

# Sannolikhet i geometri utifrån Buffons nålar

Alexander Nord och Richard Xie

Katedralskolan

Handledare: Håkan Edlund

Kurs: Lineär Algebra

2022-2023

## Abstract

This paper proves that the probability asked for in Buffon's needle problem is  $\frac{2l}{\pi d}$  for all needles shorter than or equal to the distance between parallel lines and  $\frac{-2l\sqrt{1-(\frac{d}{l})^2}}{\pi d} + \frac{2l}{\pi d} + 1 - \frac{2\arcsin(\frac{d}{l})}{\pi}$  for all lengths of the needle that are greater than the distance between parallel lines. Moreover, different methods to solve Buffon's needle problem are researched, including the experimental Monte-Carlo method as well as theoretical methods such as calculus and the application of the probability density function. The text thus serves as an introduction to the use of probability in geometry.

## Sammanfattning

Denna uppsats visar att sannolikheten som "Buffon's Needle Problem" efterfrågas är  $\frac{2l}{\pi d}$  för alla nålar där nålens längd är kortare än eller likamed avståndet mellan de parallella linjerna och  $\frac{-2l\sqrt{1-(\frac{d}{l})^2}}{\pi d} + \frac{2l}{\pi d} + 1 - \frac{2\arcsin(\frac{d}{l})}{\pi}$  för alla nålar där nålens längd är längre än avståndet mellan de parallella linjerna. Utöver detta undersöks olika metoder för hur "Buffon's Needle Problem" kan lösas, vilket inkluderar både experimentella metoder som Monte-Carlo metoden samt teoretiska metoder som integralkalkyl och applicering av täthetsfunktion. På så sätt ger denna uppsats en introduktion till användandet av sannolikhet inom geometri.

# 1 Introduktion

Denna uppsats kommer att ge en introduktion till användandet av sannolikhet inom geometri genom att betrakta ett specifikt problem, nämligen "Buffon's Needle Problem". Frågeställningen är "Vad är sannolikheten att en nål kastad på ett golv av parallella linjer korsar minst en linje och vilka metoder finns för att beräkna detta?". Matematik och programmering är verktygen som kommer att användas för att utreda detta problem. Matematiken kommer att ge en teoretisk sannolikhet, medan programmeringen ger konkreta värden. Den matematiska undersökningen undersöker olika metoder som kan användas för att förstå problemet. Målsättningen är att öka förståelsen kring vilken roll sannolikhet kan spela inom geometrin, samt förstå hur olika verktyg närvarande i sannolikhetsläran kan användas i ett geometriskt sammanhang. Den matematiska undersökningen ska också ge en inblick i varför de numeriska resultaten ser ut som de gör. Programmen som används för de numeriska resultaten är skrivna av författarna.

## 1.1 Teori

I denna sektion definieras frågeställningen av "Buffon's needle problem", samt relevanta begrepp och identiteter som används i bevisen.

**Buffon's needle problem:** Buffon's needle problem" frågar vad sannolikheten att en nål med längd  $l$  korsar minst en linje givet att linjerna är parallella med avstånd  $d$ . Problemet formulerades först av Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon år 1733<sup>1</sup>. För att utreda denna fråga måste begreppet korsning definieras. Vi utgår från att mängden korsningar är snittet av nålarna och linjerna eller med andra ord alla punkter som en linje och en nål "ligger på".

**Stokastisk variabel:** En stokastisk variabel kan beskrivas som en funktion som tar ett slumpmässigt utfall och ger ett tal på tallinjen. Ett exempel är att singla slant. En stokastisk variabel skulle i detta fall kunna avbilda det slumpmässiga utfallet krona till det reella värdet 1, medan det avbildar det slumpmässiga utfallet klave till värdet  $-1$ . Den formella definitionen är: En stokastisk variabel är en reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum  $\Omega$ . Funktionen  $X$  avbildar alltså varje element i definitionsmängden till ett korresponderande reellt tal;  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .<sup>2</sup>

**Täthetsfunktion:** "Varje funktion som satisfierar följande två kriterier kallas för täthetsfunktion:

$$1: f(x) \geq 0$$

$$2: \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

---

<sup>1</sup>Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon. *Histoire de l'Acad. Roy. des Sci*, 1733.

<sup>2</sup>Johan, Thim. Föreläsning 2: Stokastiska variabler. 2022-01-15.

Det följer från dessa två kriterierna att om  $X$  är en kontinuerlig stokastisk variabel kommer sannolikheten att  $X$  antar ett specifikt värde att vara noll, medan sannolikheten för att  $X$  ligger inom intervallet  $[a, b]$  ges av:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Det sistnämnda används till att bestämma kraven på sannolikheter för specifika täthetsfunktioner".<sup>3</sup>

Sammansatta täthetsfunktioner för två kontinuerliga stokastiska variabler  $X$  och  $Y$  fungerar på samma sätt. Kriterierna som ska uppfyllas blir då:

$$1: f(x, y) \geq 0$$

$$2: \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Likaledes följer det från dessa två kriterierna att sannolikheten för att  $X$  ligger inom intervallet  $[a, b]$  och  $Y$  ligger inom intervallet  $[c, d]$  ges av:

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dx dy$$

**Väntevärde:** Ett sätt att beskriva väntevärde är att det är värdet man "förväntas" få, i genomsnitt givet ett tillräckligt stort antal repetitioner. För att beräkna medelvärdet beräknas genomsnittet av alla möjliga utfall enligt formeln nedan. Väntevärdet av en stokastisk variabel definieras som:

$$\mathbb{E} = V_A \cdot P(A) + V_B \cdot P(B) + V_C \cdot P(C) + \dots \quad (1)$$

Där  $V_A$  är värdet av händelsen A,  $V_B$  är värdet av händelsen B, och så vidare. Väntevärdet ska inkludera alla termer A, B, C och så vidare, för alla möjliga utfall, därmed kommer summan av sannolikheterna  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ , och så vidare att vara 1. Detta gäller endast för diskreta variabler.<sup>4</sup>

Till exempel: Vad är väntevärdet om man kastar en 6 sidig tärning?

