

Prática 1: Oscilações e Sistemas Ressonantes

por

Gabriel de Albuquerque - RA: 791366

Lucas Max Estrela Pinho - RA: 791405

Lucas Paixão Cruz de Castro - RA: 791408

Conteúdo

1. Resumo	4
2. Objetivos	4
2.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados	4
2.2. Modos de Vibração em uma Corda	4
3. Fundamentos Teóricos	4
3.1. Oscilador Harmônico Simples (OHS)	5
3.2. Oscilador Harmônico Amortecido (OHA)	5
3.3. Oscilador Harmônico Amortecido Forçado (OHAF)	5
3.4. Fator de Mérito Q	7
3.5. Batimento	7
3.6. Modos Normais em Cordas com Extremidades Fixas	7
4. Materiais Utilizados	9
4.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados	9
4.2. Modos de Vibração em uma Corda	9
5. Procedimento Experimental	10
5.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados	10
5.2. Modos de Vibração em uma Corda	10
6. Resultados e Discussões	11
6.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados	11
6.2. Modos de Vibração em uma Corda	12
7. Conclusão	13
8. Apêndice	14
Apêndice A. Cálculos	14
A.1. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 1 com a Massa 1.	14
A.1.1. Dados	14
A.1.2. Densidade Linear μ :	14
A.1.3. Tensão T :	14
A.1.4. Frequências dos Modos f_n :	14
A.1.5. Resultados	14
A.2. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 1 com a Massa 2.	15
A.2.1. Dados	15
A.2.2. Densidade linear de massa μ da corda	15
A.2.3. Frequência fundamental f_1	15
A.3. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 2 com a Massa 1.	15
A.3.1. Dados	15
A.3.2. Densidade Linear	15
A.3.3. Tensão	16
A.3.4. Frequência Fundamental f_1	16
A.3.5. Frequências dos Cinco Primeiros Harmônicos	16

A.4. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 2 com a Massa 2.	16
A.4.1. Dados	16
A.4.2. Densidade Linear	16
A.4.3. Tensão	16
A.4.4. Frequência Fundamental f_1	16
A.4.5. Frequências dos Cinco Primeiros Harmônicos	17
Apêndice B. Tabelas	17
B.1. Tabela com as Medidas das Massas.	17
B.2. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 1 e Massa 1	17
B.3. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 1 e Massa 2	17
B.4. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 2 e Massa 1	18
B.5. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 2 e Massa 2	18
Apêndice C. Figuras	19

1. Resumo

Este estudo experimental investigou as propriedades fundamentais de sistemas oscilatórios por meio da análise de osciladores harmônicos amortecidos forçados e modos vibracionais em cordas tensionadas. Para os osciladores amortecidos, o experimento buscou identificar a frequência de ressonância, estimar o coeficiente de amortecimento e analisar a influência da área de amortecimento na dissipação de energia. Utilizando um sistema massa-mola em um trilho de ar, observou-se ressonância em 2699 Hz. Os coeficientes de amortecimento foram determinados para diferentes áreas, com valores proporcionais: $0,229 \pm 0,031$ para a maior área e $0,193 \pm 0,007$ para a menor. No estudo dos modos vibracionais em cordas tensionadas, o objetivo foi identificar modos fundamentais e harmônicos, compreender as condições de ressonância e a formação de ondas estacionárias. As frequências correspondentes às ondas estacionárias foram medidas e comparadas com os valores teóricos, apresentando concordância média de 50,41% a 88,46%, dependendo da configuração de corda e massa. Os resultados confirmam os modelos teóricos e destacam a relação entre parâmetros físicos e o comportamento oscilatório em sistemas discretos e contínuos.

2. Objetivos

O objetivo desta prática é investigar as propriedades fundamentais de osciladores utilizando um sistema massa-mola real, estudando o fenômeno da ressonância em osciladores amortecidos forçados e determinando os modos de vibração em cordas.

2.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados

Nesta seção, o objetivo é investigar o comportamento de um sistema massa-mola sob a ação de um amortecimento e de uma força externa oscilante. Especificadamente, pretende-se identificar a frequência na qual o sistema apresenta a maior amplitude de oscilação, caracterizando a frequência de ressonância do sistema oscilante (carrinho), estimar o coeficiente de amortecimento, que define a taxa de dissipação de energia no sistema, e compreender como este afeta o perfil da curva de ressonância e avaliar como a área da vela de amortecimento influencia o coeficiente de amortecimento, examinando a relação entre o aumento da área e a intensidade do amortecimento aplicado ao sistema.

2.2. Modos de Vibração em uma Corda

O objetivo desta seção é investigar as propriedades de um sistema contínuo oscilante, representado por uma corda tensa e excitada de forma periódica, para determinar seus modos vibracionais normais. Assim, procura-se identificar os modos de vibração fundamentais e harmônicos em diferentes configurações de cordas, analisar as condições sob as quais a ressonância ocorre em cada modo de vibração e compreender o comportamento das ondas estacionárias formadas, promovendo uma análise dos diferentes modos normais observados.

3. Fundamentos Teóricos

Sistemas que oscilam em torno de um ponto de equilíbrio estão presentes em diversos fenômenos físicos e aplicações do dia a dia, como o movimento das cordas de um violão, pontes e átomos em sólidos. Esses sistemas, em sua forma ideal, possuem energia potencial que pode ser aproximada por uma parábola com um ponto mínimo no equilíbrio estável. Nesse caso, a força restauradora é linearmente proporcional ao deslocamento, obedecendo à lei de Hooke.

