Algebra - projekt 1

Hubert Sobociński i Paweł Pozorski

March 25, 2023

Spis treści

1 zadanko 1

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}(n-1)n\lambda^{n-2} & \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n\lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}(n-1)n\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Możemy zatem wywnioskować wzór na n-tą potęgę za pomocą symbolu Newtona:

$$A^n = \begin{bmatrix} \binom{n}{0}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} \\ 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{0}\lambda^n \end{bmatrix}$$

Możemy uogólnić ten wzór dla macierzy m na m:

$$B^n = \begin{bmatrix} \binom{n}{0}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{3}\lambda^{n-3} & ... & \binom{n}{n-m+1}\lambda^{n-m+1} \\ 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & ... & \binom{n}{n-m+2}\lambda^{n-m+2} \\ 0 & 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & ... & \binom{n}{n-m+3}\lambda^{n-m+3} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & ... & \binom{n}{n-m+4}\lambda^{n-m+4} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \binom{n}{0}\lambda^n \end{bmatrix}$$

Udowodnijmy teraz ten wzór. W tym celu rozpiszmy macierz A jako:

$A = \lambda * I + N$ gdzie I to macierz jednostkowa, a N to macierz która ma 1 nad główną przekątną, a reszta miejsca to 0

$A^n = (\lambda * I + N)^n$

$A^n = \binom{n}{0}(\lambda * I)^n * N^0 + \binom{n}{1}(\lambda * I)^{n-1} * N^1 + \binom{n}{2}(\lambda * I)^{n-2} * N^2 + ... + \binom{n}{n-2}(\lambda * I)^2 * N^{n-2} + \binom{n}{n-1}(\lambda * I)^1 * N^{n-1} + \binom{n}{n}(\lambda * I)^0 * N^n$

Zapiszmy jak wyglądają kolejne składniki sumy

$$A^n = \begin{bmatrix} \binom{n}{0}\lambda^n & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{0}\lambda^n & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \binom{n}{0}\lambda^n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} + ... +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & \binom{n}{n-m+3}\lambda^{n-m+3} & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \binom{n}{n-m+3}\lambda^{n-m+3} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n-m+3}\lambda^{n-m+3} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & \binom{n}{n-m+2}\lambda^{n-m+2} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n-m+2}\lambda^{n-m+2} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n-m+1}\lambda^{n-m+1} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Po zsumowaniu otrzymujemy nasz początkowy wzór. Uwaga: jeśli potęga n jest większa lub równa m, wtedy część wyrazów sumy się zeruje. Na przykład:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$C^3 = \binom{3}{0}(\lambda * I)^3 * N^0 + \binom{3}{1}(\lambda * I)^2 * N^1 + \binom{3}{2}(\lambda * I)^1 * N^2 + \binom{3}{3}(\lambda * I)^0 * N^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3\lambda^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda^1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}$$

Ostatni wyraz sumy się zeruje, ponieważ macierz N jest nilpotentna i w tym przypadku 3 potęga N będzie macierzą zerową.

2 zadanko 2

2.1 a)

$$a = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & -4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:
$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5$

b) $b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:
$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5$

c) $c = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:
$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5$

d) $d = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:
$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5$

e) $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:
$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5$

f) $f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:

$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5$

g) $g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:

$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5$

Każda macierz ma ten sam wielomian charakterystyczny

$-1 - 5\lambda - 10\lambda^2 - 10\lambda^3 - 5\lambda^4 - \lambda^5 = 0$

$-(\lambda + 1)^5 = 0$

$\lambda = -1$

Jedynym pierwiastkiem jest $\lambda = -1$

2.2 b)

a) Macierz blokowa podobna do A= $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jak widać powyżej macierz Jordana odpowiadająca macierzy A ma 1 blok

b) Macierz blokowa podobna do B= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jak widać powyżej macierz Jordana odpowiadająca macierzy B ma 2 bloki

