Analisi Predittiva

CT0429
Primo appello

Gennaio, 2022

Cognome: _____ Nome: _____

Matricola: _____ Firma: _____

Istruzioni
(da leggere attentamente).

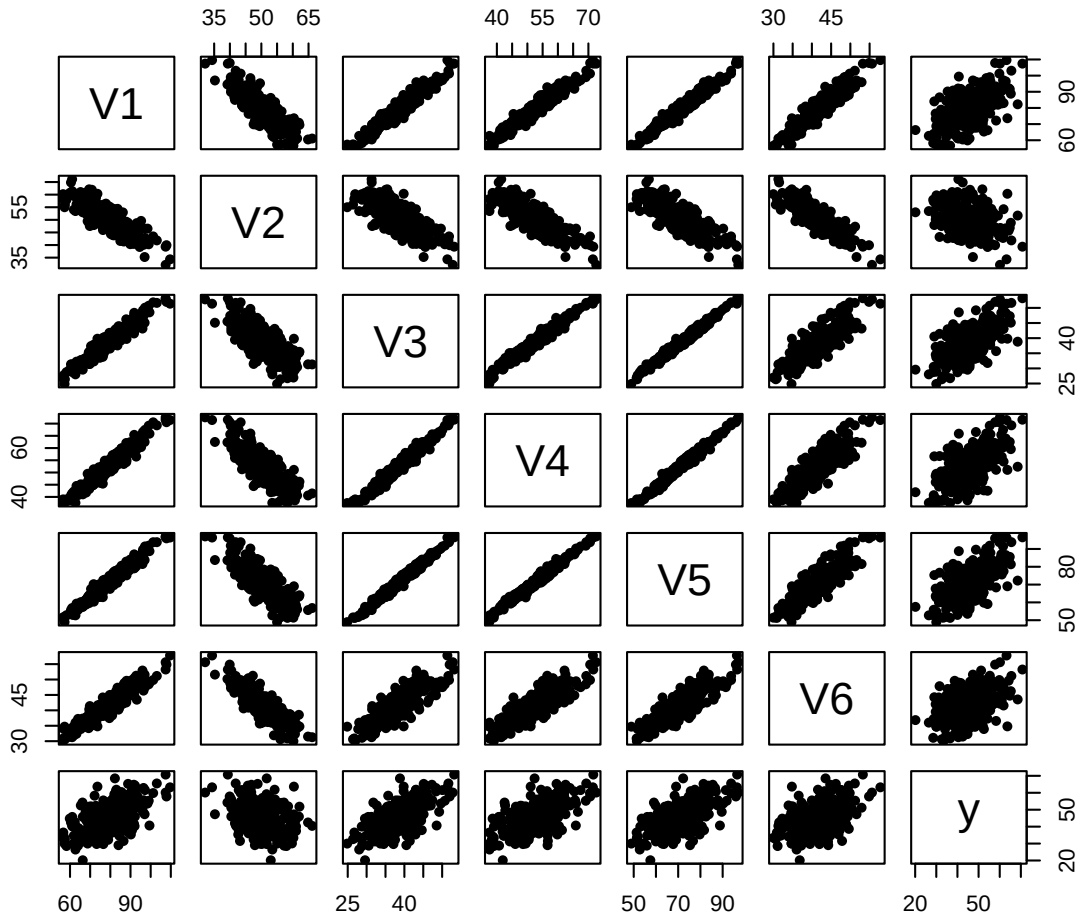
Assicuratevi di aver scritto nome cognome e matricola sia qui che sul file Rmarkdown disponibile su Moodle. Il tempo a disposizione per completare tutto l'esame (la parte scritta e la parte su Moodle) è di **90 minuti**.

Nessuno studente può lasciare l'aula fino a che la docente non avrà verificato che tutti abbiano consegnato sia il compito scritto che il file Rmarkdown. Dopo la consegna attendete che la docente dia il permesso di lasciare l'aula.