Entretanto, sistemas reais sofrem dissipação de energia ao longo do tempo devido a forças de amortecimento, que diminuem a amplitude das oscilações. Por outro lado, uma força externa periódica pode compensar essa dissipação, mantendo o sistema em oscilação contínua. Para estudar esses fenômenos, consideram-se três modelos principais: o Oscilador Harmônico Simples (OHS), o Oscilador Harmônico Amortecido (OHA) e o Oscilador Harmônico Amortecido Forçado (OHAF).

3.1. Oscilador Harmônico Simples (OHS)

O Oscilador Harmônico Simples descreve o caso ideal em que não há dissipação de energia. A dinâmica do sistema é governada pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência angular natural do sistema, k é a constante de elasticidade da mola e m é a massa do objeto.

A solução geral para a equação 1 é:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (2)$$

em que A é a amplitude máxima e ϕ é a fase inicial, ambos determinados pelas condições iniciais do sistema. Essa solução descreve um movimento oscilatório periódico com frequência angular constante ω_0 .

3.2. Oscilador Harmônico Amortecido (OHA)

Quando uma força de amortecimento proporcional à velocidade é introduzida, a equação do movimento passa a ser:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

onde $\gamma = \frac{b}{m}$ é o coeficiente de amortecimento, e b é a constante de amortecimento.

Para o caso subcrítico ($\gamma/2 < \omega_0$), a solução da equação 3 é dada por:

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \phi), \quad (4)$$

com $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$ sendo a frequência angular efetiva. Observa-se que o termo exponencial $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ descreve a diminuição da amplitude ao longo do tempo devido à dissipação de energia.

3.3. Oscilador Harmônico Amortecido Forçado (OHAF)

Quando o sistema é sujeito a uma força externa periódica $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, a equação do movimento é modificada para:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t). \quad (5)$$

A solução para a equação 5 é composta por duas partes: uma solução transitória, que decai com o tempo, e uma solução estacionária. A amplitude da oscilação estacionária, $A(\omega)$, é dada por:

$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}, \quad (6)$$

e a fase $\phi(\omega)$ do movimento é:

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right). \quad (7)$$

A ressonância ocorre quando a frequência angular da força externa ω se aproxima de ω_0 . Nesse ponto, a amplitude da oscilação atinge seu valor máximo, dado por:

$$A_{\text{máx}} = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}. \quad (8)$$

Além disso, o fator de mérito Q , que mede a qualidade do sistema ressonante, é definido como:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}. \quad (9)$$

Um valor alto de Q indica que o sistema tem baixa dissipação de energia e uma curva de ressonância estreita.

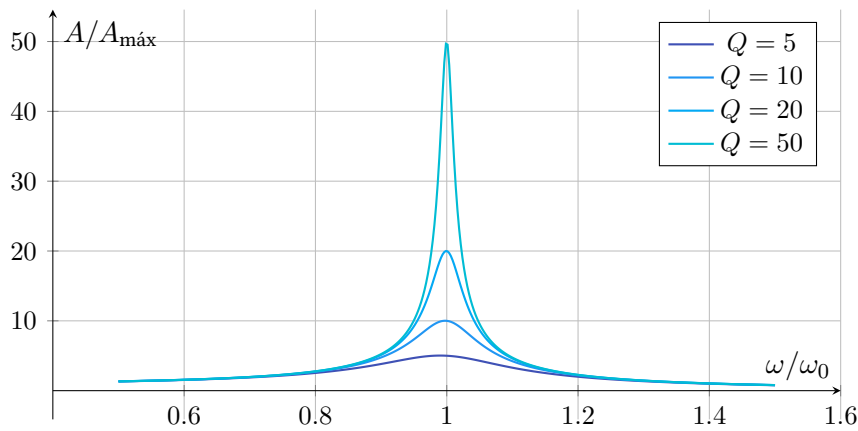


Figura 1: Gráfico da amplitude normalizada $A/A_{\text{máx}}$ em função da frequência normalizada ω/ω_0 , para diferentes valores do fator de mérito Q .

A Figura 1 ilustra a variação da amplitude normalizada em função da frequência angular ω/ω_0 para diferentes valores do fator de mérito Q . Como esperado, quanto maior o valor de Q , mais acentuado é o pico de ressonância.

Com base nas equações (6) e (8), é possível normalizar a amplitude da onda em relação à amplitude máxima. A expressão da amplitude normalizada é dada por:

$$\frac{A}{A_{\text{máx}}} = \frac{\gamma}{2} \cdot \left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right]^{-1/2}, \quad (10)$$

onde ω representa a frequência angular da força externa, ω_0 é a frequência angular natural, e γ é o coeficiente de amortecimento. Essa relação permite identificar como a amplitude da oscilação varia em função de diferentes frequências externas e do fator de amortecimento.

A equação (10) também ilustra que, quando a frequência da força externa (ω) coincide com a frequência natural do sistema (ω_0), a amplitude da oscilação alcança seu máximo valor, dependendo do fator de amortecimento do sistema.

3.4. Fator de Mérito Q

O fator de mérito Q é uma medida da eficiência do sistema oscilante em armazenar energia em relação à energia dissipada por ciclo. Sua definição é dada por:

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Energia armazenada no oscilador}}{\text{Energia dissipada por ciclo}} = \frac{\omega_0}{\gamma}, \quad (11)$$

onde ω_0 é a frequência angular natural, e γ é o coeficiente de amortecimento. Quanto maior o valor de Q , mais estreita e mais alta é a curva de ressonância, indicando menor dissipação de energia.