c) Macierz blokowa podobna do C= $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jak widać powyżej macierz Jordana odpowiadająca macierzy C ma 2 bloki

d) Macierz blokowa podobna do D= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jak widać powyżej macierz Jordana odpowiadająca macierzy D ma 3 bloki

e) Macierz blokowa podobna do E= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jak widać powyżej macierz Jordana odpowiadająca macierzy E ma 3 bloki

f) Macierz blokowa podobna do F= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jak widać powyżej macierz Jordana odpowiadająca macierzy F ma 4 bloki

g) Macierz blokowa podobna do G= $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Jak widać powyżej macierz Jordana odpowiadająca macierzy G ma 5 bloków

2.3 c)

Podpunkt c

```
In[•]:= MatrixForm[a - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[a - IdentityMatrix[5] * -1]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 1 & -4 & 4 \\ 8 & -1 & -3 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 1

```
In[•]:= MatrixForm[b - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[b - IdentityMatrix[5] * -1]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & -4 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 2

```
In[•]:= MatrixForm[c - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[c - IdentityMatrix[5] * -1]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 2

```
In[•]:= MatrixForm[d - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[d - IdentityMatrix[5] * -1]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 3

```
In[•]:= MatrixForm[e - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[e - IdentityMatrix[5] * -1]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 3

```
In[•]:= MatrixForm[f - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[f - IdentityMatrix[5] * -1]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 4

```
In[•]:= MatrixForm[g - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[g - IdentityMatrix[5] * -1]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[•]= 5

2.4 d)

Hipoteza: Liczba klatek Jordana = $dimker(X - I * \lambda)$, gdzie λ jedyna wartość własna macierzy X

2.5 e)

Lemat: $A, B \in M_n^n(\mathbb{C})$, $A \sim B \Rightarrow (A - \lambda I_n) \sim (B - \lambda I_n)$

Dowód: Skoro z zał. $A \sim B$, to $\exists_{N \in M_n^n(\mathbb{C})}\ A = N^{-1} B N$

$$A - \lambda I_n = N^{-1} B N - \lambda I_n \qquad \text{ale } I_n = N^{-1} N$$

$$A - \lambda I_n = N^{-1} B N - \lambda N^{-1} N \qquad \text{ale } \lambda N^{-1} N = N^{-1} \lambda N$$

$$A - \lambda I_n = N^{-1} B N - N^{-1} \lambda N$$

$$A - \lambda I_n = N^{-1} (B - \lambda I_n) N$$

$$A - \lambda I_n \sim B - \lambda I_n \qquad \square$$

Hipoteza: Niech $A \in M_n^n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – jedyna wartość własna A. Wtedy $\dim \ker (A - \lambda I_n)$ odpowiada ilości klatek Jordana w macierzy Jordana odpowiadającej macierzy A.

Dowód: Niech J – macierz Jordana odpowiadająca macierzy A, reszta jak wyżej. Zatem $\exists_{P \in M_n^n(\mathbb{C})}\ A = P^{-1} J P$, zatem $A \sim J$ i na mocy Lematu $A - \lambda I_n \sim J - \lambda I_n$.
Zauważmy, że skoro λ jest jedyną wartością własną macierzy A, to $J - \lambda I_n$ będzie macierzą z wyzerowaną główną diagonalą i zerami / jedynkami nad nią, z konstrukcji macierzy Jordana każda jedynka będzie w innym rzędzie i kolumnie, czyli będą tworzyły wektory liniowo niezależne, zatem $r(J - \lambda I_n)$ będzie ilością tych jedynek. Zatem $\dim \ker (J - \lambda I_n)$ odpowiada ilości zer nad główną diagonalą powiększone o 1, bo musimy jeszcze uwzględnić pierwszą kolumnę złożoną z samych zer. Zauważmy, że liczba ta odpowiada dokładnie ilości klatek Jordana w macierzy J, jako że z budowy macierzy Jordana 0 nad główną przekątną indykuje początek nowej klatki (poza klatki pierwszej – lewy górny róg macierzy, stąd tu powiększamy liczbę zer o 1). Zatem liczba klatek w macierzy Jordana $J = \dim \ker (J - \lambda I_n) \underset{\uparrow}{=} \dim \ker (A - \lambda I_n)$

to równość wynika z podobieństwa $A - \lambda I_n$ do $J - \lambda I_n$

$(A \sim B \Rightarrow r(A) = r(B) \Rightarrow n - r(A) = n - r(B) \Rightarrow \dim \ker A = \dim \ker B$ dla $A, B \in M_n^n(\mathbb{C}))$

2.6 f)

2.7 g)

Macierz A

Podpunkt g