*Lösning:* De möjliga utfallen är 1, 2, 3, 4, 5 och 6 och värdet av respektive händelse är  $V_1 = 1$ ,  $V_2 = 2$ , och så vidare. Notera även att sannolikheten för varje händelse är  $\frac{1}{6}$ , alltså  $P(1) = P(2) = \dots = P(6) = \frac{1}{6}$ . Väntevärdet blir därmed:

$$\mathbb{E} = V_1 \cdot P(1) + V_2 \cdot P(2) + \dots + V_6 \cdot P(6) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

<sup>3</sup>Harald, Cramér. *Random Variables and Probability Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1970. [Egen översättning].

<sup>4</sup>1.3) Expected Value *Introduction to engineering statistics*. 2023 <http://matcmath.org/textbooks/engineeringstats/expected-value/> (2023-03-03)

Detta innebär att om vi kastar en 6 sidig tärning väldigt många gånger, förväntas medelvärdet att bli 3.5.

### Linearity of expectation:

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad (2)$$

Detta säger att väntevärdet av summan av två slumpmässiga variabler är detsamma som summan av deras individuella väntevärden. Notera att så är fallet oavsett om variablerna är beroende eller oberoende.<sup>5</sup> Exempelvis om vi kastar två tärningar förväntar vi oss ett väntevärde av  $7 = 3.5 + 3.5$ . Nu undersöks vad som händer med 2 beroende variabler. Antag att väntevärdet för mängden snö på måndag är 2 cm och att det på tisdag är 1 cm, men om det snöar på måndag är det 90 procent sannolikhet att det snöar även på tisdag, medan om det inte snöar på måndag är det endast 20 procent sannolikhet att det snöar på tisdag. Linearity of expectation ger att beroendet mellan snö på måndag och tisdag ej är relevanta och den totala mängden snö som förväntas på måndag och tisdag blir  $1 + 2 = 3$  cm

### Cauchy's functional equation:

Det har visats att alla lösningar till funktionalekvationen:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (3)$$

med kravet att  $f(x)$  är monoton kan skrivas på formen:

$$f(q) = cq$$

Detsamma gäller med kravet att funktionen är strikt växande i något intervall.<sup>6</sup>

Monte-Carlo metoden är en metod vilken utnyttjar upprepning av slumpmässiga händelser för att beräkna ett numrärt värde. Ett större antal upprepningar kommer generellt att konvergera mot det korrekta värdet.<sup>7</sup>

<sup>5</sup>Noga Alon, Joel H. Spencer. *The Probabilistic Method*. 2. uppl. Hoboken: Wiley-Interscience, 2000.

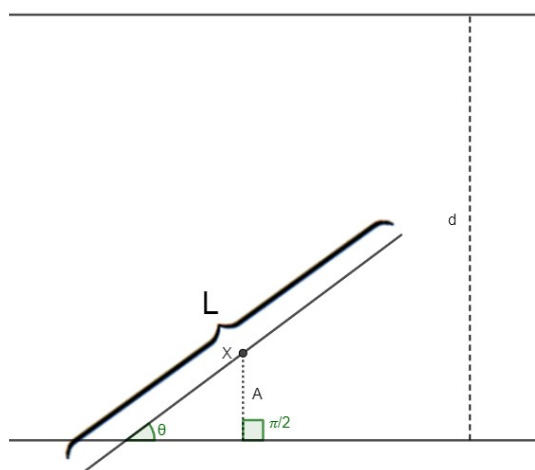
<sup>6</sup>Costas, Efthimiou. *Introduction to functional equations theory and problem-solving strategies for mathematical competitions and beyond*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2011.

<sup>7</sup>Samik, Raychaudhuri. Introduction to Monte Carlo Simulation. *Proceedings of the 40th Conference on Winter Simulation* Scott, Mason; Ray, Hill; Lars, Mönch; Oliver, Rose (red.), 91-100. Miami: Winter Simulation Conference, 2008.

## 2 Resultat

Först etableras de beteckningar som används i resultatdelen. Betrakta ett plan med parallella vertikala linjer vilka har avstånd  $d$ . Nålen har längd  $l$  och mittpunkt  $x$ . Låt  $A$  vara avståndet från  $x$  till närmaste linje. Vinkel mellan x-axel och nål betecknas  $\theta$  (se Figur 1).

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



Figur 1: Illustration av använda beteckningar.

Resultatet delas in i två delar. En för fallet där  $l \leq d$  och en för fallet där  $l > d$

### 2.1 Buffons nål, $l \leq d$

#### 2.1.1 Matematisk undersökning

**Påstående:** Sannolikheten att en nål korsar är:

$$\frac{2l}{\pi d}$$

*Bevis.* Sannolikheten att nålen kan korsa en linje beror inte på vilka två linjer  $x$  hamnar mellan. Detta på grund av problemets symmetri. Vi antar därför utan förlust av generalitet att alla nålars mittpunkt hamnar mellan två linjer.