3.5. Batimento

O fenômeno de batimento ocorre quando dois osciladores possuem frequências angulares muito próximas (ω_1 e ω_2). A superposição das ondas geradas por esses osciladores resulta em uma variação periódica na amplitude da onda resultante, que pode ser observada como flutuações no tempo. Essa variação é caracterizada por uma amplitude que cresce e decresce de forma alternada, conforme ilustrado na Figura 2.

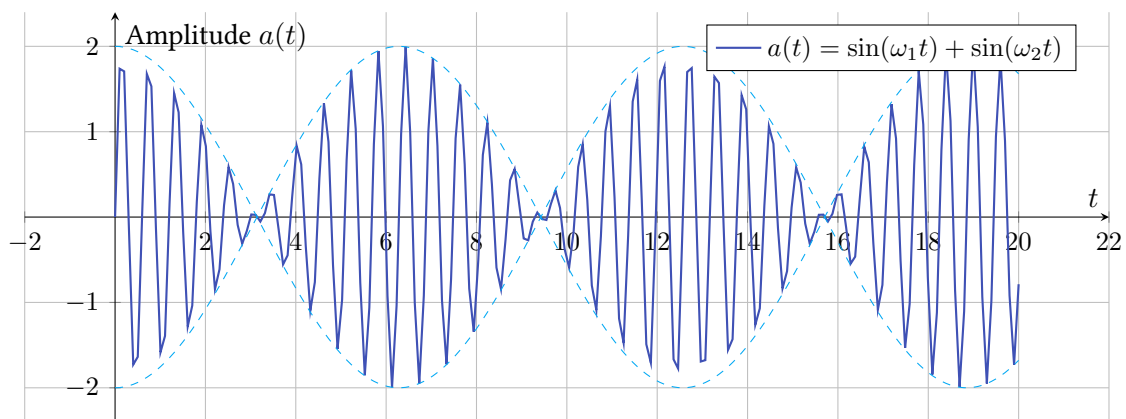


Figura 2: Gráfico da amplitude $a(t)$ em função do tempo t , mostrando o fenômeno de batimento. As curvas tracejadas representam as envoltórias superior e inferior, delimitando a variação máxima da amplitude.

Matematicamente, a amplitude do batimento pode ser descrita apenas pelas envoltórias que possuem a seguinte equação:

$$a(t) = \pm 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right), \quad (12)$$

onde $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ é a diferença entre as frequências angulares das fontes, e A é a amplitude das ondas individuais.

A frequência angular do batimento é $\Delta\omega$, enquanto a frequência média da onda oscilatória rápida é $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Esse fenômeno é amplamente utilizado em várias áreas, como em sistemas de rádio e acústica, para ajustar frequências e identificar discrepâncias entre sinais.

3.6. Modos Normais em Cordas com Extremidades Fixas

A Figura 3 apresenta os primeiros modos normais de vibração em uma corda com ambas as extremidades fixas. Nesse sistema, as ondas estacionárias são geradas quando as ondas incidentes e refletidas se

superpõem de maneira construtiva em frequências ressonantes. Esses padrões estacionários apresentam nós (pontos de amplitude nula) e ventres (pontos de amplitude máxima) em posições fixas.

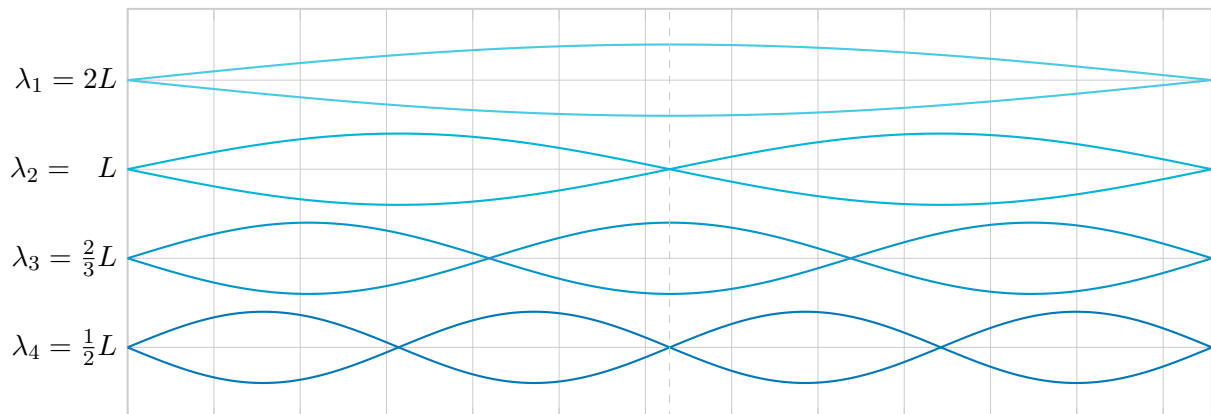


Figura 3: Representação dos modos normais de vibração em uma corda com ambas as extremidades fixas. Cada modo normal corresponde a uma frequência harmônica específica e está associado a um comprimento de onda característico.

Na Figura 3, os primeiros quatro modos normais ($n = 1, 2, 3, 4$) são representados. Cada modo é caracterizado por:

- **Modo Fundamental** ($n = 1$): Apresenta um único ventre central, com o comprimento de onda igual a $2L$. Este é o modo com a menor frequência possível, denominada frequência fundamental (f_1).
- **Segundo Modo** ($n = 2$): Apresenta dois ventres e um nó no meio da corda. O comprimento de onda é igual ao comprimento da corda ($\lambda_2 = L$).
- **Terceiro Modo** ($n = 3$): Apresenta três ventres e dois nós entre as extremidades fixas. O comprimento de onda é $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$.
- **Quarto Modo** ($n = 4$): Apresenta quatro ventres e três nós. O comprimento de onda é $\lambda_4 = \frac{1}{2}L$.

