Cross - corellation (korelacja wzajemna)

Funkcja podobieństwa dwóch szeregów czasowych $(x_t)_t$ i $(y_t)_t$ przesuniętych o Δt względem siebie w zależności od Δt

- dla sygnałów deterministycznych ciągłych f, g → sygnały dające się w każdym miejscu dokładnie matematycznie opisać. Często okresowe

$(f \star g) := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}\, g(t+r)\, dt$ gdzie r - przesunięcie w czasie

a dla dyskretnych: $(f \star g) := \sum_{t=-\infty}^{+} \overline{f(t)}\, g(t+r)$

Współczynnik korelacji Pearsona

Niech x, y - zdarzenia losowe o dyskretnych rozkładach, x_i, y_i - wartości prób losowych dla $i \in [n]$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i \in [n]} y_i$. Współczynnikiem korelacji liniowej zmiennych x i y nazywamy

$$r_{xy} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P(x = x_i, y = y_i)\, x_i y_i\right) - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} P(x = x_i) x_i^2\right) - \bar{x}^2} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} P(y = y_i) y_i^2\right) - \bar{y}^2}}$$

wzór ogólny nie tylko dla dyskretnych

tylko dla dyskretnych

- $r_{xy} \in \langle -1, 1 \rangle$, im większy co do modułu tym większa zależność liniowa między zmiennymi
- $cov(x,y) = E(x \cdot y) - E(x)E(y)$ – kowariancja
  - jeśli nie istnieje żadna zauważalna korelacja liniowa między x i y oraz istnieją ich wartości oczekiwane, to $cov(x,y) = 0$

    Wtedy x, y są niezależne $\Rightarrow E(x \cdot y) = E(x)E(y) \Rightarrow cov(x,y) = E(x \cdot y) - E(x)E(y) = E(x)E(y) - E(x)E(y) = 0$
- $\sigma_x = \sqrt{E(x^2) - (E(x))^2}$ – odchylenie standardowe zmiennej x. Mówi, jak szeroko wartości są rozrzucone wokół średniej.

  dla zmiennej losowej dyskretnej przyjmującej n różnych wartości $x_1, \dots, x_n$ z prawdopodobieństwami $p_1, \dots, p_n$ $\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i\right) - \mu^2}$

  gdzie $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

  dla zmiennej losowej ciągłej $\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx}$ gdzie $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ a f - funkcja gęstości prawdopodobieństwa
- $E(x)$ - wartość oczekiwana (spodziewany wynik doświadczenia losowego)

  Formalnie - dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}$, dla zmiennej losowej $x: \Omega \to \mathbb{R}$ mamy dla
  - rozkładu dyskretnego $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x = x_i)$
  - ciągłego $E(x) = \int_{\Omega} y f(y)\, dy$ gdzie $f(y)$ - rozkład zmiennej x
  - mieszanego - suma powyższych

Splot (konwolucja)

lub opisywanych przez nie sygnałów deterministycznych

podobny do korelacji wzajemnej, dla dwóch funkcji f, g całkowalnych w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}$ $(f, g \in L(\mathbb{R}))$

$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-r) g(r)\, dr$

← zatem w przeciwieństwie do korelacji wzajemnej jeden z sygnałów jest "obrócony", co więcej w przeciwieństwie do korelacji wzajemnej jest to operacja symetryczna, tj $f * g = g * f$

- dla funkcji dyskretnych $f, g \in L(\mathbb{Z})$ - $(f * g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-n) g(n)$
- Dla funkcji dyskretnych $f, g \in L(\mathbb{Z}^2)$ - $(f * g)(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t_1 - n, t_2 - m) g(n, m)$

Zatem dla macierzy

$$\underset{A}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}}, \quad \underset{B}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} \quad \text{dostaniemy} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 12 & 8 & 6 \\ 8 & 14 & 25 & 16 & 12 \\ 4 & 12 & 18 & 14 & 6 \\ 7 & 8 & 16 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

"poza" uznajemy za 0

$$\begin{aligned}(A * B)(2,1) &= \sum_n \sum_m A(2-n, 1-m) B(n,m) \\ &= A(2,1)B(0,0) + A(2,0)B(0,1) \\ &\quad + A(1,1)B(1,0) + A(1,0)B(1,1) \\ &\quad + A(0,1)B(2,0) + A(0,0)B(2,1) \\ &= 8 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + \\ &\quad + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 8 + 4 + 2 = 14\end{aligned}$$

Problem brzegu - jak "podstawiać" wartości spoza sygnału:
- wstawianie 0 (jak w przykładzie)
- odbicie sygnału poza jego granicą
- odbicie sygnału na jego granicy
- powtórzenie sygnału
- powielenie brzegowych wartości
- modyfikacja maski aby nie wychodziła poza obszar