Sannolikheten att en nål korsar en linje kan ges enligt multiplikationsprincipen som produkten:

$$P(\text{nål korsar}) = P_1 \cdot P_2 \quad (4)$$

Där  $P_1$  betecknar sannolikheten att nålen hamnar tillräckligt nära en linje sådan att det är möjligt för nålen att korsa linjen genom någon rotation och  $P_2$  betecknar sannolikheten att nålen korsar linjen om det är möjligt. För att beräkna  $P_1$  bevisas följande ekvivalens:

$$\text{Nålen kan korsa en linje} \iff A \leq \frac{l}{2} \quad (5)$$

*Bevis.  $\Rightarrow$*

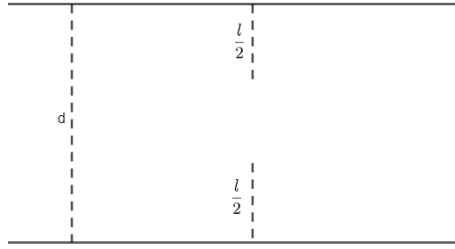
Sträckan nålen når i y-led från  $x$  är maximal när nålen ligger vertikalt. I det fallet blir sträckan i y-led från  $x$  till nålens ände  $\frac{l}{2}$ . Således är den maximala sträckan som nålen kan täcka i y-led  $\frac{l}{2}$ , vilket bevisar implikationen åt höger.

*Bevis.  $\Leftarrow$*

En nål där  $\theta = \frac{\pi}{2}$  korsar linjen för alla  $A \leq \frac{l}{2}$ .

$P_1$  fås följaktligen av sannolikheten att  $A \leq \frac{l}{2}$ . Då det antas att alla mittpunkter hamnar mellan två linjer, så är  $A \leq \frac{l}{2}$  om  $x$  ligger på ett avstånd  $\leq \frac{l}{2}$  över den undre linjen eller ett avstånd  $\leq \frac{l}{2}$  under den övre linjen (se Fig 2). Sannolikheten för detta är:

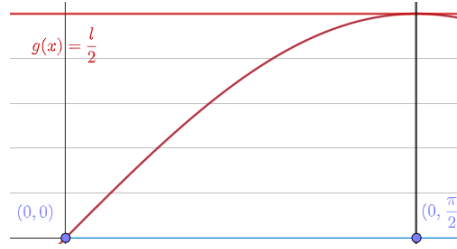
$$\frac{\frac{l}{2} + \frac{l}{2}}{d} = \frac{l}{d} = P_1 \quad (6)$$



Figur 2: Figuren visar var  $x$  kan ligga för att det ska vara möjligt för nålen att korsa en linje genom någon rotation.

$P_2$  fås av sannolikheten att:

$$\frac{l}{2} \sin(\theta) \geq A$$



Figur 3: Figuren illustrerar funktionen  $\frac{l}{2} \sin(\theta)$ , samt  $g(x) = \frac{l}{2}$

Antagandet att nålen kan korsas implicerar enligt (5) att  $A \leq \frac{l}{2}$ . För varje värde på  $\theta$  finns en viss sannolikhet att nålen korsar. Sannolikheten att nålen korsar för en specifik vinkel  $\gamma$  erhålls av proportionen mellan alla möjliga utfall för och de gynnsamma utfallen, vilka är utfallen där  $\frac{l}{2} \sin(\theta) \geq A$ . I figur 3 kan y-axeln betraktas som avståndet  $A$ , i detta fall blir de gynnsamma utfallen de under kurvan. Genomsnittet av alla vinklar ger  $P_2$  och kan beräknas med uttrycket:

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin(\theta) d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} d\theta}$$

Är detsamma som:

$$\frac{\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \quad (7)$$

Från (4), (6) och (7):

$$P(\text{nål korsar}) = P_1 \cdot P_2 = \frac{l}{d} \cdot \frac{2}{\pi}$$

□

### 2.1.2 Numerisk undersökning

Den grundläggande uppbyggnaden av alla program är densamma och beskrivs därför först. Sannolikheten att nålen kan korsas en linje beror inte på vilka två linjer x hamnar mellan. Detta på grund av problemets symmetri, Vi antar därför utan förlust av generalitet att alla nålars mittpunkt hamnar mellan två linjer. Vi låter dessa linjer vara  $y = 1$  och  $y = -1$ . Att linjernas avstånd är 2 i.e. förlorar inte generalitet, då det är förhållandet mellan nål och avstånd som är relevant. Därtill kan det utan förlust av generalitet antas att nålens mittpunkt hamnar i den övre delen av detta intervall, alltså mellan 0 och 1. För att beskriva nålens mittpunkt genereras därför ett pseudo-slumpmässigt tal mellan 0 och 1 med pythons "random.uniform" funktion. Ett slumpmässigt tal på nålens vinkel gentemot x-axeln erhålls genom användning av samma funktion i intervallet 0 till 90 (som ska representera vinkeln i grader), vilket sedan omvandlas till radianer.

Därnäst undersöks om genererad mittpunkt och vinkel gjort att nålen korsar, vilket görs genom att beräkna y-värdet i nålens övre ände. Om detta y-värde är större än 1 måste nålen ha korsat, eftersom mittpunkten ligger mellan 0 och 1. Notera att skillnaden i y-värde från nålens översta punkt till mittpunkten ges av uttrycket  $\sin(\theta) \cdot \frac{l}{2}$ . Om nålen korsat eller ej fås då genom att addera detta värde till det slumpmässigt genererade värdet på mittpunkten och jämföra det med 1. Är det större än 1 har nålen korsat, annars har den inte korsat. Denna process repeteras ett stort antal gånger för att ge ett approximerat värde på sannolikheten för att en nål korsar.

