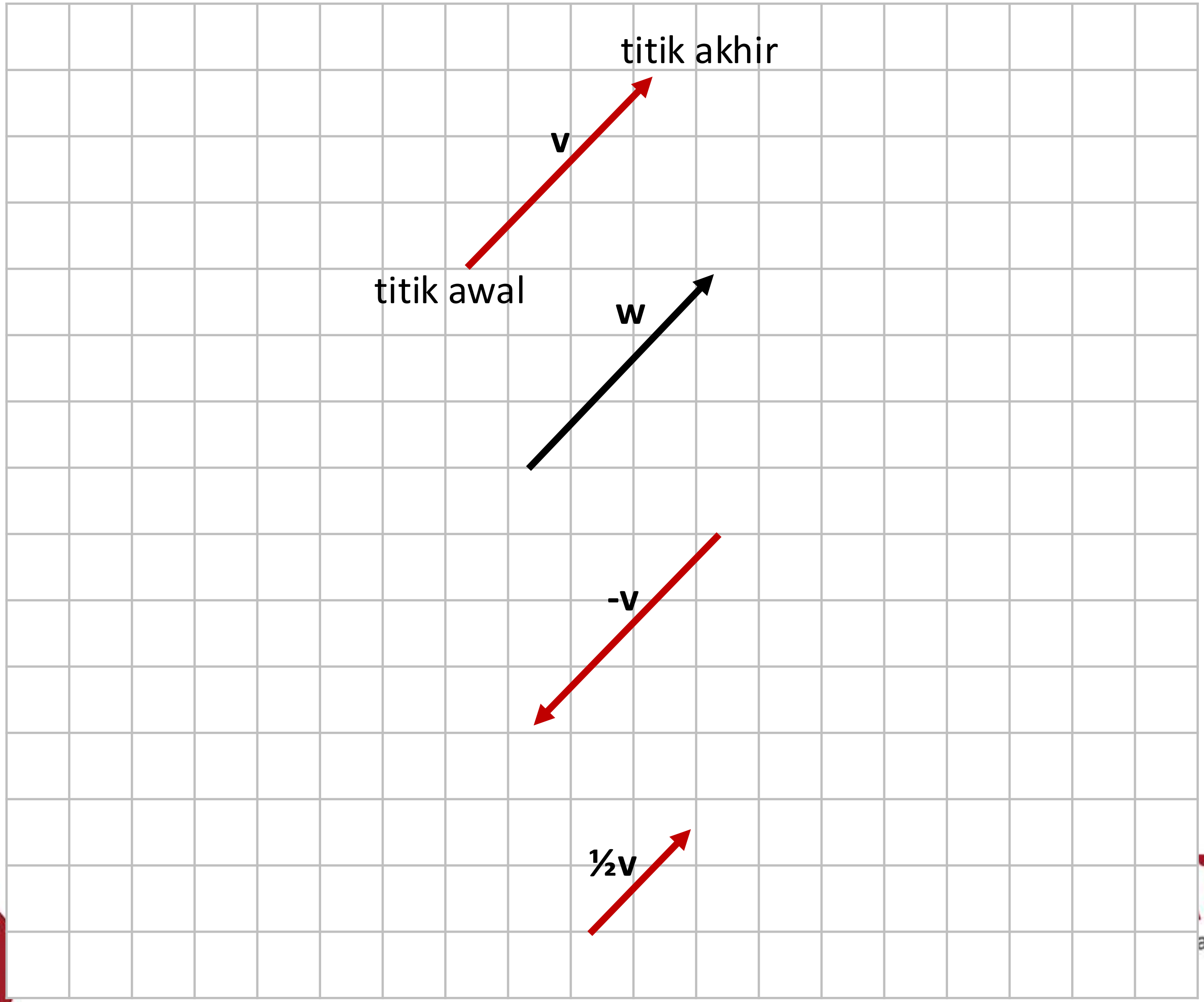
VEKTOR

TK13023
COMPUTATION II

DOSEN: LELY HIRYANTO

Pengenalan Vektor

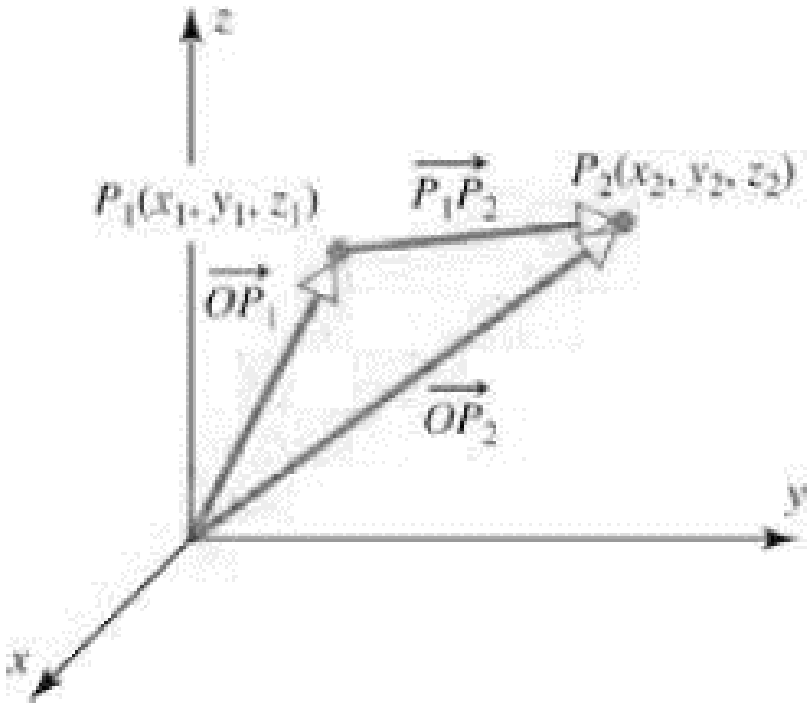
Apa itu Vektor?



- Nama vector: huruf kecil dan tebal
- Dapat digambarkan secara geometris