Question 1 (4 points)

Si prenda in considerazione il dataset `df`: i grafici di dispersione per le variabili nel dataset sono mostrati nella figura sottostante. Si desidera predirre la variabile `y` usando come predittori le variabili `V1, V2, V3, V4, V5, V6`.

```
plot(df, pch = 16)
```



Per costruire un modello di regressione multiplo un'analista utilizza in prima istanza un modello (chiamato `fitAll`) in cui tutti i predittori sono inseriti come variabili esplicative. Inoltre stima anche un modello `fitV4` in cui solo la variabile V4 viene usata come predittore. Informazioni riassuntive sulla stima dei due modelli sono mostrati nella pagina sucessiva.

```
 fitAll <- lm(y~., data = df)
 summary(fitAll)
```

```
Call:
lm(formula = y ~ ., data = df)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-18.1723  -4.0940   0.0372   4.1096  21.4763

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -50.8604    14.3392  -3.547 0.000454 ***
V1           -0.4226     0.3567  -1.185 0.236994
V2            0.6375     0.1553   4.106 5.23e-05 ***
V3            0.2563     0.6587   0.389 0.697434
V4           -0.3347     0.4459  -0.750 0.453561
V5            1.3583     0.5456   2.489 0.013351 *
V6            0.2098     0.3580   0.586 0.558244
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 6.211 on 293 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4878,        Adjusted R-squared:  0.4773
F-statistic:  46.5 on 6 and 293 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
 fitV4 <- lm(y~V4, data = df)
 summary(fitV4)
```

```
Call:
lm(formula = y ~ V4, data = df)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-19.5657  -4.6950  -0.5004   4.7360  23.0933

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.72954    3.04571   1.881   0.0609 .
V4           0.75756    0.05723  13.238   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 6.828 on 298 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3703,        Adjusted R-squared:  0.3682
F-statistic: 175.2 on 1 and 298 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

(i) Qual è il valore di R^2 del modello per il modello `fitAll`? Come si può interpretare il valore di R^2 per questo modello?

Nel modello fitAll il valore di R^2 e' di 0.4878.

Circa il 48.78% della varianza osservata nei dati e' spiegata dalla combinazione lineare dei predittori V1,V2,V3,V4,V5,V6, ovvero che il modello fitAll riesce a catturare circa il 48.78% della variabilita' osservata nei dati.

(ii) Come si può interpretare il valore del coefficiente angolare relativo alla variabile `V4` nei due modelli stimati?

Il coefficiente angolare relativo alla variabile V4 cambia interpretazione a seconda del modello stimato:

1. Nel modello fitV4, V4 detta la forza della relazione lineare tra il predittore V4 e la variabile risposta. Il coefficiente stimato viene interpretato come la differenza stimata (in media) della variabile risposta (in unita' della variabile risposta), tra due osservazioni le quali differiscono di un'unita' di misura del predittore V4. Al crescere di un'unita' di misura di V4, la variabile risposta aumenta di circa 0.76 unita' di misura.
2. Nel modello fitAll, invece, V4 viene interpretato come la differenza stimata (in media) della variabile risposta, tra due osservazioni le quali differiscono di un'unita' di misura del predittore V4, assumendo che il resto dei predittori abbiano dei valori fissati. Al crescere di un'unita' di misura di V4, in media, la variabile risposta diminuisce di circa -0.3347 unita' di misura (a patto che gli altri predittori abbiano valori fissati).

(iii) In calce sono indicati dei valori di Variance Inflation Factors (VIFs) per dei modelli stimati. Quale delle due opzioni è più probabile corrisponda ai VIFs per il modello `fitAll` stimato usando i dati mostrati nella Figura? Opzione 1

Considerando che
1) Ci sono delle variabili che sono estremamente correlate fra loro [Vedi immagine dei pairplot]
2) I p-value sono poco significativi e l'impatto delle stime pure dato che sono tutte vicine allo 0

Ci sono delle variabili che sono estremamente correlate fra loro e ne consegue che probabilmente i predittori stiano "rubandosi" a vicenda il poter predittivo.

Opzione 1:

```
car::vif(fitAll)
```

```
       V1         V2         V3         V4         V5         V6
94.303945   5.439288  87.504215  73.386967 188.780574  22.216378
```

Opzione 2:

```
car::vif(fitAll)
```

```
      V1       V2       V3       V4       V5       V6
1.025082 1.018174 1.006091 1.046011 1.049240 1.022209
```

Question 2 (3 points)

Il gestore di un chiosco di gelati desidera studiare la relazione tra il numero di auto parcheggiate in una giornata nel parcheggio della spiaggia dove è posizionato il chiosco e il fatturato giornaliero (in decine di euro). Le informazioni disponibili al gestore sono salvate nel dataframe `df`. Le seguenti informazioni riassuntive sul dataset sono disponibili:

```
summary(df)
```

```
   numAuto        fatturato
Min.   : 29.0   Min.   : 22.6
1st Qu.:150.2   1st Qu.:112.8
Median :217.5   Median :164.8
Mean   :222.7   Mean   :166.7
3rd Qu.:282.8   3rd Qu.:207.5
Max.   :636.0   Max.   :423.5
```

Inoltre, il gestore stima il seguente modello predittivo per il fatturato:

```
fit <- lm(fatturato ~ numAuto, data = df)
```

```
summary(fit)
```

```
Call:
lm(formula = fatturato ~ numAuto, data = df)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
 -51.5  -11.8    0.4   13.1   38.8

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   17.810      5.954       3    0.004 **
numAuto        0.669      0.024      28   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 19 on 58 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.93,        Adjusted R-squared:  0.93
F-statistic: 7.6e+02 on 1 and 58 DF,  p-value: <2e-16
```

```
confint(fit)
```

```
                2.5 %     97.5 %
(Intercept) 5.8905551 29.7289948
numAuto     0.6202373  0.7176025
```

Il gestore desidera verificare l'evidenza contro l'ipotesi nulla che β_1 (il coefficiente angolare che descrive l'effetto di `numAuto` sul fatturato) abbia valore pari a 0.6, cioè vuole condurre un test di verifica di ipotesi per il sistema di ipotesi:

$$H_0 : \beta_1 = 0.6 \qquad VS \qquad H_1 : \beta_1 \neq 0.6$$

Il gestore desidera infine predirre il fatturato per una giornata in cui sonno presenti 300 auto nel parcheggio:

```
nd <- data.frame(numAuto = 300)

predict(fit, newdata = nd)
```

```
[1] NA
```

(i) Si derivi il valore della statistica test per il sistema di verifica di ipotesi specificato nel testo

TS = EST-HYP/SE = 0.669-0.6/0.024 = 2.875

(ii) Si indichi se è possibile o meno rigettare l'ipotesi nulla del sistema di verifica di ipotesi specificato nel testo (al livello di significatività del 5%)

Dal risultato di confint(fit), che rappresenta l'intervallo di confidenza per i parametri stimati al livello di significativita' del 5%, vediamo che il valore HYP = 0.6 e' fuori dall'intervallo.

Inoltre, calcolando il p-value per la statistica test TS,ci accorgiamo che esso e' molto significativo.

2*pt(abs(2.875), df=58,lower.tail = FALSE) = 0.005640675

Possiamo dunque rifiutare l'ipotesi nulla che beta1=0.6 al livello di significativita' del 5%

(iii) Si indichi il valore stimato del fatturato (in decine di euro) per una giornata in cui 300 auto sono presenti nel parcheggio (si indichi cioè il valore mancante dell'output di `predict`)

Il valore stimato (o stima puntuale) e' rappresentato come E[fatturato|numAuto = 300]

E[fatturato|numAuto = 300] = beta0 + beta1 * 300 = 17.810 + (0.669*300) = 208.51

Question 3 (3 points)

Si prenda in considerazione il seguente modello stimato usando il dataset `df` mostrato nel codice sottostante:

```
fit <- lm(y ~ x1+x2+x1:x2, data = df); coef(fit)
```

```
(Intercept)          x1         x2b       x1:x2b
   26.66667    22.00000   397.33333   -81.00000
```