```
5 - MatrixRank[a - IdentityMatrix[5] * -1]
5 - MatrixRank[MatrixPower[a - IdentityMatrix[5] * -1, 2]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[a - IdentityMatrix[5] * -1, 3]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[a - IdentityMatrix[5] * -1, 4]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[a - IdentityMatrix[5] * -1, 5]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[a - IdentityMatrix[5] * -1, 6]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[a - IdentityMatrix[5] * -1, 7]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[a - IdentityMatrix[5] * -1, 8]]

Out[∘]= 1
Out[∘]= 2
Out[∘]= 3
Out[∘]= 4
Out[∘]= 5
Out[∘]= 5
Out[∘]= 5
Out[∘]= 5
```

Macierz B

```
In[∘]:= 5 - MatrixRank[b - IdentityMatrix[5] * -1]
5 - MatrixRank[MatrixPower[b - IdentityMatrix[5] * -1, 2]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[b - IdentityMatrix[5] * -1, 3]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[b - IdentityMatrix[5] * -1, 4]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[b - IdentityMatrix[5] * -1, 5]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[b - IdentityMatrix[5] * -1, 6]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[b - IdentityMatrix[5] * -1, 7]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[b - IdentityMatrix[5] * -1, 8]]
Out[∘]= 2
Out[∘]= 3
Out[∘]= 4
Out[∘]= 5
Out[∘]= 5
Out[∘]= 5
Out[∘]= 5
Out[∘]= 5
```

Macierz C

In[∘]:=
```
5 - MatrixRank[c - IdentityMatrix[5] * -1]
5 - MatrixRank[MatrixPower[c - IdentityMatrix[5] * -1, 2]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[c - IdentityMatrix[5] * -1, 3]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[c - IdentityMatrix[5] * -1, 4]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[c - IdentityMatrix[5] * -1, 5]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[c - IdentityMatrix[5] * -1, 6]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[c - IdentityMatrix[5] * -1, 7]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[c - IdentityMatrix[5] * -1, 8]]
```

Out[∘]= 2

Out[∘]= 4

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Macierz D

In[∘]:=
```
5 - MatrixRank[d - IdentityMatrix[5] * -1]
5 - MatrixRank[MatrixPower[d - IdentityMatrix[5] * -1, 2]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[d - IdentityMatrix[5] * -1, 3]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[d - IdentityMatrix[5] * -1, 4]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[d - IdentityMatrix[5] * -1, 5]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[d - IdentityMatrix[5] * -1, 6]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[d - IdentityMatrix[5] * -1, 7]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[d - IdentityMatrix[5] * -1, 8]]
```

Out[∘]= 3

Out[∘]= 4

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Out[∘]= 5

Macierz E

```
In[•]:= 5 - MatrixRank[e - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[e - IdentityMatrix[5] * -1, 2]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[e - IdentityMatrix[5] * -1, 3]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[e - IdentityMatrix[5] * -1, 4]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[e - IdentityMatrix[5] * -1, 5]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[e - IdentityMatrix[5] * -1, 6]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[e - IdentityMatrix[5] * -1, 7]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[e - IdentityMatrix[5] * -1, 8]]
Out[•]= 3
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
```

Macierz F