- **v** dan **w** disebut equivalent:
  - ✓ Ukuran dan arah sama
  - ✓ Titik awal dan titik akhir bisa berbeda

Komponen Vektor

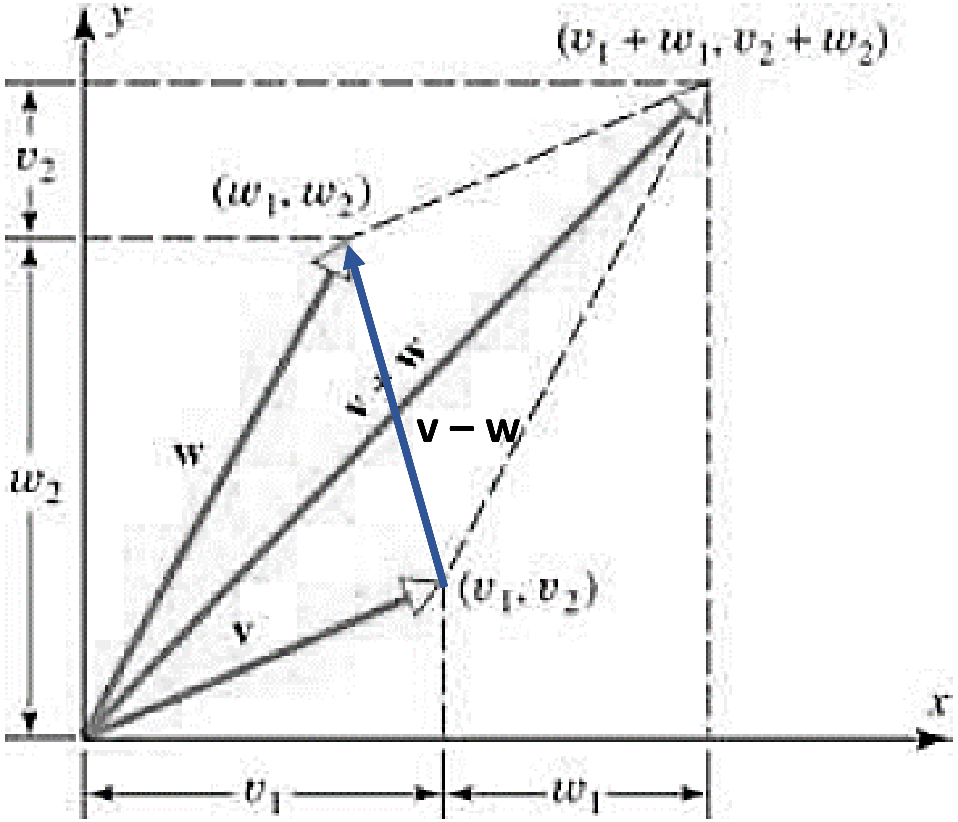
- Vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - Z_1)$



