Analisi Predittiva

CT0429
Secondo appello

Gennaio, 2022

Cognome: ____________________ Nome: ____________________

Matricola: ____________________ Firma: ____________________

Istruzioni
(da leggere attentamente).

Assicuratevi di aver scritto nome cognome e matricola sia qui che sul file Rmarkdown disponibile su Moodle. Il tempo a disposizione per completare tutto l'esame (la parte scritta e la parte su Moodle) è di **90 minuti**.

Nessuno studente può lasciare l'aula fino a che la docente non avrà verificato che tutti abbiano consegnato sia il compito scritto che il file Rmarkdown. Dopo la consegna attendete che la docente dia il permesso di lasciare l'aula.

Question 1 (3 points)

Nella stima di un modello lineare semplice sono stati trovati i seguenti valori per $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ e $\hat{Var}(\hat{\beta})$:

```
fit <- lm(y ~ x, data = df)
coef(fit)
```

```
(Intercept)           x
        0.4         1.5
```

```
vcov(fit)
```

```
            (Intercept)    x
(Intercept)        0.70 0.25
x                  0.25 4.00
```

Inoltre si ha che:

```
dim(df)
```

```
[1] 10  2
```

(i) Si costruisca un intervallo di confidenza per il coefficiente di regressione β_1

Intervallo di confidenza e' dato da:

EST +- CRIT * SIGMA

In R: est + qt(c(0.0 + (alpha/2), 1.0 - (alpha/2)), df=(n-p)) * sigma

Ovvero (con alpha = 0.05, df=8, sigma=2):

(-3.112008, 6.112008)

(ii) Si indichi se è possibile rifiutare l'ipotesi nulla $H_0 : \beta_1 = 3$ (VS $H_1 : \beta_1 \neq 3$)

3 e' nell' intervallo di confidenza, percio' non e' possibile rifiutare l'ipotesi nulla (ad un livello di confidenza del 5%.

Altrimenti si puo' calcolare la statistica test e

TS = EST - HYP/ SIGMA[Bj] = (1.5-3)/2 = **-0.75**

e confrontare con i possibili valori in range

qt(c(0.0 + (alpha/2), 1.0 - (alpha/2)), df=(n_rows-predictors) = (-**2.306004 , 2.306004**)

Troviamo quindi che TS si trova nel range di possibili valori e non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla ad un livello di significativita' del 5%

Question 2 (6 points)

Si prenda in considerazione il dataset `df` le cui statistiche descrittive sono presentate in seguito:

```
summary(df)
```

```
   x_continua        x_factor         y
 Min.   :0.01136   group1:31   Min.   :  6.032
 1st Qu.:0.23959   group2:28   1st Qu.: 36.865
 Median :0.43692   group3:41   Median : 55.167
 Mean   :0.47617               Mean   : 56.451
 3rd Qu.:0.70468               3rd Qu.: 73.256
 Max.   :0.99803               Max.   :105.952
```