```
In[•]:= 5 - MatrixRank[f - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[f - IdentityMatrix[5] * -1, 2]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[f - IdentityMatrix[5] * -1, 3]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[f - IdentityMatrix[5] * -1, 4]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[f - IdentityMatrix[5] * -1, 5]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[f - IdentityMatrix[5] * -1, 6]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[f - IdentityMatrix[5] * -1, 7]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[f - IdentityMatrix[5] * -1, 8]]
Out[•]= 4
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
```

Macierz G

```
In[•]:= 5 - MatrixRank[g - IdentityMatrix[5] * -1]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[g - IdentityMatrix[5] * -1, 2]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[g - IdentityMatrix[5] * -1, 3]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[g - IdentityMatrix[5] * -1, 4]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[g - IdentityMatrix[5] * -1, 5]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[g - IdentityMatrix[5] * -1, 6]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[g - IdentityMatrix[5] * -1, 7]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[g - IdentityMatrix[5] * -1, 8]]
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
```

Klatki Jordana maleją wraz ze wzrostem potęgi, ponieważ wyższa potęga = większy dim ker = więcej klatek Jordana

2.8 h)

Będziemy liczyć wartości własne macierzy, następnie $dimker(X - \lambda I)$ do kolejnych potęg, a na koniec sprawdzimy czy się zgadza

Podpunkt h

```
In[•]:= h = {{-17, -26, -3, 6, -3, 25}, {4, 9, 1, -2, 2, -7}, {-19, -28, -1, 6, -5, 27}, {-1, -2, 0, 2, -1, 2}, {-20, -27, -3, 6, -1,
           4, -1, 20}};
        k = {{-14, -24, -3, 5, -4, 23}, {9, 16, 1, -4, 4, -14}, {-18, -27, -1, 6, -5, 26}, {0, 0, 0, 2, 0, 0}, {-16, -24, -3, 5, -2, 2
           0, 11}};

In[•]:= Eigenvalues[h]
Out[•]= {2, 2, 2, 2, 2, 2}

In[•]:= 5 - MatrixRank[h - IdentityMatrix[6] * 2]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[h - IdentityMatrix[6] * 2, 2]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[h - IdentityMatrix[6] * 2, 3]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[h - IdentityMatrix[6] * 2, 4]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[h - IdentityMatrix[6] * 2, 5]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[h - IdentityMatrix[6] * 2, 6]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[h - IdentityMatrix[6] * 2, 7]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[h - IdentityMatrix[6] * 2, 8]]
Out[•]= 1
Out[•]= 3
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
Out[•]= 5
```

```
In[•]:= {P, J} = JordanDecomposition[h];
        MatrixForm[J]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
In[•]:= Eigenvalues[k]

Out[•]= {2, 2, 2, 2, 2, 2}

In[•]:= 5 - MatrixRank[k - IdentityMatrix[6] * 2]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[k - IdentityMatrix[6] * 2, 2]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[k - IdentityMatrix[6] * 2, 3]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[k - IdentityMatrix[6] * 2, 4]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[k - IdentityMatrix[6] * 2, 5]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[k - IdentityMatrix[6] * 2, 6]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[k - IdentityMatrix[6] * 2, 7]]
        5 - MatrixRank[MatrixPower[k - IdentityMatrix[6] * 2, 8]]

