

Reaction wheel 1D pendulum

1 Вывод уравнений движения



- m_p - масса маятника
- m_r - масса ротора
- l_p - расстояние от шарнира до центра масс маятника
- l_r - расстояние от шарнира до центра масс ротора
- J_p - момент инерции маятника при вращении вокруг центра масс
- J_r - момент инерции ротора
- θ - угол маятника относительно вертикали
- θ_r - угол ротора **относительно маятника**
- τ - момент, прикладываемый к ротору
- C_p - коэффициент вязкого трения в шарнире маятника
- C_r - коэффициент вязкого трения ротора

Кинетическая энергия маятника:

$$T_p = \frac{1}{2}(m_p l_p^2 + J_p) \dot{\theta}^2$$

Кинетическая энергия маховика:

$$T_r = \frac{1}{2} m_r l_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_r (\dot{\theta}_r + \dot{\theta})^2$$

Общая потенциальная энергия:

$$P = (m_p l_p + m_r l_r) g \cos \theta$$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = T_p + T_r - P$$

Введём новые обозначения констант, которые нам уменьшат общее количество закорючек в уравнениях:

$$\begin{aligned} ml &:= m_p l_p + m_r l_r \\ J &:= J_p + m_p l_p^2 + m_r l_r^2 \end{aligned}$$

Тогда лагранжиан запишется следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_r (\dot{\theta}_r + \dot{\theta})^2 - ml g \cos \theta$$

Для удобства выпишем все частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_r} &= J_r (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}) & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_r} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= (J + J_r) \dot{\theta} + J_r \dot{\theta}_r & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= ml g \sin \theta \end{aligned}$$

Напоминалка про уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i,$$

где q это обобщённая координата. В нашем случае мы выбираем $q := (\theta_r, \theta)^\top$.

Тогда уравнения движения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} J_r \ddot{\theta}_r + J_r \ddot{\theta} &= -C_r \dot{\theta}_r + \tau, \\ (J + J_r) \ddot{\theta} + J_r \ddot{\theta}_r - mlg \sin \theta &= -C_p \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Перепишем, оставив вторые производные слева:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_r = \frac{J+J_r}{JJ_r} (\tau - C_r \dot{\theta}_r) - \frac{mlg}{J} \sin \theta + \frac{C_p}{J} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = -\frac{\tau}{J} + \frac{mlg}{J} \sin \theta - \frac{C_p}{J} \dot{\theta} + \frac{C_r}{J} \dot{\theta}_r \end{cases}$$

Или перепишем в матричной форме:

$$M \ddot{q} + G(q) = \mathcal{T}(\dot{q}, \tau), \quad (1)$$

где

$$M := \begin{bmatrix} J_r & J_r \\ J_r & J_r + J \end{bmatrix}, \quad G(q) := \begin{bmatrix} 0 \\ -mlg \sin(q_2) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}(\dot{q}, \tau) := \begin{bmatrix} -C_r \dot{\theta}_r + \tau \\ -C_p \dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

Наверняка трение в маятнике будет существенно ниже трения в роторе, и вполне возможно, что при этом пренебречь можно будет обоими.

Эти уравнения движения полностью совпадают с уравнениями из [The Cubli: A Cube that can Jump Up and Balance](#), а также с уравнениями из [The Reaction Wheel Pendulum](#) (с точностью до выбора переменных, Åström отсчитывает угол ротора от вертикали). Но Åström в уравнения Лагранжа вставляет моменты τ и $-\tau$, а я тут вставляются τ и 0. Подход Острёма интуитивно понятен: если на ротор действует момент τ , то на маятник действует момент $-\tau$. Впрочем, это зависит от выбора репера (θ_r отсчитывается от вертикали или от маятника). Нечего выбирать неортогональные базисы пространства конфигураций.

2 Как выбрать размер маховика?

Здесь я напишу уравнения движения для обычного коллекторного двигателя, но для бесколлекторных уравнения примерно такие же. Подадим на клеммы мотора максимально возможное напряжение, для заданного маховика задача состоит в том, чтобы найти максимально возможный угол начального отклонения маятника, при котором разгоняющийся маховик сможет перекинуть маятник через ноль. Затем будем варьировать размер маховика и смотреть, как будет изменяться максимально возможный угол отклонения.

Заглянем в даташит мотора:

- L - индуктивность обмотки
- R - сопротивление обмотки
- k - torque constant (= back-EMF constant)

Добавим в уравнения движения уравнение мотора:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_r = \frac{J+J_r}{JJ_r} (kI - C_r \dot{\theta}_r) - \frac{mlg}{J} \sin \theta + \frac{C_p}{J} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = -\frac{k}{J} I + \frac{mlg}{J} \sin \theta - \frac{C_p}{J} \dot{\theta} + \frac{C_r}{J} \dot{\theta}_r \\ \dot{I} = \frac{U}{L} - \frac{R}{L} I - \frac{k}{L} \dot{\theta}_r \end{cases}$$

Для грубой прикидки размера маховика будем пренебрегать всяким. Индуктивность обмоток мотора очень низкая, поэтому можно сказать, что $I = \frac{U}{R} - \frac{K}{R} \dot{\theta}_r$. Вязкие трения тоже убираем, $C_r = C_p = 0$.



Рис. 1: Самый выгодный диаметр маховика - 11см, при этом можно будет отклонить маятник на 0.24 радиана. Видно, что результаты моделирования линейаризованной модели и исходной практически идентичны.