Koordinat Vektor di Ruang 2

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{and} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$



DONESIA

Koordinat Vektor di Ruang 3

- Menggunakan right handed coordinate systems
- $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

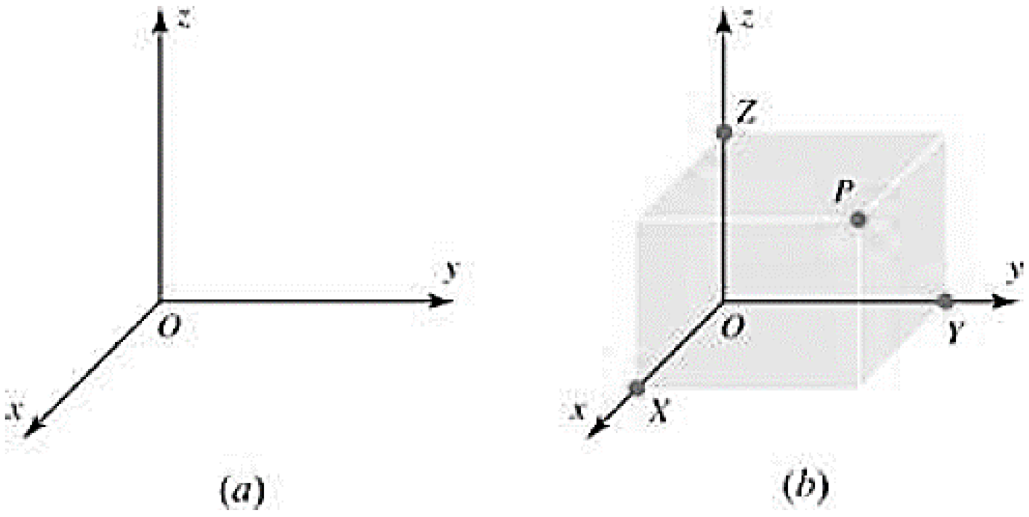


Figure 3.1.9

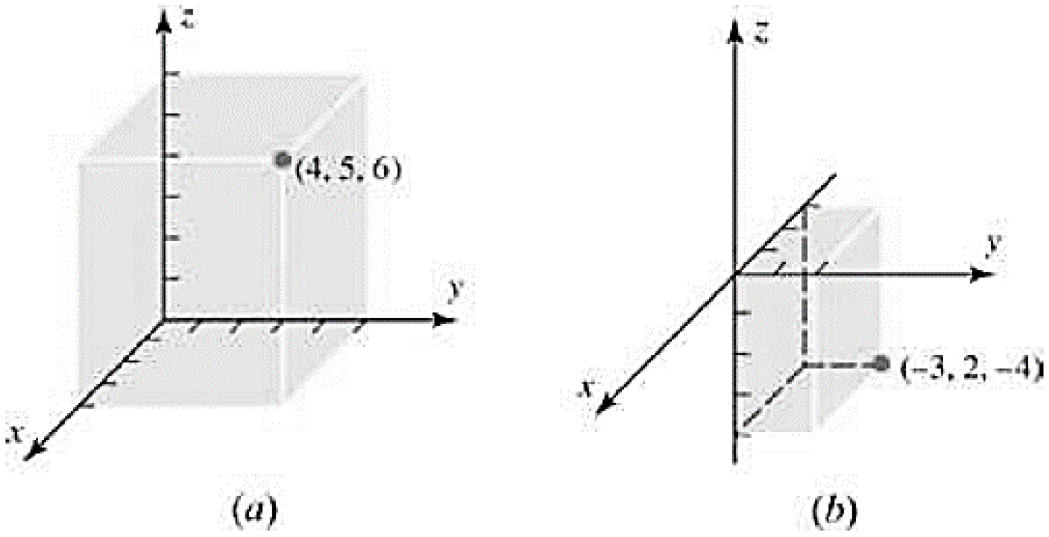


Figure 3.1.10

Vektor di ruang R^n

- Definisi : n adalah bilangan integer positif, maka R^n adalah sebuah himpunan yang berisikan "tuple–n ordened" yaitu $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$
- Contoh :
  - R^2 => (2, 1)
  - R^3 => (-7,3,4)

Operasi Vektor