```
df
```

```
  x1 x2   y
1  1  a  45
2  2  a  78
3  3  a  89
4  4  b 188
5  5  b 129
```

(i) Si dia l'espressione della matrice di disegno X usata nella stima del modello (quello cioè che si otterrebbe usando `model.matrix(fit)`).

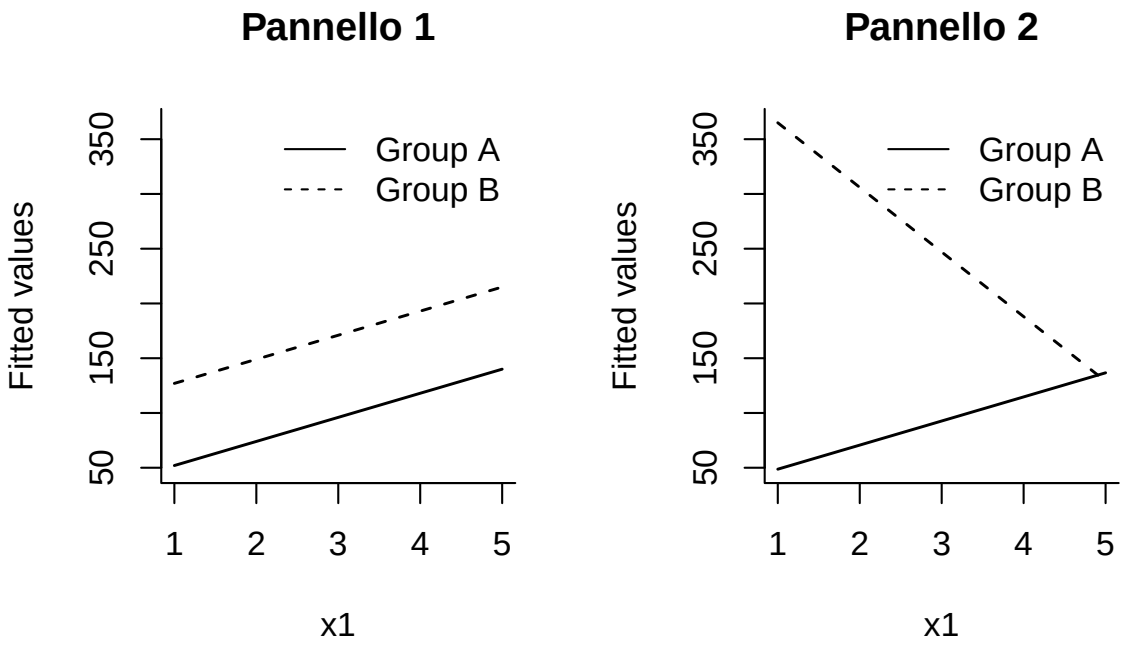
```
data <- data.frame(x1=c(1,2,3,4,5), x2=c("a","a","a","b","b"), y=c(45,78,89,188,129))

fit <- lm(y ~ x1+x2+x1:x2, data = data)

model.matrix(fit)
```

(Intercept)	x1	x2b	x1:x2b	
1	1	0	0	
1	2	0	0	= **X**
1	3	0	0	
1	4	1	4	
1	5	1	5	

(ii) La Figura nella pagina successiva mostra la relazione stimata tra x1 e y per i due gruppi A e B (l'informazione del gruppo di appartenenza per ogni osservazione è specificata nella variabile x2). In quale dei due pannelli è più probabile che sia mostrata la relazione stimata dal modello `fit`)? Pannello 2

```
> predict(fit,newdata=data.frame(x1=2,x2="b"))
[1] 306
```

Il pannello due include l'interazione tra x1 ed x2, percio' avremo 2 coefficienti angolari e due intercette diverse (abbiamo una variabile categoriale ed un'interazione). Possiamo confermare cio'con una veloce stima di un punto teorico per vedere che le rette stimate dal modello sono rappresentate proprio nel panello due


Pannello 1
Fitted values
50
150
250
350
Group A
Group B
1
2
3
4
5
x1
Pannello 2
Fitted values
50
150
250
350
Group A
Group B
1
2
3
4
5
x1

Question 4 (5 points)

Il gestore di un chiosco di gelati desidera studiare la relazione tra il numero di di gelati venduti tra le 14 e le 18 di una giornata e alcuni potenziali predittori: la temperatura della giornata, l'informazione se la giornata è un giorno festivo, il numero di auto presenti nel parcheggio della spiaggia dove è posizionato il chiosco.

Stima quindi tre diversi modelli per cui sono fornite alcune informazioni sintetiche:

```
fit1 <- glm(numGelati ~ numAuto+festivo, data = df, family = poisson)
fit2 <- glm(numGelati ~ numAuto+temperatura, data = df, family = poisson)
fitAll <- glm(numGelati ~ numAuto+temperatura+festivo,
              data = df, family = poisson)

deviance(fit1); deviance(fit2); deviance(fitAll)
```

```
[1] 293.5679

[1] 94.42806

[1] 68.08272
```

```
logLik(fit1); logLik(fit2); logLik(fitAll)
```

```
'log Lik.' -217.192 (df=3)

'log Lik.' -117.6221 (df=3)

'log Lik.' -104.4494 (df=4)
```

```
coef(fit1)
```

```
  (Intercept)        numAuto festivofestivo
         1.50           2.00           0.24
```

```
nd <- data.frame(numAuto = 100, festivo  = "feriale", temperatura = 25)

predict(fit, newdata = nd, type = "response")
```

```
[1] NA
```

(i) Usando il modello `fit1` si stimi il numero di gelati venduti in una giornata feriale in cui 100 auto sono presenti nel parcheggio e la temperatura è di 25 gradi (si indichi cioè il valore mancante dell'output di `predict`)

E[numGelati|nd] = exp{beta_0 + beta_{numAuto}x_0} = exp{1.5 + 2*100}
= poisson()$linkinv(201.5) = 3.238457e+87

(ii) Quale modello tra i tre stimati raggiunge un valore di AIC minore?

AIC = (-2*logLik(M))+(2*p(M))

AIC(fitAll) = 216.8988

(iii) Come è possibile confrontare la bontà di adattamento dei modelli `fit1` e `fit2`? E se invece si desidera confrontare la bontà di adattamento dei modelli `fit1` e `fitAll`? (non è necessario confrontare effettivamente i modelli, basta descrivere come sarebbe possibile confrontarli).

fit1 e fit2 sono confrontabili tramite

1. Misure di bonta' di adattamento dei modelli basta su IC come AIC, BIC, che tengono conto di quanto i modelli sono parsimoniosi.

2. Metodi di validazione incrociata come Cross-Validation, K-fold Cross-Validation, LOOV Cross Validation, i quali sono piu' dispendiosi perche' necessitano un ricalcolo del modello ad ogni iterazione.

Per confrontare fit1 e fitAll, dato che sono modelli annidati, possiamo utilizzare il likelihood ratio test e l'analisi della devianza, oltre ai metodi precedentemente citati.

Question 5 (3 points)

In un sito di e-commerce viene monitorato se per una determinata transazione viene esercitata l'opzione di reso: questa informazione è salvata nella variabile `reso`, che ha valore 1 se per la transazione è stata esercitata l'opzione di reso. Un primo modello predittivo mira a verificare se l'ammontare totale del costo della transazione (variabile `totalSpent`) influisce sulla probabilità che venga attivata l'opzione di reso:

```
fit1 <- glm(reso ~ totalSpent, data = df, family = binomial())
coef(fit1)
```

```
(Intercept)  totalSpent
-7.60140758  0.03365754
```

Viene poi stimato un altro modello in cui come predittori vengono anche inserite delle variabili che indicano il numero totale di pezzi nell'ordine (`totalPieces`) e l'informazione se la consegna dell'ordine è avvenuta in ritardo (`isDelayed`):

```
fit2 <- glm(reso ~ totalSpent+totalPieces+isDelayed,
            data = df, family = binomial())
```

I due modelli vengono poi confrontati tramite un test `anova`:

```
anova(fit1, fit2, test = "LRT")
```

```
Analysis of Deviance Table

Model 1: reso ~ totalSpent
Model 2: reso ~ totalSpent + totalPieces + isDelayed
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance Pr(>Chi)
1       148     66.619
2       146     65.354  2   1.2651   0.5312
```

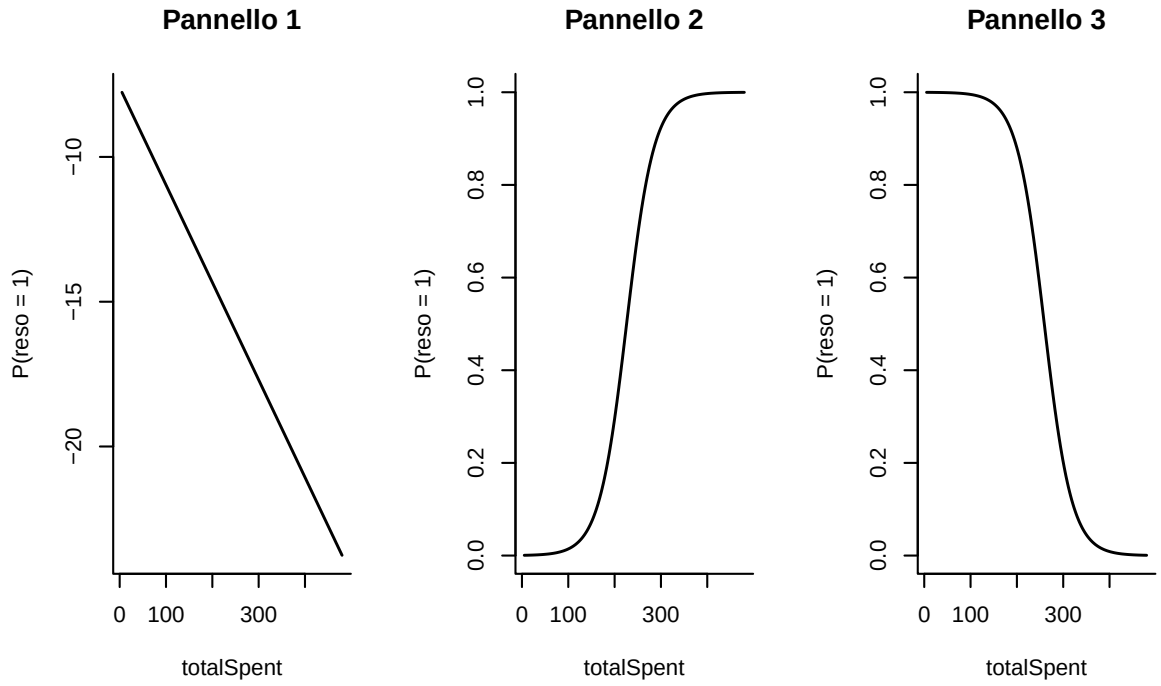
(i) La Figura nella pagina successiva mostra la relazione stimata tra `totalSpent` e la probabilità che per la transazione venga attivato un reso (cioè P(`reso` = 1)). In quale dei tre pannelli è più probabile che sia mostrata la relazione stimata dal modello `fit1`)? Pannello 2

binomial()$linkinv(b0 + (b1*x))
x=100 -> 0.0142 ; x=300 ->0.9238

(ii) Cosa possiamo evincere dal test `anova` in cui vengono messi a confronto i modelli `fit1` e `fit2`?

Dal LRT test, tra fit1 e fit2 notiamo che non vi e' un miglioramento significativo tra i modelli. Infatti con una diminuzione di 2 gradi di liberta', il miglioramento della Devianza Residua e' marginale. Inoltre, la statistica relativa alla devianza non e' particolarmente grande, ed il relativo p-value e' poco significativo.

Non possiamo quindi rifiutare l'ipotesi nulla che H_0: beta_totalPieces = beta_isDelayed = 0, ad un livello di significativita' del 5%


Pannello 1
Pannello 2
Pannello 3
P(reso = 1)
−10
−15
−20
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
100
300
totalSpent