Sobel filter

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$$

operator 2D konwolucji

→ dokonujemy operacji uśrednienia pochodnej z wagami 1, 2, 1 z 3 linii równoległych do kierunku różniczkowania

dla 2D normy $G_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * A$ $\qquad G_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} * A$

równoważnie $G_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} * ([1\ 0\ -1] * A)$ $\qquad G_y = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} * ([1\ 2\ 1] * A)$

← G_x dla kąta π
G_y dla kąta $\frac{\pi}{2}$

W praktyce jest to operator dyskretnego różniczkowania aproksymujący pochodne kierunkowe intensywności obrazu w 8 kierunkach $k\frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Najczęściej używa się średniej geometrycznej tego przekształcenia dla kątów π i $\frac{\pi}{2}$.

Dla

$\frac{\pi}{4} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad$ i $\quad$ $\frac{3\pi}{4} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

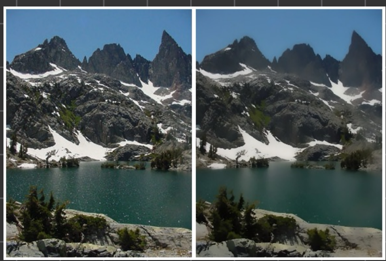
Bilateral Filter

wagi zależą od odległości euklidesowej od filtrowanego piksela oraz różnic w wartościach pikseli

$$I^f(x) = \frac{1}{W_p} \sum_{x_i \in \Omega} I(x_i) f_r(\| I(x_i) - I(x) \|) g_s(\| x_i - x \|)$$

$$W_p = \sum_{x_i \in \Omega} f_r(\| I(x_i) - I(x) \|) g_s(\| x_i - x \|)$$

gdzie
I^f – prefiltrowany obraz (macierz)
x – wektor – pozycja piksela w obrazie
I – obraz (macierz) do prefiltrowania
Ω – okolica x – "okno" wycentrowane w x, zazwyczaj kwadratowe
f_r – kernel odpowiadający za wygładzanie różnic pomiędzy różnymi intensywnościami, często po prostu funkcja Gaussa
g_s – jak f_r ale dla koordynatów
$\|..\|$ – norma euklidesowa



Wyrównywanie histogramu – Histogram Equalization

Metoda przetwarzania obrazów, polegająca na poprawieniu kontrastu analizowanego obrazu na podstawie analizy jego histogramu. Wpływa głównie na fragmenty obrazu o niskim kontraście, obrazach z widocznym podziałem na tło i pierwszy plan gdzie barwa obu jest albo jasna, albo ciemna. Powoduje wzrost szumu.

Niech $X = \{x_{ij}\} \in M_m^n(\mathbb{Z})$ – dyskretna macierz obrazu w odcieniach szarości, $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in [255] \cup \{0\}$ liczba pikseli o poziomie szarości i. Zatem $P_x(i) = \frac{n_i}{n}$ – prawdopodobieństwo wystąpienia piksela o wartości i – wartość histogramu obrazu.

Niech f_x – dystrybuanta tego rozkładu (czyli $f_x(t) = \sum_{j=0}^{t} p_x(j)$, definiujemy ją dla $t \in [255] \cup \{0\}$ z natury problemu)

Szukamy takiego przekształcenia T, że $Y = T(X)$ na taki obraz, że jego dystrybuanta podlega ciągłej linearyzacji, tj. $\exists_k \forall_t\ f_Y(t) = tk$.

Z własności dystrybuanty $y_{ij} = T(x_{ij}) = f_x(x_{ij})$

$\{x_{ij}\}$ gdzie $\forall_{i,j}\ x_{ij} \in [L-1] \cup \{0\}$

Zatem w praktyce niech f_x – dyskretna dystrybuanta obrazu o macierzy X obcięta do zakresu $\langle x_{min}, x_{max} \rangle$. Zatem histogram tego obrazu wyraża się wzorem $h(v) = f_x(v) - f_x(v-1)$ dla $v \in \{x_{min}+1, \dots, x_{max}\}$ i $h(x_{min}) = f_x(x_{min})$. Chcemy unormalizować przeciwdziedzinę h do zakresu $\{0, 1, \dots, 255\}$ – niech h' będzie unormalizowanym histogramem, wtedy w szczególności $h'(x_{min}) = 0$ i $h(x_{max}) = 255$.