A relação entre o comprimento de onda λ_n , o comprimento da corda L e o número do modo n é dada por:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Frequências Associadas aos Modos

As frequências dos modos normais são determinadas pela equação:

$$f_n = n f_1 = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

onde f_1 é a frequência fundamental, T é a tensão aplicada à corda e μ é a densidade linear de massa da corda.

4. Materiais Utilizados

4.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados

Os seguintes materiais foram utilizados na montagem e realização do experimento de oscilações amortecidas e forçadas:

- Carrinho;
- 2 molas;
- Trilho de ar;
- Vela de cartolina para encaixar no carrinho;
- Luz de LED branca;
- Lente convergente;
- Fotodetector da marca Phywe, modelo 41736.5E;
- Amplificador DC Amplifier da marca Phywe, nº 13620.93;
- Osciloscópio da marca Tektronix, modelo TDS1001B;
- Ímã;
- Bobina de excitação com núcleo de ferro;
- Gerador de sinais da marca RIGOL, modelo DG1022;
- Smartphone;
- Software *Tracker* para coleta dos dados;
- Python para análise dos dados.

4.2. Modos de Vibração em uma Corda

Os seguintes materiais foram utilizados na montagem e realização do experimento de modos de vibração em uma corda:

- Gerador de sinais da marca Phywe, modelo 13650.93;
- Transdutor (alto-falante) da marca PASCO, modelo SF-9324;
- 2 cordas de densidades lineares de massa distintas;
- Peças metálicas de massas distintas para aplicar tensão à corda;
- Balança eletrônica Gehaka G4001 com precisão de 0,1g;
- Trilho graduado em milímetros;
- Suportes universais.

5. Procedimento Experimental

5.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados

Para investigar o comportamento do sistema de oscilador harmônico amortecido forçado, foram seguidos os seguintes passos:

1. Montar o sistema massa mola acoplando as molas ao carrinho no trilho de ar;
2. Ligar o fotodetector ao osciloscópio;
3. Alinhar o LED, a lupa e o sensor fotodetector observando a leitura do fotodetector no osciloscópio;
4. Variar a frequência da força oscilante aplicada ao sistema, utilizando um gerador de sinal;
5. Coletar os dados de amplitude da oscilação do sistema em função da frequência da força oscilante aplicada, observando as leituras no osciloscópio.
6. Acoplar a vela ao sistema para introduzir o amortecimento;
7. Posicionar o carrinho no ponto de equilíbrio antes de iniciar a gravação das oscilações.
8. Gravar a oscilação do carrinho utilizando um smartphone;
9. Repetir os procedimentos de acoplamento da vela (Passo 6) até gravação (Passo 8) para mais dois tipos diferentes de vela.

5.2. Modos de Vibração em uma Corda

Para analisar os modos de vibração em uma corda tensionada, seguimos os seguintes passos experimentais:

1. Posicionar um suporte no fim do trilho milimetrado, de forma que esse suporte esteja na beira da bancada de experimento;
2. A 80 cm do primeiro suporte, fixar outro suporte juntamente com o transdutor;
3. Aferir a massa das 2 cordas;
4. Aferir a massa de duas massas, M_1 e M_2 , que serão utilizadas para tensionar a corda ao longo do experimento;
5. Conectar a fonte de sinal ao transdutor para gerar oscilações na corda;
6. Passar a corda pelo transdutor e pelo suporte. Na ponta da corda, prender uma massa que aplicará a tensão desejada;
7. Variar a frequência do sinal aplicado ao transdutor e anotar as frequências nas quais é possível observar harmônicos, isto é, a formação de ondas estacionárias na corda com nós, onde partes da corda permanecem paradas. Registrar também o número de nós observados em cada frequência, que servirá para identificar a ordem da harmônica (primeira, segunda, etc.);
8. Alterar a massa para M_2 e repetir o procedimento do passo 7;
9. Trocar a corda utilizada no sistema e repetir os passos 6 a 8 para analisar as diferenças nos modos de vibração com diferentes cordas.

6. Resultados e Discussões

6.1. Osciladores Harmônicos Amortecidos Forçados

Nesta subseção, são apresentados e analisados os resultados experimentais obtidos para o sistema de oscilador harmônico amortecido forçado.

Em concordância com o procedimento experimental, o primeiro gráfico obtido, representado pela Figura 4, mostra a relação entre a frequência da força aplicada e a amplitude de oscilação do sistema. A partir dessa análise, verificou-se que a frequência de ressonância do sistema é de, aproximadamente, 2699 Hz , valor correspondente ao pico máximo de amplitude observado no gráfico.

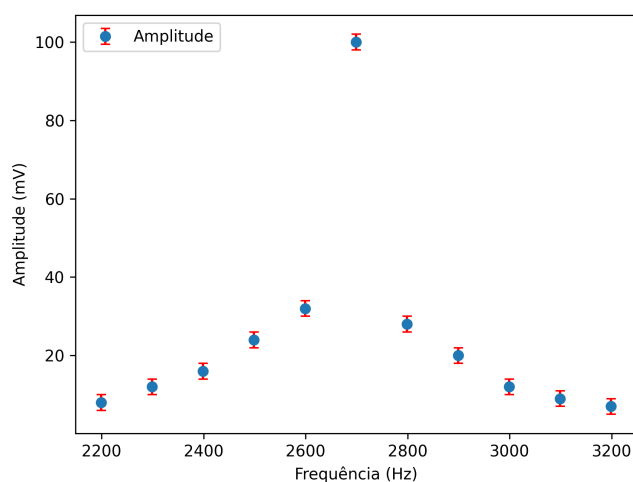


Figura 4: Gráfico da amplitude em função da frequência da força oscilante aplicada.

