



UNIVERSITÀ POLITECNICA DELLE MARCHE

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e dell'Automazione

**Controllo Robusto Vincolato di Carroponti Mirato  
alla Riduzione delle Oscillazioni Del Carico**

**A Robust Control Architecture for Minimizing the  
Oscillations in the Fast Response of a Gantry Crane  
Control System**

Relatore:

**Chiar.ma Prof.ssa Valentina  
Orsini**

Candidato:

**Pietro Bonsanto**

Correlatore:

**Prof. Leopoldo Jetto**

Anno Accademico 2020-2021



# Indice

<b>1</b>	<b>L'importanza dei Cranes in ambito Industriale</b>	<b>5</b>
1.1	Il Controllo di Carroponti	6
1.1.1	Specifiche di controllo	6
1.2	Tecniche di Controllo	6
1.2.1	Tecniche in Catena Aperta	6
1.2.2	Tecniche in Catena Chiusa	7
1.2.3	Tecniche di Controllo Ibride	9
1.2.4	Un Controllo in Retroazione Linearizzato	10
<b>2</b>	<b>Strumenti utilizzati per la realizzazione della Legge di Controllo</b>	<b>11</b>
2.1	Linear Matrix Inequalities	11
2.2	Complemento di Schur	11
2.3	Teorema di Lyapunov (T.D.)	11
2.4	Stabilizzazione Quadratica Con Retroazione dallo Stato (TD)	12
2.5	Stabilizzazione dall'Uscita mediante Osservatore Asintotico per un Processo Incerto (TD)	12
2.6	Set Invarianti ed Ellissoidi Invarianti	14
2.7	Progetto di una Legge di controllo stabilizzante in retroazione dallo stato massimizzando un ellissoide invariante	15
<b>3</b>	<b>Setup del Problema di Controllo</b>	<b>16</b>
3.1	Modello del Processo	16
3.2	Schema di Controllo	18
3.3	Vincoli sui parametri e Insiemi Invarianti per Processi Politopici	19
3.4	Sintesi del Controllore	20
<b>4</b>	<b>Risultati Numerici</b>	<b>22</b>
4.1	Stabilizzazione Quadratica	22
4.2	Stabilizzazione quadratica con vincolo sull'angolo di oscillazione	25
4.3	Stabilizzazione Quadratica con Vincolo sull'Angolo di Oscillazione e sullo Sforzo di Controllo	28
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>32</b>

## Elenco delle figure

1	Modello Carroponte	5
2	Schema a blocchi di un sistema di controllo con tecnica di controllo feedforward	7
3	Schema a blocchi di un sistema di controllo in Retroazione (feedback)	8
4	Schema a blocchi di un sistema di controllo con strategia di controllo Ibrida	9
5	Modello del Carroponte	17
6	Schema di controllo utilizzato per il modello	18

7	Angolo di oscillazione al variare di $\alpha$ nel caso di condizioni iniziali nulle . . . . .	23
8	Uscita forzata $y_L(k)$ al variare di $\alpha$ nel caso di condizioni iniziali nulle	23
9	Angolo di oscillazione $x_3(k)$ al variare di $\alpha$ nel caso di condizioni iniziali non nulle . . . . .	24
10	Uscita forzata $y_L(k)$ al variare di $\alpha$ nel caso di condizioni iniziali nulle.	24
11	Angolo di oscillazione $x_3(k)$ al variare di $\alpha$ con condizioni iniziali nulle.	25
12	Uscita forzata $y_L(k)$ al variare di $\alpha$ con condizioni iniziali nulle. . . .	26
13	Angolo di oscillazione $x_3(k)$ al variare di $\alpha$ con condizioni iniziali non nulle. . . . .	27
14	Uscita forzata $y_L(k)$ al variare di $\alpha$ nel caso di condizioni iniziali non nulle. . . . .	27
15	Angolo di oscillazione $x_3(k)$ al variare di $\alpha$ . . . . .	29
16	Uscita forzata $y_L(k)$ al variare di $\alpha$ . . . . .	29
17	Sforzo $u(k)$ per il sistema $\Sigma_f$ al variare di $\alpha$ . . . . .	30
18	Sforzo di controllo soggetto al vincolo al variare di $\alpha$ . . . . .	30
19	Sforzo di controllo $u(k)$ non vincolato al variare di $\alpha$ con condizioni iniziali non nulle. . . . .	31
20	Sforzo $u(k)$ vincolato al variare di $\alpha$ con condizioni iniziali non nulle.	31

## Sommario

Questa tesi si pone come obiettivo quello di presentare e modellare il problema di controllo di un carroponte. Come si vedrà in seguito, i carroponti sono dei sistemi molto complessi sia dal punto di vista del modello matematico, sia da un punto di vista di controllo di processo, in quanto presentanti pochi attuatori e quanti meno possibili sensori, in modo da abbattere i costi.

Generalmente il problema di controllo di carroponti presenta, tra le specifiche più significative, quelle relative alla minimizzazione dell'angolo di oscillazione e lo spostamento del carico, tramite il moto del carrello, in una posizione desiderata.

La tecnica di controllo presentata in questa tesi a due gradi di libertà (2 Degrees of Freedom, 2Dof), in linea con quanto detto, introduce come specifiche di controllo la minimizzazione dell'angolo di oscillazione e l'inseguimento a regime un gradino unitario, che si traduce nello spostamento del carrello dalla posizione 0 alla posizione 1; nonchè porre un vincolo sullo sforzo di controllo, garantendo contestualmente stabilità quadratica al sistema a ciclo chiuso e massimizzando l'insieme invariante al quale esso appartiene. Verrà proposta una strategia di controllo divisa in due step, allo scopo di risolvere il problema nel modo più semplice possibile e senza richiedere l'ausilio di soluzioni hardware. La suddivisione del problema principale in tre sottoproblemi di complessità crescente implica inoltre un approccio allo stesso dal caso più semplice a quello più complesso, facendo uso di strumenti propri della Teoria del Controllo. Verranno infine presentate delle simulazioni per ciascun sottoproblema, riguardanti l'uscita forzata e l'angolo di oscillazione (le variabili vincolate), allo scopo di dimostrare il successo della strategia di controllo.

# 1 L'importanza dei Cranes in ambito Industriale

Le gru sono dispositivi ampiamente utilizzati in ambito industriale per trasportare carichi pesanti o materiale pericoloso da un luogo ad un altro. I campi di applicazione di queste macchine sono molteplici, tra questi degni di nota sono industrie, cantieri e cantieri navali.

Esistono numerose tipologie di gru a seconda dell'ambito di utilizzo, ad esempio i ponti sopraelevati o carroponi, le gru a braccio e le gru rotanti. Macchine di questo tipo vengono classificate sulla base dei gradi di libertà che il meccanismo di supporto offre nel punto di sospensione. Il problema che si pone avendo a che fare con simili sistemi riguarda la necessità di minimizzare l'angolo di oscillazione del carico e di spostarlo in una posizione desiderata con un movimento della gru. Di fatto, un eventuale fallimento nel controllare l'angolo di oscillazione potrebbe implicare difficoltà nell'automazione del sistema di controllo, così come possibili danni al carico stesso o all'ambiente circostante.

Oggetto di questa tesi nello specifico è il controllo di Carroponi, una particolare tipologia di gru caratterizzate da una struttura singolare. Sono infatti composti da un carrello sopraelevato sorretto da gambe d'acciaio munite di ruote per muoversi. Il moto del carrello è vincolato verso destra e sinistra tramite dei binari posti sulla trave sopraelevata, montata in posizione ortogonale su di un ponte supportato dalle gambe d'acciaio. Data la struttura e le sue caratteristiche, una gru di questo tipo trova largo impiego in cantieri navali, fabbriche e grandi magazzini. Il sistema, progettato per lavorare ad altezze elevate, presenta due gradi di libertà.

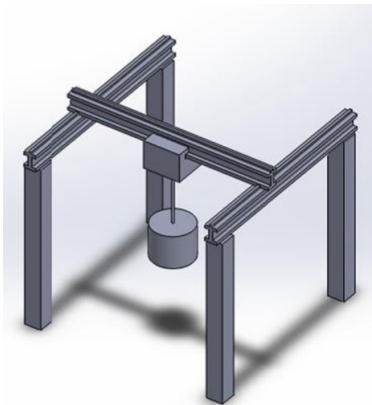


Figura 1: Modello Carroponi

## 1.1 Il Controllo di Carroponti

In seguito vengono fornite indicazioni generali riguardo le specifiche nonché le tecniche di controllo per sistemi poc'anzi descritti.

### 1.1.1 Specifiche di controllo

Il controllo di carroponti, nel caso più generale, presenta numerosi problemi e numerose specifiche di controllo da soddisfare per garantire il comportamento desiderato. Nella maggior parte dei casi le gru, e nello specifico i carroponti, sono considerati dei sistemi sotto-attuati, in quanto dotati di un numero di attuatori inferiore al numero di gradi di libertà. Questa scelta è dettata dalla necessità di ridurre il costo, la complessità, le dimensioni e soprattutto il peso degli stessi. Tale compromesso tuttavia implica una difficoltà nel controllo, anche a causa delle complesse dinamiche di macchine così composite.

Come già anticipato in precedenza, l'obiettivo principale nel controllo di carroponti è quello di conseguire un corretto spostamento del carrello in una posizione desiderata mantenendo le oscillazioni del carico quanto più piccole possibile, così da poterlo muovere nel minore tempo possibile fino a destinazione senza oscillazioni troppo pronunciate o addirittura senza oscillazioni. Un altro elemento da tenere in considerazione è il comportamento oscillatorio del carico stesso, paragonabile a quello di un pendolo semplice: l'operatore potrebbe essere costretto a rallentare fino a fermare il movimento del carroponte nel caso di oscillazioni troppo pronunciate che potrebbero ostacolare il corretto funzionamento del sistema di controllo. Inoltre un ulteriore fattore da tenere in considerazione è la capacità di sollevamento del carroponte, strettamente connessa al fenomeno di oscillazione del carico.