2.1 Численное решение на основе нелинейной модели

Итак, у нас есть модель (1). Мы пренебрегаем индуктивностью и рассматриваем модель мотора вида

$$\tau = kI = \frac{k}{R}U - \frac{k^2}{R}\dot{\theta}_r.$$

Перепишем модель (1) в виде

$$M\ddot{q} = -G(q) - \begin{bmatrix} C_r + \frac{k^2}{R} & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} \frac{k}{R} \\ 0 \end{bmatrix} U.$$

Выберем начальные условия в виде $q(0) = [0 \ -\theta_0]^\top$ и $\dot{q}(0) = [0 \ 0]^\top$. Тогда наша задача может быть сформулирована следующим образом: при заданных параметрах маховика, то есть матрице M , найти максимальное значение θ_0 , при котором траектория $q_2(t) = \theta(t)$ достигает нуля при входном воздействии $U(t) = -U_{max}$, где U_{max} это максимальное значение управления (напряжения). Минус тут стоит так как момент на маятник создаётся с противоположным знаком по сравнению с моментом на маховике. Эта задача решается численно с использованием матлабовского ode45.

Немного забегаая вперёд, результат вычислений приведён на рисунке 1.

2.2 (Почти) аналитическое решение на основе линеаризации

На всякий случай проверим правильность запрограммированной нелинейной оптимизации при помощи полуаналитического решения. Рабочая зона наверняка будет узкой, поэтому заменим синус на его аргумент. Мысль такая: если будет стабилизироваться линеаризованная модель, то с синусом и подавно маятник встанет. Тогда уравнения движения будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_r = \frac{J+J_r}{JJ_r}(\frac{kU}{R} - \frac{k^2}{R}\dot{\theta}_r) - \frac{m l g}{J}\theta \\ \ddot{\theta} = -\frac{kU}{JR} + \frac{k^2}{JR}\dot{\theta}_r + \frac{m l g}{J}\theta \end{cases}$$

Ну или в матричном виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix} + BU,$$

где:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{mlg}{J} & 0 & \frac{k^2}{JR} \\ -\frac{mlg}{J} & 0 & -\frac{(J+J_r)k^2}{JJ_rR} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k}{JR} \\ \frac{(J+J_r)k}{JJ_rR} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай выпишем характеристический многочлен:

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{k^2(J_r + J)}{J_rJR} \lambda^2 + \frac{mlg}{J} \lambda + \frac{mlgk^2}{J_rJR}.$$

Он имеет три различных вещественных корня, два из них отрицательных, один положительный. В этом легко убедиться:

$$\chi(0) > 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \chi(\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \chi(\lambda) = -\infty, \quad \chi\left(-\sqrt{\frac{mlg}{J}}\right) = -\frac{mlgk^2}{J^2R} < 0.$$

Аргумент в последнем неравенстве вылез из желания сократить кубическое и линейное слагаемые многочлена. Положительное собственное число говорит о том, что в отсутствие управления система у нас неустойчива. Поскольку у нас три различных вещественных корня, то матрица A будет иметь полный набор вещественных собственных векторов, соответственно можно произвести её спектральное разложение $A = V\Lambda V^{-1}$, где V - это матрица, составленная из трёх собственных векторов-столбцов, а $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ - диагональная матрица собственных чисел. На всякий случай давайте скажем, что V можно записать в следующем виде:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{k^2}{JR} & \frac{k^2}{JR} & \frac{k^2}{JR} \\ \frac{k^2}{JR}\lambda_1 & \frac{k^2}{JR}\lambda_2 & \frac{k^2}{JR}\lambda_3 \\ \lambda_1^2 - \frac{mlg}{J} & \lambda_2^2 - \frac{mlg}{J} & \lambda_3^2 - \frac{mlg}{J} \end{pmatrix}.$$

Конкретно это нам не очень поможет, так как собственные числа мы явно не выписывали. Перемножая $(A - \lambda_i E) \times V$, мы получим вектор нулей, так как в последней координате будет стоять характеристический многочлен.

Наша задача найти зону устойчивости нашего диффура. Для начала сделаем замену переменной $x = Vy$. Не умаляя общности, будем считать, что $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$. Тогда наше уравнение $\dot{x} = Ax + BU$ переписется как $V\dot{y} = AVy + BU$. Домножим слева на V^{-1} :

$$\dot{y} = V^{-1}AVy + V^{-1}BU = \Lambda y + V^{-1}BU.$$

Эта замена переменной сделана для того, чтобы зона устойчивости имела красивое выражение, будучи разложенной на независимые переменные. В силу диагональности новой матрицы системы, вторая и третья координата y нас не интересуют вообще, нам интересна координата, которая соответствует положительному собственному числу. Обозначим через b_1 первую координату вектора $V^{-1}BU$ (напоминаю, что у нас напряжение U постоянно). Вполне очевидно, что зона устойчивости этого диффура представляет собой пространство между двумя плоскостями $\left(-\frac{|b_1|}{\lambda_1}, \frac{|b_1|}{\lambda_1}\right) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Это прекрасно, но нас интересует устойчивость в терминах изначальных переменных. Если мы сделаем обратное преобразование, то в пространстве x зона устойчивости также будет заключена между двумя параллельными плоскостями. Плоскости будут наклонными, т.к. мы себе можем позволить больший угол отклонения, если правильно подкрутить начальные скорости. Но нас интересует конкретный случай, когда обе скорости нулевые. Самый простой способ это посчитать - это взять луч с направляющим вектором $(1, 0, 0)$, преобразовать его при помощи V^{-1} , пересечь с плоскостью $y_1 = \frac{|b_1|}{\lambda_1}$, а затем точку пересечения обратно преобразовать при помощи V .

