 2\pi x\right) \end{aligned} \tag{4}$$

3. Metoda Pressure Correction (schemat TMVdV)

Celem projektu jest implementacja metody pressure - correction (Timmermansa, Mineva i Ven der Vosse) w wariancie N = 2, M = 1. Formalny rząd schematu dla pola prędkości (w normie H^1) jest równy 2, a dla ciśnienia (w normie L^2) jest równy 1.



Rys. 3.1. Metoda pressure correction: sformułowanie problemu.

Na **rys. 3.1** przedstawiono schemat rozwiązywanego przepływu. Algorytm użyty do rozwiązania sprzężenia prędkościowo-ciśnieniowego został orientacyjnie opisany w następnym paragrafie.

Uogólnienie algorytmu schematu TMVdV N-tego rzędu dla problemu Stokesa

Krok 1 - ekstrapolacja. Zdefiniujmy:

$$p_\star^{k+1} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \, p^{k+1-j}, \qquad \widetilde{p}^{k+1} = p_\star^{k+1} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\alpha_0} \, \varphi^{k+1-j} \tag{5}$$

Krok 2 - etap dyfuzji. Krok polega na znalezieniu $\widetilde{u}^{k+1}$ poprzez rozwiązanie poniższego układu równań liniowych.

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_0}{\triangle t} \, \widetilde{u}^{k+1} - \nu \triangle \widetilde{u}^{k+1} = -\nabla \widetilde{p}^{k+1} + f^{k+1} + \dfrac{1}{\triangle t} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \, \widetilde{u}^{k+1-j} \\ \widetilde{u}^{k+1} \, |_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Krok 3 - etap projekcji. Znajdujemy współczynnik korekcyjny φ^{k+1} poprzez rozwiązanie zagadnienia Neumanna dla równania Poissona.

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi^{k+1} = \dfrac{\alpha_0}{\triangle t} \, \nabla \cdot \widetilde{u}^{k+1} \\ \dfrac{\partial}{\partial n} \varphi^{k+1} \, |_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Krok 4 - poprawka ciśnienia. W algorytmie zastosowano metodę przyrostową w formie rotacyjnej:

$$p^{k+1} = p_\star^{k+1} + \varphi^{k+1} - \nu \nabla \cdot \widetilde{u}^{k+1} \tag{8}$$

Rozpatrywany przypadek wyznaczany jest w oparciu o metodę drugiego rzędu (N = 2, M = 1). W związku z tym:

$$\alpha_0 = \frac{3}{2}, \qquad \alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

$$p_\star^{k+1} = p^k, \qquad \widetilde{p}^{k+1} = p_\star^{k+1} + \frac{4}{3} \, \varphi^k - \frac{1}{3} \, \varphi^{k-1}$$

Uogólnienie algorytmu schematu TMVdV N-tego rzędu dla problemu Naviera - Stokesa

Człon nieliniowy w równaniu Naviera - Stokesa można zapisać w postaci skośnie symetrycznej:

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}[\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}]$$

Co następnie można przekształcić do związku:

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u} + \frac{1}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u} \tag{9}$$

Jest to zgodne z równaniem ciągłości (ponieważ $\nabla \cdot u = 0$, choć nie jest to prawdziwe dla rozwiązania dyskretnego) i jest potrzebne do zagwarantowania bezwarunkowej stabilności schematu krokowego. Ponadto, do linearyzacji tego członu używamy ekstrapolacji pierwszego rzędu u$_\star$ z u^{k+1}. Kompletny schemat dla problemu Naviera - Stokesa ma postać:

Krok 1

$$\widetilde{u}_\star^{k+1} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j\, \widetilde{u}^{k+1-j}, \qquad p_\star^{k+1} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j\, p^{k+1-j}, \qquad \widetilde{p}^{k+1} = p_\star^{k+1} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\alpha_0}\, \varphi^{k+1-j} \tag{10}$$

Krok 2

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_0}{\triangle t}\, \widetilde{u}^{k+1} + \left(\widetilde{u}^{k+1} \cdot \nabla\right)\, \widetilde{u}^{k+1} + \dfrac{1}{2}\left(\nabla \cdot \widetilde{u}^{k+1}\right)\, \widetilde{u}^{k+1} - \nu \triangle \widetilde{u}^{k+1} = \\ = -\nabla \widetilde{p}^{k+1} + f^{k+1} + \dfrac{1}{\triangle t} \sum_{j=1}^{N} \alpha_j\, \widetilde{u}^{k+1-j} \\ \widetilde{u}^{k+1}\, |_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Krok 3

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi^{k+1} = \dfrac{\alpha_0}{\triangle t}\, \nabla \cdot \widetilde{u}^{k+1} \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\varphi^{k+1}\, |_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Krok 4

$$p^{k+1} = p_\star^{k+1} + \varphi^{k+1} - \nu \nabla \cdot \widetilde{u}^{k+1} \tag{13}$$

Adnotacja do kroku 1:

Ekstrapolacja pól prędkości $\widetilde{u}_\star^{k+1}$ i ciśnienia $p_\star^{k+1}$ jest rzędu pierwszego (M = 1). W związku z tym możemy napisać:

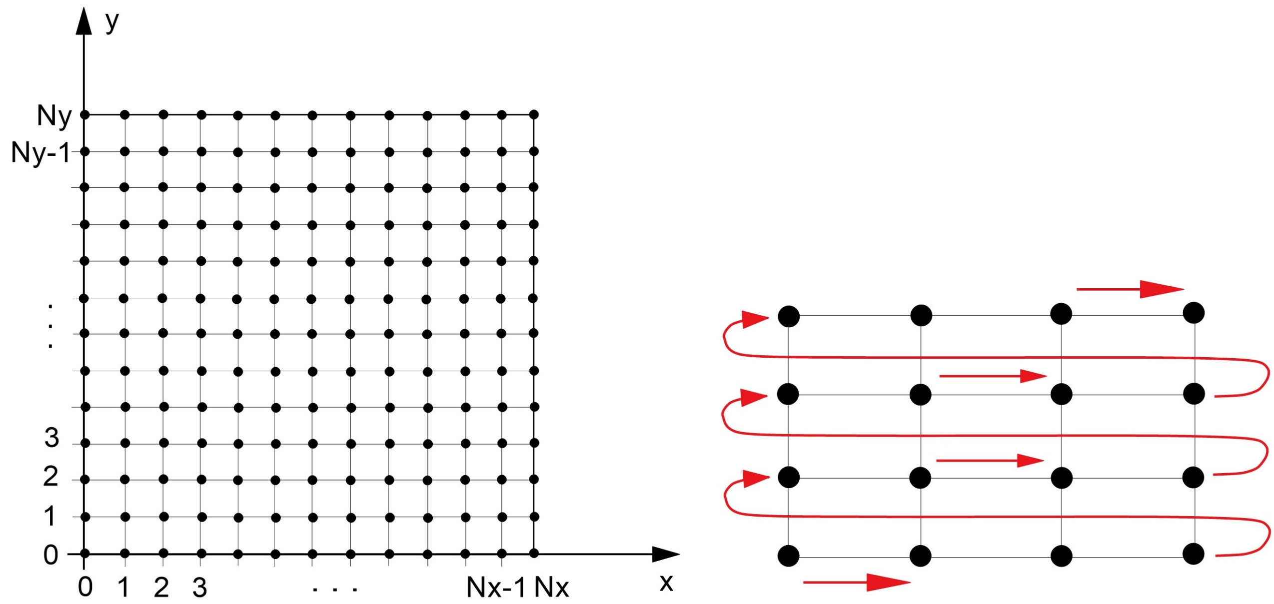
$$\widetilde{u}_\star^{k+1} = \widetilde{u}^k, \qquad p_\star^{k+1} = p^k$$

Adnotacja do kroku 2:

Postać członu nieliniowego oraz sposób jego dyskretyzacji zostanie rozwinięty w kolejnych podrozdziałach.

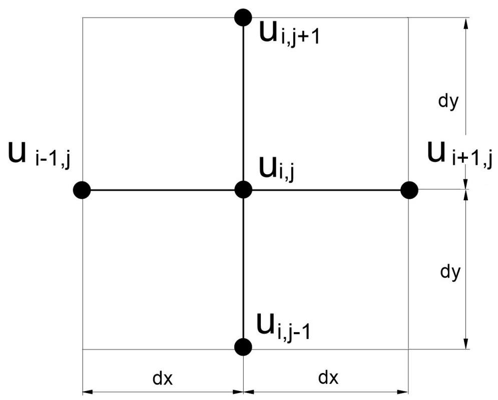
Metoda różnic skończonych

Implementację opisanego wyżej algorytmu projekcyjnego przeprowadzono w oparciu o metodę różnic skończonych. W związku z tym domenę obliczeniową stanowi siatka o oczkach kwadratowych (h = 1/N, N = 20, 50, 100).



Rys. 3.2. Sposób dyskretyzacji przestrzennej oraz kolejność układania równań.

Dyskretyzację członów występujących w kroku dyfuzyjnym (**rów. 6, rów. 11**) przeprowadzono wykorzystując różnice centralne. Przedstawienie problemu w postaci dyskretnej umożliwiają poniższe przybliżenia zapisane w oparciu o schemat przedstawiony na (**rys. 3.3**). Kolejność układania równań jest zgodna z kierunkiem przedstawionym na (**rys. 3.2**) i odpowiada kolejności ułożenia wyrazów w wektorze niewiadomych. Układ równań rozwiązywano przy pomocy metody gradientów sprzężonych.



Rys. 3.3. Rozkład oraz nomenklatura węzłów siatki.

- Dywergencja prędkości:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{v} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\triangle x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\triangle y} \tag{14}$$

- Gradient ciśnienia:

$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial x} \cong \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\triangle x} \tag{15}$$

$$\frac{\partial p_{i,j}}{\partial y} \cong \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\triangle y} \tag{16}$$

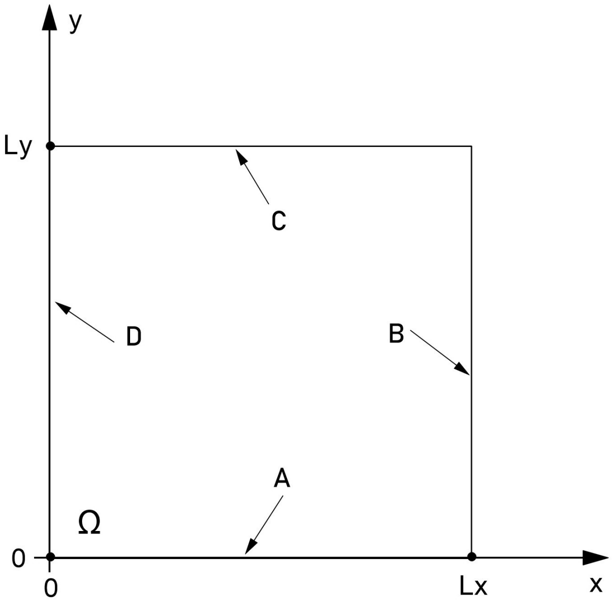
- Człony dyfuzyjne:

$$\triangle u_{i,j} \cong \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\triangle x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\triangle y^2} \tag{17}$$

$$\triangle v_{i,j} \cong \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{\triangle x^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{\triangle y^2} \tag{18}$$

Zagadnienie Neumanna dla równania Poissona

Rozważając etap projekcyjny mamy do czynienia z problemem Neumanna dla równania Poissona dla funkcji φ^{k+1}. Jest to problem wewnętrzny z zerowym warunkiem Neumanna, a więc rozwiązanie określone jest z dokładnością do stałej addytywnej. Rozpiszmy warunek Neumanna na brzegach obszaru:



Rys. 3.4. Warunek Neumanna na brzegach obszaru.