Ett sätt att approximera  $\pi$  fås utifrån att sannolikheten för korsning enligt den matematiska undersökningen är

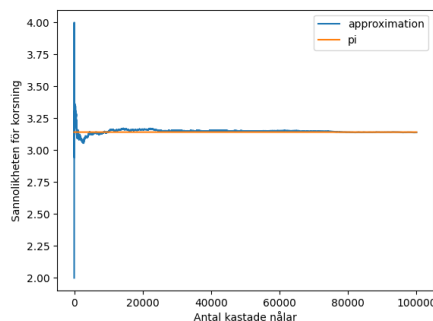
$$P(\text{nål korsar}) = \frac{l}{d} \cdot \frac{2}{\pi}$$

I en numerisk undersökning kan  $P(\text{nål korsar})$  approximeras med  $\frac{\text{Antal kastade nålar}}{\text{Antal korsande nålar}}$ . Detta ger:

$$\frac{\text{Antal kastade nålar}}{\text{Antal korsande nålar}} \approx \frac{l}{d} \cdot \frac{2}{\pi} \iff \pi \approx \frac{\text{Antal korsande nålar}}{\text{Antal kastade nålar}} \cdot \frac{l}{d} \cdot 2$$

Tabell 1: Tabellen visar antalet kastade nålar och approximerat värde av  $\pi$  utifrån resultaten givna av programmet i *Bilaga 1*. För att erhålla värdet löstes  $\pi$  ut enligt ovan.

Antal kastade nålar	100	10 000	1 000 000	100 000 000
Approximerat värde	3.1250000	3.1338138	3.1451535	3.1415891



Figur 4: Diagrammet visar ett approximerat värde av  $\pi$  och det faktiska värdet av  $\pi$ . Med antalet "kastade" nålar på x-axeln och sannolikhet för korsning på y-axeln. I försöket var  $d = l = 1$ , och approximationen fås av värdet på  $\frac{2 \cdot \text{Antal kastade nålar}}{\text{Antal korsande nålar}}$ . Programmet finns i *Bilaga 4*.



### 2.1.3 Lösning med täthetsfunktion

I denna sektion presenteras en alternativ lösning med hjälp av täthetsfunktionen. Denna lösning är avsedd för intresserade läsare.

*Bevis.* Täthetsfunktionen för  $A$  är:

$$\begin{cases} \frac{2}{d} : 0 \leq A \leq \frac{d}{2} \\ 0 : annars \end{cases}.$$

Denna täthetsfunktion inses eftersom  $A$  aldrig kan vara större än  $\frac{d}{2}$ , därav sannolikhet 0 för andra värden. Därtill är alla värden mindre än eller lika med  $\frac{d}{2}$  lika sannolika. Detta ger att funktionen har konstant y-värde. Enligt definitionen är  $f(x)$  alltid positiv och arean måste vara 1. Detta ger y-värdet  $\frac{2}{d}$ .

På liknande vis beräknas täthetsfunktionen för  $\theta$ :

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi} : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 : annars \end{cases}.$$

Eftersom  $A$  och  $\theta$  är oberoende variabler, blir deras sammansatta täthetsfunktion de individuella täthetsfunktionernas produkt. Därav är den sammansatta täthetsfunktionen:

$$\begin{cases} \frac{4}{\pi d} : 0 \leq A \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 : annars \end{cases}.$$

Sannolikheten att en händelse sker ges av integralen av täthetsfunktionen mellan de relevanta värdena. I detta fall eftersöks sannolikheten att en nål korsar, vilket är ekvivalent med sannolikheten att  $A \leq \frac{l}{2} \cdot \sin \theta$ . Detta ges av att integrera  $\theta$  över alla vinklar och att integrera  $A$  från 0 till  $\frac{l}{2} \cdot \sin \theta$ . Den repeterade integralen blir således:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{l}{2} \cdot \sin \theta} \frac{4}{\pi d} dA d\theta$$

Beräkning utav den inre integralen ger:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2l \sin \theta}{\pi d} d\theta$$

Beräkning utav denna integral ger:

$$\frac{2l}{\pi d}$$

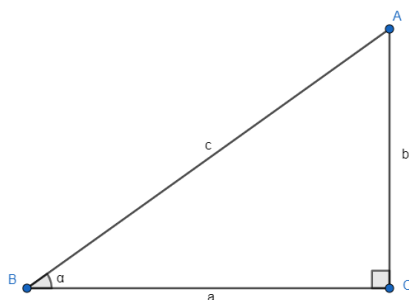
□

## 2.2 Buffons nål, $l > d$

### 2.2.1 Matematisk undersökning

Först visas en identitet, vilken är användbar i lösningsmetoden. Nämligen:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$



Figur 5: Triangel med beteckningar.

*Bevis.* Låt  $\triangle ABC$  vara en triangel med  $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ . Anta att  $\angle ABC = \alpha$  och  $\frac{b}{c} = x$ . Detta ger följande:

$$\sin(\alpha) = x$$

$$\alpha = \arcsin(x)$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \cos(\alpha) = \frac{a}{c}$$

Pythagoras sats ger följande:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \frac{a}{c} = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}} = \sqrt{1 - x^2}$$

□

Sannolikheten att en nål korsar om  $l \geq d$  ges av

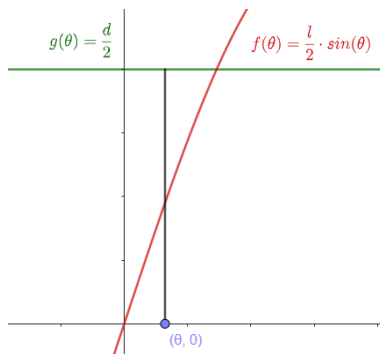
$$1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{l}{d} \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right) - \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) \right)$$

