Analisi Predittiva

CT0429
Secondo appello
Con Soluzioni

Gennaio, 2022

Cognome: ____________________ Nome: ____________________

Matricola: ____________________ Firma: ____________________

ISTRUZIONI
(DA LEGGERE ATTENTAMENTE).

Assicuratevi di aver scritto nome cognome e matricola sia qui che sul file Rmarkdown disponibile su Moodle. Il tempo a disposizione per completare tutto l'esame (la parte scritta e la parte su Moodle) è di **90 minuti**.

Nessuno studente può lasciare l'aula fino a che la docente non avrà verificato che tutti abbiano consegnato sia il compito scritto che il file Rmarkdown. Dopo la consegna attendete che la docente dia il permesso di lasciare l'aula.

Question 1 (3 points)

Nella stima di un modello lineare semplice sono stati trovati i seguenti valori per $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ e $\hat{Var}(\hat{\beta})$:

```
fit <- lm(y ~ x, data = df)
coef(fit)
```

```
(Intercept)           x
        0.4         1.5
```

```
vcov(fit)
```

```
            (Intercept)    x
(Intercept)        0.70 0.25
x                  0.25 4.00
```

Inoltre si ha che:

```
dim(df)
```

```
[1] 10  2
```

(i) Si costruisca un intervallo di confidenza per il coefficiente di regressione β_1

(ii) Si indichi se è possibile rifiutare l'ipotesi nulla $H_0 : \beta_1 = 3$ (VS $H_1 : \beta_1 \neq 3$)

Solution: Intervallo di confidenza

```
1.5 + qt(c(.025, .975), df = 8) * 2
```

```
[1] -3.112008  6.112008
```

Il valore $\beta_1 = 3$ è nell'intervallo: non possiamo rifiutare H_0. In alternativa si poteva calcolare la statistica test:

```
(1.5 -3)/2
```

```
[1] -0.75
```

```
## confrontata con
qt(c(.025, .975), df = 98)
```

```
[1] -1.984467  1.984467
```

Question 2 (6 points)

Si prenda in considerazione il dataset `df` le cui statistiche descrittive sono presentate in seguito:

```
summary(df)

  x_continua         x_factor          y
 Min.   :0.01136   group1:31   Min.   :  6.032
 1st Qu.:0.23959   group2:28   1st Qu.: 36.865
 Median :0.43692   group3:41   Median : 55.167
 Mean   :0.47617               Mean   : 56.451
 3rd Qu.:0.70468               3rd Qu.: 73.256
 Max.   :0.99803               Max.   :105.952
```

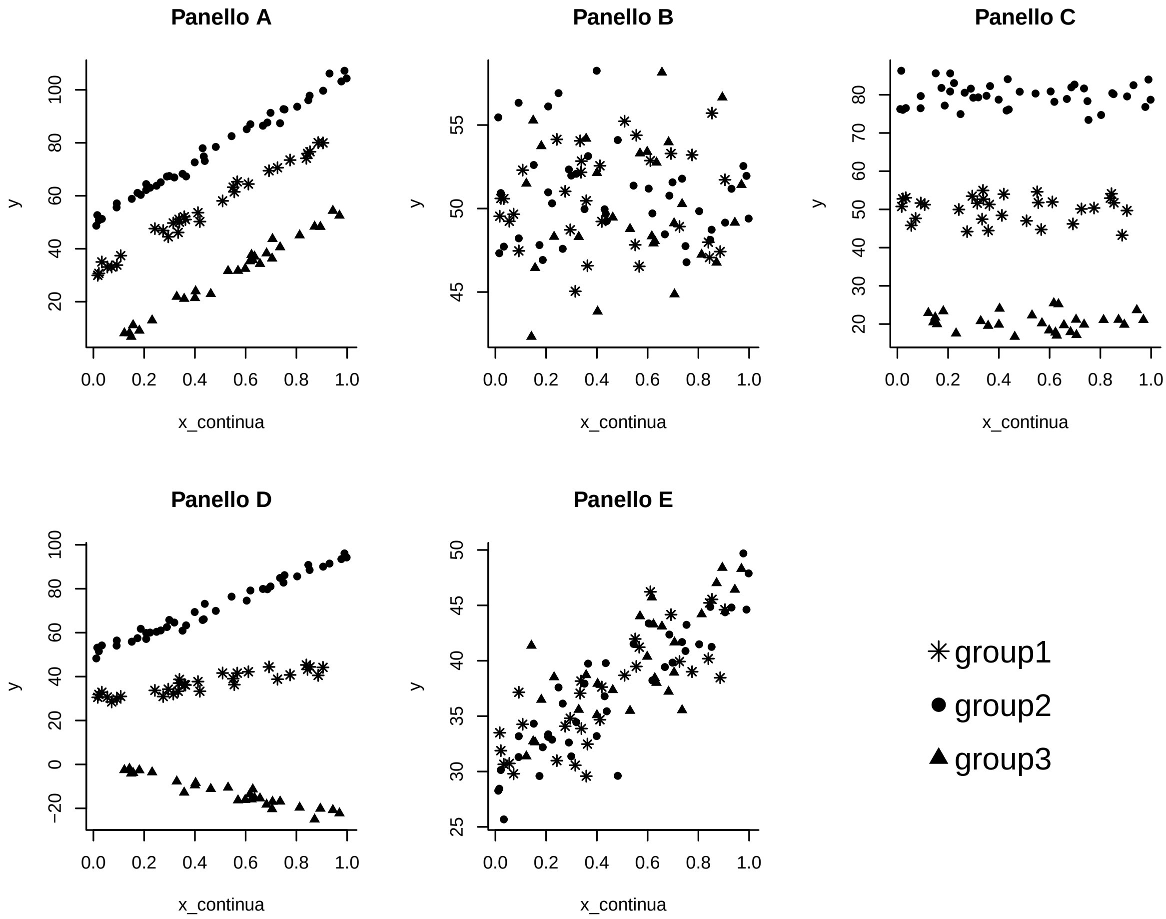
```
table(df$x_factor)

group1 group2 group3
    31     28     41
```