- Untuk sembarang vektor **u**, **v** dan **w** di R^2 atau R^3 dan sembarang skalar *k* dan *l* maka berlaku

a) **u** + **v** = **v** + **u**

b) **u** + 0 = 0 + **u** = **u**

c) k(l**u**) = (kl)**u**

d) (k+l)**u** = k**u** + l**u**

e) (**u**+**v**)+**w** = **u**+(**v**+**w**)

f) **u** + (-**u**) = 0

g) k(**u**+**v**) = k**u** + k**v**

h) 1**u** = **u**

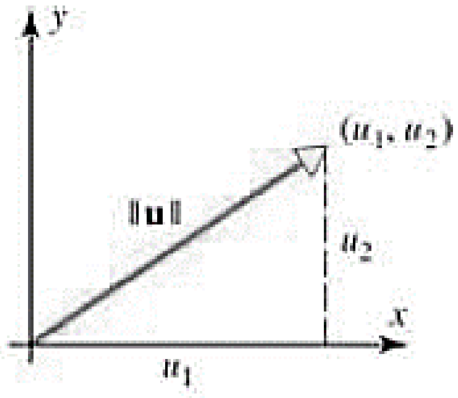
Norm

Norm dari Sebuah Vektor: Aritmatika dari Vektor

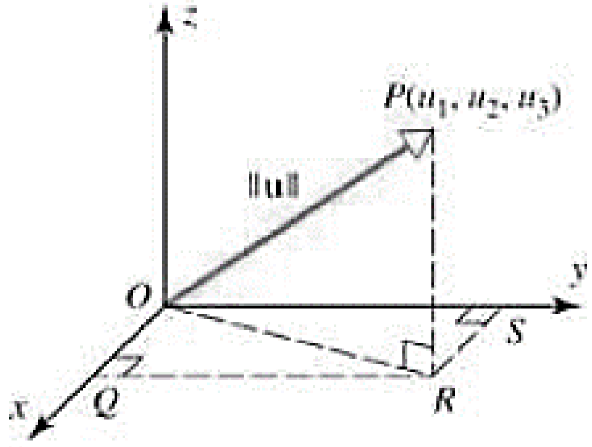
- Panjang dari sebuah vektor v disebut sebagai norm dari $\mathbf{v}$ yang dinotasikan sebagai $\|v\|$
  - titik awal di 0 untuk setiap sumbu
- Untuk vector di ruang R^n:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