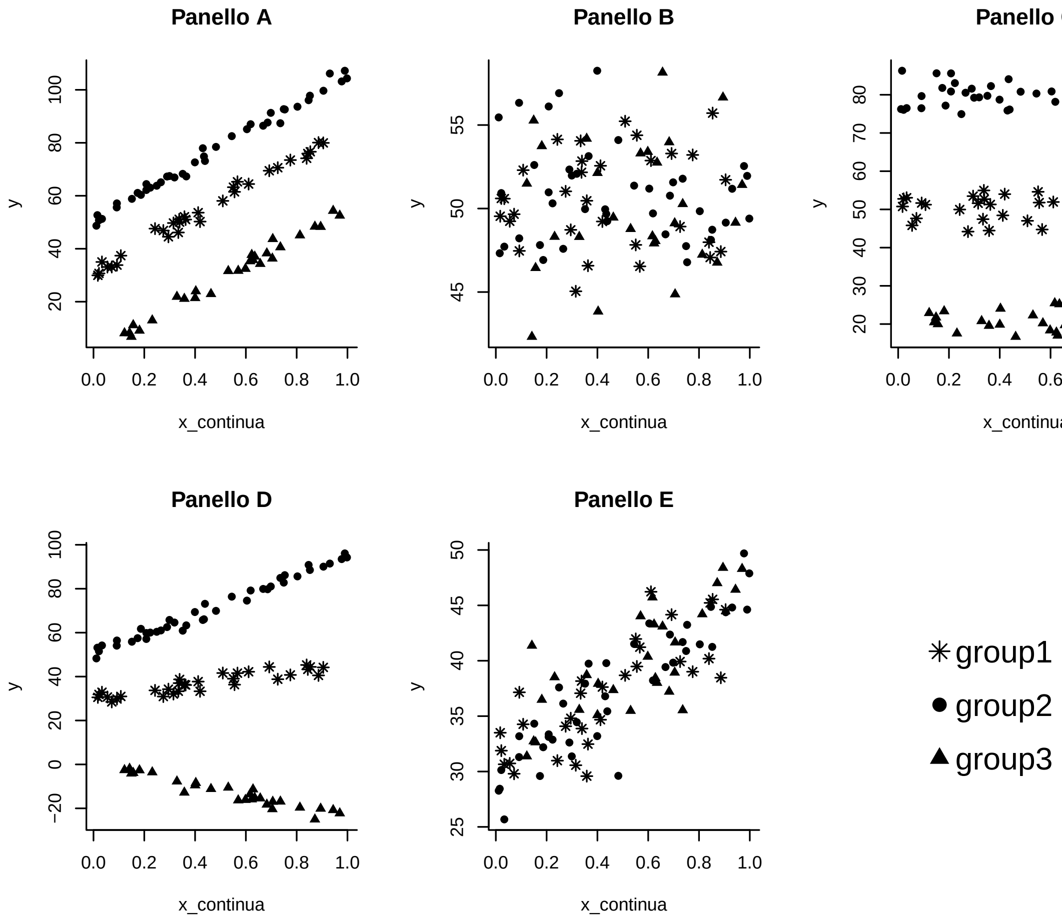
```
table(df$x_factor)
```

```
group1 group2 group3
    31     28     41
```

Vengono stimati i seguenti modelli:

```
fitNull <- lm(y~1, data = df)
fitC <- lm(y~x_continua, data = df)
fitF <- lm(y~x_factor, data = df)
fitCF <- lm(y~x_continua+x_factor, data = df)
fitCFint <- lm(y~x_continua*x_factor, data = df)
```

Per ognuno dei modelli stimati si indichi il numero di gradi di libertà usati dal modello (cioè il numero di coefficienti di regressione stimati per ogni modello) e si indichi quale delle configurazioni dei dati nei pannelli nella figura a pagina successiva potrebbe essere meglio descritta da ognuno dei modelli. Infine si indichi per quale dei modelli si ottiene il maggior possibile valore di R^2.

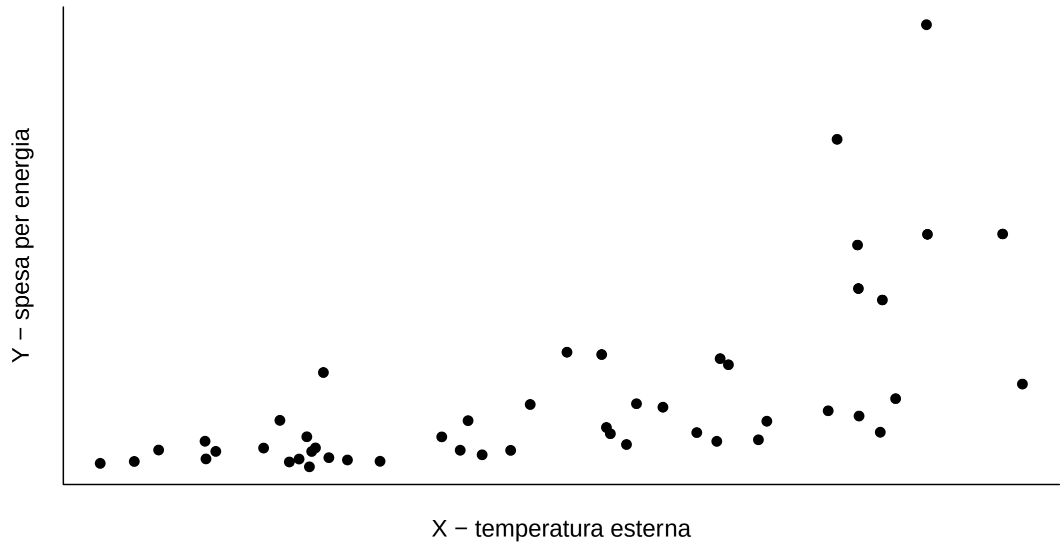


Modello	No. gradi libertà usati	Pannello
fitNull	**1**	**B**
fitC	**2**	**E**
fitF	**3**	**C**
fitCF	**4**	**A**
fitCFint	**6**	**D**