Vengono stimati i seguenti modelli:

```
fitNull <- lm(y~1, data = df)
fitC <- lm(y~x_continua, data = df)
fitF <- lm(y~x_factor, data = df)
fitCF <- lm(y~x_continua+x_factor, data = df)
fitCFint <- lm(y~x_continua*x_factor, data = df)
```

Per ognuno dei modelli stimati si indichi il numero di gradi di libertà usati dal modello (cioè il numero di coefficienti di regressione stimati per ogni modello) e si indichi quale delle configurazioni dei dati nei pannelli nella figura a pagina successiva potrebbe essere meglio descritta da ognuno dei modelli. Infine si indichi per quale dei modelli si ottiene il maggior possibile valore di R^2.



Modello	No. gradi libertà usati	Pannello
fitNull		
fitC		
fitF		
fitCF		
fitCFint		

- Il modello per cui si ottiene il maggior valore di R^2 è ________________

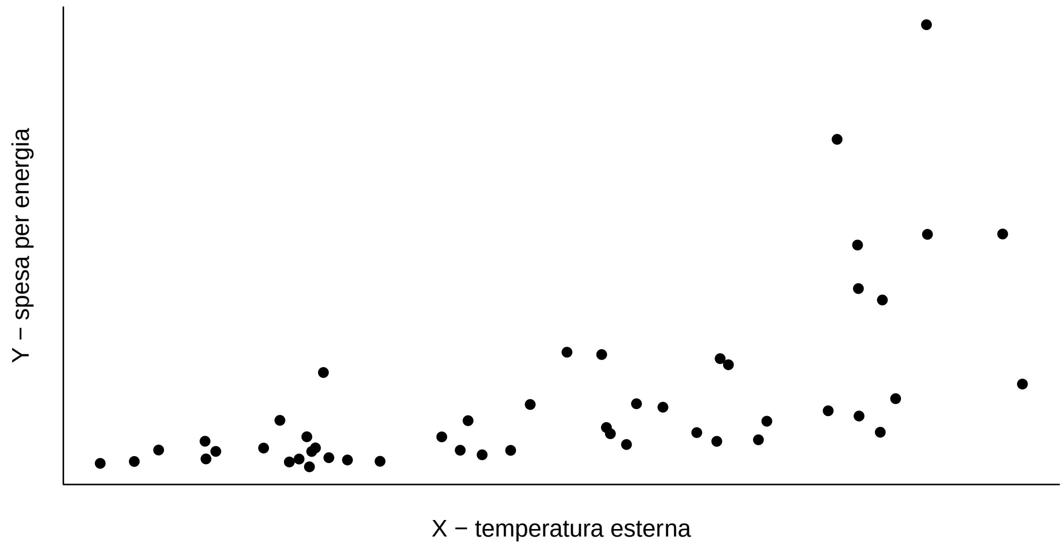
Solution:

Modello	No. gradi libertà usati	Pannello
fitNull	1	B
fitC	2	E
fitF	3	C
fitCF	4	A
fitCFint	6	D

Più aumenta la complessità di un modello (in termini di numero di parametri stimati) più aumenta la variabilità spiegata dal modello, con il rischio di sovradattamento (overfitting). Il valore di R^2 più alto verrà qiondi trovato per il modello più complesso, in questo caso `fitCFint`.