O segundo gráfico, ilustrado na Figura 5, representa a resposta do sistema sob a ação de um amortecimento com o primeiro tipo de vela (Figura 7). Após o mapeamento da oscilação registrada na gravação por meio do software *Tracker*, os pontos de picos da oscilação foram selecionados e filtrados para remover outliers e garantir uma sequência de picos decrescentes. Tal tratamento foi adotado devido a inconsistência do mapeamento realizado pelo *Tracker*.

Esses picos foram então utilizados para ajustar uma curva exponencial decrescente, de modo a determinar o coeficiente de amortecimento da oscilação. O ajuste exponencial resultou em um coeficiente de amortecimento estimado de (0.229 ± 0.031) , indicando a taxa de dissipação da energia no sistema. Esse valor permite caracterizar quantitativamente o impacto do amortecimento no comportamento do sistema oscilante.

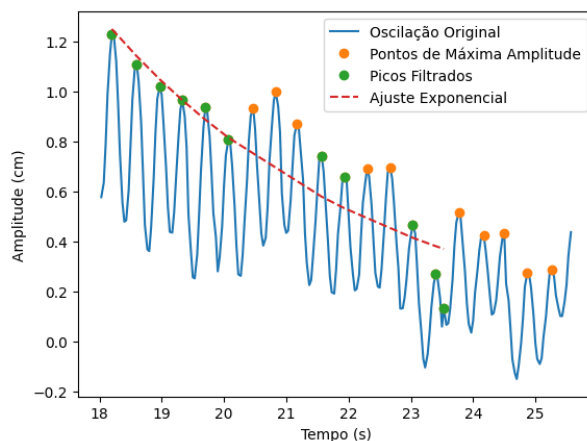


Figura 5: Gráfico da oscilação amortecida do carrinho com o primeiro tipo de vela.

Com o intuito de aferir a influência da área da vela com o coeficiente de amortecimento, o mesmo procedimento foi adotado para o segundo tipo de vela (Figura 8), cuja área é menor que a do primeiro tipo. O ajuste exponencial resultou em um coeficiente de amortecimento estimado de $(0,193 \pm 0,007)$, demonstrando a direta proporcionalidade entre a área da seção de amortecimento e o coeficiente desse amortecimento.

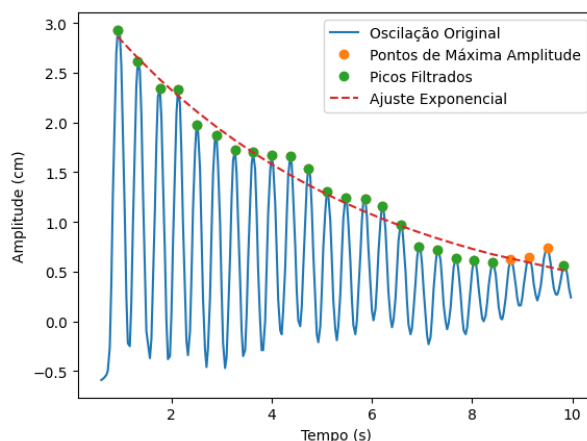


Figura 6: Gráfico da oscilação amortecida do carrinho com o segundo tipo de vela.

6.2. Modos de Vibração em uma Corda

Nesta subseção, são apresentados e analisados os resultados experimentais obtidos para o sistema da corda tensionada oscilante.

Em concordância com o procedimento experimental, todas as massas utilizadas foram medidas e estão registradas na Tabela 2. Ademais, as frequências teóricas dos modos harmônicos para todas as configurações de corda e massa foram calculadas e todo o procedimento está indicado na seção A do Apêndice.

Feito isso, as frequências experimentais encontradas foram comparadas com as teóricas calculadas. As concordâncias médias para cada configuração de corda e massa estão indicadas na Tabela 1.

Tabela 1: Concordância média para cada configuração diferente de corda e massa de tensão.

Corda	Massa	Concordância
1	1	50,41%
1	2	65,55%
2	1	72,19%
2	2	88,46%

7. Conclusão

O experimento demonstrou com eficácia a relação entre os parâmetros físicos de sistemas oscilatórios e seus comportamentos dinâmicos, tanto em sistemas discretos quanto contínuos. No estudo dos osciladores harmônicos amortecidos forçados, a frequência de ressonância foi identificada com precisão em 2699 Hz, e os coeficientes de amortecimento foram determinados para diferentes áreas de amortecimento. Os resultados evidenciaram a proporcionalidade entre o aumento da área da vela e a intensidade do amortecimento, confirmando as previsões teóricas. Já no caso dos modos de vibração em cordas tensionadas, as frequências experimentais de ressonância apresentaram concordância variando de 50,41% a 88,46% em relação aos valores teóricos, dependendo da configuração de corda e tensão aplicada. Essa variação destaca a influência de fatores experimentais na precisão dos resultados.

As discrepâncias entre os resultados experimentais e teóricos podem ser atribuídas a várias fontes de erro. No sistema massa-mola, pequenas forças dissipativas, como o atrito residual no trilho de ar, podem ter influenciado a medição da amplitude das oscilações, especialmente em frequências próximas à ressonância. Além disso, imprecisões no alinhamento entre LED, lupa e fotodetector podem ter causado flutuações nos dados coletados. A análise do amortecimento, embora eficiente, dependeu de ajustes exponenciais que estão sujeitos a incertezas devido a ruídos experimentais.