## 1.2 Tecniche di Controllo

Allo scopo di ottenere prestazioni accettabili e soddisfare le specifiche di controllo, esistono numerose tecniche di controllo per i carroponti, divisibili principalmente in tecniche in catena aperta e tecniche in catena chiusa.

### 1.2.1 Tecniche in Catena Aperta

Gli schemi di controllo in catena aperta vantano applicazioni numerose principalmente atte al controllo dell'oscillazione del carico. Facili da implementare, queste soluzioni non necessitano dell'ausilio da parte di sensori addizionali per misurare l'angolo di oscillazione, permettendo di abbattere i costi; il problema principale tuttavia è che una tecnica di questo tipo è molto sensibile ai disturbi esterni.

#### *Input shaping*

Un esempio è la tecnica 'input shaping', basata sul controllo in avanti e implementata per minimizzare i movimenti indotti dalle vibrazioni o le oscillazioni delle strutture flessibili caratterizzanti i carroponti. Grazie a questa soluzione le vibrazioni del sistema sono ridotte tramite la convoluzione del segnale in ingresso con una sequenza di impulsi basati sulle pulsazioni naturali e sui coefficienti di smorzamento del sistema. Oltre alla sensibilità ai disturbi e alle variazioni dei parametri,

questa tecnica necessita che l'angolo di oscillazione iniziale sia nullo, altrimenti si incorrerebbe in un progressivo aumento delle oscillazioni stesse.

Un'altra caratteristica di questa strategia risiede nel fatto che è sviluppata basandosi su parametri fissi del sistema. Questo, nel caso di sistemi tempo varianti o affetti da incertezza parametrica, nei quali la pulsazione naturale e il coefficiente di smorzamento variano, implica la necessità di una tecnica input shaping in grado di adattarsi a tale variazione. Una soluzione di questo tipo prende il nome di adaptive input shaping.

#### *Adaptive Input Shaping*

Come anticipato, la maggior parte delle tecniche di controllo input shaping si basa su parametri del sistema fissi; questo comporta problematiche quando si opera con sistemi tempo varianti o soprattutto sistemi affetti da incertezza parametrica, come nel caso di operazioni di sollevamento di carico dal peso variabile. Le tecniche di controllo adaptive input shaping sono nate proprio nel tentativo di affrontare il problema degli effetti del carico e nello specifico il problema dell'incertezza parametrica che ne deriva. Una soluzione possibile propone una strategia che cerca di ridurre le vibrazioni dei sistemi attraverso la modifica del segnale in ingresso agli stessi. Il campo di applicazione di questa metodologia si limita principalmente ai sistemi lineari o a modelli linearizzati di sistemi non lineari.

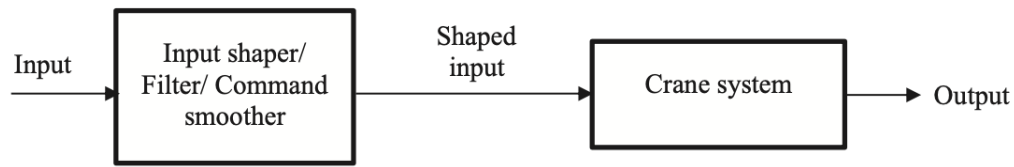


Figura 2: Schema a blocchi di un sistema di controllo con tecnica di controllo feedforward

### **1.2.2 Tecniche in Catena Chiusa**

Gli svantaggi principali derivanti dall'utilizzo di tecniche in catena aperta consistono nell'incapacità di assicurare reiezione ai disturbi e in un'elevatissima sensibilità alla variazione dei parametri; per sopperire a questa mancanza si utilizzano schemi di controllo in catena chiusa (feedback control). Uno schema di questo tipo permette al sistema di modificare le proprie prestazioni basandosi sul comportamento desiderato in uscita: utilizza la misura e la stima dello stato interno per ridurre le oscillazioni e conseguire un accurato posizionamento per il carrello.

#### *Controllori PID*

Una delle tecniche di controllo lineari in retroazione reiteratamente implementate per i carroponti è data dal controllo Proporzionale Integrativo e Derivativo (PID). Numerosi esempi di una simile applicazione sono presenti in letteratura, tra cui le tecniche di sintesi mediante il Luogo delle Radici; inoltre, controllori basati esclusivamente sull'azione Proporzionale e Derivativa (PD) vengono utilizzati per controllare l'angolo di oscillazione, grazie alla loro capacità di contrastare i problemi di oscillazione.



La maggior parte degli esempi presenti in letteratura annoverano applicazioni dei PID assieme ad altre tecniche di controllo, o, come anticipato, utilizzando esclusivamente due tipologie di controllori PID per controllare l'angolo di oscillazione.

*Controllo Ottimo* Il controllo ottimo è una strategia in cui un segnale di controllo ottimizza un dato indice di costo. Inizialmente pensata per essere implementata per soluzioni in catena aperta, questa strategia vanta numerose applicazioni in catena chiusa. Esistono due tipologie di controllo ottimo regolarmente applicate in ambito industriale:

- Controllo Lineare Quadratico Gaussiano (LQG), largamente implementato per ridurre le oscillazioni del carico nel caso dei carroponti;
- Controllo Predittivo (MPC), diventato nel corso degli ultimi anni uno degli algoritmi di controllo multivariabile più utilizzati grazie ai vantaggi che apporta nel caso di vincoli sui parametri caratterizzanti il sistema. La maggior parte delle implementazioni del controllo predittivo si focalizza sul controllo della posizione del carico e sulla riduzione dell'angolo di oscillazione.

#### *Controllore in Logica Fuzzy*

I controllori basati sulla logica fuzzy (FLC) sono largamente implementati in quanto vantano una forte adattabilità ai sistemi di controllo e soprattutto non è necessaria la conoscenza del modello del processo, di fatto andando incontro alle numerose difficoltà riscontrate nella formulazione di modelli sempre più complessi come quelli dei carroponti. Un altro vantaggio di un FLC consiste nel fatto che questo sostituisce il ruolo del modello matematico con un modello fuzzy basato sulla logica 'se-allora'. Infine, questi controllori sono adatti anche a gestire sistemi instabili e/o non lineari e con problemi di controllo ottimo. L'implementazione di un FLC riguarda principalmente il controllo della posizione del carrello e dell'angolo di oscillazione del carico, utilizzando controllori robusti in retroazione, eventualmente implementabili anche assieme a dei sensori.

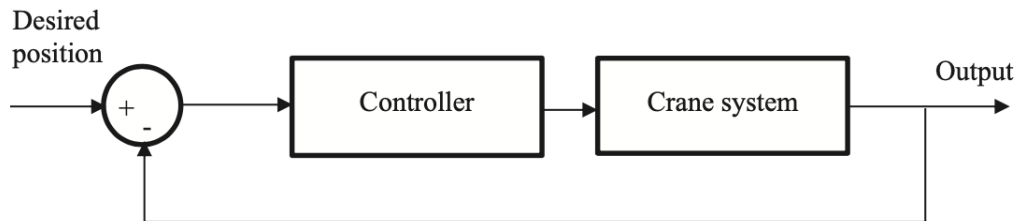


Figura 3: Schema a blocchi di un sistema di controllo in Retroazione (feedback)

### 1.2.3 Tecniche di Controllo Ibride

Gli schemi di controllo in catena aperta presentati risultano eccessivamente sensibili alle variazioni dei parametri e soprattutto ai disturbi esterni e sono molto sensibili alla frequenza di oscillazione del carico. Inoltre, nel caso della tecnica input shaping, il valore iniziale dell'angolo di oscillazione deve necessariamente essere nullo, altrimenti causerebbe intensificazioni delle oscillazioni stesse. Nonostante questi problemi, una tecnica simile è a basso costo in quanto non sono richiesti sensori aggiuntivi per la misura dell'oscillazione. D'altra parte gli schemi di controllo in catena chiusa risultano meno sensibili alle variazioni dei parametri e ai disturbi agenti sul sistema; tuttavia uno schema siffatto necessita molteplici sensori per determinare la posizione del carrello, così come l'angolo di oscillazione, il che si traduce in un sensibile aumento dei costi. Per di più nel caso di schemi di controllo in retroazione, i problemi dati da eventuale instabilità e disturbi aumentano, implicando numerosi rischi per sistemi di controllo delle dimensioni di un carroponete. Un'ulteriore criticità è la presenza di ritardo nel ramo di retroazione: un esempio è dato dal caso in cui la determinazione dell'angolo di oscillazione del carico è richiesta prima dell'azione dello schema di controllo per conseguire un'attenuazione delle oscillazioni. Per contemperare la necessità di mantenere bassi i costi con quella di garantire buone prestazioni a regime, sono state sviluppate tecniche ibride che prevedono l'implementazione contestuale di soluzioni in catena aperta e in catena chiusa. Una combinazione di questo tipo permette al controllore di agire in 3 diversi modi:

1. Un primo schema di controllo in retroazione permette di controllare la posizione del carrello;
2. Un secondo schema in retroazione assicura reiezione ai disturbi;
3. La tecnica di input shaping in catena aperta riduce le oscillazioni del carico.