Решаем численно, так как очень уж громоздко выписывать собственные вектора символьно. Картинка 1 показывает максимальный угол, из которого можно стабилизировать маятник, для данного диаметра маховика. Решение практически совпадает с нелинейной оптимизацией.

3 Стабилизация

3.1 Контур тока

У нас есть хороший усилитель и быстрый контур тока. Так что мы можем считать, что управляем моментом напрямую и компенсируем противо-ЭДС. Тогда в модели системы мы положим $\tau = kI$ и будем считать, что I это наш сигнал управления.

3.2 LQR

Линеаризованная модель с контуром тока имеет вид

$$\dot{X} = AX + BI,$$

где, пренебрегая вязким трением,

$$X = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_r \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{mJg}{J} & 0 & 0 \\ -\frac{mJg}{J} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k}{J} \\ \frac{(J+J_r)k}{JJ_r} \end{pmatrix}.$$

Сюда надо будет добавить построение LQR для стабилизации.

3.3 Ошибка калибровки датчика положения

Итак, если мы записываем LQR, то у нас система будет вести себя как $\dot{X} = AX - BKX$, где $K = (k_1 \ k_2 \ k_3)$.

Теперь давайте мы представим, что у нас плохо откалиброван датчик угла маятника, он имеет постоянное смещение δ . Тогда вместо правильного управления система на вход будет получать не совсем правильный сигнал $I = -KX - K(\delta \ 0 \ 0)^T$. Давайте посчитаем, к чему сойдётся система. В бесконечности производная должна быть нулевой, посему считаем

$$0 = (A - BK)X - BK(\delta \ 0 \ 0)^T \Rightarrow X = (A - BK)^{-1}BK(\delta \ 0 \ 0)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta \frac{k_1}{k_3} \end{pmatrix}^T.$$

Это означает, что при плохо откалиброванном датчике система сойдётся к нулевому углу маятника, но ненулевой скорости маховика, причём скорость пропорциональна ошибке калибровки.

4 Оценка смещения датчика

Допустим, что в датчике есть смещение d и реально мы измеряем не θ и θ_r , а $y := [\theta + d \ \theta_r]^T$. Как было показано в разделе 3.3, величину d можно определить в установившемся режиме. Однако, хотелось бы что-то лучше.

Чтоб всех запутать я снова меняю обозначения и теперь

$$x := \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ d \\ \theta_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix}, \quad \hat{x} := \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\dot{\theta}} \\ \hat{d} \\ \hat{\theta}_r \\ \hat{\dot{\theta}}_r \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где x это вектор состояний, а \hat{x} это вектор оценок. Так же определим вектор ошибок оценивания $\tilde{x} := \hat{x} - x$. Модель системы в новых координатах и без трения примет вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ b_1 I + a_1 \sin(x_1) \\ 0 \\ x_5 \\ b_2 I + a_2 \sin(x_1) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x = Cx,$$

где $b_1 := -\frac{k}{J}$, $a_1 := \frac{mJg}{J}$, $b_2 := \frac{(J+J_r)k}{JJ_r}$ и $a_2 := -\frac{mJg}{J}$.

Запишем

$$\sin(\theta) = \sin(x_1) = \sin(y_1 - x_3) = \sin(y_1 - \hat{x}_3 + \tilde{x}_3).$$

Предположим, что ошибка оценивания смещения датчика у нас мала (это вполне реалистично). Тогда

$$\sin(x_1) \approx \sin(y_1 - \hat{x}_3) + \cos(y_1 - \hat{x}_3)\tilde{x}_3.$$

Запишем для оценки состояния

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ b_1 I + a_1 \sin(y_1 - \hat{x}_3) \\ 0 \\ \hat{x}_5 \\ b_2 I + a_2 \sin(y_1 - \hat{x}_3) \end{bmatrix} + f(y), \quad \hat{y} = C\hat{x},$$

где функцию f определим позднее. Тогда динамика ошибки оценивания

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \cos(y_1 - \hat{x}_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2 \cos(y_1 - \hat{x}_3) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + f(y), \\ \tilde{y} &= C\tilde{x}. \end{aligned}$$

Итак, у нас линейная система с переменными параметрами. В точках $\cos(y_1 - \hat{x}_3) = 0$ она становится ненаблюдаемой. Вообще, как мне представляется из разглядывания уравнений динамики, для оценки смещения нам достаточно наблюдать только за самим маятником, маховик информации не добавляет. Поэтому чтобы ещё раз всех запутать, я снова всё переобозначу и буду рассматривать только три первых состояния:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad y = y_1.$$

Обозначим для краткости $q := y - \hat{x}_3$. Модель системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \cos(q) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \sin(q) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} I \\ &= A'x + A''(q)\tilde{x} + f_x(q) + Bu = A(q)x + \beta, \\ y &= [1 \quad 0 \quad 1] x. \end{aligned}$$

где

$$A(q) := A' - A''(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \cos(q) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и $\beta(q, \hat{x}, u) := A''(q)\hat{x} + f_x(q) + Bu$ — измеряемый сигнал. Пусть наблюдатель имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = A(q)\hat{x} + \beta + f(\tilde{y}),$$

тогда

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{\hat{x}} - \dot{x} = A(q)\tilde{x} + f(\tilde{y}), \quad \tilde{y} = [1 \quad 0 \quad 1] \tilde{x} = C\tilde{x}.$$

У нас всё та же линейная система с переменными параметрами, которая становится ненаблюдаемой при $\cos(x_1 + \tilde{x}_3) = 0$.