No estudo das cordas tensionadas, a formação de ondas estacionárias pode ter sido impactada por variações na tensão real da corda, causadas por imperfeições no equipamento ou oscilações na massa suspensa. A precisão limitada na medição das massas e a possível influência de vibrações parasitas no transdutor também podem ter contribuído para as diferenças observadas. Adicionalmente, os modelos teóricos desconsideram fatores como elasticidade não ideal das cordas ou variações na densidade ao longo de seu comprimento, que podem ter introduzido desvios nos resultados.

Referências

- [1] DEPARTAMENTO DE FÍSICA, Universidade Federal De São Carlos, Centro De Ciências Exatas E De Tecnologia. *Física Experimental A*. São Carlos, 2012.
- [2] DEPARTAMENTO DE FÍSICA, Universidade Federal De São Carlos, Centro De Ciências Exatas E De Tecnologia. *Física Experimental D*. São Carlos, 2022.
- [3] NUSSENZVEIG, H. MOYSES, Curso de Física Básica, Vol. 1, Ed. Edgar Blucher Ltda, 2009. 397 p.

8. Apêndice

A. Cálculos

A.1. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 1 com a Massa 1.

A.1.1. Dados

$$\begin{aligned}L &= 0,80 \text{ m} \\m &= 5,0 \text{ g} = 0,005 \text{ kg} \\M_1 &= 156,8 \text{ g} = 0,1568 \text{ kg} \\g &= 9,8 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

A.1.2. Densidade Linear μ :

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,005}{0,80} = 0,00625 \text{ kg/m}$$

A.1.3. Tensão T :

$$T = M_1 \cdot g = 0,1568 \cdot 9,8 = 1,537 \text{ N}$$

A.1.4. Frequências dos Modos f_n :

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- Substituindo os valores:

$$f_n = \frac{n}{2 \cdot 0,80} \sqrt{\frac{1,537}{0,00625}}$$

$$f_n = \frac{n}{1,6} \sqrt{245,92}$$

$$f_n = \frac{n}{1,6} \cdot 15,68$$

$$f_n = 9,8n \text{ Hz}$$

A.1.5. Resultados

$$f_1 = 9,8 \cdot 1 = 9,8 \text{ Hz}$$

$$f_2 = 9,8 \cdot 2 = 19,6 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 9,8 \cdot 3 = 29,4 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 9,8 \cdot 4 = 39,2 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 9,8 \cdot 5 = 49,0 \text{ Hz}$$

A.2. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 1 com a Massa 2.

A.2.1. Dados

:

- Comprimento da corda: $L = 0,80 \text{ m}$
- Massa da corda: $m_{\text{corda}} = 5 \text{ g} = 0,005 \text{ kg}$
- Tensão: $T = m \cdot g = 0,2355 \times 9,8 = 2,3079 \text{ N}$

A.2.2. Densidade linear de massa μ da corda

:

$$\mu = \frac{m_{\text{corda}}}{L} = \frac{0,005}{0,80} = 0,00625 \text{ kg/m}$$

A.2.3. Frequência fundamental f_1

:

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- Substituindo os valores:

$$f_1 = \frac{1}{2 \times 0,80} \sqrt{\frac{2,3079}{0,00625}}$$
$$f_1 = \frac{1}{1,6} \sqrt{369,264} = 0,625 \times 19,21 = 13,56 \text{ Hz}$$
$$f_2 = 2 \times f_1 = 2 \times 13,56 = 27,12 \text{ Hz}$$
$$f_3 = 3 \times f_1 = 3 \times 13,56 = 40,68 \text{ Hz}$$
$$f_4 = 4 \times f_1 = 4 \times 13,56 = 54,24 \text{ Hz}$$
$$f_5 = 5 \times f_1 = 5 \times 13,56 = 67,80 \text{ Hz}$$

A.3. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 2 com a Massa 1.

A.3.1. Dados

:

- Comprimento da corda $L = 0,80 \text{ m}$
- Massa da corda $m_{\text{corda}} = 1,7 \text{ g} = 0,0017 \text{ kg}$
- Massa tensionadora $m = 156,8 \text{ g} = 0,1568 \text{ kg}$

A.3.2. Densidade Linear

$$\mu = \frac{m_{\text{corda}}}{L} = \frac{0,0017}{0,80} = 0,002125 \text{ kg/m}$$

A.3.3. Tensão

$$T = m \cdot g = 0,1568 \times 9,8 = 1,53664 \text{ N}$$

A.3.4. Frequência Fundamental f_1

$$f_1 = \frac{1}{2 \times 0,80} \sqrt{\frac{1,53664}{0,002125}}$$
$$f_1 = \frac{1}{1,6} \sqrt{723,9235} = 0,625 \times 26,90 = 16,81 \text{ Hz}$$

A.3.5. Frequências dos Cinco Primeiros Harmônicos

$$f_2 = 2 \times f_1 = 2 \times 16,81 = 33,62 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3 \times f_1 = 3 \times 16,81 = 50,43 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 4 \times f_1 = 4 \times 16,81 = 67,24 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 5 \times f_1 = 5 \times 16,81 = 84,05 \text{ Hz}$$

A.4. Cálculo das Frequências dos Modos Harmônicos para a Corda 2 com a Massa 2.