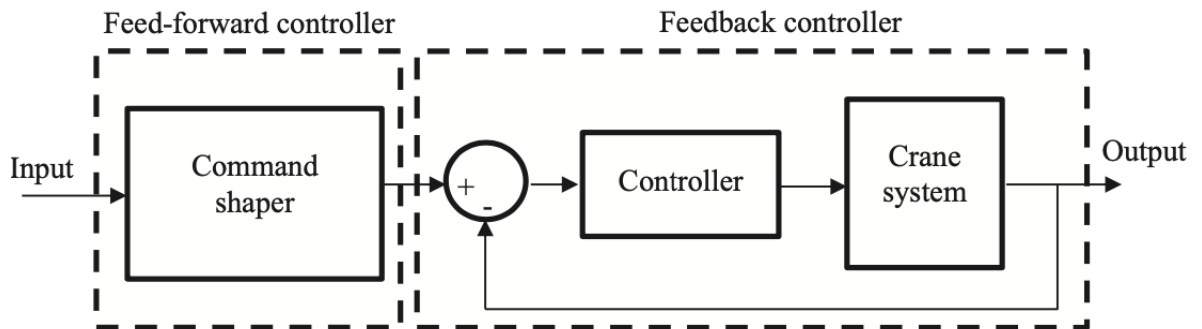


Figura 4: Schema a blocchi di un sistema di controllo con strategia di controllo Ibrida

#### 1.2.4 Un Controllo in Retroazione Linearizzato

Entrando nello specifico, in questa tesi la strategia adottata prevede un controllo in retroazione basato su un modello linearizzato. Uno schema di questo tipo garantisce i vantaggi del controllo in retroazione quali reiezione ai disturbi e bassa sensibilità alla variazione dei parametri, senza inoltre la necessità di implementare sensori per ottenere una misura dell'angolo di oscillazione, abbattendo quindi i costi. Questo grazie all'utilizzo di un controllore basato sull'osservatore asintotico che permette di produrre una legge di controllo grazie alla stima dell'angolo di oscillazione. Si parla invece di linearizzazione poichè la relazione che lega la posizione del carico all'angolo di oscillazione non è lineare, necessita quindi una linearizzazione preliminare.

La strategia di controllo proposto in questa tesi è articolata in due fasi:

- Fase 1. Dato un modello linearizzato e discretizzato del carroponte, dotato di un modello interno in accordo con l'omonimo principio, si progetta un controllore in retroazione basato sull'osservatore asintotico a tempo discreto in grado di assicurare stabilità quadratica al sistema in catena chiusa. L'osservatore fornisce una misura virtuale (stima) dell'angolo di oscillazione rendendo il sensore superfluo, mentre il modello interno garantisce inseguimento di traiettoria a regime;
- Fase 2. Una volta fissata la matrice guadagno dell'osservatore, per la sintesi della matrice  $\tilde{K}$  si applica una sorta di principio di separazione, andando a riscrivere la matrice della dinamica estesa  $A_f(\alpha)$  come  $\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}\tilde{K}$ . La matrice guadagno sarà quindi calcolata in modo tale da assicurare stabilità quadratica alla terna di matrici  $(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}\tilde{K}, B_f, C_f)$  e massimizzando l'insieme invariante  $X$ .

La sintesi del controllore basato sull'osservatore e sul modello interno avviene inoltre in 3 modalità differenti: in un primo momento si procede conseguendo la semplice stabilizzazione quadratica del sistema; successivamente verrà imposto un vincolo (upper bound) sull'angolo di oscillazione; infine si aggiungerà anche un vincolo sullo sforzo di controllo.

## 2 Strumenti utilizzati per la realizzazione della Legge di Controllo

In questa sezione vengono presentati alcuni risultati preliminari della teoria del controllo, necessari per comprendere passi fondamentali in seguito riportati.

### 2.1 Linear Matrix Inequalities

Le Linear Matrix Inequalities (LMI) rappresentano strumento utile per il progetto di controllori robusti. Una LMI non è altro che una disuguaglianza matriciale strettamente connessa alla teoria di Lyapunov. In seguito una definizione formale:

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i > 0, F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^N$$

### 2.2 Complemento di Schur

Trasforma una disuguaglianza non lineare in una disuguaglianza lineare. Date le matrici  $Q = Q^T > 0, R = R^T > 0$

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} < 0 \iff Q < 0, R - S^T Q^{-1} S < 0$$

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} < 0 \iff R < 0, Q - S R^{-1} S^T < 0$$

### 2.3 Teorema di Lyapunov (T.D.)

Il teorema di Lyapunov asserisce che dato un sistema dinamico  $x(k+1) = Ax$ , l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se e solo se

$$\exists Q = Q^T > 0 : A^T Q A - Q < 0$$

Il problema di stabilizzazione mediante retroazione dallo stato può essere risolto utilizzando il teorema di Lyapunov. Quest'ultimo consiste nel trovare una legge di controllo  $u = -Kx$  che stabilizzi il sistema in catena chiusa. A livello di LMIs avremo che  $x(k+1) = (A - BK)x(k)$  è stabile se

$$\exists Q = Q^T > 0 : (A - BK)^T Q (A - BK) - Q < 0$$

Applicando il complemento di Schur e definendo  $KY = Q$  si deriva la condizione:

$$\begin{pmatrix} -Q & AQ - BY \\ QA^T - Y^T B^T & -Q \end{pmatrix} < 0$$

La matrice K che definisce la legge di controllo sarà  $K = YQ^{-1}$

## 2.4 Stabilizzazione Quadratica Con Retroazione dallo Stato (TD)

Si parla di stabilizzazione quadratica quando la matrice della dinamica  $A$  è affetta da incertezza parametrica: in questo caso essa si denota con  $A(\alpha)$  dove con  $\alpha$  si identifica un vettore di parametri linearmente indipendenti che entrano nella matrice stessa, definiti all'interno di un intervallo di incertezza. La notazione sarà la seguente:

$$x(k+1) = A(\alpha)x, \alpha = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_l \end{pmatrix}, p_i \in [p^-, p^+]$$

Dove  $p^-$  e  $p^+$  sono gli estremi del dominio di incertezza del parametro incerto  $p$ . Tale parametro  $p$  incerto può essere rappresentato come combinazione lineare convessa degli estremi del dominio di incertezza:

$$p = \alpha p^- + (1 - \alpha) p^+, \alpha \in [0, 1]$$

Il semplice si definisce come segue:

$$\Lambda_N = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

$\alpha$  è il vettore di coefficienti della combinazione convessa.

Si dice che il sistema  $x(k+1) = A(\alpha)x + Bu$  è quadraticamente stabilizzabile se

$$\exists Q = Q^T > 0 : (A(\alpha) + BK)^T Q (A(\alpha) + BK) - Q < 0 \forall \alpha \in \Lambda_N$$

Il problema quando si ha a che fare con matrici affette da incertezza politopica è che è impossibile risolvere le LMIs per la matrice  $A(\alpha)$ , poichè si avrebbero infinite condizioni. La soluzione che si adotta è quella di utilizzare le condizioni ai vertici: anzichè risolvere le LMIs per tutti i valori di  $\alpha$  si risolvono nei vertici del politopo. In questo caso le condizioni particolarizzate ai vertici diventano, utilizzando il complemento di Schur:

$$\exists Q = Q^T > 0 : \begin{pmatrix} -Q & A_i Q \\ Q A_i^T & -Q \end{pmatrix} < 0 \forall i \in [1 \dots N]$$

## 2.5 Stabilizzazione dall'Uscita mediante Osservatore Asintotico per un Processo Incerto (TD)

Dato il processo

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)x(k) + Bu(k), A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha_i \in \Lambda_N \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Supposte soddisfatte le ipotesi di raggiungibilità della coppia  $(A(\alpha), B)$  e di osservabilità per la coppia  $(A(\alpha), C) \forall \alpha \in \Lambda_N$ , l'osservatore asintotico sarà descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = \hat{A}\xi(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\xi(k)) \\ u(k) = -K\xi(k) \end{cases}$$

Poichè nella sottodiagonale non è presente un blocco nullo, non è possibile applicare il principio di separazione, quindi bisogna procedere in altro modo, procedendo per step:

- Step 1: progetto della matrice  $L$  in modo che  $(A(\alpha) - LC)$  sia quadraticamente stabile;
- Step 2: Progetto della matrice  $K$  che definisce la legge di controllo  $u(t)$ , utilizzando le matrici estese:

$$\begin{pmatrix} \hat{A} - BK & LC \\ A(\alpha) - \hat{A} & A(\alpha) - LC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} & LC \\ A(\alpha) - \hat{A} & A(\alpha) - LC \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} (K \ 0) = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$$

Il problema a questo punto è risolto imponendo le opportune LMIs:

- Per il progetto di  $L$  le LMIs da imporre sono:

$$\exists S = S^T > 0 : \begin{pmatrix} -S & SA_i - ZC \\ A_i^T S - Z^T C^T & -S \end{pmatrix}, \forall i \in [1 \dots N]$$

dove  $L = ZS^{-1}$

- Per il progetto di  $K$ :

$$\begin{pmatrix} -Q & Q\tilde{A}_i^T + Y^T B^T \\ \tilde{A}_i Q + BY & -Q \end{pmatrix} < 0 \forall i \in [1 \dots N]$$

Dove occorre fornire un'opportuna struttura alle matrici:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} > 0, Q_1 = Q_1^T > 0, Q_2 = Q_2^T > 0, \\ Y = (Y_1 \ 0), \tilde{K} = (K \ 0) = YQ^{-1} = (Y_1 Q_1^{-1} \ 0)$$

## 2.6 Set Invarianti ed Ellissoidi Invarianti

Dalla teoria di Lyapunov è noto che dato un sistema dinamico

$$x(k+1) = Ax(k), x \in \mathbb{R}^n$$

si definisce invariante un insieme

$$M \subseteq \mathbb{R}^n$$

se vale che

$$\forall x(0) \in X \implies x(k+1) \in X$$

Per lo sviluppo di una legge di controllo adatta tuttavia è necessario ampliare la definizione, introducendo gli Ellissoidi Invarianti. Un insieme raggiungibile da ingressi limitati in norma viene utilizzato per studiare l'effetto di eventuali disturbi sui parametri o per sviluppare controllori che ne assicurino la reiezione a regime. Il metodo più diffuso per calcolare l'insieme raggiungibile per un sistema a tempo discreto consiste nel detectare le regioni che lo stato può raggiungere ricorsivamente. Tuttavia, una strategia di questo tipo presenta numerosi problemi; si rende quindi necessario approssimare l'insieme raggiungibile dall'esterno con un insieme con pochi parametri. Si approssima l'insieme raggiungibile da ingressi limitati in norma con un insieme invariante ellissoidale, grazie al fatto che quest'ultimo ricopre l'insieme raggiungibile ed è rappresentato da pochi parametri. Considerando un sistema a tempo discreto del tipo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), k \in \mathbb{Z}$$

con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ . Si definisce insieme invariante di una coppia di matrici (A,B) un insieme  $X$  che soddisfi

$$x \in X, \|\omega\| \leq 1 \implies Ax + Bu \in X$$

Supposto di avere una coppia (A,B), con  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , se esiste  $Q > 0$  l'ellissoide  $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q x \leq 1\}$  è un insieme invariante se per la coppia (A,B) se esiste  $\alpha \in [0, 1 - \rho(A)^2]$  che soddisfi

$$\begin{pmatrix} A^T P A - (1 - \alpha)P & A^T P B \\ B^T P A & B^T P B - \alpha I \end{pmatrix} \leq 0$$