- $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$
- Contoh: norm dari vektor $\mathbf{v} = (-3,2,1)$:
  - $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$



(a)



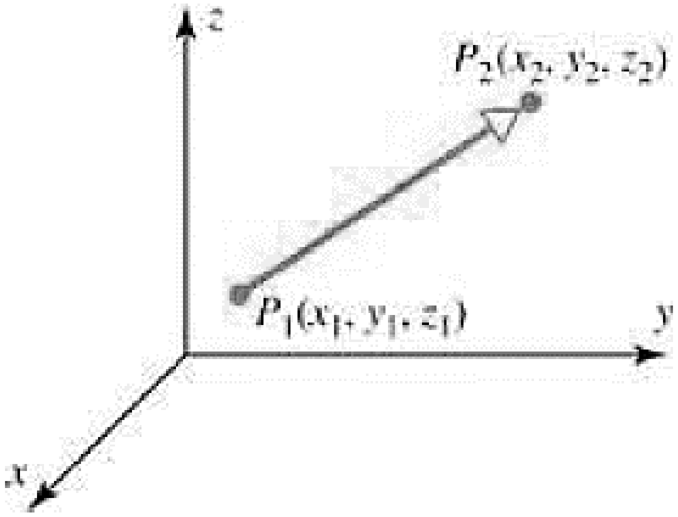
(b)

Jarak dari Sebuah Vektor

- Jarak dari sebuah vektor jika diketahui titik awal dan akhir dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ di ruang R^3 yaitu $P_1(x_1, y_1\,, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2\,, z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

  - ruang R^2: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



- Contoh: Jarak d antara titik $P_1(2, -1, -5)$ dan $P_2(4, -3, 1)$
  - $d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = \sqrt{(4)(11)} = 2\sqrt{11}$