4.0.1 Наблюдатель с постоянными коэффициентами

Возможным выбором будет линейный наблюдатель вида $f(\tilde{y}) = -L\tilde{y}$, тогда задача сводится к устойчивости для всех q системы

$$\dot{\tilde{x}} = (A(q) - LC)\tilde{x}.$$

Выписав характеристические полиномы для $\cos(y_1 - \hat{x}_3) = \pm 1$, а именно

$$s^3 + (l_1 + l_3)s^2 + l_2s \pm a_1l_3,$$

можно видеть, что не существует такого постоянного вектора $L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3]^\top$, при котором матрица $A(q) - LC$ была бы Гурвицева как при $\cos(y_1 - \hat{x}_3) = 1$, так и при $\cos(y_1 - \hat{x}_3) = -1$. То есть нельзя наблюдателем с постоянными коэффициентами стабилизировать вдоль всех траекторий.

Если мы допустим, что у нас маятник всегда в верхнем полукруге, и что мы можем предположить $a_1 \cos(q) \geq \sigma_0 > 0$, то задача сводится к решаемым численно ЛМІ. Например, моделирование показывает переходные процессы длительностью 0.5 секунды при выборе

$$L = \begin{bmatrix} 546 & 1100 & -508 \end{bmatrix}^\top.$$

5 Оценка скоростей (гомогенный дифференциатор)

5.1 Общий вид

Вообще гомогенный дифференциатор строится для системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(y, u), \\ \dot{x}_2 &= x_3 + f_2(y, u), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(y, u), \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $f_i(y, u)$ известны. Пусть $e := \hat{x} - x$, тогда e_1 измеряется. Дифференциатор имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + f_1(y, u) + \chi_1(e_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + f_2(y, u) + \chi_2(e_1), \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= f_n(y, u) + \chi_n(e_1), \end{aligned}$$

где

$$\chi_i(e_1) = -k_i \lceil e_1 \rceil^{\alpha_i} = -k_i |e_1|^{\alpha_i} \text{sign}(e_1).$$

Параметры α_i выбираются как

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha \in \left(\frac{n-1}{n}, 1 \right), \\ \alpha_2 &= 2\alpha - 1, \\ \alpha_n &= n\alpha - (n-1). \end{aligned}$$

Параметры k_i выбираются так, чтобы полином $p^n + k_1 p^{n-1} + \dots + k_{n-1} p + k_n$ был Гурвицев (действительная часть всех корней строго меньше нуля).

Тогда для ошибки оценивания справедливо

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - k_1 \lceil e_1 \rceil^\alpha, \\ \dot{e}_2 &= e_3 - k_2 \lceil e_1 \rceil^{2\alpha-1}, \\ &\vdots \\ \dot{e}_n &= -k_n \lceil e_1 \rceil^{n\alpha-(n-1)}, \end{aligned}$$

и можно показать, что ошибка оценивания сходится к нулю за конечное время.

Отметим, что, в отличие от KKL или GESO, дифференциатор строится для скалярных моделей. Он менее завязан на модель и более ориентирован на концепцию переменной, изменяющейся с некоторой скоростью, то есть именно на дифференцирование, а не на оценивание импульсов, например. Это видно из модели (3), которая сама является почти что цепочкой интеграторов и приводит к цепочке интеграторов для модели ошибки. Сигнал ошибки e_1 также скалярный, и нужно строить отдельный дифференциатор по каждой степени свободы, а не для всей модели сразу. С другой стороны, такой подход оказывается менее чувствительным с точки зрения ошибок модели. И в этом смысле он ближе к (так называемым model-free) HGO или SMO, чем к model-based GESO.

5.2 Дифференциатор для маятника

Нужно привести модель маятника к каноническому виду (3) для каждой степени свободы. Начнём с самого маятника. С учётом контура тока запишем

$$\ddot{\theta} = f_p(\theta, I) + \tilde{f}_p,$$

где

$$f_p(\theta, I) = -\frac{k}{J}I + \frac{m l g}{J} \sin(\theta),$$

$$\tilde{f}_p = -\frac{C_p}{J} \dot{\theta} + \frac{C_r}{J} \dot{\theta}_r.$$

Здесь $f_p(\theta, I)$ это то, что мы более-менее знаем и можем воспроизвести, а \tilde{f}_p это то, чего мы не знаем или не измеряем. Также в последнее можно включить ошибки в оценивании параметров. Видно, что мы везучие, и в \tilde{f}_p у нас входят только трения, которыми мы будем пренебрегать. Тогда можно надеяться, что следующая система вида (3) будет повторять динамику маятника:

$$\dot{x}_{p1} = x_{p2}$$

$$\dot{x}_{p2} = f_p(\theta, I)$$

Обозначим ошибку наблюдения через $e_p = \hat{x}_{p1} - \theta$, тогда наблюдатель будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_{p1} = \hat{x}_{p2} - k_{p1} [e_p]^{\alpha_p},$$

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_{p2} = f_p(\theta, I) - k_{p2} [e_p]^{2\alpha_p-1},$$

$$\hat{\dot{\theta}} = \hat{x}_{p2},$$

Сделаем то же самое и для второй степени свободы, для маховика:

$$\ddot{\theta}_r = f_r(\theta, I) + \tilde{f}_r,$$

где

$$f_r(\theta, I) = \frac{(J + J_r)k}{JJ_r} I - \frac{m l g}{J} \sin(\theta),$$

$$\tilde{f}_r = -\frac{C_r(J + J_r)}{JJ_r} \dot{\theta}_r + \frac{C_p}{J} \dot{\theta}.$$