## 2.7 Progetto di una Legge di controllo stabilizzante in retroazione dallo stato massimizzando un ellissoide invariante

Il motivo della scelta degli insiemi invarianti ellissoidali risiede anche nella loro connessione con le LMIs. L'implementazione degli insiemi invarianti durante la progettazione di controllori robusti permette infatti di massimizzare l'insieme invariante supponendo di avere ingressi, uscite e disturbi limitati in norma. Dato il processo

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + B_\omega \omega(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

con

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^l, \omega \in \mathbb{R}^{n_\omega}$$

e siano presenti i seguenti vincoli:

$$\|u\|_2 \leq u_{max}$$

$$\|y\|_2 \leq y_{max}$$

e posto che anche il disturbo sia limitato in norma:

$$\omega^T \omega \leq 1$$

Definito un insieme ellissoidale come segue:

$$E = \{x : x^T Q x \leq 1\}$$

con  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è possibile determinare una legge di controllo stabilizzante del tipo  $u = -Kx$  e contemporaneamente massimizzare l'insieme invariante risolvendo il seguente problema di programmazione semidefinita:

$$\max(\log(\det Q^{-1}))$$

soggetto ai vincoli:

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 & \alpha Q^{-1} & Q^{-1} A_i^T + Y^T B_i^T \\ 0 & \alpha I & 0 & B_\omega^T \\ \alpha Q^{-1} & 0 & \alpha Q^{-1} & 0 \\ A_i Q^{-1} + B_i Y & B_\omega & 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & Y^T \\ Y & u_{max}^2 I \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & (A_i Q^{-1} + B_i Y)^T C^T \\ C(A_i Q^{-1} + B_i Y) & y_{max}^2 I - C B_\omega B_\omega^T C^T \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\forall i \in [1 \dots N]$$

La matrice guadagno  $K$  che massimizza l'ellissoide invariante sarà  $K = YQ^{-1}$ .



### 3 Setup del Problema di Controllo

#### 3.1 Modello del Processo

In questa sezione viene fatto riferimento al carroponte in figura 1. Si denota con  $m_c$  la massa del carrello, con  $l$  la lunghezza della fune, con  $m_L$  la massa del carico, con  $x_1$  la posizione del carrello, con  $x_3$  l'angolo di oscillazione  $\theta$  e con  $u$  la forza applicata al carrello. La relazione che lega la posizione del carico all'angolo di oscillazione è non lineare, quindi è necessaria una linearizzazione: assumendo che l'angolo di oscillazione sia piccolo, si desume che  $\cos(x_3) \approx 1$ ,  $\sin(x_3) \approx x_3$ ,  $\sin^2(x_3) \approx 0$  e  $x_4^2 \approx 0$ . Definendo inoltre  $x_2 = \dot{x}_1$  e  $x_4 = \dot{x}_3$  il modello in spazio di stato linearizzato avrà il seguente vettore di stato:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

Prima di progettare il controllore, il processo richiede di essere discretizzato. Dopo aver scartato l'opzione di discretizzare utilizzando il metodo di Eulero, si è optato per una discretizzazione mediante l'organo di tenuta e il campionatore. Denotando inoltre con  $y_L(k)$  la posizione del carico, si ha

$$y_L(k) = x_1 + l \sin(x_3) \approx x_1 + l x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k)$$

Il modello in spazio di stato del processo linearizzato e discretizzato dunque sarà:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B u(k)$$

$$y_L(k) = C_L \mathbf{x}(k)$$

$$y_m(t) = C_m \mathbf{x}(k)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_L}{m_c} g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{m_L + m_c}{m_c l} g & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ 0 \\ -\frac{1}{m_c l} \end{pmatrix}$$

$$C_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$y_L(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $q = 1$  è l'uscita controllata,  $y_m(t) \in \mathbb{R}^s$ ,  $s = 1$  è l'uscita misurata e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $m=1$  è lo sforzo di controllo. Si noti che l'uscita controllata  $y_L(t)$  (la posizione del carico) non coincide con l'uscita controllata  $y_m(t) = x_1(t)$  (la posizione del carrello) perchè si assume che l'angolo di oscillazione non sia misurato. Per questo verrà sviluppato un controllore dinamico in retroazione dall'uscita utilizzando la misura virtuale  $\hat{y}_L(t) = x_1(t) + l \xi_3(t)$  dove  $\xi_3(t)$  sarà fornita dall'osservatore asintotico. Saranno adottati i seguenti parametri:  $l = 10m$ ,  $m_c = 1000 \text{ kg}$  e  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

La massa del carico  $m_L$  assume valori nell'intervallo  $[1500, 2000]$  kg. Di conseguenza la versione del processo affetta da incertezza parametrica  $\Sigma \equiv (A(\alpha), B, C_m, C_L)$  del modello linearizzato in spazio di stato avrà la seguente matrice della dinamica:

$$A(\alpha) \in \mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1 \right\}$$

con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14.7150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2.4525 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19.6200 & 0 \\ 0 & 0 & -2.9430 & 0 \end{pmatrix}$$

È facilmente verificabile che il modello linearizzato affetto da incertezza politopica del carro ponte  $\Sigma \equiv (A(\alpha), B, C_m, C_L)$  soddisfa le due seguenti proprietà:  $\infty$ ):  $\Sigma$  può essere robustamente stabilizzato da un controllore dinamico in retroazione dall'uscita,  $\in$ ): la terna di matrici  $(A(\alpha), B, C_m, C_L)$  non ha zeri di trasmissione in  $s = 0 \forall \alpha \in \Lambda_2$ . La seconda proprietà garantisce inoltre che il controllore robusto assicura errore a regime nullo grazie alla presenza del modello interno di segnali costanti.

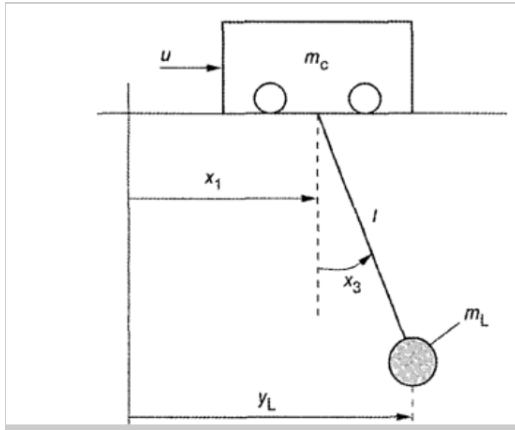


Figura 5: Modello del Carro ponte

### 3.2 Schema di Controllo

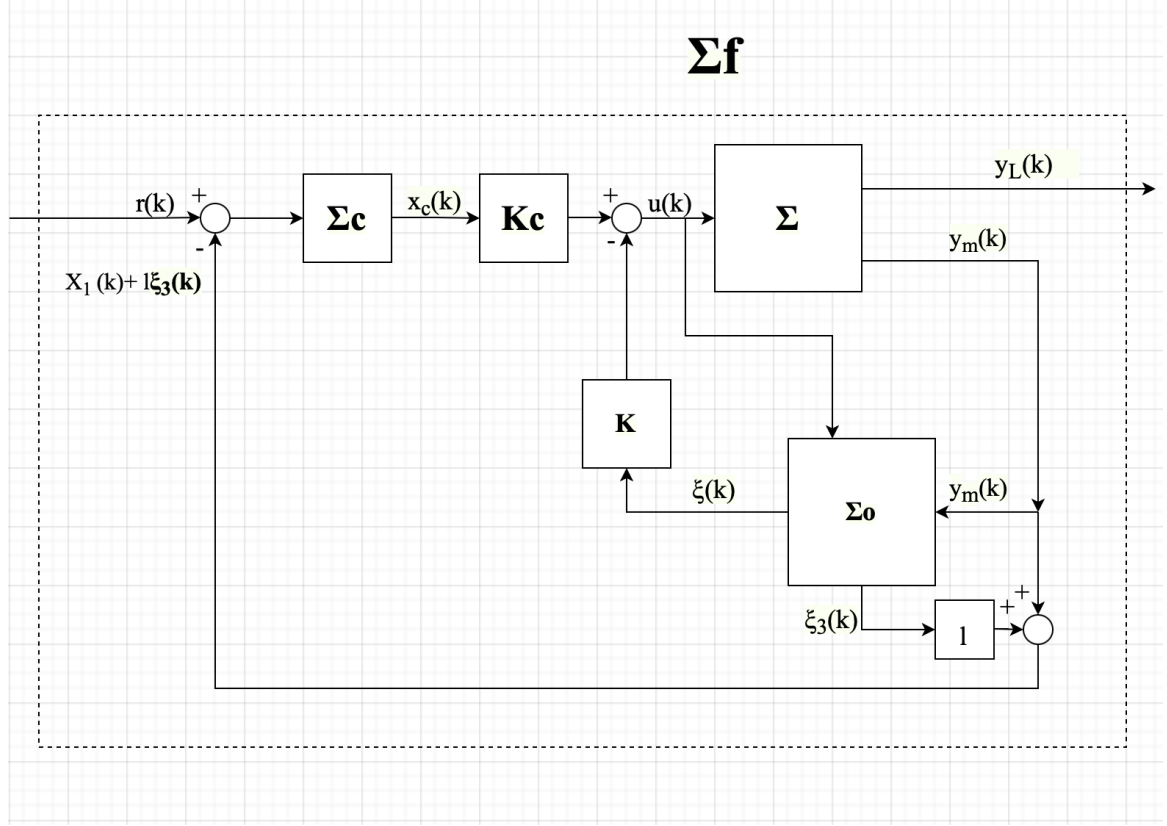


Figura 6: Schema di controllo utilizzato per il modello

Lo schema di controllo a due gradi di libertà (2Dof) proposto in questa tesi è presentato in Figura 2. Si denota con  $\Sigma_f$  il collegamento in retroazione al modello linearizzato politopico  $\Sigma \equiv (A(\alpha), B, C_m, C_L)$  con un controllore dinamico in retroazione dall'uscita quadraticamente stabilizzante basato sull'osservatore asintotico  $\Sigma_o$  di  $x(t)$  e sul modello interno  $\Sigma_c$  per segnali costanti. L'osservatore  $\Sigma_o$  ha la forma