- Il modello per cui si ottiene il maggior valore di R^2 è **fitCFint**

Question 3 (3 points)

Una società che gestisce svariati data-centers desidera indagare la relazione tra temperatura esterna ed il costo legato alla spesa per mantenere le sale macchine entro determinati valori di temperature. La relazione tra le due variabili, misurata in un campione casuale di 49 giornate in diversi data-centers, è mostrata nel grafico sottostante:



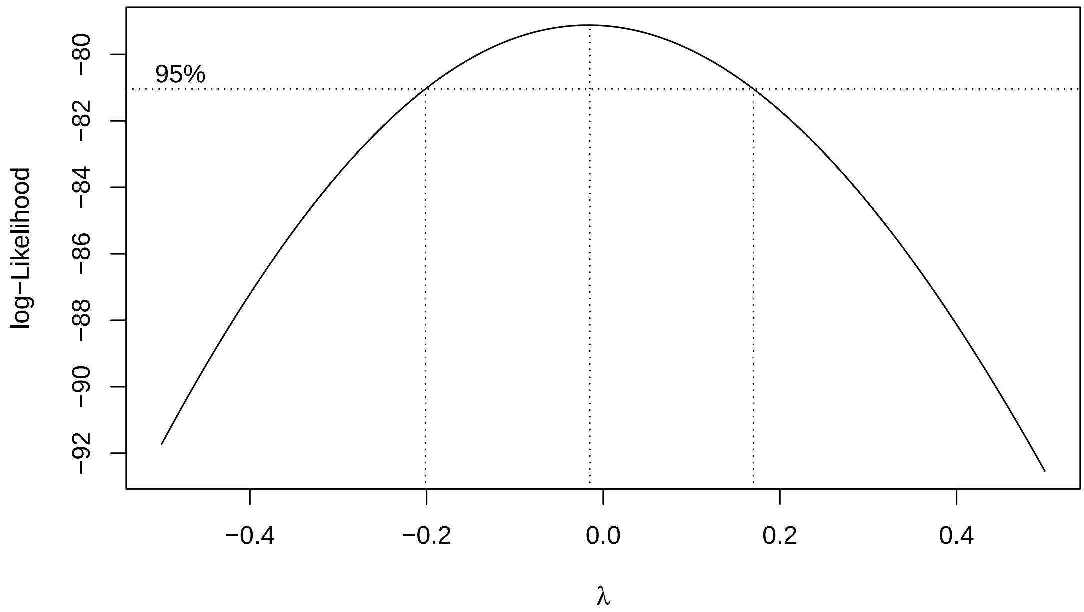
L'analista incaricato di analizzare i dati desidera usare un modello lineare semplice per costruire un primo modello predittivo, ma ritiene necessario, prima di procedere alla stima del modello, utilizzare una trasformazione di Box-Cox per trasformare la variabile risposta.

Nota: la trasformazione di Box Cox è definita come segue:

$$y_\lambda = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log(y) & \lambda = 0 \end{cases}$$

```
bctransf <- MASS::boxcox(y~x, data = df, lambda = seq(-0.5,0.5, by=0.05))
bctransf$x[which.max(bctransf$y)]
```

```
[1] -0.01515152
```



Si indichi se la scelta dell'analista di trasformare la variabile risposta sembra essere ragionevole, esplicitando le possibili motivazioni a favore o contro la scelta dell'analista.

Si indichi poi cosa si può evincere dall'output ottenuto dalla funzione `MASS::boxcox`: quale è la trasformazione che potrebbe venire applicata alla variabile risposta?