Опять-таки, в \tilde{f}_r у нас входят только трения, которыми мы будем пренебрегать. Тогда система вида (3):

$$\dot{x}_{r1} = x_{r2}$$

$$\dot{x}_{r2} = f_r(\theta, I)$$

предполагает следующий наблюдатель:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_{r1} = \hat{x}_{r2} - k_{r1} [e_r]^{\alpha_r},$$

$$\frac{d}{dt} \hat{x}_{r2} = f_r(\theta, I) - k_{r2} [e_r]^{2\alpha_r-1},$$

$$\hat{\dot{\theta}}_r = \hat{x}_{r2},$$

где $e_r = \hat{x}_{r1} - \theta_r$.

Моделирование показывает, что с параметрами $\alpha_p = \alpha_r = 0.75$ и $k_p = k_r = [7 \quad 12]$ оценки сходятся за примерно 1 секунду.

6 Reduced order observer

Итак, напомним, что у нас есть $q = y - \hat{x}_3$ и модель системы:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A'x + A''(q)\hat{x} + f_x(q) + Bu = A(q)x + \beta, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.\end{aligned}$$

где

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A''(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \cos(q) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f_x(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \sin(q) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда

$$A(q) = A' - A''(q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \cos(q) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и $\beta(q, \hat{x}, u) = A''(q)\hat{x} + f_x(q) + Bu$ — измеряемый сигнал. То есть мы строим наблюдатель именно для системы

$$\dot{x} = A(q)x + \beta.$$

Теперь допустим, что нам откуда-то известен x_2 (например, из НОМД). Тогда наш выходной сигнал примет вид

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

Как правило, для построения редуцированного наблюдателя переписывают состояния в виде $x = \begin{bmatrix} x_a^\top & x_u^\top \end{bmatrix}$, где x_a это доступные измерению состояния, а x_u — недоступные. Матрица C тогда примет вид $C = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$, а редуцированный наблюдатель строится в виде

$$\begin{aligned}\hat{x}_u &= Ly + z, \\ \dot{z} &= A_z z + B_z u + H_z y,\end{aligned}$$

где при правильном выборе всех матриц всё получается.

Для использования этого подхода нам надо найти преобразование координат, приводящее матрицу C к нужному нам виду. Но так как у нас система относительно простая, да и к тому же $\dot{x}_3 = 0$, то мы обойдёмся без этого и попробуем сразу придумать наблюдатель. Запишем

$$\dot{x}_2 = -a_1 \cos(q)x_3 + \underbrace{a_1 \cos(q)\hat{x}_3 + a_1 \sin(q) + b_1 I}_{\beta_2}.$$

Сформируем z как

$$\dot{z} = a_1 \cos(q)\hat{x}_3 - \beta_2 = -a_1 \sin(q) - b_1 I$$

и построим наблюдатель в виде

$$\hat{x}_3 = L(x_2 + z).$$

Тогда для $\tilde{x}_3 = \hat{x}_3 - x_3$ имеем

$$\dot{\tilde{x}}_3 = L(-a_1 \cos(q)x_3 + \beta_2 + a_1 \cos(q)\hat{x}_3 - \beta_2) = La_1 \cos(q)\tilde{x}_3.$$

Выберем L так, что $La_1 \cos(q) \leq 0$ и получим сходимость оценки.

Замечания

- Если мы говорим про верхнюю половину, то мы можем выбрать постоянный $L = L_0 < 0$ и получить сходимость, не нужно решать LMI.
- Можно легко построить наблюдатель, работающий для всех траекторий, выбрав $L = L(q)$ так, что $L(q) \cos(q) \leq 0$ для всех q . Например, $L(1) = -L_0 \text{sign}(\cos(q))$.
- Но есть нюанс. При использовании НОМД при наличии смещения будет ошибка оценивания скорости. Эта ошибка попадает на вход редуцированного наблюдателя, о генерируемая им оценка смещения идёт на вход НОМД. Получается замкнутый контур, поведение которого надо анализировать.

6.1 НОМД + смещение

Давайте скрестим НОМД и наблюдатель смещения. Мы знаем, что x_2 - это выход НОМД. Тогда продифференцируем наш наблюдатель для \hat{x}_3 : $\dot{\hat{x}}_3 = L(\dot{x}_2 + \dot{z})$. Выражение для $\dot{z} = -f_p(y - \hat{x}_3, I)$ нам известно, \dot{x}_2 возьмём из НОМД:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_{p2} = f_p(y - \hat{x}_3, I) - k_{p2}[e_p]^{2\alpha_p-1}.$$

То есть, оценка смещения \hat{x}_3 есть простой интегратор ошибки e_p .