A.4.1. Dados

:

- Comprimento da corda $L = 0,80 \text{ m}$
- Massa da corda $m_{\text{corda}} = 1,7 \text{ g} = 0,0017 \text{ kg}$
- Massa tensionadora $m = 235,5 \text{ g} = 0,2355 \text{ kg}$

A.4.2. Densidade Linear

$$\mu = \frac{m_{\text{corda}}}{L} = \frac{0,0017}{0,80} = 0,002125 \text{ kg/m}$$

A.4.3. Tensão

$$T = m \cdot g = 0,2355 \times 9,8 = 2,3079 \text{ N}$$

A.4.4. Frequência Fundamental f_1

$$f_1 = \frac{1}{2 \times 0,80} \sqrt{\frac{2,3079}{0,002125}}$$
$$f_1 = \frac{1}{1,6} \sqrt{1086,776} = 0,625 \times 32,97 = 20,61 \text{ Hz}$$

A.4.5. Frequências dos Cinco Primeiros Harmônicos

$$f_2 = 2 \times f_1 = 2 \times 20,61 = 41,22 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3 \times f_1 = 3 \times 20,61 = 61,83 \text{ Hz}$$

$$f_4 = 4 \times f_1 = 4 \times 20,61 = 82,44 \text{ Hz}$$

$$f_5 = 5 \times f_1 = 5 \times 20,61 = 103,05 \text{ Hz}$$

B. Tabelas

B.1. Tabela com as Medidas das Massas.

Massa Corda 1 (g)	M_1 (g)	M_2 (g)	Massa Corda 2 (g)
5,0	156,8	235,5	1,7

Tabela 2: Medições das massas das cordas e das massas utilizadas no experimento.

B.2. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 1 e Massa 1

Harmônico	Frequência Experimental (Hz)	Frequência Teórica (Hz)	Concordância (%)
1	14,5	9,8	$\left[1 - \frac{ 14,5-9,8 }{9,8}\right] \times 100 = 52,04\%$
2	29,6	19,6	$\left[1 - \frac{ 29,6-19,6 }{19,6}\right] \times 100 = 48,98\%$
3	41,8	29,4	$\left[1 - \frac{ 41,8-29,4 }{29,4}\right] \times 100 = 57,82\%$
4	58,9	39,2	$\left[1 - \frac{ 58,9-39,2 }{39,2}\right] \times 100 = 49,74\%$
5	76,7	49,0	$\left[1 - \frac{ 76,7-49,0 }{49,0}\right] \times 100 = 43,47\%$

Tabela 3: Tabela comparativa entre as frequências experimentais e teóricas dos modos harmônicos com a concordância.

B.3. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 1 e Massa 2

Harmônico	Frequência Experimental (Hz)	Frequência Teórica (Hz)	Concordância (%)
1	17,9	13,56	$\left[1 - \frac{ 17,9-13,56 }{13,56}\right] \times 100 = 67,99\%$
2	34,2	27,12	$\left[1 - \frac{ 34,2-27,12 }{27,12}\right] \times 100 = 73,89\%$
3	53,5	40,68	$\left[1 - \frac{ 53,5-40,68 }{40,68}\right] \times 100 = 68,49\%$
4	75,3	54,24	$\left[1 - \frac{ 75,3-54,24 }{54,24}\right] \times 100 = 61,17\%$
5	97,5	67,80	$\left[1 - \frac{ 97,5-67,80 }{67,80}\right] \times 100 = 56,19\%$

Tabela 4: Tabela comparativa entre as frequências experimentais e teóricas dos modos harmônicos com a concordância.

B.4. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 2 e Massa 1

Harmônico	Frequência Experimental (Hz)	Frequência Teórica (Hz)	Concordância (%)
1	13,3	18,8	$100 \times \left(1 - \frac{ 13,3-18,8 }{18,8}\right) = 70,74\%$
2	27,3	38,3	$100 \times \left(1 - \frac{ 27,3-38,3 }{38,3}\right) = 71,28\%$
3	42,2	58,5	$100 \times \left(1 - \frac{ 42,2-58,5 }{58,5}\right) = 72,14\%$
4	57,5	78,5	$100 \times \left(1 - \frac{ 57,5-78,5 }{78,5}\right) = 73,25\%$
5	72,8	99	$100 \times \left(1 - \frac{ 72,8-99 }{99}\right) = 73,53\%$

Tabela 5: Tabela comparativa entre as frequências experimentais e teóricas dos modos harmônicos com a concordância.

B.5. Concordância Dados Experimentais e Teóricos - Corda 2 e Massa 2

Harmônico	Frequência Experimental (Hz)	Frequência Teórica (Hz)	Concordância (%)
1	17,9	20,61	$100 \times \left(1 - \frac{ 17,9-20,61 }{20,61}\right) = 86,85\%$
2	34,2	41,22	$100 \times \left(1 - \frac{ 34,2-41,22 }{41,22}\right) = 82,98\%$
3	53,5	61,83	$100 \times \left(1 - \frac{ 53,5-61,83 }{61,83}\right) = 86,53\%$
4	75,3	82,44	$100 \times \left(1 - \frac{ 75,3-82,44 }{82,44}\right) = 91,32\%$
5	97,5	103,05	$100 \times \left(1 - \frac{ 97,5-103,05 }{103,05}\right) = 94,61\%$

Tabela 6: Tabela comparativa entre as frequências experimentais e teóricas dos modos harmônicos com a concordância.