Łatwo zauważyć, że dla poszczególnych brzegów oznaczonych na **rys. 3.4** zachodzą związki:

A:

$$\frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial n}|_A = -\frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial y}|_A = h_A \tag{19}$$

B:

$$\frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial n}|_B = \frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial x}|_B = h_B \tag{20}$$

C:

$$\frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial n}|_C = \frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial y}|_C = h_C \tag{21}$$

D:

$$\frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial n}|_D = -\frac{\partial \varphi^{k+1}}{\partial x}|_D = h_D \tag{22}$$

Jeśli więc równania dla brzegów A, B, C oraz D zapiszemy w postaci dyskretnej, to otrzymamy:

$$-\frac{\partial \varphi_{i,j}^{k+1}}{\partial y}|_A = -\frac{\varphi_{i,j+1}^{k+1} - \varphi_{i,j-1}^{k+1}}{2\triangle y} = h_A \tag{23}$$

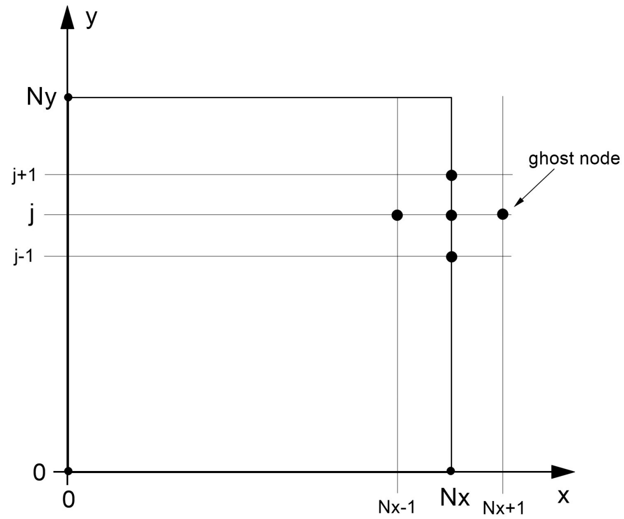
$$\frac{\partial \varphi_{i,j}^{k+1}}{\partial x}|_B = \frac{\varphi_{i+1,j}^{k+1} - \varphi_{i-1,j}^{k+1}}{2\triangle x} = h_B \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varphi_{i,j}^{k+1}}{\partial y}|_C = \frac{\varphi_{i,j+1}^{k+1} - \varphi_{i,j-1}^{k+1}}{2\triangle y} = h_C \tag{25}$$

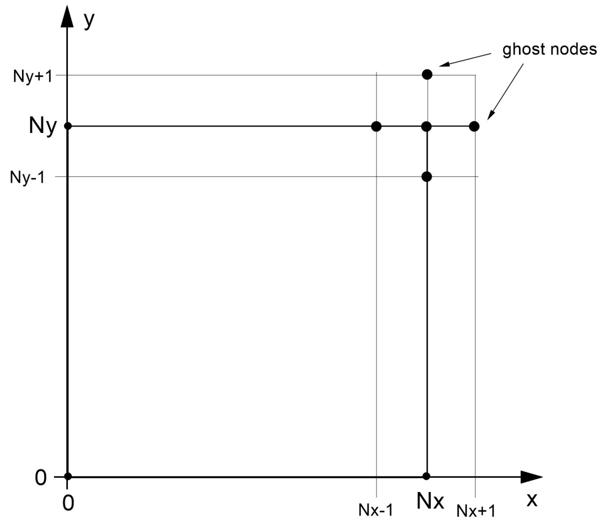
$$-\frac{\partial \varphi_{i,j}^{k+1}}{\partial x}|_D = -\frac{\varphi_{i+1,j}^{k+1} - \varphi_{i-1,j}^{k+1}}{2\triangle x} = h_D \tag{26}$$

Ghost nodes

Węzły *ghost nodes* to technika stosowana do dyskretyzacji warunków brzegowych Neumanna w metodzie różnic skończonych. Aby móc wykorzystać różnicę centralną dla pierwszej pochodnej, dodatkowy punkt, zwany *ghost node*, jest wprowadzany poza granicę dziedziny. Nieznana wartość funkcji w węźle-widmo jest dodawana jako zmienna. W węźle brzegowym wymuszany jest warunek Neumanna, a także samo równanie (dwa równania dla dwóch niewiadomych, *ghost node* i wartość funkcji brzegowej). Poniższe schematy (**rys. 4.25 - rys. 4.24**) przedstawiają sposób wprowadzania węzłów-widmo:



Rys. 3.5. Ghost nodes na brzegu obszaru.



Rys. 3.6. Ghost nodes w narożu obszaru.

W rozważanym przypadku warunek Neumanna jest zerowy, co dosłownie oznacza, że h$_A$ = h$_B$ = h$_C$ = h$_D$ = 0. Z równań **(23) - (26)** wynika więc, że wartość funkcji w węzłach widmo na brzegu obszaru (**rys. 4.25**) wyrażają się poprzez:

A: $\varphi^{k+1}_{i,-1} = \varphi^{k+1}_{i,1},$ dla i = 0,1,...,Nx (27)

B: $\varphi^{k+1}_{Nx+1,j} = \varphi^{k+1}_{Nx-1,j},$ dla j = 0,1,...,Ny (28)

C: $\varphi^{k+1}_{i,Ny+1} = \varphi^{k+1}_{i,Ny11},$ dla j = 0,1,...,Nx (29)

D: $\varphi^{k+1}_{-1,j} = \varphi^{k+1}_{1,j},$ dla j = 0,1,...,Ny (30)

Podstawiając powyższe zależności do dyskretnej formy równania Poissona dla funkcji φ^{k+1} otrzymamy na brzegach obszaru następujące równania:

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_A \approx \frac{\varphi^{k+1}_{i+1,0} - 2\varphi^{k+1}_{i,0} + \varphi^{k+1}_{i-1,0}}{\triangle x^2} + \frac{-2\varphi^{k+1}_{i,0} + 2\varphi^{k+1}_{i,1}}{\triangle y^2}, \qquad \text{dla i = 1,...,Nx-1} \tag{31}$$

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_B \approx \frac{2\varphi^{k+1}_{Nx-1,j} - 2\varphi^{k+1}_{Nx,j}}{\triangle x^2} + \frac{\varphi^{k+1}_{Nx,j+1} - 2\varphi^{k+1}_{Nx,j} + \varphi^{k+1}_{Nx,j-1}}{\triangle y^2}, \qquad \text{dla j = 1,...,Nx-1} \tag{32}$$

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_C \approx \frac{\varphi^{k+1}_{i+1,Ny} - 2\varphi^{k+1}_{i,Ny} + \varphi^{k+1}_{i-1,Ny}}{\triangle x^2} + \frac{-2\varphi^{k+1}_{i,Ny} + 2\varphi^{k+1}_{i,Ny-1}}{\triangle y^2}, \qquad \text{dla i = 1,...,Nx-1} \tag{33}$$

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_D \approx \frac{2\varphi^{k+1}_{1,j} - 2\varphi^{k+1}_{0,j}}{\triangle x^2} + \frac{\varphi^{k+1}_{0,j+1} - 2\varphi^{k+1}_{0,j} + \varphi^{k+1}_{0,j-1}}{\triangle y^2}, \qquad \text{dla j = 1,...,Nx-1} \tag{34}$$

Osobnego komentarza wymagają także równania w węzłach narożnych, gdyż ich dyskretna postać prezentuje się następująco:

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_{A\cap B}\approx\frac{2\varphi^{k+1}_{Nx-1,0}-2\varphi^{k+1}_{Nx,0}}{\triangle x^2}+\frac{2\varphi^{k+1}_{Nx,1}-2\varphi^{k+1}_{Nx,0}}{\triangle y^2} \tag{35}$$

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_{B\cap C}\approx\frac{2\varphi^{k+1}_{Nx-1,Ny}-2\varphi^{k+1}_{Nx,Ny}}{\triangle x^2}+\frac{2\varphi^{k+1}_{Nx,Ny-1}-2\varphi^{k+1}_{Nx,Ny}}{\triangle y^2} \tag{36}$$

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_{C\cap D}\approx\frac{2\varphi^{k+1}_{1,Ny}-2\varphi^{k+1}_{0,Ny}}{\triangle x^2}+\frac{2\varphi^{k+1}_{0,Ny-1}-2\varphi^{k+1}_{0,Ny}}{\triangle y^2} \tag{37}$$

$$\triangle\varphi^{k+1}\mid_{A\cap D}\approx\frac{2\varphi^{k+1}_{1,0}-2\varphi^{k+1}_{0,0}}{\triangle x^2}+\frac{2\varphi^{k+1}_{0,1}-2\varphi^{k+1}_{0,0}}{\triangle y^2} \tag{38}$$

Dla wewnętrznych węzłów domeny wartości $\varphi^{k+1}_{i,j}$ są obliczane zgodnie ze wzorem na pochodną centralną drugiego rzędu.

Dyskretyzacja członów konwekcyjnych w problemie Naviera - Stokesa

Korzystając z równania **(9)** człony konwekcyjne w problemie Naviera - Stokesa przekształcono do postaci opisanej poniższą formułą. Pole prędkości $u^{k+1}_\star$ to pole będące ekstrapolacją pola z przeszłości (z poprzednich kroków czasowych), przy czym rząd tej ekstrapolacji w implementowanej metodzie wynosi 1. Jest to schemat semi-niejawny i pozwala zlinearyzować człony nieliniowe, dzięki czemu rozwiązywany układ pozostaje dalej układem równań liniowych.

$$\left[(\boldsymbol{u}\,\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{u}\right]^{k+1}\cong(\boldsymbol{u}^{k+1}_\star\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^{k+1}+\frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{k+1}_\star\right)\boldsymbol{u}^{k+1},\qquad \boldsymbol{u}^{k+1}_\star=\sum_{j=1}^{M}\beta_j\,\boldsymbol{u}^{k+1-j}$$

Pozostaje tylko przedstawić powyższe równanie w formie dyskretnej. Po wykonaniu odpowiednich operacji mnożenia otrzymamy człony, których przestrzenną dyskretyzację z użyciem różnic centralnych przedstawiono poniżej:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_\star)_{i,j}\approx\frac{(u_\star)_{i+1,j}-(u_\star)_{i-1,j}}{2\triangle x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(v_\star)_{i,j}\approx\frac{(v_\star)_{i,j+1}-(v_\star)_{i,j-1}}{2\triangle y}$$

$$\left(u_\star\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}\approx(u_\star)_{i,j}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x}\approx(u_\star)_{i,j}\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\triangle x}$$

$$\left(v_\star\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{i,j}\approx(v_\star)_{i,j}\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y}\approx(v_\star)_{i,j}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\triangle y}$$

$$\left(u_\star\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j}\approx(u_\star)_{i,j}\frac{\partial v_{i,j}}{\partial x}\approx(u_\star)_{i,j}\frac{v_{i+1,j}-v_{i-1,j}}{2\triangle x}$$

$$\left(v_\star\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{i,j}\approx(v_\star)_{i,j}\frac{\partial v_{i,j}}{\partial y}\approx(v_\star)_{i,j}\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j-1}}{2\triangle y}$$

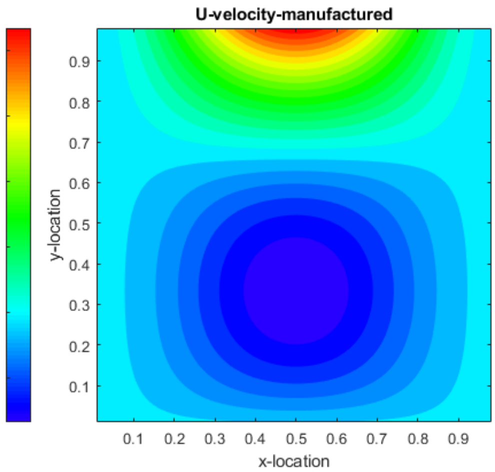
Obsługa programu

Program należy uruchomić za pomocą funkcji **main_pressure_correction.m**. W pierwszej kolejności należy zadać parametry wejściowe (według poniższego schematu). Po zakończeniu obliczeń postprocessing uruchomi się automatycznie wyświetlając: konturowy rozkład prędkości na kierunku **u** i **v**, wektory prędkości, linie prądu oraz wykres residuów w funkcji ilości iteracji. W czasie trwania obliczeń dostępny jest podgląd konturowej prędkości płynu.