Иными словами, у нас есть настоящие переменные системы, где мы измеряем непосредственно $x_1 + x_3$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, I) = -\frac{k}{J}I + \frac{mJg}{J}\sin(x_1) \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Мы к ним строим наблюдатель ($e_p := \hat{x}_1 + \hat{x}_3 - (x_1 + x_3) = e_1 + e_3$):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1[e_p]^\alpha \\ \dot{\hat{x}}_2 = f(\hat{x}_1, I) - k_2[e_p]^{2\alpha-1} \\ \dot{\hat{x}}_3 = -Lk_2[e_p]^{2\alpha-1} \end{cases}$$

Динамика ошибок примет вид:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - k_1[e_1 + e_3]^\alpha \\ \dot{e}_2 = \frac{mJg}{J}(\sin(\hat{x}_1) - \sin(x_1)) - k_2[e_1 + e_3]^{2\alpha-1} \\ \dot{e}_3 = -Lk_2[e_1 + e_3]^{2\alpha-1} \end{cases}$$

Замечания:

- ничто нас не заставляет использовать вес $2\alpha - 1$ в третьей строчке, это вполне может быть, например, $3\alpha - 2$. Lk_2 можно писать как k_3 .
- вместо $\sin(\hat{x}_1)$ мы можем вычислять $\sin(x_1 + x_3 - \hat{x}_3)$, тогда во второй строчке будет выражение, зависящее от x_1 и e_3 :

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \frac{mJg}{J}(\sin(x_1 + x_3 - \hat{x}_3) - \sin(x_1)) - k_2[e_1 + e_3]^\alpha \\ &= -\frac{2mJg}{J}\cos(x_1 - e_3/2)\sin(e_3/2) - k_2[e_1 + e_3]^\alpha \end{aligned}$$

Тогда общую динамику ошибок можно записать так:

$$\begin{cases} \dot{e}_p = e_2 - k_1[e_p]^{\alpha_1} - k_3[e_p]^{\alpha_3} \\ \dot{e}_2 = -\frac{2mJg}{J}\cos(x_1 - e_3/2)\sin(e_3/2) - k_2[e_p]^{\alpha_2} \\ \dot{e}_3 = -k_3[e_p]^{\alpha_3} \end{cases}$$

6.2 Доказательство устойчивости

Перепишем динамику ошибок в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{e}_p = (-Lk_2|e_p|^{\alpha_2-1} - k_1|e_p|^{\alpha_1-1})e_p + e_2 \\ \dot{e}_2 = -k_2|e_p|^{\alpha_2-1}e_p + Mf(t)e_3 \\ \dot{e}_3 = -Lk_2|e_p|^{\alpha_2-1}e_p \end{cases} \quad (4)$$

На данный момент мы предполагаем $f(t) \equiv 1$. Позднее мы попробуем ослабить это предположение, введя ограничение типа $1 - c < f(t) < 1 + c$.

Лемма. Пусть $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 \leq 2\alpha_1 - 1$, $L \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M > 1$; $k_1, k_2 > 0$, $f(t) \equiv 1$. Тогда существует окрестность нуля \mathbb{R}^3 , в которой система (4) устойчива.

Замечание. Условия этой леммы покрывают случай нашей железки: $L \approx 0.033$, $M \approx 100$, $k_1 = 7$, $k_2 = 12$, $\alpha_1 = 0.75$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.5$, $k_3 = Lk_2$.

6.2.1 Идея доказательства.

Для начала введём следующие обозначения:

$$B := Lk_2|e_p|^{\alpha_2-1} \quad s := k_1|e_p|^{\alpha_1-1}.$$

Вполне очевидно, что $B \gg s \gg 1$ в некой окрестности нуля. Теперь заметим, что система (4) имеет вид $\dot{\vec{e}} = A\vec{e}$, где $\vec{e} = (e_p, e_1, e_2)^\top$, а матрица выглядит следующим образом: $A = \begin{pmatrix} -B-s & 1 & 0 \\ -B/L & 0 & M \\ -B & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Идея состоит в том, чтобы произвести замену переменных, в которых функция Ляпунова будет иметь вид диагональной квадратичной формы. Предложенная замена выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} e_p \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/L & 1 & L \\ 1 & L/M & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при этой замене $y_1 = e_p$, и что наши большая и малая величины B и s по-прежнему выражаются только через одну переменную y_1 , то есть $B = Lk_2|y_1|^{\alpha_2-1}$ and $s = k_1|y_1|^{\alpha_1-1}$.

Утверждается, что следующая функция: $G(y_1, y_2, y_3) := Ky_1^2 + y_2^2 + My_3^2$ является функцией Ляпунова (при выборе достаточно большой константы K) в окрестности начала координат.

В новых координатах система имеет динамику вида $\dot{\vec{y}} = P\vec{y}$, где

$$P := C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} - B - s & 1 & L \\ \frac{M(Ls + L^2M - L^3s + L^2 - 1)}{L^2(M - L^2)} & \frac{M(2L^2 - 1)}{L(M - L^2)} & M\frac{L^2 + M - 1}{M - L^2} \\ \frac{LMs - Ls + L^2M - M + 1}{L(M - L^2)} & -\frac{L^2 + M - 1}{M - L^2} & -\frac{L(2M - 1)}{M - L^2} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & -p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & -p_{33} \end{pmatrix}$$

Для начала выберем окрестность нуля U_1 , где выполняется следующее неравенство: $s > \max\{\frac{1}{L}, M\}$. Диагональные элементы матрицы P отрицательны в этой окрестности: $p_{11} > B$, p_{22} , $p_{33} > 0$. Заодно заметим, что $p_{23} = -Mp_{32}$.