Question 3 (3 points)

Una società che gestisce svariati data-centers desidera indagare la relazione tra temperatura esterna ed il costo legato alla spesa per mantenere le sale macchine entro determinati valori di temperature. La relazione tra le due variabili, misurata in un campione casuale di 49 giornate in diversi data-centers, è mostrata nel grafico sottostante:



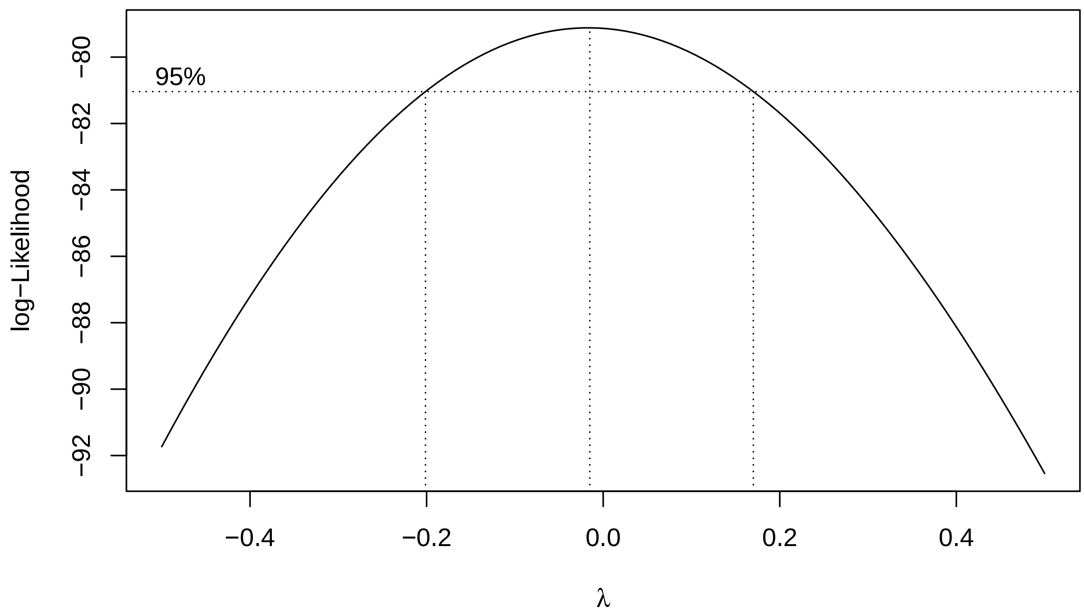
L'analista incaricato di analizzare i dati desidera usare un modello lineare semplice per costruire un primo modello predittivo, ma ritiene necessario, prima di procedere alla stima del modello, utilizzare una trasformazione di Box-Cox per trasformare la variabile risposta.

Nota: la trasformazione di Box Cox è definita come segue:

$$y_\lambda = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log(y) & \lambda = 0 \end{cases}$$

```
bctransf <- MASS::boxcox(y~x, data = df, lambda = seq(-0.5,0.5, by=0.05))
bctransf$x[which.max(bctransf$y)]
```

```
[1] -0.01515152
```