Ogólniej $h(v) = \text{round}\left(\frac{f_x(v) - \min(f_x)}{(M \cdot N) - \min(f_x)} \cdot (L-1) \right)$ gdzie L – liczba odcieni szarości – zazwyczaj 256 – wartości $[255] \cup \{0\}$

M, N – takie, że $X \in M_n^m(\mathbb{Z})$

$\min(f_x)$ – minimalna niezerowa wartość dystrybuanty

Adaptacyjne Wyrównywanie Histogramu – AHE (Adaptive Histogram Equalization)

Idea jak powyżej, z tym że rozważamy na raz jedynie części obrazu

Histogram stretching

Oznaczenia jak powyżej na niebiesko, niech $X' = \{x'_{ij}\}$ – preprocesowany obraz. Mamy $x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \min(X)}{\max(X) - \min(X)} \cdot (L-1)$

gdzie $\min(X), \max(X)$ – minimalna i maksymalna wartość piksela z X (tj. $\min(X) = v$ gdzie $f_x(v) > 0 \wedge f_x(v-1) = 0$)

Czasem zamiast $\min(X)$ i $\max(X)$ używa się parametryzowalnych percentyli p_0 i p_1 – wtedy $x'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{p_0}}{x_{p_1} - x_{p_0}} (L-1)$

gdzie x_{p_0} – wartość piksela taka, że p_0 % pikseli jest mniejsza od niego.

Metoda Olsu

Metoda zamiany obrazu w L odcieniach szarości na obraz binarny – wszystkie piksele o wartości $\leq k$ ustawiamy na biało, $>$ na czarne, gdzie $\sigma^2(k) = \max_{0 \le n < L} \sigma^2(n)$ gdzie $\sigma^2(n) = w_0 w_1 (\mu_1 - \mu_0)^2$

$w_0 = \sum_{j=1}^{i} P_j \qquad \mu_0 = \sum_{j=1}^{i} \frac{j P_j}{w_0} \qquad P_j = \frac{n_j}{N}$

$w_1 = \sum_{j=i+1}^{L} P_j \qquad \mu_1 = \sum_{j=i+1}^{L} \frac{j P_j}{w_1}$

N – łączna liczba pikseli

$n_1, \dots, n_L$ – liczebności poszczególnych kolorów pikseli

Image morphology – poniżej dla obrazów binarnych

- erosion – dla podstawowego kernela 3×3 – $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $X = \{x_{ij}\} \subset M(\{0,1\})_m^n$, analogicznie Y – macierz przekształconego X.

  ↳ usuwa zakłócenia, rozłącza obiekty, odchudza je

  $A \in M(\{0,1\})_b^a$ gdzie a, b – nieparzyste

  Mamy $y_{ij} = \begin{cases} 1 \iff \forall_{k \in \{i - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor, \dots, i + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor\}} \forall_{l \in \{j - \lfloor \frac{b}{2} \rfloor, \dots, j + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor\}} A_{(k + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor - i)(l + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - j)} = 1 \Rightarrow X_{kl} = 1 \\ 0 \quad \text{wpp} \end{cases}$

  Czyli $y_{ij} = 1 \iff$ po nałożeniu A na x_{ij} (tak że środek A leży na y_{ij}) każdy czarny piksel A pokrywa się z czarnym pikselem X

- diletation – $y_{ij} = \begin{cases} 1 \iff \exists_{k \in \{i - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor, \dots, i + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor\}} \exists_{l \in \{j - \lfloor \frac{b}{2} \rfloor, \dots, j + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor\}} A_{(k + \lfloor \frac{a}{2} \rfloor - i)(l + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor - j)} = 1 \wedge X_{kl} = 1 \\ 0 \quad \text{wpp} \end{cases}$

  ↳ pogrubia i łączy obiekty, wypełnia w nich dziury

- closing → $Y = \text{erosion}(\text{deletation}(X))$ → bardziej zbalansowana erozja, tj. mniej odchudza
- opening → $Y = \text{deletation}(\text{erosion}(X))$ → deletacja, pogrubia
- morphological gradient → $Y = \text{diletation}(X) - \text{erosion}(X)$ → podkreśla krawędzie obiektów

  external $Y = \text{diletation}(X) - X$ → usuwa mniejsze obiekty i zakłócenia – podkreśla zewnętrzne atrybuty obiektu

  internal $Y = X - \text{erosion}(X)$ → podkreśla wewnętrzne atrybuty obiektu

  Dla obrazów greyscale: $\text{diletation}(x_{ij}) = \max(X_{(i+a)(j+b)} + A(a,b))$ (znowu ustawiamy środki aby się pokrywały)

  $\text{erosion}(x_{ij}) = \min(X_{(i+a)(j+b)} - A(i,j))$

- entropy – regiony o wysokiej / niskiej entropii możemy jakoś inaczej traktować etc

  $y_{ij} = -\sum p(i,j) \log_2(p(i,j))$ gdzie $p(i,j)$ – prawdopodobieństwo wystąpienia piksela x_{ij} w rozważanym obrazie