Посчитаем производную функции G :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} G(y_1, y_2, y_3) &= Ky_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 + My_3\dot{y}_3 = \\ &= \underbrace{-Kp_{11}y_1^2}_{< -KB y_1^2} + Kp_{12}y_1y_2 + Kp_{13}y_1y_3 + p_{21}y_1y_2 - p_{22}y_2^2 + \\ &\quad + \underbrace{(p_{23} + Mp_{32})y_2y_3}_{=0} + Mp_{31}y_1y_3 - Mp_{33}y_3^2 < \\ &< -KB y_1^2 + Kp_{12}y_1y_2 + Kp_{13}y_1y_3 + p_{21}y_1y_2 - p_{22}y_2^2 + Mp_{31}y_1y_3 - Mp_{33}y_3^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Далее, мы выберем константу K и окрестность $U_2 \subset U_1$, в которой будут выполняться следующие неравенства (обоснование будет в следующем параграфе):

$$|p_{21}y_1y_2| < \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{p_{22}}{4}y_2^2 \quad (6)$$

$$|Mp_{31}y_1y_3| < \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{Mp_{33}}{4}y_3^2 \quad (7)$$

$$|Kp_{12}y_1y_2| < \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{p_{22}}{4}y_2^2 \quad (8)$$

$$|Kp_{13}y_1y_3| < \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{Mp_{33}}{4}y_3^2 \quad (9)$$

Вставив неравенства (6)–(9) в неравенство (5), мы получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} G(y_1, y_2, y_3) < -\frac{KB}{2}y_1^2 - \frac{p_{22}}{2}y_2^2 - \frac{Mp_{33}}{2}y_3^2 < 0.$$

Таким образом, мы получим $\dot{G} = \nabla G \cdot \dot{\vec{y}} < 0$ в окрестности U_2 . Окрестность U_2 имеет вид $|y_1| < \varepsilon$. Поскольку G имеет вид $G(y_1, y_2, y_3) = Ky_1^2 + y_2^2 + My_3^2$, то в области $U_3 : Ky_1^2 + y_2^2 + My_3^2 < K\varepsilon^2$ функция G убывает на траекториях нашей системы дифференциальных уравнений (4).

6.2.2 Технические детали доказательства

Утверждение А

$$M > 1, \quad L \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad s > \max\left\{\frac{1}{L}, M\right\} \Rightarrow |p_{21}| < 2\frac{s}{L} \quad (10)$$

Ограничим сверху:

$$p_{21} = \underbrace{\frac{1-L^2}{1-\frac{L^2}{M}} \frac{s}{L}}_{<1} + \underbrace{\frac{L^2M + L^2 - 1}{L^2M - L^4} M}_{<1} < \frac{s}{L} + M < 2\frac{s}{L}$$

Ограничим снизу, заменив s на $1/L$:

$$p_{21} > \frac{L^2M}{L^2M - L^4} M > 0$$

Утверждение Б

$$M > 1, \quad L \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad s > \max\left\{\frac{1}{L}, M\right\} \Rightarrow |p_{31}| < s \quad (11)$$

Ограничим сверху:

$$p_{31} = \underbrace{\frac{M-1}{M-L^2} s}_{<1} + \underbrace{\frac{1-M-L^2M}{L(M-L^2)}}_{<0} < s$$

Ограничим снизу, заменив s на $1/L$:

$$p_{31} > \frac{-LM}{M-L^2} > \frac{-LM}{M-\frac{1}{2}M} = -2L.$$

Утверждение В

$$|e_p| < 1 \Rightarrow B < \frac{Lk_2}{k_1^2} s^2 \quad (12)$$

$$\alpha_2 \leq 2\alpha_1 - 1 \Rightarrow \alpha_2 - 1 \leq 2(\alpha_1 - 1) < 0.$$

$$|e_p| < 1 \Rightarrow |e_p|^{\alpha_2-1} > |e_p|^{2(\alpha_1-1)} \Rightarrow \frac{B}{Lk_2} > \left(\frac{s}{k_1}\right)^2$$

Исходя из этих трёх утверждений, попробуем обосновать неравенства (6) и (7). Поскольку в окрестности U_1 у нас $|p_{21}| < 2\frac{s}{L}$ и $|p_{31}| < s$, то можно утверждать, что

$$|p_{21}y_1y_2| < \frac{2s}{L}\sqrt{y_1^2y_2^2}$$

$$|Mp_{31}y_1y_3| < Ms\sqrt{y_1^2y_3^2}$$

Неравенство (12) говорит о том, что можно выбрать такую постоянную K , что во всей окрестности U_1 будут выполняться неравенства $\frac{2s}{L} < 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{p_{22}}{4}}$ и $Ms < 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{Mp_{33}}{4}}$.

Это, в свою очередь означает

$$|p_{21}y_1y_2| < 2\sqrt{\frac{KB}{8}y_1^2\frac{p_{22}}{4}y_2^2} \leq \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{p_{22}}{4}y_2^2$$

$$|Mp_{31}y_1y_3| < 2\sqrt{\frac{KB}{8}y_1^2\frac{Mp_{33}}{4}y_3^2} \leq \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{Mp_{33}}{4}y_3^2.$$

Правая часть неравенств следует из неравенства Коши $2\sqrt{xy} \leq x + y$.

Итого, мы выбрали постоянную $K := \max\left\{\frac{32k^2}{L^3k_2p_{22}}, \frac{8Mk^2}{Lk_2p_{33}}\right\}$. Теперь осталось выбрать окрестность U_2 , в которой будут выполняться неравенства (8) и (9). Для этого достаточно выбрать такую окрестность, в которой будут выполняться $Kp_{12} < 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{p_{22}}{4}}$ и $Kp_{13} < 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{Mp_{33}}{4}}$. При таком выборе U_2 , применив неравенство Коши аналогично вышеприведённому рассуждению, мы получим выполнение неравенств (8) и (9).