C. Figuras

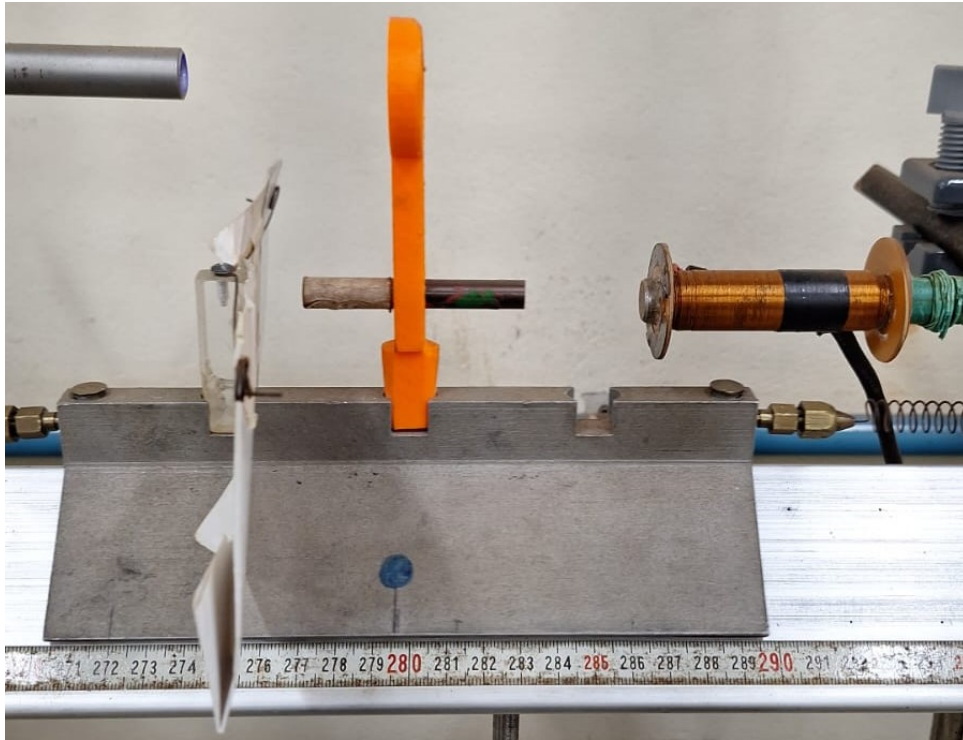


Figura 7: Sistema oscilante com o primeiro tipo de vela.

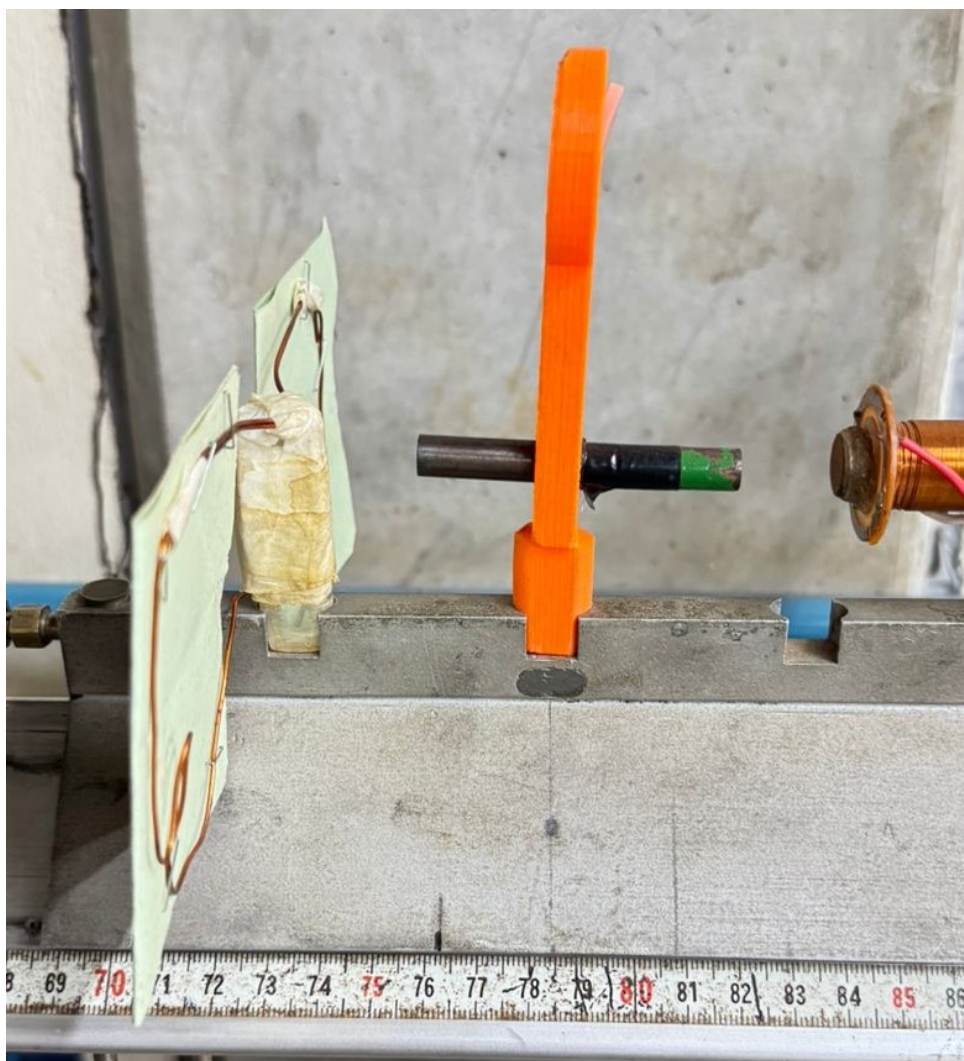


Figura 8: Sistema oscilante com o segundo tipo de vela.