$$\xi(k+1) = \hat{A}\xi(k) + Bu(k) + L(y_m(k) - C\xi(k))$$

dove  $\hat{A} = \frac{\sum_{i=1}^N A_i}{N}$  è la matrice della dinamica nominale di  $\Sigma$ . Ricordando che  $\hat{y}_L(t) = x_1(t) + l\xi_3(t)$  è una misura virtuale dell'uscita controllata ottenuta tramite  $\Sigma_o$ , la rappresentazione in spazio di stato di  $\Sigma_c$  è

$$x_c(k+1) = A_c x_c(k) + B_c(r(k) - \hat{y}_L(k)) \quad (1)$$

dove  $A_c = 1$  e  $B_c = 1$ . L'ingresso  $u(k)$  forzante  $\Sigma$  è dato da  $u(k) = -K\xi(k) + K_c x_c(k)$ . Denotando il vettore di stato esteso  $x(k) = (x^T(k), x_c^T(k), \xi^T(k))^T$ , la terna di matrici  $(A(\alpha)_f, B_f, C_f)$  del sistema in catena chiusa  $\Sigma_f$  è:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} A(\alpha) & BK_c & -BK \\ -B_c C_m & A_c & -B_c(0 \ 0 \ l \ 0) \\ LC_m & BK_c & \hat{A} - LC_m - BK \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_c \\ 0 \end{pmatrix} r(k)$$

$$y_L(k) = \begin{pmatrix} C_L & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

dove, in analogia con la matrice della dinamica del processo  $A(\alpha)$  anche

$$A_f(\alpha) \in \mathcal{A}_f = \left\{ A_f(\alpha) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i A_{fi}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1 \right\}$$

Il progetto della legge di controllo quadraticamente stabilizzante è articolata in 3 diverse strategie:  $\infty$ ): progetto di una legge di controllo robustamente stabilizzante,  $\in$ ): legge di controllo robustamente stabilizzante con vincolo sull'angolo di oscillazione,  $\ni$ ): legge di controllo robustamente stabilizzante con vincolo sull'angolo di oscillazione e sullo sforzo di controllo.

### 3.3 Vincoli sui parametri e Insiemi Invarianti per Processi Politopici

Un insieme invariante ammissibile per  $\Sigma_f$  è un insieme convesso  $X$  contenente l'origine, tale che, preso qualsiasi ingresso  $r(k)$  che soddisfi la seguente condizione

$$r^T(k)r(k) = \|r(k)\|_2^2 \leq \gamma, \forall k > 0, \gamma > 0$$

si abbia  $x(k) \in X \implies A(\alpha)_f x(k) + B_f r(k) \in X, \forall \alpha \in \Lambda_2$  e soddisfacente il seguente vincolo

$$|x_3(k)| = \|x_3(k)\|_2 \leq \bar{x}_3$$

dove  $x_3$  è la terza componente del vettore di stato, ossia l'angolo di oscillazione, mentre  $\bar{x}_3$  rappresenta il valore massimo ammissibile imposto,  $\gamma$  è invece il valore massimo ammissibile per il riferimento  $r(k)$ . In questo caso  $X$  è un ellissoide definito come  $\varepsilon(P, \gamma) = \{x(k) : x^T(k)P x(k) \leq \gamma\}$ , con  $P = Q^{-1}$  simmetrica e definita positiva.

### 3.4 Sintesi del Controllore

Come anticipato, scopo della tesi è la sintesi di un controllore dinamico dall'uscita quadraticamente stabilizzante che possa soddisfare le specifiche di controllo richieste. Oltre all'inseguimento di traiettoria a regime per segnali costanti, garantito dal modello interno, le specifiche di controllo che il controllore deve soddisfare sono due:

1. Stabilità quadratica di  $\Sigma_f$ ;
2. Esistenza di un insieme invariante  $X$  tale che  $x(k) \in X \implies A_f(\alpha)x(k) + B_f r(k) \in X, \forall \alpha \in \Lambda_2$ , nonchè il soddisfacimento di vincoli sullo sforzo di controllo e sull'angolo di oscillazione per ogni riferimento ammissibile  $r(k)$  di  $\Sigma_f$

Operando una trasformazione di coordinate sul vettore di stato  $x(k)$  e scegliendo come nuovo vettore di stato  $x_f(k) = (\xi^T(k), x_c^T(k), x^T(k) - \xi^T(k))^T$  la rappresentazione in spazio di stato del sistema a ciclo chiuso nelle nuove coordinate diventa:

$$x_f(k+1) = \begin{pmatrix} \hat{A} - BK & BK_c & LC_m \\ -B_c(C_m + (1 \ 0 \ l \ 0)) & A_c & -B_c C_m \\ A(\alpha) - \hat{A} & 0 & A(\alpha) - LC_m \end{pmatrix} x_f(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ B_c \\ 0 \end{pmatrix} r(k)$$

$$y(k) = (C_L \ 0 \ C_L) x_f(k)$$

Poichè una delle specifiche di controllo consiste nel vincolare la terza componente del vettore di stato del processo, è necessario estrapolarla dal vettore di stato esteso  $x_f(k)$ . A tale scopo si introducono due vettori riga,  $I_z = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$  e  $C_z = (I \ 0 \ I)$  tali che si abbia:

$$x_3(k) = (0 \ 0 \ 1 \ 0) (I \ 0 \ I) x_f(k)$$

Osservando la matrice della dinamica a ciclo chiuso, si nota che non essendo triangolare inferiore, non è possibile applicare il principio di separazione. Si procede dunque per step:

- Step 1: progetto della matrice  $L$  dell'osservatore in modo tale che la matrice  $A(\alpha) - LC$  sia quadraticamente stabile  $\forall \alpha \in \Lambda_2$ ;
- Step 2: Fissata la matrice  $L$ , la matrice guadagno  $K$  che definisce la legge di controllo può essere calcolata osservando che la matrice della dinamica affetta da incertezza politopica del sistema a ciclo chiuso  $A_f(\alpha)$  può essere riscritta come  $A_f(\alpha) = \tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}\tilde{K}$  con

$$\tilde{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & LC_m \\ -B_c(C_m + (1 \ 0 \ l \ 0))A_c & -B_c C_m & \\ A(\alpha) - \hat{A} & 0 & A(\alpha) - LC_m \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il problema di sintesi del controllore si traduce quindi nel problema di determinare la matrice  $\tilde{K}$  e il massimo insieme invariante  $X$  in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- $\Sigma_f = (A_f(\alpha), B_f, C_f) \equiv (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}\tilde{K}, B_f, C_f)$  quadraticamente stabile  $\forall \alpha \in \Lambda_2$ ;
- Soddisfacimento del vincolo su  $x_3$  per ogni la condizione iniziale  $x_f(0) \in X$ ,  $\forall \alpha \in \Lambda_2$  e qualunque riferimento  $r(k)$  che soddisfi

$$\|r(k)\|_2^2 \leq \gamma, \forall k > 0, \gamma > 0$$

Data la coppia di matrici  $(\tilde{A}(\alpha), \tilde{B})$ , e definendo  $\eta = \gamma^{-1}$ , il problema ammette soluzione a patto di risolvere il problema di programmazione semidefinita :

$$\min(\eta)$$

soggetto ai vincoli:

$$\begin{pmatrix} Q & 0 & \beta Q & Q\tilde{A}_i^T + Y^T\tilde{B}^T \\ 0 & \beta I & 0 & B_f^T \\ \beta Q & 0 & \beta Q & 0 \\ \tilde{A}_i Q + \tilde{B}Y & B_f & 0 & Q \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, 2$$

$$\begin{pmatrix} Q & Y^T \\ Y & \bar{u}_{max}^2 \eta \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} Q & (Q\tilde{A}_i^T + Y^T\tilde{B}^T)C_z^T I_z^T \\ I_z C_z (\tilde{A}_i Q + \tilde{B}Y) & \bar{x}_3^2 \eta - I_z C_z B_f B_f^T C_z^T I_z^T \end{pmatrix} \geq 0, i = 1, 2$$

utilizzando le variabili  $\eta > 0$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $Q = Q^T = \text{diag}\{Q_1, Q_2\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $n = 2n + 1$  e  $Y = (Y_1 \ 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ , calcolato sui vertici

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & LC_m \\ -B_c(C_m + (1 \ 0 \ l \ 0)) & A_c & -B_c C_m \\ A_i - \hat{A} & 0 & A_i - LC_m \end{pmatrix}, \forall i = 1, 2.$$

Se le LMIs ammettono soluzione la matrice guadagno del controllore stabilizzante è  $\tilde{K} = YQ^{-1} = (Y_1 Q_1^{-1} \ 0)$ . Il valore massimo ammissibile per  $r(k)$  è  $\gamma = \eta^{-1}$  e l'insieme invariante massimo  $X \equiv \varepsilon(P, \gamma)$ , con  $P = Q^{-1}$  è ottenuto per  $\Sigma_f$ .

*Nota:* La presenza del parametro  $\beta$  rende la LMI una BMI, che può tuttavia essere trasformata in Linear Matrix Inequality attraverso un gridding sull'intervallo  $(0, 1)$  dove  $\beta$  è definito.