6.2.3 Непостоянная $f(t)$

Заменим теперь $Mf(t)$ на $M + g(t)$:

$$\begin{cases} \dot{e}_p = (-Lk_2|e_p|^{\alpha_2-1} - k_1|e_p|^{\alpha_1-1})e_p + e_2 \\ \dot{e}_2 = -k_2|e_p|^{\alpha_2-1}e_p + (M + g(t))e_3 \\ \dot{e}_3 = -Lk_2|e_p|^{\alpha_2-1}e_p \end{cases} \quad (13)$$

Лемма. Пусть $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 \leq 2\alpha_1 - 1$, $L \in (0, \frac{1}{2})$, $M > 2$; $k_1, k_2 > 0$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и такая окрестность нуля \mathbb{R}^3 , в которой система (13) (асимптотически) устойчива при условии $|g(t)| < \varepsilon$.

Замену переменных используем ту же самую; обозначим матрицу динамики в новых переменных тильдой:

$$\tilde{P} = C^{-1} \left(A + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) C = \begin{pmatrix} -\tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{12} & \tilde{p}_{13} \\ \tilde{p}_{21} & -\tilde{p}_{22} & \tilde{p}_{23} \\ \tilde{p}_{31} & \tilde{p}_{32} & -\tilde{p}_{33} \end{pmatrix}.$$

От предыдущей матрицы P она отличается на вот такое слагаемое:

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{Mg}{M-L^2} & \frac{Lg}{M-L^2} & M\frac{g}{M-L^2} \\ -\frac{Lg}{M-L^2} & -\frac{gL^2}{M-L^2} & -\frac{Lg}{M-L^2} \end{pmatrix}$$

Используя ровно те же рассуждения, что и раньше, мы можем утверждать, что возможно найти постоянную K , при которой будут выполняться неравенства:

$$\tilde{p}_{21} \leq 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{\tilde{p}_{22}}{4}} \quad \text{и} \quad M\tilde{p}_{31} \leq 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{M\tilde{p}_{33}}{4}}. \quad (14)$$

Однажды зафиксировав эту постоянную, можно найти окрестность нуля, в которой выполняются следующие неравенства:

$$K\tilde{p}_{12} \leq 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{\tilde{p}_{22}}{4}} \quad \text{и} \quad K\tilde{p}_{13} \leq 2\sqrt{\frac{KB}{8}\frac{M\tilde{p}_{33}}{4}}. \quad (15)$$

Стоит отметить, что «новая» константа и «новая» окрестность не совпадают со «старыми», хотя и совсем ненамного. Применив, как и раньше, неравенство Коши, получим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_{21}y_1y_2| &\leq \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{\tilde{p}_{22}}{4}y_2^2 & |M\tilde{p}_{31}y_1y_3| &\leq \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{M\tilde{p}_{33}}{4}y_3^2 \\ |K\tilde{p}_{12}y_1y_2| &\leq \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{\tilde{p}_{22}}{4}y_2^2 & |K\tilde{p}_{13}y_1y_3| &\leq \frac{KB}{8}y_1^2 + \frac{M\tilde{p}_{33}}{4}y_3^2. \end{aligned}$$

Функция Ляпунова осталась прежней: $G(y_1, y_2, y_3) := K|y_1|^2 + |y_2|^2 + M|y_3|^2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} G(y_1, y_2, y_3) &= -K\tilde{p}_{11}y_1^2 + K\tilde{p}_{12}y_1y_2 + K\tilde{p}_{13}y_1y_3 + \tilde{p}_{21}y_1y_2 - \tilde{p}_{22}y_2^2 + \\ &\quad + (\tilde{p}_{23} + M\tilde{p}_{32})y_2y_3 + M\tilde{p}_{31}y_1y_3 - M\tilde{p}_{33}y_3^2. \end{aligned}$$

Вставив эти неравенства в производную функции Ляпунова, и поверив на слово, что

$$|(\tilde{p}_{23} + M\tilde{p}_{32})y_2y_3| < \frac{\tilde{p}_{22}}{4}y_2^2 + \frac{M\tilde{p}_{33}}{4}y_3^2, \quad (16)$$

получим следующее ограничение сверху для производной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} G(y_1, y_2, y_3) &\leq -KB y_1^2 + K\tilde{p}_{12}y_1y_2 + K\tilde{p}_{13}y_1y_3 + \tilde{p}_{21}y_1y_2 - \tilde{p}_{22}y_2^2 + \\ &\quad + (\tilde{p}_{23} + M\tilde{p}_{32})y_2y_3 + M\tilde{p}_{31}y_1y_3 - M\tilde{p}_{33}y_3^2 \leq \\ &\leq -\frac{KB}{2}y_1^2 - \frac{\tilde{p}_{22}}{4}y_2^2 - \frac{M\tilde{p}_{33}}{4}y_3^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Единственное, что нам осталось, это показать, откуда может взяться неравенство 16. Его мы можем получить применением неравенства Коши к следующему:

$$|\tilde{p}_{23} + M\tilde{p}_{32}| < 2\sqrt{\frac{\tilde{p}_{22}}{4} \frac{M\tilde{p}_{33}}{4}}.$$

А оно, в свою очередь, полностью эквивалентно выбору $\varepsilon > 0$, чтобы $|g(t)| < \varepsilon$ привёл к выполнению вот такого:

$$|g(t) \cdot (M - L^2)| < \frac{1}{2} \sqrt{M(M - 2ML^2 - L^2g)(2M + g - 1)}.$$

Например, вполне достаточно выбрать $\varepsilon = \frac{\sqrt{M}}{4}$.