*Bevis.* Det är uppenbart att  $\sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} > \frac{d}{2} \implies$  nålen korsar minst en linje. För varje vinkel  $\theta$  finns det ett visst intervall där mittpunkten av nålen kan vara för att nålen ska korsa. Om  $\theta > \arcsin(\frac{d}{l})$ , kommer nålen korsa minst en linje, oavsett var den befinner sig. Detta på grund av följande:

$$\frac{\pi}{2} > \theta > \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) \implies \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} > \frac{d}{2} \implies \text{nålen korsar linjen}$$

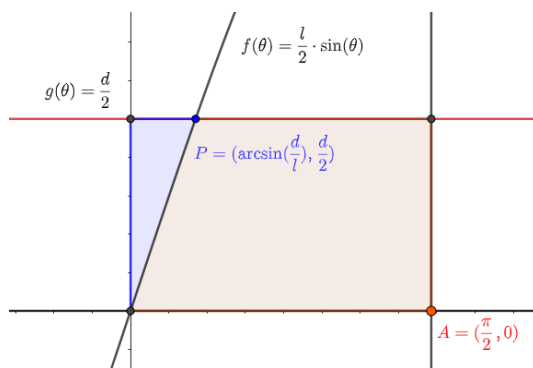
För  $0 < \theta < \arcsin(\frac{d}{l})$  finns det intervall på A där nålen inte korsar linjen. Betrakta en fixerad vinkel  $\theta$  sådan att  $\sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} < \frac{d}{2}$ , dvs  $0 < \theta < \arcsin(\frac{d}{l})$ . Sannolikheten att den korsar minst en linje kan beräknas genom att ta intervallet där mittpunkten kan vara för att nålen ska korsa en linje delat med totala intervallet (avståndet mellan två parallella linjer i detta fall). Detta ger följande:

$$P(\text{nålen korsar minst en linje när } \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} < \frac{d}{2} \text{ för en fixerad } \theta) = \frac{\frac{l}{2} \cdot \sin(\theta)}{d} \text{ (se Figur 6)}$$



Figur 6: Bilden visar funktionerna  $f(\theta) = \frac{l}{2} \cdot \sin(\theta)$  och  $g(\theta) = \frac{d}{2}$  samt punkten  $(\theta, 0)$

Sannolikheten för att en nål med arbiträr vinkel ska korsa linjen beräknas genom att beräkna följande integraler (se Figur 7).



Figur 7: Figuren visar graferna  $f(\theta) = \frac{l}{2} \cdot \sin(\theta)$ ,  $g(\theta) = \frac{d}{2}$ , samt punkterna  $A = (\frac{\pi}{2}, 0)$  och skärningspunkten mellan  $f(\theta)$  och  $g(\theta)$ , dvs  $P = (\arcsin(\frac{d}{l}), \frac{d}{2})$

Sannolikheten för att nålen korsar linjen blir enligt figur 7:

$$\frac{\text{röd area}}{\text{röd area} + \text{blå area}}$$

Vilket enligt arean för en rektangel ger:

$$\begin{aligned} \text{röd area} + \text{blå area} &= \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ \text{röd area} &= \frac{d}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) \right) + \int_0^{\arcsin(\frac{d}{l})} \sin(\theta) \cdot \frac{l}{2} d\theta \\ \text{röd area} &= \frac{d}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) \right) + \frac{l}{2} \cdot \left( -\sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} + 1 \right) \\ \frac{\text{röd area}}{\text{röd area} + \text{blå area}} &= \frac{\frac{d}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{d}{2}\right) \right) + \frac{l}{2} \cdot \left( -\sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} + 1 \right)}{\frac{d \cdot \pi}{4}} = \end{aligned}$$

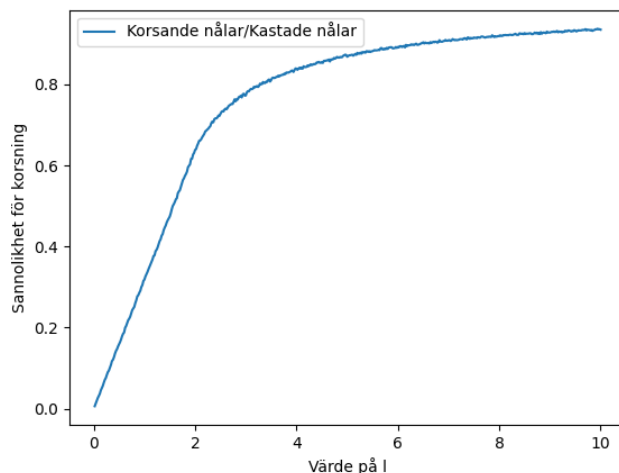
Efter förenkling fås:

$$\frac{\text{röd area}}{\text{röd area} + \text{blå area}} = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{l}{d} \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right) - \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) \right)$$

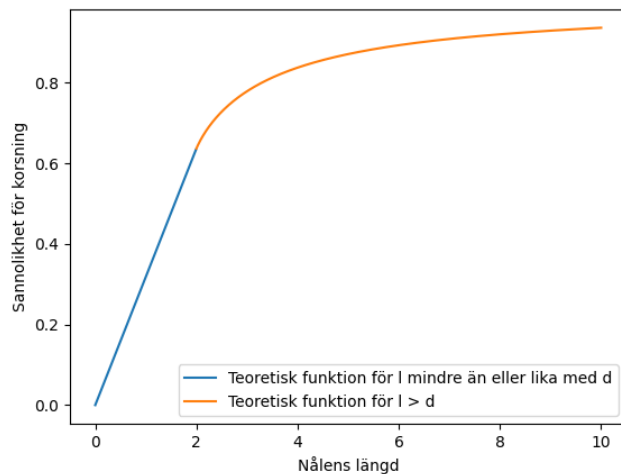
□

### 2.2.2 Numerisk undersökning

I resultatet för den numeriska undersökningen redovisas de grafer och numeriska värden som givits av programmen i *Bilaga 3* och *Bilaga 4*.