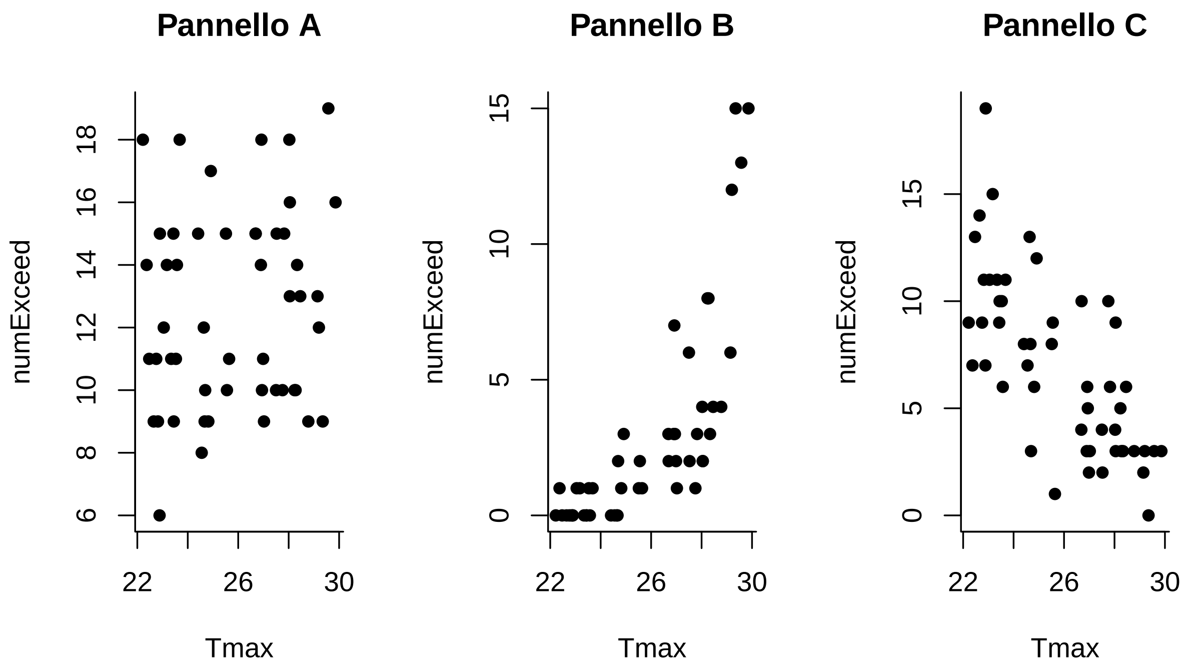


Si indichi se la scelta dell'analista di trasformare la variabile risposta sembra essere ragionevole, esplicitando le possibili motivazioni a favore o contro la scelta dell'analista.

Si indichi poi cosa si può evincere dall'output ottenuto dalla funzione `MASS::boxcox`: quale è la trasformazione che potrebbe venire applicata alla variabile risposta?

Solution: Nel grafico dei dati è evidente che i residui di un ipotetico modello lineare non sarebbero omoschedastici (la varianza di Y cresce al crescere di X). Si nota anche una tendenza verso delle code piuttosto pesanti, con la possibilità di residui piuttosto grandi(in valore assoluto) per valori grandi di X. Una trasformazione della variabile risposta potrebbe risultare in una relazione tra X e la trasformazione di Y per cui l'assunzione di normalità e omoschedasticità degli errori sia riscontrabile nei residui del modello. Sebbene il valore massimo della trasformazione di Box-Cox non sia esattamente 0, ma un valore leggermente inferiore, il valore di $\lambda = 0$ rientra nell'intervallo di confidenza derivato dalla funzione: scegliere una trasformazione logistica per Y potrebbe risultare in un modello relativamente facile da interpretare per la variabile trasformata.

Question 4 (3 points)
Una società che gestisce svariati data-centers monitora il numero di volte in una giornata in cui la temperatura nel data center eccede per più di 10 minuti un determinato limite. Si desidera indagare il possibile effetto della temperature massima registrata all'esterno del data-center (`Tmax`) sul numero di eccedenze del limite (`numExceed`). Le informazioni sulle due variabili sono registrate in un campione di 50 giornate estive in diversi data-center. I dati sono mostrati nella Figura sottostante e vengono fornite alcune statistiche riassuntive:




```
summary(df)

      Tmax         numExceed
 Min.   :22.22   Min.   : 0.00
 1st Qu.:23.47   1st Qu.: 0.00
 Median :25.60   Median : 1.50
 Mean   :25.80   Mean   : 2.88
 3rd Qu.:27.98   3rd Qu.: 3.00
 Max.   :29.86   Max.   :15.00
```