Out[•]= 2

Out[•]= 3

Out[•]= 4

Out[•]= 5

Out[•]= 5

Out[•]= 5

Out[•]= 5

Out[•]= 5

In[•]:= {P, J} = JordanDecomposition[k];
        MatrixForm[J]
```

Out[•]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jak widać się zgadza dla obu

2.9 i)

Będziemy liczyć wartości własne macierzy, następnie $dimker(Y - \lambda I)$ do kolejnych potęg, a na koniec sprawdzimy czy się zgadza Macierz M

Podpunkt i

In[13]:=
```
m = {{-11, -13, -3, 0, 4, 12}, {-5, 3, 1, -2, 5, -1}, {-31, -37, -1, 6, -2, 36}, {-1, -1, 0, 5, 0, 1}, {-17, -14, -3, 0, 9, 13}, {-21,
   -2, 9, 16}};
n = {{-21, -29, -5, 4, 0, 28}, {-40, -53, -6, 12, -9, 55}, {-26, -29, 0, 4, 0, 28}, {-1, -1, 0, 5, 0, 1}, {-27, -30, -5, 4, 5, 29}, {-
   -11, 16, -9, 88}};
Eigenvalues[m]
```

Out[15]= {5, 5, 5, 2, 2, 2}

In[16]:=
```
5 - MatrixRank[m - IdentityMatrix[6] * 2]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 2, 2]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 2, 3]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 2, 4]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 2, 5]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 2, 6]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 2, 7]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 2, 8]]
```

Out[16]= 0

Out[17]= 1

Out[18]= 2

Out[19]= 2

Out[20]= 2

Out[21]= 2

Out[22]= 2

Out[23]= 2

In[24]:=
```
5 - MatrixRank[m - IdentityMatrix[6] * 5]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 5, 2]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 5, 3]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 5, 4]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 5, 5]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 5, 6]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 5, 7]]
5 - MatrixRank[MatrixPower[m - IdentityMatrix[6] * 5, 8]]
```

Out[24]= 1

Out[25]= 2

Out[26]= 2

Out[27]= 2

Out[28]= 2

Out[29]= 2

Out[30]= 2

Out[31]= 2

In[49]:=
```
{P, J} = JordanDecomposition[m];
MatrixForm[J]
```

Out[50]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zgadza się

Macierz N

```
In[32]:= Eigenvalues[n]

Out[32]= {5, 5, 5, 5, 2, 2}

In[33]:= 5 - MatrixRank[n - IdentityMatrix[6] * 2]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 2, 2]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 2, 3]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 2, 4]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 2, 5]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 2, 6]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 2, 7]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 2, 8]]

Out[33]= 0

Out[34]= 1

Out[35]= 1

Out[36]= 1

Out[37]= 1

Out[38]= 1

Out[39]= 1

Out[40]= 1
```

```
In[41]:= 5 - MatrixRank[n - IdentityMatrix[6] * 5]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 5, 2]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 5, 3]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 5, 4]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 5, 5]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 5, 6]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 5, 7]]
         5 - MatrixRank[MatrixPower[n - IdentityMatrix[6] * 5, 8]]

Out[41]= 2

Out[42]= 3

Out[43]= 3

Out[44]= 3

Out[45]= 3

Out[46]= 3

Out[47]= 3

Out[48]= 3

In[51]:= {P, J} = JordanDecomposition[n];
         MatrixForm[J]

Out[52]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Zgadza się

3 zadanko 3

Zadanie 3

In[∘]:=
```
h = {{-17, -26, -3, 6, -3, 25}, {4, 9, 1, -2, 2, -7}, {-19, -28, -1, 6, -5, 27}, {-1
    -3, 6, -1, 26}, {-15, -19, -2, 4, -1, 20}};
```