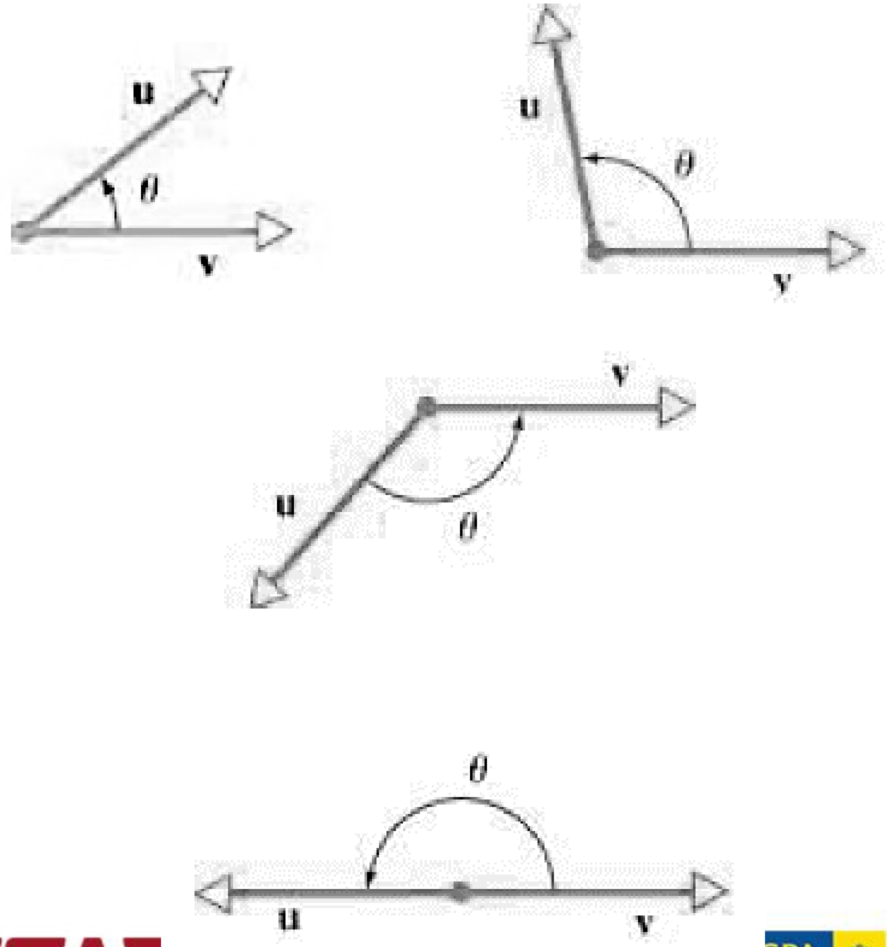
Dot Product

Dot Product dari Sebuah Vektor: Proyeksi

- Diketahui:
  - Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di ruang R^2 atau R^3,
  - Titik awal dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ saling berhimpit, dan
  - θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
- **Dot product** atau Euclidean inner product $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta & \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & \mathbf{u} = 0, \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi; \qquad \pi = 180$$



Dot Product berdasarkan Komponen Vektor

- Diketahui:
  - Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di ruang R^2 atau R^3,
  - Titik awal dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ saling berhimpit, dan
  - θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
- **Dot product** berdasarkan komponen $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di R^2dan R^3:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 \qquad \text{untuk } R^2$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \qquad \text{untuk } R^3$$

- Untuk mencari sudut antara dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0$):

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||}$$

Contoh menghitung dot product

- Tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk
  - $\mathbf{u} = (0,0,1)$ dan $\mathbf{v} = (0,2,2)$ dan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah 45º:
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\right)\cos(45) = 2$
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$
      - $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{2}{(1)(\sqrt{8})}$; $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right) = 45$
  - $\mathbf{u} = (2,-1,1)$ dan $\mathbf{v} = (1,1,2)$ dan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah 60º:
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\right)\cos(60) = 3$
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$
      - $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{3}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})}$; $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 60$

ICAEW CHARTERED ACCOUNTANTS

Jenis Sudut Hasil Dot Product

- θ adalah sudut tumpul ($90^{\mathrm{o}} < \theta < 180^{\mathrm{o}}$) => $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- θ adalah sudut lancip ($0^{\mathrm{o}} < \theta < 90^{\mathrm{o}}$) => $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^{\mathrm{o}}$ => $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
  - $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ disebut vektor orthogonal ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$)

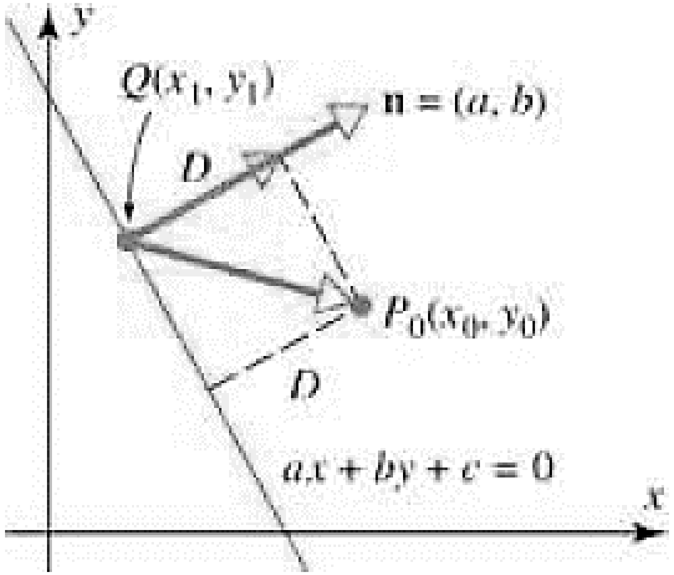
Sifat Dot Product

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
b. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
c. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
d. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq 0$
e. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ jika $\mathbf{v} = 0$