Figur 8: Y-axeln visar sannolikheten för en korsning och x-axeln visar nålarnas längd. Avståndet  $d$  var 2 l.e. Nålens startlängd var 0,02 l.e, varefter längden inkrementerades med 0,02; 500 gånger. Nålar kastades 50 000 gånger för varje specifik längd. Programmet finns i *Bilaga 3*.



Figur 9: Figuren visar värdet av den teoretiskt beräknade funktionen på y-axeln. Nålens längd visas på x-axeln och  $d = 2$  är fixerat. När nålens längd ligger i intervallet 0 till 2 visas funktionen  $\frac{2l}{\pi d}$  och när  $l$  är större än 2 visas funktionen:  $\frac{-2l\sqrt{1-(\frac{d}{l})^2}}{\pi d} + \frac{2l}{\pi d} + 1 - \frac{2 \arcsin(\frac{d}{l})}{\pi}$ . Programmet finns i *Bilaga 4*.

### 2.2.3 Lösning med täthetsfunktion

I denna sektion presenteras en alternativ lösning med hjälp av täthetsfunktionen. Denna lösning är avsedd för intresserade läsare.

*Bevis.* Den sammansatta täthetsfunktionen blir precis som i fallet där  $l \leq d$ :

$$\begin{cases} \frac{4}{\pi d} : 0 \leq A \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 : annars \end{cases}$$

Integrationsgränserna måste dock anpassas för fallet  $l > d$ . Eftersom  $A$  aldrig kan vara större än  $\frac{d}{2}$ , måste minimivärdet av  $\frac{l}{2} \cdot \sin \theta$  och  $\frac{d}{2}$  väljas som övre integrationsgräns i den inre integralen. Detta ger integralen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\min(\frac{l}{2} \cdot \sin \theta, \frac{d}{2})} \frac{4}{\pi d} dA d\theta$$

Denna integral kan delas upp i två. En som integrerar över vinklarna i intervallet från 0 till och med  $\frac{\pi}{2}$  där  $\frac{l}{2} \cdot \sin \theta \geq \frac{d}{2}$  och en som integrerar över vinklarna där  $\frac{l}{2} \cdot \sin \theta < \frac{d}{2}$  i samma intervall. Observera att  $\frac{l}{2} \cdot \sin \theta \geq \frac{d}{2}$  för alla  $\gamma$  där:

$$0 \leq \gamma \leq \arcsin\left(\frac{d}{l}\right)$$

För alla andra vinklar i intervallet från 0 till och med  $\frac{\pi}{2}$  gäller att:

$$\frac{l}{2} \cdot \sin \theta < \frac{d}{2}$$

Den omskrivna integralen blir således:

$$\int_0^{\arcsin(\frac{d}{l})} \int_0^{\frac{l}{2} \cdot \sin \theta} \frac{4}{\pi d} dA d\theta + \int_{\arcsin(\frac{d}{l})}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{4}{\pi d} dA d\theta$$

Beräkning av de inre integralerna ger:

$$\int_0^{\arcsin(\frac{d}{l})} \frac{2l \sin \theta}{\pi d} d\theta + \int_{\arcsin(\frac{d}{l})}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} d\theta$$

Utveckling ger:

$$\left[ \frac{-2l \cos \theta}{\pi d} \right]_0^{\arcsin(\frac{d}{l})} + \left[ \frac{2}{\pi} \theta \right]_{\arcsin(\frac{d}{l})}^{\frac{\pi}{2}}$$

Ytterligare förenkling ger:

$$\frac{-2l \cos(\arcsin(\frac{d}{l}))}{\pi d} - \frac{-2l \cos 0}{\pi d} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \arcsin(\frac{d}{l})$$

Vidare:

$$\frac{-2l \sqrt{1 - (\frac{d}{l})^2}}{\pi d} + \frac{2l}{\pi d} + 1 - \frac{2 \arcsin(\frac{d}{l})}{\pi}$$

Detta resultat överensstämmer med det tidigare.  $\square$

### 3 Diskussion

Diskussionen påbörjas med en upprepning av frågeställningen: "Vad är sannolikheten att en nål kastad på ett golv av parallella linjer korsar minst en linje och vilka metoder finns för att beräkna detta?"

För att vidare besvara frågeställningen väljer vi, dock att även inkludera "Barbiers lösning", vilken beskrivs av Martin Aigner och Günter M. Ziegler i boken *Proofs from THE BOOK*.

#### Barbiers lösning:

*Bevis.* Betrakta väntevärdet av antalet korsningar  $\mathbb{E}(l)$  för en nål av någon längd  $l$ . Låt  $P_n$  beteckna sannolikheten för exakt  $n$  korsningar. Enligt definitionen för väntevärde (1):

$$\mathbb{E}(l) = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + \dots + n \cdot P_n$$