Dal grafico possiamo osservare che la relazione tra il target (Y- Spesa per l'energia) ed il predittore (X - Temperatura esterna) non sia lineare (problema di linearita'), e dalla forma possiamo intuire che un possibile plot dei residui evidenzierebbe una crescente varianza (problema di omoschedasticita'). Si nota anche una tendenza verso delle code piuttosto pesanti, con la possibilita di residui piuttosto grandi(in valore assoluto) per valori grandi di X. Questo porta un problema grave in quanto, dal momento che il modello lineare semplice presuppone una relazione lineare ed una varianza costante degli errori perche' sia valido.

Una possibile soluzione, puo' essere l'utilizzo di box-cox per creare una trasformazione monotonica dei dati, come fa l'analista. Infatti i valori osservati di Y (a meno che non siano espressi con valore negativo come degli addebiti nei conti bancari) sono tutti positivi, il che rende possibile l'applicazione di questa trasformazione.

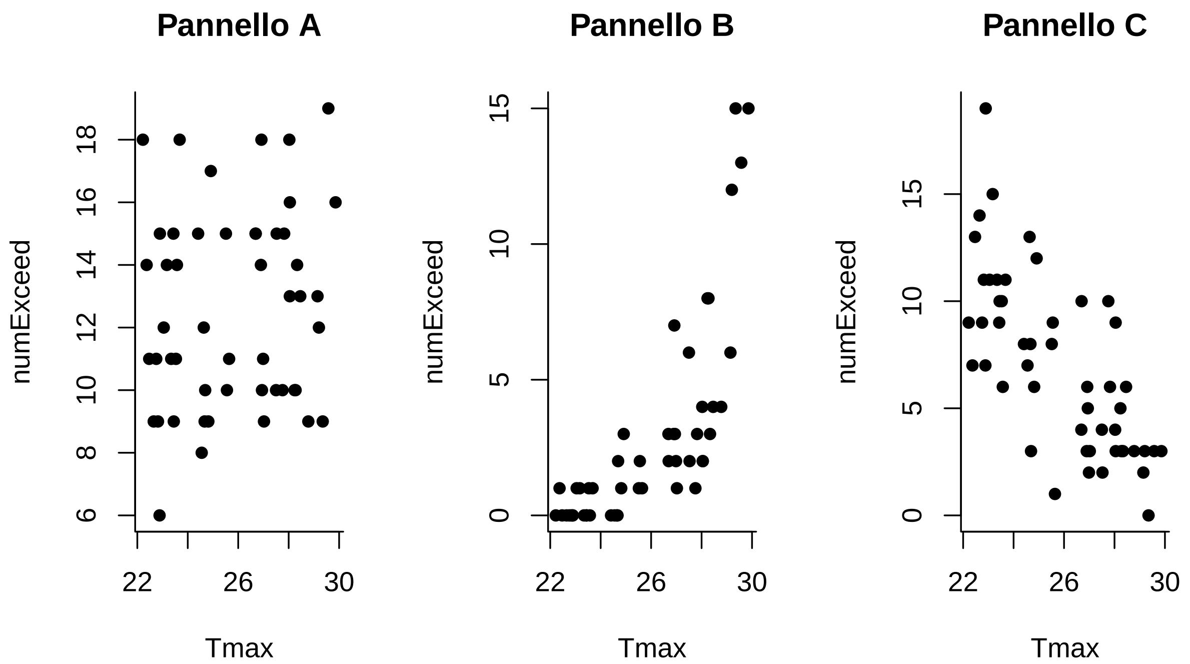
Inoltre, cio' potrebbe risultare in una relazione tra X e la trasformazione di Y per cui l'assunzione di normalita e omoschedasticita degli errori sia riscontrabile nei residui del modello.

Questa trasformazione non esclude che la relazione reale tra Y ed X possa essere non-lineare, e che automaticamente le assunzioni del modello siano rispettata. Questo deve essere verificato a prescindere, dal momento che la trasformazione e' stata inventata da Box e Cox ma non presenta giustificazioni teoriche.

Considerando che il valore massimo della trasformazione di Box-Cox non e' esattamente 0, ma che il valore di lambda = 0 rientra nell'intervallo di confidenza derivato dalla funzione: scegliere una trasformazione logistica per Y potrebbe risultare in un modello relativamente facile da interpretare per la variabile trasformata.