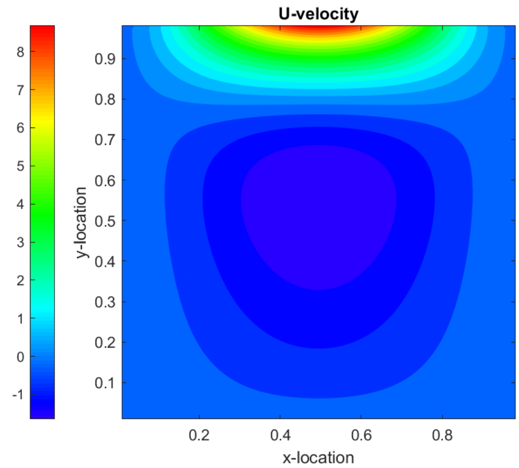
```
%==================== USER INPUT DATA =====================%
nt = 150;              % max time steps
Nx = 60; Ny = 60;      % Number of grids
dt = 1e-2;             % time step;
visRate = 1;           % density of velocity vectors on plot
N = 400;               % density of streamlines on plot
%==========================================================%
```

4. Prezentacja wyników

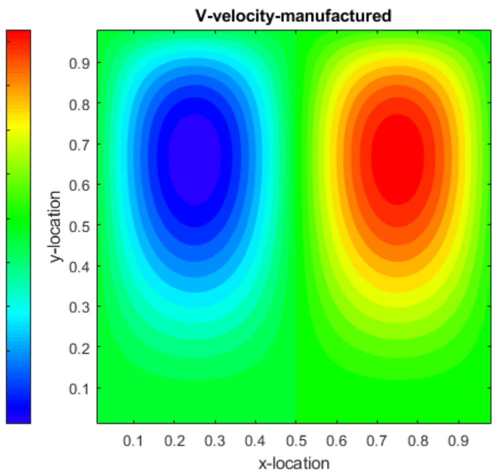
Program testowano porównując mapy konturowe prędkości z rozwiązaniem analitycznym - **manufactured solution**. Porównania dokonywano na siatce wielkości 50×50 węzłów, z krokiem czasowym równym dt = 0.1s.



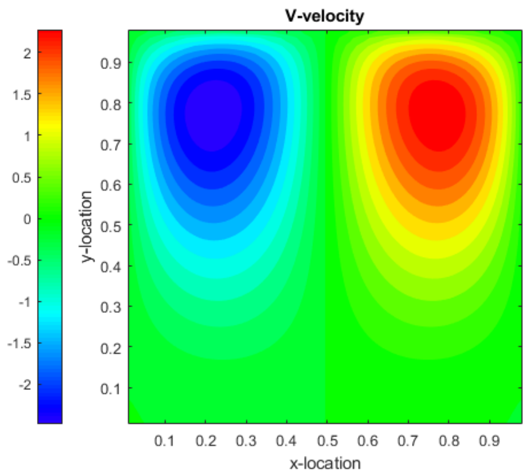
Rys. 4.1. Rozwiązanie analityczne t = 5s.



Rys. 4.2. Rozwiązanie pressure-correction t = 5s.

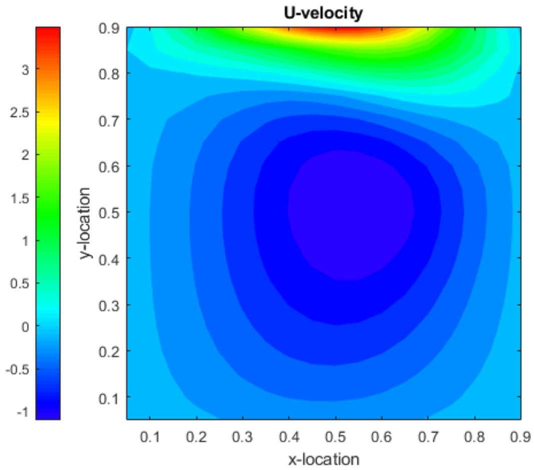


Rys. 4.3. rozwiązanie analityczne t = 5s.

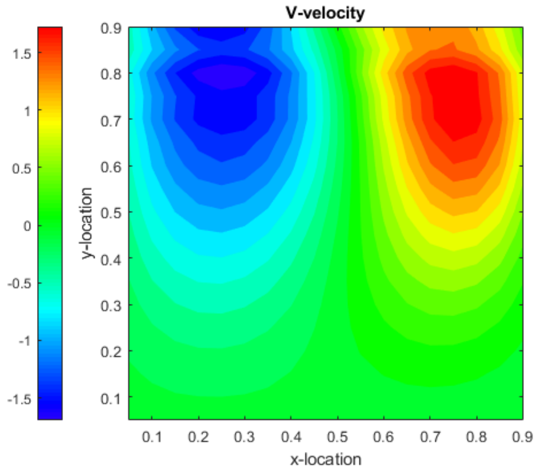


Rys. 4.4. rozwiązanie pressure-correction t = 5s.