Om  $l \leq d$ , så blir:

$$P_2 = P_3 = \dots = P_n = 0$$

Väntevärdet av antalet korsningar för en nål kortare än eller lika med avståndet mellan linjerna blir:

$$\mathbb{E}(l) = P_1 \tag{8}$$

Detta då fallet att nålen hamnar på en linje och därav har ett oändligt antal korsningar har sannolikhet 0. Likaså har fallet att nålen ligger vertikalt centrerat mellan de två linjerna sannolikhet 0. Dela in nålen i 2 delar av längd  $x$  och  $y$  så att:

$$x + y = l$$

Enligt (2) är  $\mathbb{E}(x + y) = \mathbb{E}(x) + \mathbb{E}(y)$ . Notera att detta stämmer även om de mindre nålarna av längd  $x$  och  $y$  bildar en "böjd" nål, vilket gör att upprepad uppdelning gör att polygoner kan skapas. Väntevärds-"funktionen" är uppenbarligen monoton och vi får från (3)

$$\mathbb{E}(l) = cl \tag{9}$$

Värdet av  $c$  sökes. Betrakta cirkeln  $C$  med diameter  $d$ . Denna kommer alltid att korsa två gånger. Följaktligen blir:

$$\mathbb{E}(C) = 2$$

Betrakta även en inskriven liksidig polygon med  $n$  sidor,  $A$ , samt en omskriven liksidig polygon med  $n$  sidor,  $B$ . När antalet sidor går mot oändligheten närmar sig polygonerna cirkeln.  $o(x)$  betecknar längden av en kastad figur  $x$ . Notera att alla linjer som korsas av den inskrivna polygonen även korsas av cirkeln, medan alla linjer som korsar av cirkeln även korsar av den omskrivna polygonen. Detta ger:

$$\mathbb{E}(A) \leq \mathbb{E}(C) \leq \mathbb{E}(B)$$

Från (9):

$$c \cdot o(A) \leq \mathbb{E}(C) \leq c \cdot o(B)$$

Om  $n$  går mot oändligheten går polygonerna mot cirkelarna:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} o(A) = \pi d$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} o(B) = \pi d$$

Insättning ger:

$$c \cdot \pi d \leq 2 \leq c \cdot \pi d \Rightarrow c = \frac{2}{\pi d}$$

Tillsammans med (8) och (9)

$$\mathbb{E}(l) = P_1 = \frac{2l}{\pi d}$$

Därav blir sannolikheten att en nål korsar minst en linje  $\frac{2\pi}{ld}$  för alla nålar med längd kortare än eller lika med avståndet mellan linjerna.  $\square$

<sup>8</sup>Martin Aigner, Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. 4. uppl. Berlin: Springer-Verlag, 2010

Barbiers lösning kan utvidgas till “Buffon’s noodle problem”. Detta problem frågar efter hur väntevärdet påverkas om nålen kan böjas hur som helst. Precis som med cirkeln så kan vi se den böjda delen som gränsvärdet av oändligt många, oändligt små nålar. Sedan appliceras “Linearity of Expectation” och det följer att väntevärdet för antalet korsningar är:  $\frac{2l}{\pi d}$ . Det är dock svårt att utvidga “Barbiers lösning” till fallet där  $l \geq d$ . Om man utvidgar resonemanget något, så följer *Barbier’s theorem*. Barbier’s theorem säger att kurvor med konstant bredd har omkrets som är  $\pi$  multiplicerat med bredden<sup>9</sup>. Vi får resultatet i *Barbier’s theorem* genom att kasta en nål med samma form som omkretsen av kurvan med linjerna på ett avstånd samma som bredden av kurvan,  $w$ . Eftersom att kurvan har konstant bredd, kommer den alltid att korsa exakt två linjer. Kalla nålens längd  $l$ , då vi vet att väntevärdet av antalet korsningar  $\mathbb{E}(x)$  är  $\frac{2l}{\pi w}$ :

$$2 = \frac{2l}{\pi w} \Rightarrow l = \pi w$$

Därför erhålls det önskade resultatet.

Första delen av frågeställningen kan besvaras med både det experimentella resultatet och det teoretiskt beräknade resultatet där resultatet från båda delarna överensstämmer med varandra. Att resultaten överensstämmer går att se exempelvis genom att betrakta första värdena i definitionsområdet i Figur 6 och Figur 7. (från  $l = 0.02$ ) då båda graferna är linjära fram tills  $l = 2$ , därefter antar båda funktionerna en logaritmisk form. En jämförelse av några specifika värden i samma figurer ger också stöd för att det experimentella samstämmer med det teoretiska. Graferna verkar vara identiska. För  $l \leq d$  blir sannolikheten för att nålen korsar minst en linje:

$$\frac{l \cdot 2}{d \cdot \pi}$$

Medan för  $l > d$  blir sannolikheten för att nålen korsar minst en linje:

$$1 + \frac{2}{\pi} \cdot \left( \frac{l}{d} \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}} \right) - \arcsin\left(\frac{d}{l}\right) \right)$$

För att besvara andra delen i frågeställningen kan det konstateras att för  $l \leq d$  och  $l > d$  presenterades en lösning med hjälp av integralkalkyl och en lösning genom användandet av täthetsfunktioner. Användandet av Monte-Carlo metoden gav inte ett exakt svar, men gav trots detta en ungefärlig uppskattning av vad sannolikheten bör vara. Enligt teorin ska ett större antal upprepningar ge ett värde närmare det verkliga. Detta verkar vara sant om det antas att det teoretiska värdet är det korrekta, vilket ses genom att notera värdena i Tabell 1. Ett större antal nålar verkar nämligen ge ett värde närmare  $\pi$ . Därtill beskrevs tidigare i diskussionen en lösning som använde sig av väntevärde för fallet där  $l \leq d$ .

<sup>9</sup>Steven R.Lay. *Convex Sets and Their Applications*. New York: Dover Publication, 1982.



### 3.1 Vidareutveckling

"Buffons Needle Problem" är ett brett problem med många vidareutvecklingar. En vidareutveckling är att undersöka vad sannolikheten är för en nål att korsa minst en linje om det läggs till parallella linjer åt båda riktningarna (vertikalt och horisontellt) för att på så sätt bilda ett rutnät med lika stort avstånd mellan linjerna. En ännu starkare vidareutveckling är att gå över till ett tredimensionellt rum där parallella plan används istället för linjer och nålar betraktas som begränsade linjer. Andra vidareutvecklingar är att fokusera på nålen istället för planet/rummet. Detta innebär alltså att undersöka hur olika former på nålen påverkar sannolikheten för att nålen ska korsa minst en linje. I texten nämndes det att väntevärdet inte beror på formen av nålen, men hur sannolikheten påverkas är fortfarande oklart.