## 4 Risultati Numerici

In questa sezione si riportano i risultati delle 3 simulazioni di  $\Sigma_f$ . Per tali simulazioni si assumano come valori dei parametri  $\eta = 1$ ,  $\beta = 0.001$  e  $\bar{x}_3 = 0.3$ . Si ricorda inoltre che la massa del carico  $m_L$  assume valori compresi nell'intervallo  $[1500, 2000]$  kg. Facendo riferimento al modello di carroponete proposto nella sezione 3.1, lo schema di controllo proposto è progettato per condurre l'uscita controllata  $y_L(t)$ , ossia la posizione del carico, da 0 a 1 conseguendo quindi un inseguimento di un gradino unitario a regime. Sono stati utilizzati 5 diversi valori per  $\alpha \in \Lambda_2$  in seguito riportati:

- $\alpha_1 = (0.8 \ 0.2)^T$
- $\alpha_2 = (0.6 \ 0.4)^T$
- $\alpha_3 = (0.4 \ 0.6)^T$
- $\alpha_4 = (0 \ 1)^T$
- $\alpha_5 = (0.2 \ 0.8)^T$

Inoltre, ognuna delle 3 simulazioni è stata condotta utilizzando prima condizioni iniziali nulle, con  $x_f(0) = (\xi^T(0), x_c^T(0), x^T(0) - \xi^T(0))^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ , in un secondo momento invece utilizzando condizioni iniziali non nulle ma appartenenti all'insieme invariante:  $x_f(0) = (\xi^T(0), x_c^T(0), x^T(0) - \xi^T(0))^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.001 \ 0)$ . Nello specifico è stata scelto un valore iniziale non nullo per l'angolo di oscillazione  $x_3(0) = 0.001$  per simulare un eventuale disallineamento iniziale tra carrello e carico. *Nota:* nel riportare le matrici Q caratterizzanti l'insieme invariante, per motivi di spazio, si è scelto di riportare gli elementi fino alla terza cifra decimale. Per questo motivo, tutti gli elementi che riportassero valori nulli fino (e oltre) tale cifra sono stati riportati mantenendo il numero di cifre stabilito, per poter essere differenziati dagli elementi nulli (0).

### 4.1 Stabilizzazione Quadratica

Una prima simulazione condotta è stata quella che come unica specifica di controllo richiedesse stabilità quadratica. Utilizzando le LMIs presentate nella sezione 2.5, sono state trovate le seguenti matrici:  $L = (1.1176 \ 3.8770 \ 0.5754 \ -0.2144)^T$ ,  $\tilde{K} = 1x10^8 (0.1610 \ 0.1412 \ 1.4218 \ 1.3998 \ -0.0010 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ .

Dopo aver controllato che la specifica sulla stabilità quadratica fosse soddisfatta, sono stati calcolati i grafici dell'angolo di oscillazione e dell'uscita forzata, per verificare errore a regime nullo, per diversi valori di  $\alpha$ . E' possibile osservare l'uscita controllata  $y_L(t)$  e l'angolo di oscillazione del carico di  $\Sigma_f$  in figura, al variare di  $\alpha$ .

Dalle simulazioni emerge che, per quanto riguarda l'angolo di oscillazione, spostandosi sui vertici del politopo ( $\alpha = [0, 1]^T$ ) o vicino ad ognuno di essi ( $\alpha = [0.2, 0.8]^T$ ) il comportamento transitorio presenta oscillazioni troppo pronunciate. Osservando invece il grafico dell'uscita forzata si nota prima di tutto che,

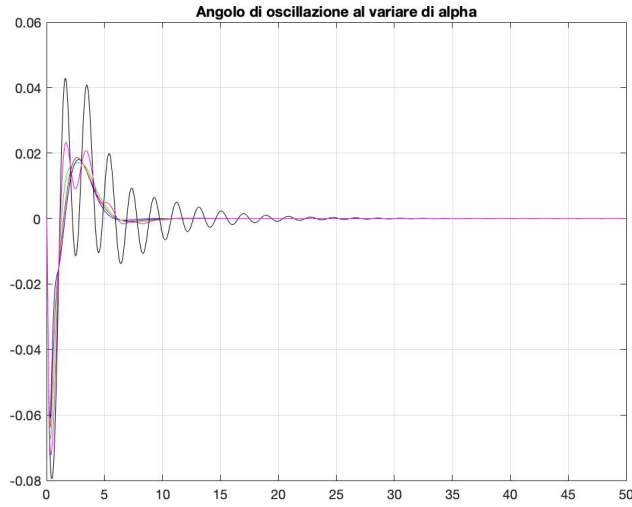


Figura 7: Angolo di oscillazione al variare di  $\alpha$  nel caso di condizioni iniziali nulle

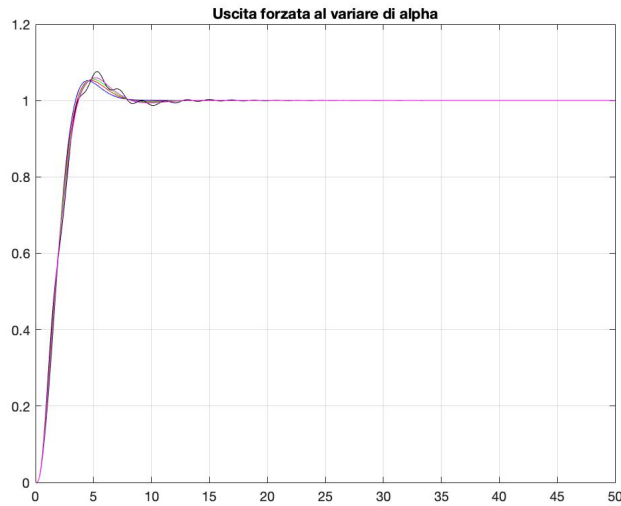


Figura 8: Uscita forzata  $y_L(k)$  al variare di  $\alpha$  nel caso di condizioni iniziali nulle

grazie al modello interno per segnali costanti, a regime  $\Sigma_f$  insegue il gradino di ampiezza unitaria come richiesto; anche in questo caso inoltre avvicinandosi ai vertici del politopo si presentano comportamenti oscillatori.

In figura 5 e 6 invece è possibile notare i grafici rispettivamente dell'angolo di oscillazione e dell'uscita controllata questa volta con condizioni iniziali non nulle, con  $x_3(0) = 0.001$ .

In questo caso notiamo che le prestazioni sono le medesime, sia nel caso di condizioni iniziali nulle che nel caso non nullo.



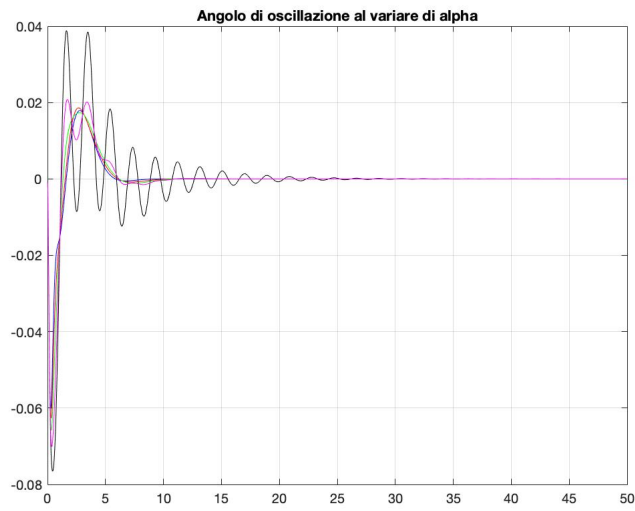


Figura 9: Angolo di oscillazione  $x_3(k)$  al variare di  $\alpha$  nel caso di condizioni iniziali non nulle

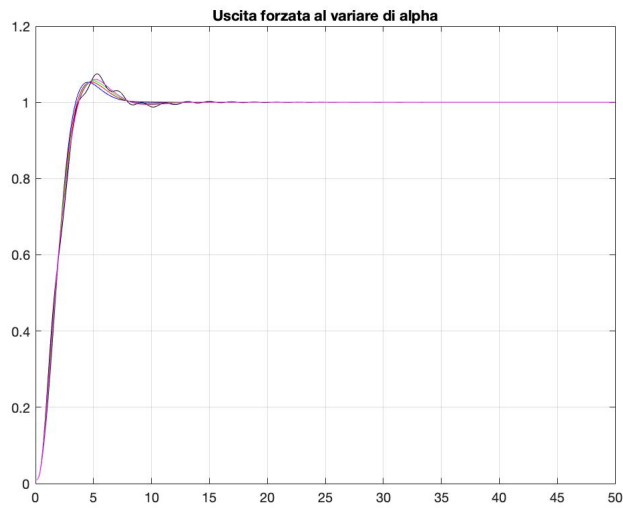


Figura 10: Uscita forzata  $y_L(k)$  al variare di  $\alpha$  nel caso di condizioni iniziali nulle.

## 4.2 Stabilizzazione quadratica con vincolo sull'angolo di oscillazione

In questa seconda simulazione viene aggiunta una specifica di controllo riguardante l'angolo di oscillazione come presentato nella sezione 3.3. Si sottolinea che si usano gli stessi valori del caso precedente per i parametri introdotti ad inizio sezione. Allo scopo di imporre il vincolo sull'angolo di oscillazione viene introdotto l'insieme invariante  $X$  che verrà massimizzato attraverso l'implementazione delle LMIs viste in precedenza. In questo caso le matrici  $L$  e  $K$  della legge di controllo sono  $L = (1.1176 \ 3.8770 \ 0.5754 \ -0.2144)^T$  e  $K = 1 \times 10^8 (0.1298 \ 0.1842 \ 0.4421 \ 1.8277 \ -0.005 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ . La matrice  $P = Q^{-1}$  che definisce l'insieme invariante  $X \equiv \varepsilon(P, \gamma) = \varepsilon(Q, 1)$  per  $\Sigma_f \equiv (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}\tilde{K}, B_f, C_f)$  è

$$P = 10^5 \begin{pmatrix} 0.001 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.005 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.000 & 0.596 & 0.000 & -0.059 & 0.009 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.000 & -0.059 & -0.000 & 0.0059 & -0.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.005 & 0.009 & 0.000 & -0.0001 & 5.072 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.0000 & 0.00 & -0.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.0000 & 0.000 & 0.000 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

In Figura 11 e Figura 12 si osservano rispettivamente l'angolo di oscillazione  $x_3(k)$  e l'uscita forzata  $y_L(k)$  di  $\Sigma_f$  al variare di  $\alpha$  nel caso di condizioni iniziali nulle:

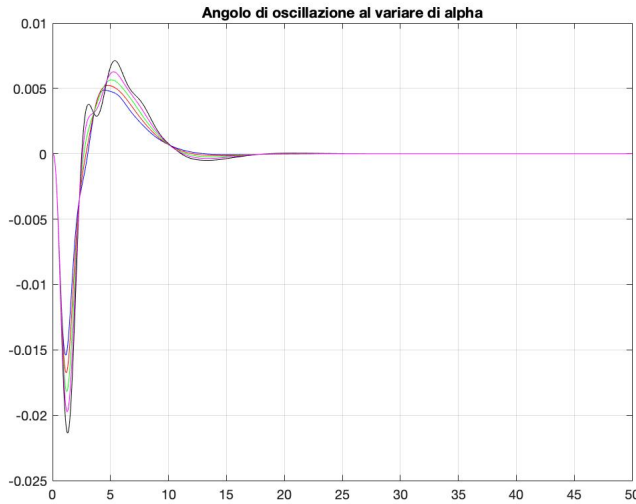


Figura 11: Angolo di oscillazione  $x_3(k)$  al variare di  $\alpha$  con condizioni iniziali nulle.