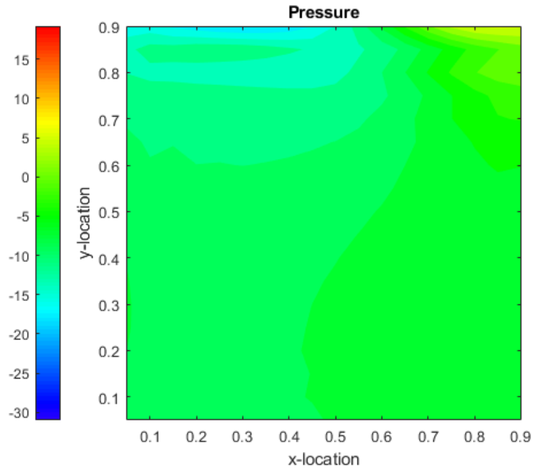
Wyniki dla siatki 20x20, dt = 0.1, czas całkowity t = 3s



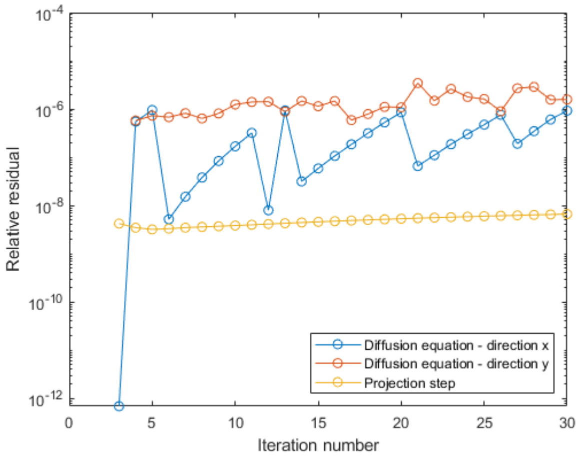
Rys. 4.5. Składowa **u** prędkości dla t = 3s, siatka 20x20.



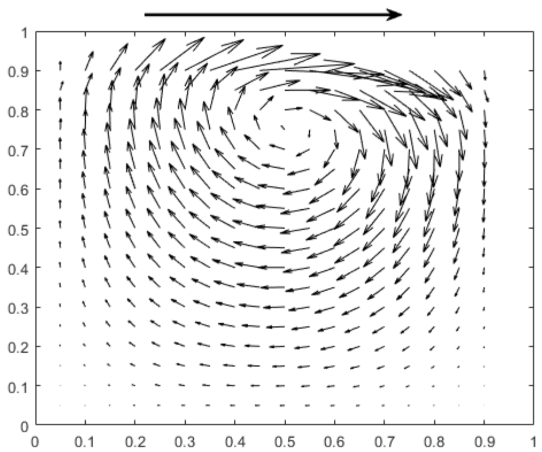
Rys. 4.6. Składowa **v** prędkości dla t = 3s, siatka 20x20.



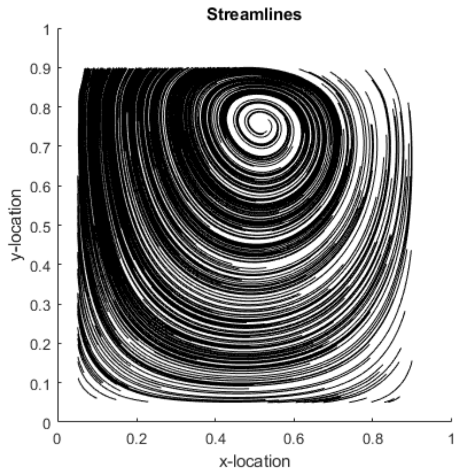
Rys. 4.7. Ciśnienie dla t = 3s, siatka 20x20.



Rys. 4.8. Wykres residuów w funkcji iteracji dla poszczególnych równań, siatka 20x20.

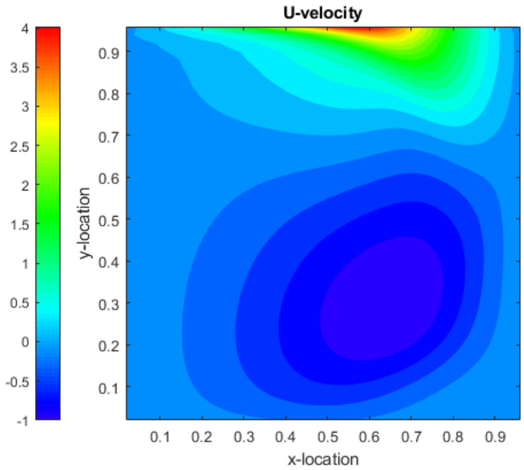


Rys. 4.9. Wektory prędkości dla t = 3s, siatka 20x20.

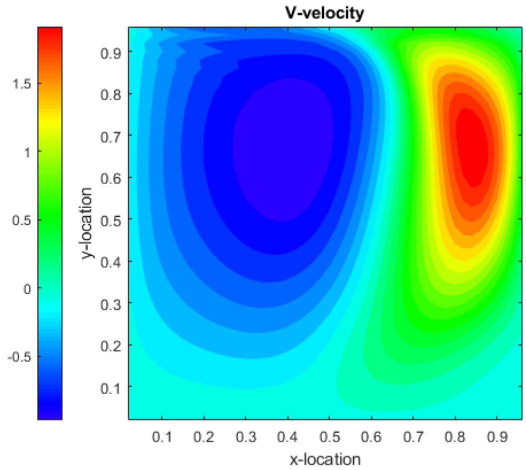


Rys. 4.10. Linie prądu dla t = 3s, siatka 20x20.