Question 4 (3 points)

Una società che gestisce svariati data-centers monitora il numero di volte in una giornata in cui la temperatura nel data center eccede per più di 10 minuti un determinato limite. Si desidera indagare il possibile effetto della temperature massima registrata all'esterno del data-center (`Tmax`) sul numero di eccedenze del limite (`numExceed`). Le informazioni sulle due variabili sono registrate in un campione di 50 giornate estive in diversi data-center. I dati sono mostrati nella Figura sottostante e vengono fornite alcune statistiche riassuntive:




```
summary(df)

      Tmax          numExceed
 Min.   :22.22   Min.   : 0.00
 1st Qu.:23.47   1st Qu.: 0.00
 Median :25.60   Median : 1.50
 Mean   :25.80   Mean   : 2.88
 3rd Qu.:27.98   3rd Qu.: 3.00
 Max.   :29.86   Max.   :15.00
```

Per indagare la relazione tra temperatura e il numero di eccedenze viene usato un modello lineare generalizzato con una distribuzione Poisson per la variabile risposta e la funzione legame canonica:

```
fit <- glm(numExceed~Tmax, data = df, family = poisson())
summary(fit)
```

```
Call:
glm(formula = numExceed ~ Tmax, family = poisson(), data = df)
```

```
Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.8386  -0.9016  -0.5114   0.7526   2.2815

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -14.2600     1.5382  -9.271   <2e-16 ***
Tmax          0.5646     0.0546  10.341   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 213.182  on 49  degrees of freedom
Residual deviance:  50.331  on 48  degrees of freedom
AIC: 157.24

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

(i) Si indichi quale dei pannelli nella Figura nella pagina precedente è più probabile mostri i dati usati del dataset `df` usato per stimare il modello. Pannello **B**

(ii) Si scriva in forma esplicita il modello che viene stimato usando la funzione `glm`:

[numExceed| Tmax = t] \thicksim Pois(lambda(t))

dove:

lambda(t) = exp{beta0 + beta1 t}

Question 5 (3 points)

Una società che gestisce svariati data-centers desidera predirre in quali giornate è possibile che la temperatura massima nella sala dei data-center ecceda un determinato livello considerato a rischio. Vengono quindi raccolte per un campione di 73 giorni e data-centers svariate informazioni su caratteristiche meteorologiche all'esterno del data-center e l'informazione binaria se la temperatura massima ha superato il livello pre-determinato.

```
table(df$highTemp)
```

```
 0  1
30 43
```

```
fit1 <- glm(highTemp ~ Tmean, data = df, family = binomial())
coef(fit1)
```

```
(Intercept)       Tmean
       -3.0         0.2
```

```
deviance(fit1)
```

```
[1] 80.31498
```

Si usa poi il modello `fit1` per stimare la probabilità che in due giornate venga ecceduto il limite che indica una alta temperatura nella sala:

```
nd <- data.frame(Tmean = c(20,25))
rownames(nd) <- c("giorno 1", "giorno 2"); nd
```

```
         Tmean
giorno 1    20
giorno 2    25
```

```
predict(fit1, newdata = nd)
```

```
[1] NA NA
```

Infine si costruisce un modello in cui tutti i predittori sono usati:

```
fitAll <- glm(highTemp ~ ., data = df, family = binomial())
```

```
coef(fitAll)
```

```
(Intercept)       Tmean        wind    relHumid sunshineHrs
    -0.8100      0.2300     -0.1700     -0.0067     -0.1200
```

```
deviance(fitAll)
```

```
[1] NA
```

(i) Come si può interpretare il valore del coefficiente β_{Tmean} per il modello `fit1`?

(ii) Usando il modello `fit1` si fornisca una stima della probabilità che nel "giorno 1" la temperatura massima ecceda il limite di temperatura predefinito (si indichi cioè il primo valore mancante dell'output di `predict`)

(iii) Si indichi se la probabilità che la temperatura massima ecceda il limite di temperatura predefinito è più alta per il "giorno 1" or il "giorno 2" (usando il modello `fit1`)

(iv) Si indichi se è possibile sapere quale dei modelli tra `fit1` e `fitAll` ha devianza maggiore. In caso affermativo si indichi quale dei modelli ha devianza maggiore.