Jarak antara Titik dan Garis Lurus

- Jika diketahui dua titik $P_0(x_0, y_0)$ dan $Q(x_1, y_1)$ di ruang R^2, dimana Q terletak di garis $ax + by + c = 0$, maka jarak antara P_0:

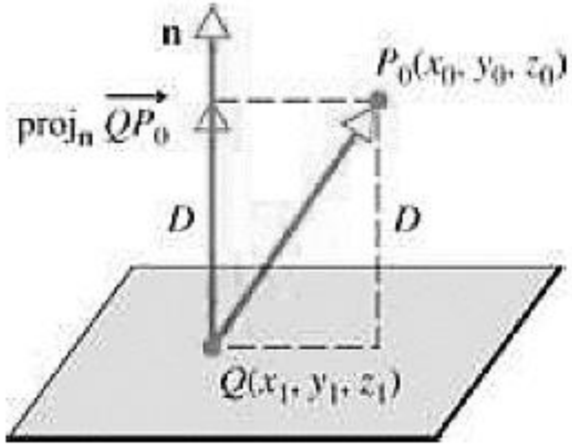
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



- Contoh: jarak antara titik $(1, -2)$ dan garis $3x + 4y - 6 = 0$

$$D = \frac{|(3)(1) + (4)(-2) - 6|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

Jarak antara Titik dan Bidang



- Jarak antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan bidang $ax + by + cz + d = 0$, maka jarak antara P_0 dengan persamaan bidang:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Contoh: hitung jarak D antara titik $(1, -4, -3)$ dan bidang $2x - 3y + 6z = -1$

$$D = \frac{|(2)(1) + (-3)(-4) + (6)(-3) + (1)|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

Jarak Antar Bidang

- Jika diketahui dua bidang paralel $x + 2y - 2z = 3$ dan $2x + 4y - 4z = 7$, maka jarak antara dua bidang dihitung dengan:
  1. Menentukan satu titik di salah satu bidang dengan mengasumsikan $y = z = 0$
     - $y = z = 0$ untuk $x + 2y - 2z = 3; x = 3$ dan $P_0(3,0,0)$
  2. Meghitung jarak $D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|(2)(3)+4(0)+(-4)(0)-7|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{1}{6}$

Cross Product

Dot Product vs Cross Product

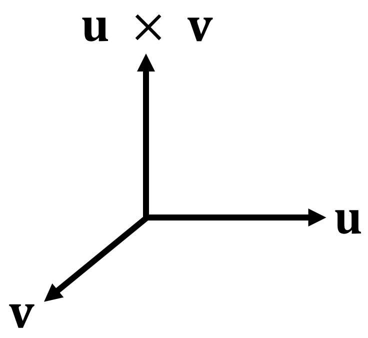
Dot Product

- Berlaku untuk vektor di ruang $R^2, R^3, \ldots, R^n$
- Hasil operasi adalah skalar (sebuah nilai)

Cross Product

- Berlaku untuk vektor di ruang R^3
- Hasil operasi adalah vektor

Definisi



- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor di ruang R^3, maka cross product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ adalah sebuah vector yaitu:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

- Contoh: tentukan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ untuk $\mathbf{u} = (1,2,-2)$ dan $\mathbf{v} = (3,0,1)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -7, -6)$$

Hubungan antara Cross Product and Dot Product

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor di ruang R^3, maka:

a. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ orthogonal dengan $\mathbf{u}$)

b. $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ orthogonal dengan $\mathbf{v}$)

c. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (Identitas Lagrange)

d. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

e. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

Properti dari Cross Product

a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

b. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

c. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

d. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

e. $\mathbf{u} \times 0 = 0 \times \mathbf{u} = 0$

f. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$

Referensi

- Baca detail asal semua formula untuk norm, dot product dan cross product dari referensi utama berikut:
  - Anton, Howard, and Chris Rorres. *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons, 2005.