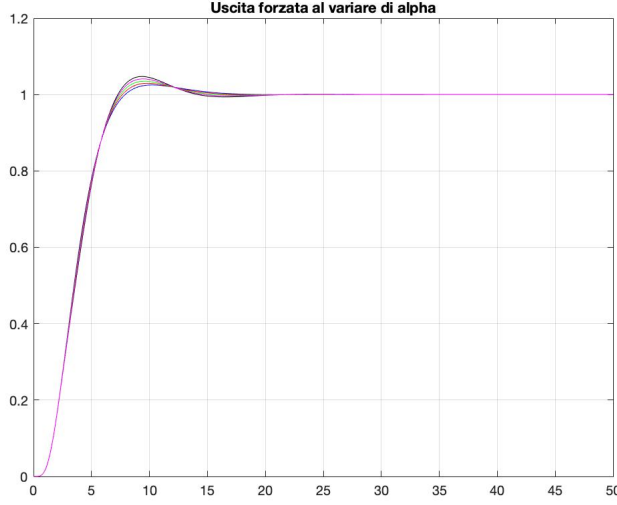


Figura 12: Uscita forzata  $y_L(k)$  al variare di  $\alpha$  con condizioni iniziali nulle.

In questo caso è possibile osservare dai grafici, in particolare dalla Figura 7, che valori ottimali di prestazioni sono mantenuti scegliendo  $\alpha = (0.8 \ 0.2)^T$ ; posizionandosi infatti sui vertici del politopo ( $\alpha = (0 \ 1)$ ) si riscontrano oscillazioni troppo pronunciate sul transitorio. Si nota che l'imposizione del vincolo sull'angolo di oscillazione  $x_3(k)$  è andato a buon fine. Osservando infatti il grafico in Figura 7 si nota che tale angolo si mantiene in modulo inferiore a 0.3, e cioè che la specifica

$$|x_3(k)| = \|x_3(k)\|_2 \leq \bar{x}_3$$

è soddisfatta. Per quanto riguarda l'uscita forzata, anche in questo caso grazie all'introduzione del modello interno  $\Sigma_c$  il sistema a ciclo chiuso  $\Sigma_f$  insegue a regime un gradino unitario con errore nullo. Nel caso invece di condizioni iniziali non nulle, ma appartenenti ancora a  $Xx_3(0) = (0.001)$ , si riscontrano i grafici per  $x_3(k)$  e  $y_L(k)$  mostrati in Figura 13 e Figura 14.

Sebbene le prestazioni siano pressochè le medesime, dall'esito delle simulazioni emerge, in analogia con il caso precedente, che le prestazioni sono mantenute ottimali per  $\alpha = (0.8 \ 0.2)^T$ ; posizionandosi invece sui vertici del politopo le prestazioni subiscono un lieve peggioramento. Anche in questo caso la specifica del vincolo sull'angolo di oscillazione è soddisfatta, così come l'inseguimento di traiettoria a regime permanente.

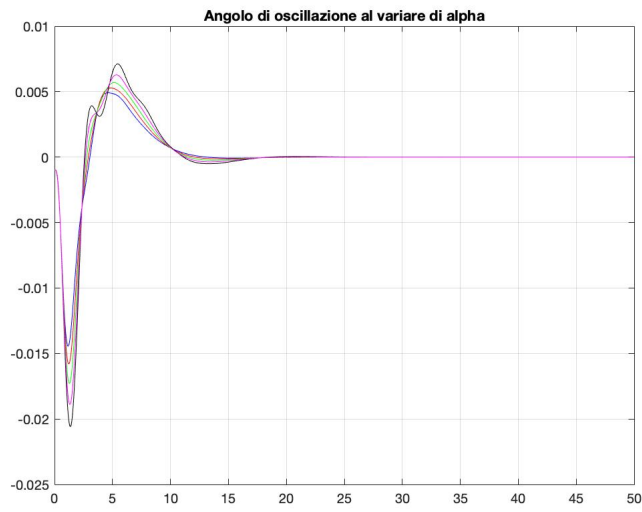


Figura 13: Angolo di oscillazione  $x_3(k)$  al variare di  $\alpha$  con condizioni iniziali non nulle.

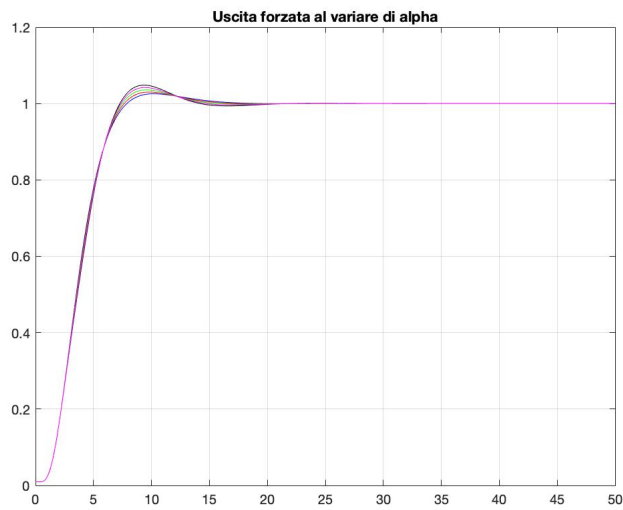


Figura 14: Uscita forzata  $y_L(k)$  al variare di  $\alpha$  nel caso di condizioni iniziali non nulle.

### 4.3 Stabilizzazione Quadratica con Vincolo sull'Angolo di Oscillazione e sullo Sforzo di Controllo

Come anticipato, la terza simulazione è consistita nell'imposizione di un ulteriore vincolo relativo allo sforzo di controllo  $u(k)$ . Anche in questo caso si sono utilizzati i valori per i parametri introdotti ad inizio sezione. Si procede dunque come menzionato nella sezione 4.2, introducendo la LMI relativa allo sforzo. Le matrici  $L$  e  $K$  che definiscono la legge di controllo sono  $L = (1.1176 \quad 3.8770 \quad 0.5754 \quad -0.2144)$ ,  $\tilde{K} = (K \quad -K_c \quad 0) = 10^5 (0.2121 \quad 0.3556 \quad 0.4182 \quad 3.0061 \quad -0.0006 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$ . La matrice  $P = Q^{-1}$  che massimizza l'insieme invariante  $X = \varepsilon(P, 1)$  per  $\Sigma_f \equiv (\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}\tilde{K}, B_f, C_f)$  è

$$P = 10^5 \begin{pmatrix} 0.001 & -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.0065 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.000 & 0.001 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.005 & 0 & 0 & 0 \\ -0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 & 0.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & -0.000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.006 & 0.004 & 0.000 & -0.000 & 4.230 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.000 & -0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix}$$

Le simulazioni riguardo l'angolo di oscillazione  $x_3(k)$  e l'uscita forzata  $y_L(k)$  al variare del parametro  $\alpha \in \Lambda_2$  utilizzando condizioni iniziali nulle, come è possibile osservare in Figura 15 e Figura 16, sono analoghe al caso precedente, così come le conclusioni riguardo il soddisfacimento delle specifiche di controllo.

La specifica che si intende aggiungere in quest'ultima sezione riguarda il vincolo sullo sforzo di controllo. In figura 17 è riportato l'andamento di  $u(k)$  senza l'imposizione del vincolo:

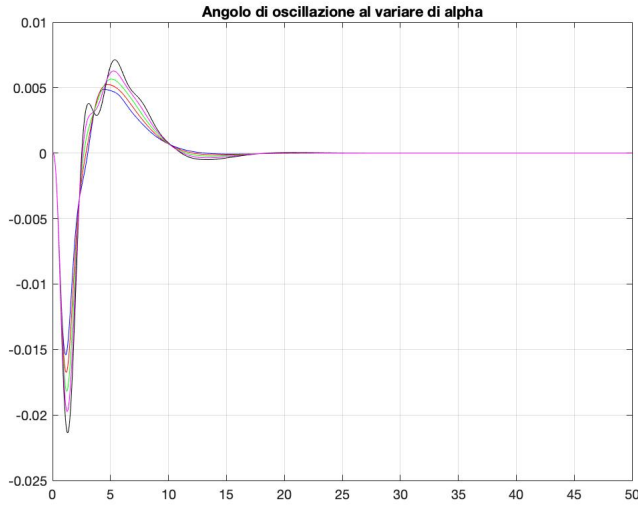


Figura 15: Angolo di oscillazione  $x_3(k)$  al variare di  $\alpha$

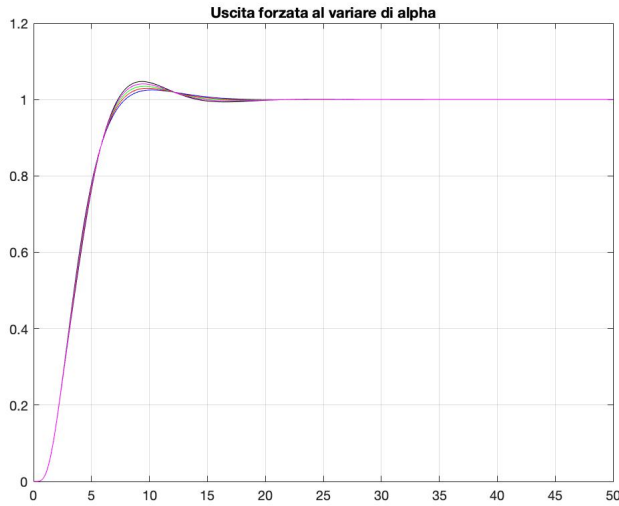


Figura 16: Uscita forzata  $y_L(k)$  al variare di  $\alpha$

Obiettivo di questa simulazione è imporre un vincolo sullo sforzo, si desidera cioè che valga la condizione:

$$\|u\|_2 \leq u_{max}$$

nello specifico si è scelto di imporre come valore  $u_{max} = 10000$ . Analogamente ai casi precedenti le simulazioni sono state condotte utilizzando dapprima condizioni iniziali nulle e in un secondo momento condizioni iniziali non nulle ma appartenenti all'insieme invariante. In Figura 18 lo sforzo di controllo  $u(k)$  dopo l'imposizione del vincolo.