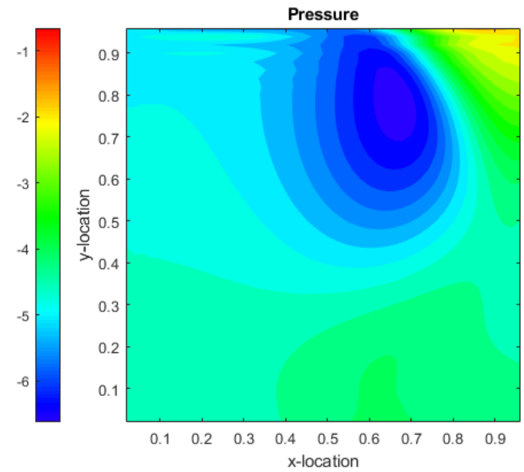
Wyniki dla siatki 50x50, dt = 0.1, czas całkowity t = 3s



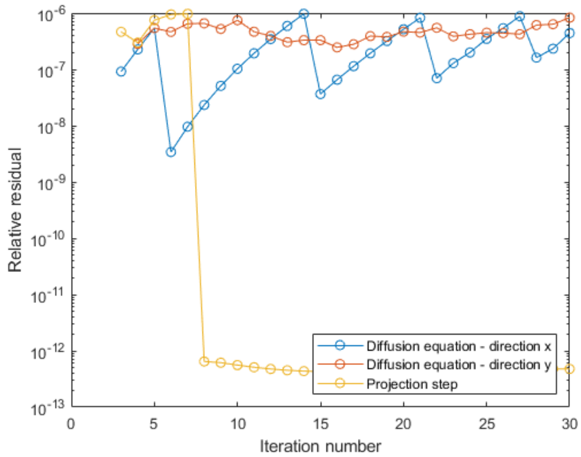
Rys. 4.11. Składowa **u** prędkości dla t = 3s, siatka 50x50.



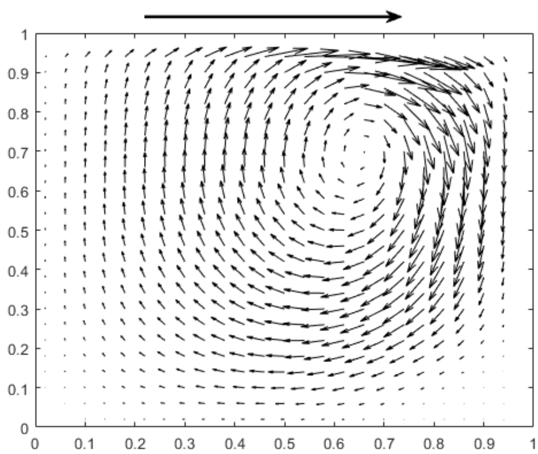
Rys. 4.12. Składowa **v** prędkości dla t = 3s, siatka 50x50.



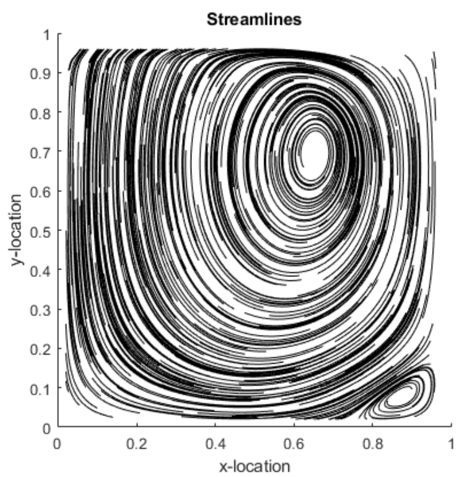
Rys. 4.13. Ciśnienie dla t = 3s, siatka 50x50.



Rys. 4.14. Wykres residuów w funkcji iteracji dla poszczególnych równań, siatka 50x50.

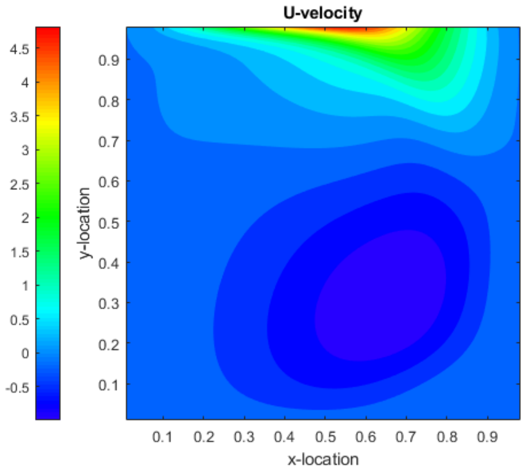


Rys. 4.15. Wektory prędkości dla t = 3s, siatka 50x50.

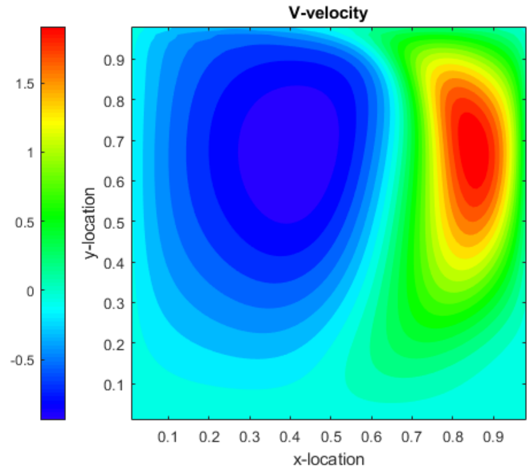


Rys. 4.16. Linie prądu dla t = 3s, siatka 50x50.