### 3.2 Utblick

Som en utblick mot omvärlden kan det konstateras att de specifika resultaten i denna undersökning har begränsade användningsområden, dock är de metoder och idéer närvarande mycket användbara utifrån flera aspekter. Exempelvis används täthetsfunktionen för att modellera flertalet fenomen relaterade till klimatförändring, exempelvis koncentrationen NO i atmosfären<sup>10</sup>. En förståelse för de metoder denna undersökning använder är således relevanta. Monte-Carlo metoden är användbar i matematik och fysik, framförallt i de problem som är svåra eller omöjliga att beräkna på annat vis. Metoden kan i dett fall ge approximativa värden, vilka ger en god uppfattning om det verkliga värdet.

## 4 Referenslista

Expected Value *Introduction to engineering statistics*. 2023 <http://matcmath.org/textbooks/engineeringstats/e> (2023-03-03)

Aigner, Martin och Zieglert, Günter M. *Proofs from THE BOOK*. 4. uppl. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

Alon, Noga och Spencer, Joel H. *The Probabilistic Method*. 2. uppl. Hoboken: Wiley-Interscience, 2000.

Comte de Buffon, Georges-Louis Leclerc. *Histoire de l'Acad. Roy. des Sci*, 1733.

Cramér, Harald. *Random Variables and Probability Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1970.

Cremasco Marco, Prieto Wesley. Application of Probability Density Functions in Modelling Annual Data of Atmospheric NOx Temporal Concentration. *Chemical Engineering Transactions*. Vol. 57, 2017: 487-492.

<sup>10</sup>Marco Cremasco, Wesley Prieto. Application of Probability Density Functions in Modelling Annual Data of Atmospheric NOx Temporal Concentration. *Chemical Engineering Transactions*. Vol. 57, 2017: 487-492.

Efthimiou, Costas. *Introduction to functional equations theory and problem-solving strategies for mathematical competitions and beyond*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2011.

Lay, Steven R. *Convex Sets and Their Applications*. New York: Dover Publication, 1982.

Raychaudhuri, Samik. Introduction to Monte Carlo Simulation. *Proceedings of the 40th Conference on Winter Simulation* Scott, Mason; Ray, Hill; Lars, Mönch; Oliver, Rose (red.), 91-100. Miami: Winter Simulation Conference, 2008.

Thim, Johan. Föreläsning 2: Stokastiska variabler. 2022-01-15.

## 5 Bilagor

### 5.1 Bilaga 1

---

```
import random
import math

counter = 0
i = 0

while i < 100000000:
    pos = random.uniform(0, 1)
    angle = math.radians(random.uniform(0, 90))
    length = math.sin(angle)

    if pos + length > 1:
        counter += 1
    i += 1

    if i == 100 or i == 10000 or i == 1000000 or i == 100000000:
        x = 2 * i / counter
        print("", x)
```

---

### 5.2 Bilaga 2

---

```
import random
import math
import matplotlib.pyplot as plt

approxline = []
```

```

axis = []
straight = []
counter = 0
i = 0
while i < 100000:
    pos = random.uniform(0, 1)
    angle = math.radians(random.uniform(0, 90))
    length = math.sin(angle)

    if pos + length > 1:
        counter += 1
    i += 1
    if counter != 0:
        x = 2 * i / counter
        approxline.append(x)
        axis.append(i)
        straight.append(math.pi)

plt.plot(axis, approxline, label="approximation")
plt.plot(axis, straight, label="pi")

plt.xlabel("Antal kastade nålar")
plt.ylabel("Sannolikheten för korsning")

plt.legend()

plt.show()

```

---

### 5.3 Bilaga 3

---

```

import random
import math
import matplotlib.pyplot as plt

approxline = []
axis = []
needle = 0.01
counter = 0
i = 0
j = 0

while j < 500:

```

```

while i < 50000:
    pos = random.uniform(0, 1)
    angle = math.radians(random.uniform(0, 90))
    length = math.sin(angle)

    if pos + needle * length > 1:
        counter += 1

    i += 1

x = counter / i
approxline.append(x)
axis.append(2 * needle)
j += 1
needle = needle + 0.01
counter = 0
i = 0

plt.plot(axis, approxline, label="Korsande nålar/Kastade nålar")

plt.xlabel("Värde på 1")
plt.ylabel("Sannolikhet för korsning")

plt.legend()

plt.show()

```

---

## 5.4 Bilaga 4

```

import random
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy

approxline = []
axis = []
axis2 = []
func2 = []
counter = 0
i = 0
while i <= 2:
    func1estimate = (2 * i) / (math.pi * 2)
    approxline.append(func1estimate)

```

```

axis.append(i)
i = i + 0.01

while i > 2 and i < 10:
    func2estimate = 1 + (2/math.pi)*((i/2)*(1 - math.sqrt(1-(4/(i*i))))- numpy.arcsin(2/i))
    func2.append(func2estimate)
    axis2.append(i)
    i = i + 0.01

plt.plot(axis, approxline, label="Teoretisk funktion för l mindre än eller lika med d")
plt.plot(axis2, func2, label="Teoretisk funktion för l > d")

plt.xlabel("Nålens längd")
plt.ylabel("Sannolikhet för korsning")

plt.legend()

plt.show()

```

---