Per indagare la relazione tra temperatura e il numero di eccedenze viene usato un modello lineare generalizzato con una distribuzione Poisson per la variabile risposta e la funzione legame canonica:

```
fit <- glm(numExceed~Tmax, data = df, family = poisson())
summary(fit)
```

```
Call:
glm(formula = numExceed ~ Tmax, family = poisson(), data = df)
```

```
Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.8386  -0.9016  -0.5114   0.7526   2.2815

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -14.2600     1.5382  -9.271   <2e-16 ***
Tmax          0.5646     0.0546  10.341   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 213.182  on 49  degrees of freedom
Residual deviance:  50.331  on 48  degrees of freedom
AIC: 157.24

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

(i) Si indichi quale dei pannelli nella Figura nella pagina precedente è più probabile mostri i dati usati del dataset `df` usato per stimare il modello. Pannello __________

(ii) Si scriva in forma esplicita il modello che viene stimato usando la funzione `glm`:

Solution: Pannello B: la relazione stimata indica che al crescere della temperatura crescono il numero di eccedenze.

Il modello stimato può essere scritto come:

$$(numExceed|Tmax = t) \sim Pois(\lambda(t))$$

dove $\lambda(t) = \exp\{\beta_0 + \beta_1 t\}$. [NB: questo non è l'unico modo in cui il modello poteva essere scritto.]

Question 5 (3 points)
Una società che gestisce svariati data-centers desidera predirre in quali giornate è possibile che la temperatura massima nella sala dei data-center ecceda un determinato livello considerato a rischio. Vengono quindi raccolte per un campione di 73 giorni e data-centers svariate informazioni su caratteristiche meteorologiche all'esterno del data-center e l'informazione binaria se la temperatura massima ha superato il livello pre-determinato.

```
table(df$highTemp)
```

```
 0  1
30 43
```

```
fit1 <- glm(highTemp ~ Tmean, data = df, family = binomial())
coef(fit1)
```

```
(Intercept)       Tmean
       -3.0         0.2
```

```
deviance(fit1)
```

```
[1] 80.31498
```

Si usa poi il modello `fit1` per stimare la probabilità che in due giornate venga ecceduto il limite che indica una alta temperatura nella sala:

```
nd <- data.frame(Tmean = c(20,25))
rownames(nd) <- c("giorno 1", "giorno 2"); nd
```

```
         Tmean
giorno 1    20
giorno 2    25
```

```
predict(fit1, newdata = nd)
```

```
[1] NA NA
```

Infine si costruisce un modello in cui tutti i predittori sono usati:

```
fitAll <- glm(highTemp ~ ., data = df, family = binomial())
```

```
coef(fitAll)
```

```
(Intercept)       Tmean         wind    relHumid sunshineHrs
    -0.8100      0.2300      -0.1700     -0.0067     -0.1200
```

```
deviance(fitAll)
```

```
[1] NA
```

(i) Come si può interpretare il valore del coefficiente β_{Tmean} per il modello `fit1`?

(ii) Usando il modello `fit1` si fornisca una stima della probabilità che nel "giorno 1" la temperatura massima ecceda il limite di temperatura predefinito (si indichi cioè il primo valore mancante dell'output di `predict`)

(iii) Si indichi se la probabilità che la temperatura massima ecceda il limite di temperatura predefinito è più alta per il "giorno 1" or il "giorno 2" (usando il modello `fit1`)

(iv) Si indichi se è possibile sapere quale dei modelli tra `fit1` e `fitAll` ha devianza maggiore. In caso affermativo si indichi quale dei modelli ha devianza maggiore.

Solution:

(i) Il valore di β_{Tmean} indica di quanto cambia il valore del predittore lineare al crescere di una unità di `Tmean`: in questo caso in due giorni la cui temperatura media differisce di un grado la differenza nel valore del predittore lineare è di 0.2. Questo si traduce in un effetto sulla probabilità che venga superata la soglia di temperatura tramite l'inverso della funzione logit.

(ii)

$$\exp\{-3 + 0.2 * 20\}/(1 + \exp\{-3 + 0.2 * 20\}) = 0.73$$

```
binomial()$linkinv(-3+0.2*20)

[1] 0.7310586
```

(iii) Dato che l'effetto di Tmean è di aumentare la probabilità di eccedere il limite, il giorno in cui la temperatura media è di 25 gradi vi sarà una più alta probabilità che venga sorpassato il limite. $P(Y = 1|X = 25) > P(Y = 1|X = 2)$.

```
binomial()$linkinv(-3+0.2*25)

[1] 0.8807971
```

(iv) Modelli più complessi tendono sempre ad adattarsi meglio ai dati e di conseguenza a far diminuire la devianza: dato che `fit1` è meno complesso di `fitAll` questo avrà devianza maggiore.