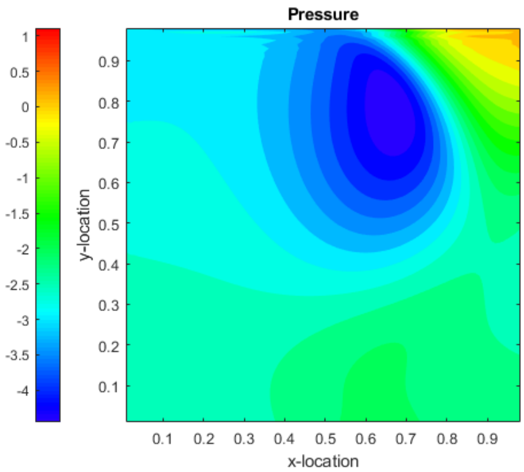
Wyniki dla siatki 100x100, dt = 0.1, czas całkowity t = 3s



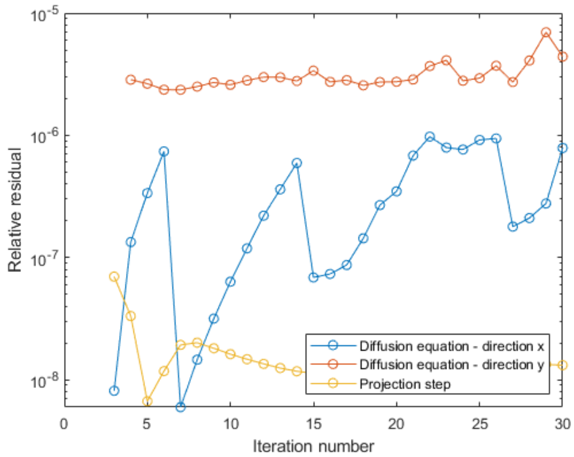
Rys. 4.17. Składowa **u** prędkości dla t = 3s, siatka 100x100.



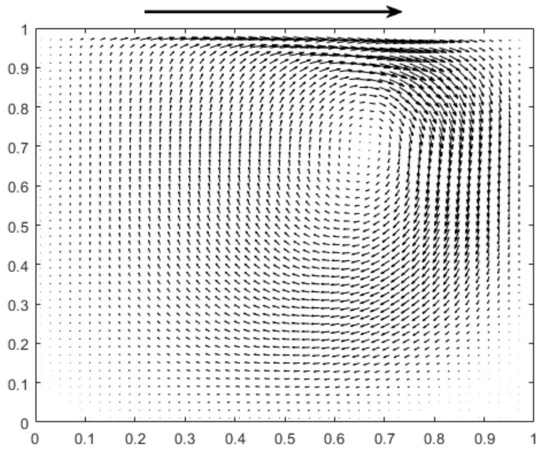
Rys. 4.18. Składowa **v** prędkości dla t = 3s, siatka 100x100.



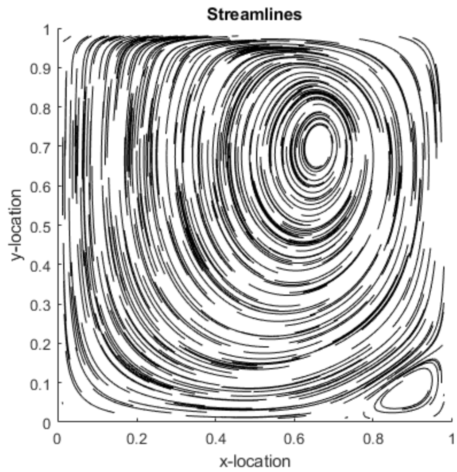
Rys. 4.19. Ciśnienie dla t = 3s, siatka 100x100.



Rys. 4.20. Wykres residuów w funkcji iteracji dla poszczególnych równań, siatka 100x100.

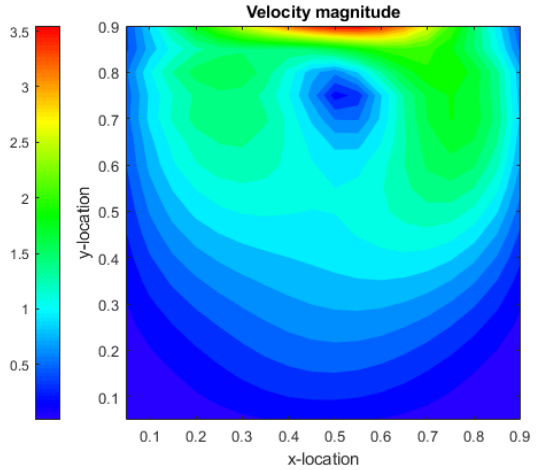


Rys. 4.21. Wektory prędkości dla t = 3s, siatka 100x100.

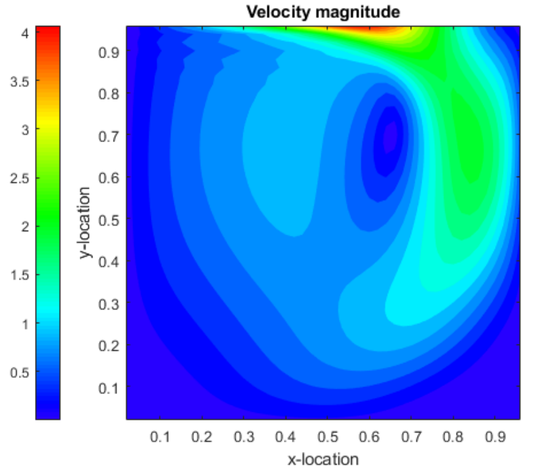


Rys. 4.22. Linie prądu dla t = 3s, siatka 100x100.

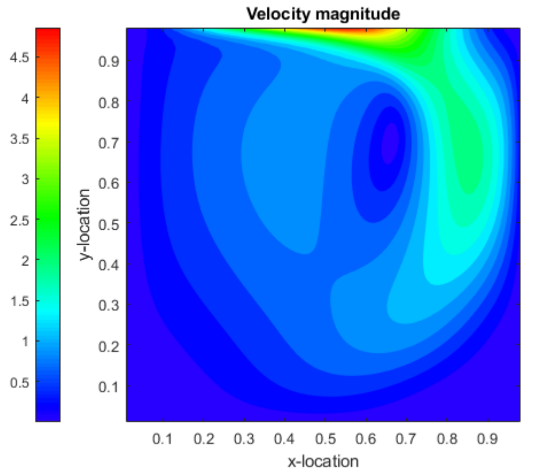
Zestawienie wyników prędkości dla zastosowanych siatek



Rys. 4.23. Rozkład prędkości dla t = 3s, siatka 20x20.



Rys. 4.24. Rozkład prędkości dla t = 3s, siatka 50x50.



Rys. 4.25. Rozkład prędkości dla t = 3s, siatka 100x100.