In[∘]:=
```
{P, J} = JordanDecomposition[h];
MatrixForm[J]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
MatrixForm[Inverse[P].h.P]
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

In[∘]:=
```
J == Inverse[P].h.P
```

Out[∘]= True

4 zadanko 4

Ślad macierzy $A \in M_n(C)$ definiujemy jako: $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$
Zapiszmy macierz A w postaci Jordana, czyli: $A = P * J * P^{-1}$
Wtedy ślad macierzy A jest równy: $tr(A) = tr(P * J * P^{-1}) = tr(J * P * P^{-1}) = tr(J * I) = tr(J)$
Wynika to z przemienności mnożenia dla śladu. Ponieważ na głównej przekątnej macierzy J znajdują się wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$
Ponieważ wartości własne dla obu macierzy są takie same to ślad macierzy A jest równy: $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$
Następnie zauważamy, że wyznacznik macierzy A jest taki samy jak macierzy J, bo są podobne: $det(A) = det(J)$
Ponieważ macierz J jest macierzą trójkątną górną to jej wyznacznik to iloczyn składników na głównej przekątnej. Na głównej przekątnej znajdują się wartości własne macierzy J, które są takie same co dla macierzy A: $det(J) = \lambda_1 * \lambda_2 * ... * \lambda_n$
Czyli otrzymujemy, że: $det(A) = \lambda_1 * \lambda_2 * ... * \lambda_n$

5 zadanko 5

Chcemy podnieść macierz C do potęgi 2021, w tym celu przekształcimy ją do postaci Jordana.

$C = P * J * P^{-1}$

$$C = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$A^{2021} = (P * J * P^{-1})^{2021}$

$A^{2021} = P * J * P^{-1} * P * J * P^{-1} * P * J * P^{-1} * ... * P * J * P^{-1}$ Mnożymy 2021 składników.

Zauważamy, że $P^{-1} * P = I$ Więc otrzymujemy: $A^{2021} = P * J^{2021} * P^{-1}$

$$J^{2021} = \begin{bmatrix} -1 & 2021 & -2041210 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2021 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2021 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P * J^{2021} * P^{-1} = \begin{bmatrix} 2025041 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029084 \\ 4078378 & -1 & 0 & -4042 & -4078378 \\ -10105 & 2021 & 4041 & -8084 & 6063 \\ 2021 & 0 & 0 & -1 & -2021 \\ 2025042 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029085 \end{bmatrix}$$

A więc $A^{2021} = \begin{bmatrix} 2025041 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029084 \\ 4078378 & -1 & 0 & -4042 & -4078378 \\ -10105 & 2021 & 4041 & -8084 & 6063 \\ 2021 & 0 & 0 & -1 & -2021 \\ 2025042 & 2021 & 4042 & -10105 & -2029085 \end{bmatrix}$

6 zadanko 6

6.1 a)

Przykładem takiej macierzy jest: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerA^1 = 1$

Kolejne potęgi tej macierzy i jej dim ker wynoszą:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerA^2 = 2$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerA^3 = 3$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerA^4 = 4$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerA^5 = 4$$

6.2 b)

Przykładem takiej macierzy jest: $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerB^1 = 2$

Kolejne potęgi tej macierzy i jej dim ker wynoszą:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerB^2 = 4$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerB^3 = 5$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dimkerB^4 = 5$$

6.3 c)

Znalezienie takiej macierzy A jest niemożliwe, ponieważ gdy potęgujemy macierz nilpotentną to wymiar jej jądra zwiększa się z każdą potęgą, dopóki macierz ta nie będzie zerowa, a ponieważ jest nilpotentna to istnieje takie k dla którego N^k będzie macierzą zerową, a wtedy wymiar jej jądra będzie równy liczbie wierszy tej macierzy. Niemożliwe jest zatem znalezienie macierzy, której kolejne potęgi przyjmują następujące wartości wymiaru jądra: 1, 2, 3, 3, 4, 4, ... Ponieważ wartość 4 powtarza się w nieskończoność to wiemy, że powinna to być macierz 4x4. Jednak wartość 3 występuje 2 razy, co jest niemożliwe, ponieważ przy każdej kolejnej potędze wartość ta powinna rosnąć, aż osiągnie wartość maksymalną w tym przypadku 4. Dodatkowo wiemy z własności macierzy nilpotentnych, że najmniejsza liczba k dla której macierz jest zerowa nie może przekraczać stopnia tej macierzy, w tym przypadku macierz jest zerowa dla k=5, a stopień macierzy jest równy 4, zatem taka macierz nie istnieje