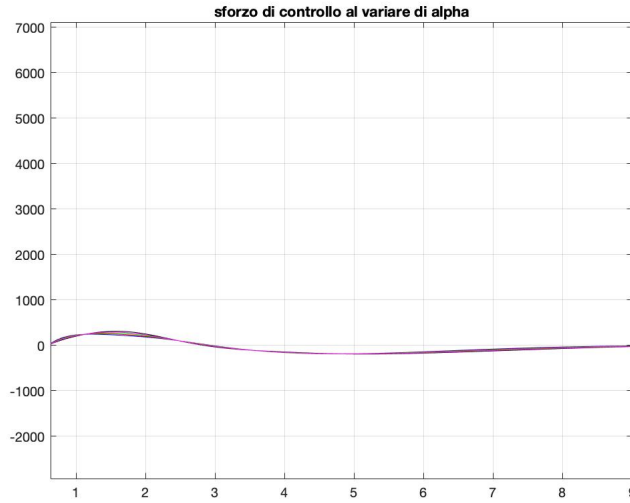


Figura 17: Sforzo  $u(k)$  per il sistema  $\Sigma_f$  al variare di  $\alpha$

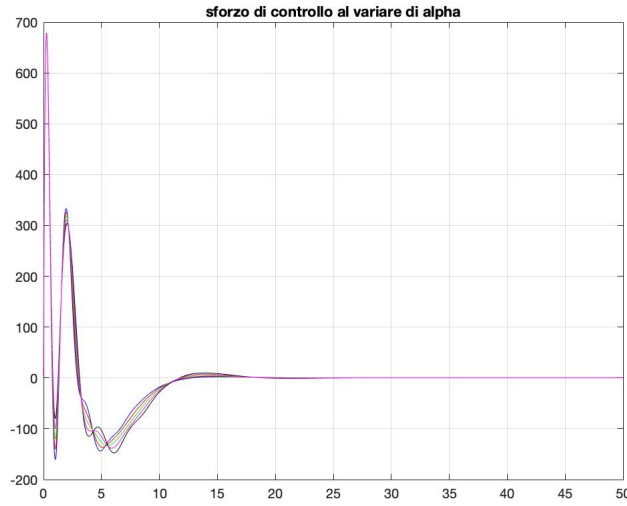


Figura 18: Sforzo di controllo soggetto al vincolo al variare di  $\alpha$

Per quanto riguarda la simulazione utilizzando condizione iniziale non nulla  $(x_f(0)^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.001 \ 0)^T)$ , in Figura 19 è riportato l'andamento dello sforzo di controllo non vincolato  $u(k)$  e in Figura 20 lo sforzo vincolato:

È evidente che l'andamento dello sforzo è il medesimo sia nel caso condizioni iniziali nulle sia nel caso condizioni iniziali non nulle; inoltre osservando le figure 18 e 20 si evince che la specifica sul vincolo sullo sforzo è soddisfatta, e  $u(k)$  presenta comportamento simile per tutti i valori di  $\alpha$  considerati.

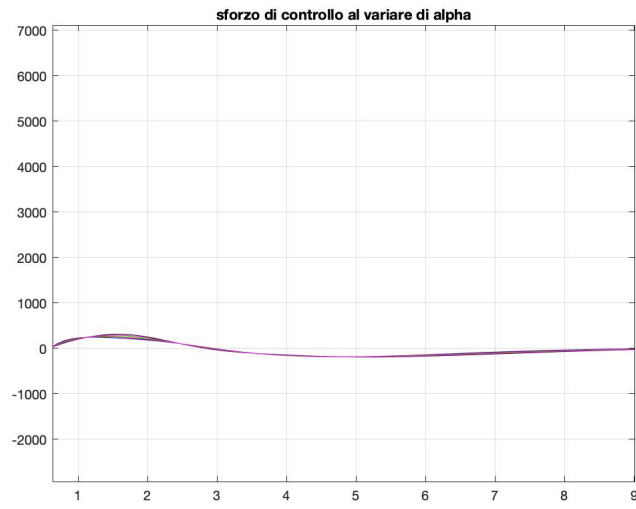


Figura 19: Sforzo di controllo  $u(k)$  non vincolato al variare di  $\alpha$  con condizioni iniziali non nulle.

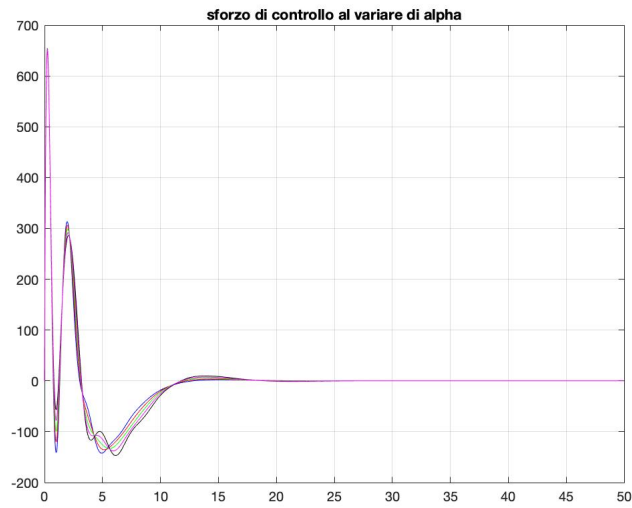


Figura 20: Sforzo  $u(k)$  vincolato al variare di  $\alpha$  con condizioni iniziali non nulle.



## 5 Conclusioni

Il vantaggio dello schema di controllo presentato nella presente tesi risiede nella possibilità di risolvere un problema di controllo così complesso senza l'ausilio di strutture hardware come i sensori. Questo è possibile grazie alla scomposizione del problema principale (stabilizzazione quadratica con vincolo sull'angolo di oscillazione e sullo sforzo di controllo) in 3 problemi distinti e di complessità progressiva. Inoltre, ciascuno dei 3 sottoproblemi è facilmente risolvibile andando a progettare per step, applicando una sorta di principio di separazione: il primo step consiste nel progetto della matrice guadagno dell'osservatore dinamico in modo da garantire stabilità quadratica al blocco  $A(\alpha) - LC_m$ , il secondo consiste nella sintesi della matrice  $\tilde{K}$  in modo da garantire stabilità quadratica al sistema esteso  $(\tilde{A}(\alpha) + \tilde{B}\tilde{k}, B_f, C_f)$ , di fatto trattando questo secondo step come semplice problema di stabilizzazione quadratica. Implementando inoltre le opportune LMIs, si andrà anche ad imporre (come visto nelle ultime due simulazioni) la massimizzazione dell'insieme invariante  $X$ , tenendo conto dei vincoli da imporre su  $x_3(k)$  e  $u(k)$ . I risultati numerici presentati confermano inoltre la validità dell'approccio, dimostrando il soddisfacimento di tutte le specifiche progressivamente imposte. Infine, l'esito soddisfacente delle simulazioni nel caso di condizioni iniziali non nulle dimostra la versatilità della legge di controllo nel caso di un disallineamento iniziale tra carico e carrello.

## Ringraziamenti

Giunto alla fine di questo percorso di studi, vorrei ringraziare tutti coloro che mi hanno aiutato nel raggiungere questo importante traguardo.

Mi piacerebbe per prima cosa ringraziare la Prof.ssa Valentina Orsini, che è stato un piacere e un onore avere come relatrice, e il relatore Prof. Jetto.

Un ringraziamento particolare è rivolto a tutti quelli che mi hanno sostenuto in questi anni di formazione personale ed accademica, in particolare la mia famiglia e i miei amici.

## Riferimenti bibliografici

1. H. Shingini, Y. Ohta, Optimal Invariant Sets for Discrete-time Systems: Approximation of Reachable Sets for Bounded Inputs, in: IFAC Proceeding Volumes, 2004, pp 389-394;
2. A. Luca, P. Rodriguez, D. Dumur, Invariant Sets Method for State-Feedback Control Design, in: 17th Telecommunications forum TELFOR, 2009, pp 681-684;
3. A. Luca, P. Rodriguez, D. Dumur, Youla-Kucˇera parameter synthesis using invariant sets techniques, in: 2010 American Control Conference Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA June 30-July 02, 2010, pp 5626-5631;
4. L. Ramli, Z. Mohamed, A.M. Abdullahi, H.I. Jaafar, I.M. Lazim, Control Strategies for Crane Systems: A Comprehensive Review, in Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 95, October 2017, Pages 1-23;
5. L. Jetto, V. Orsini, A Robust Least Square Based Approach To Min-Max Model Predictive Control, in International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, pp 1-32;
6. L. Jetto, V. Orsini, An optimally combined feedback/feedforward control architecture for minimizing the oscillations in the fast response of a gantry crane control system, in: 2021 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), 2021, pp 1-8.