Control moment gyroscope

1 Симметричный гиродин

1.1 Вывод лагранжиана

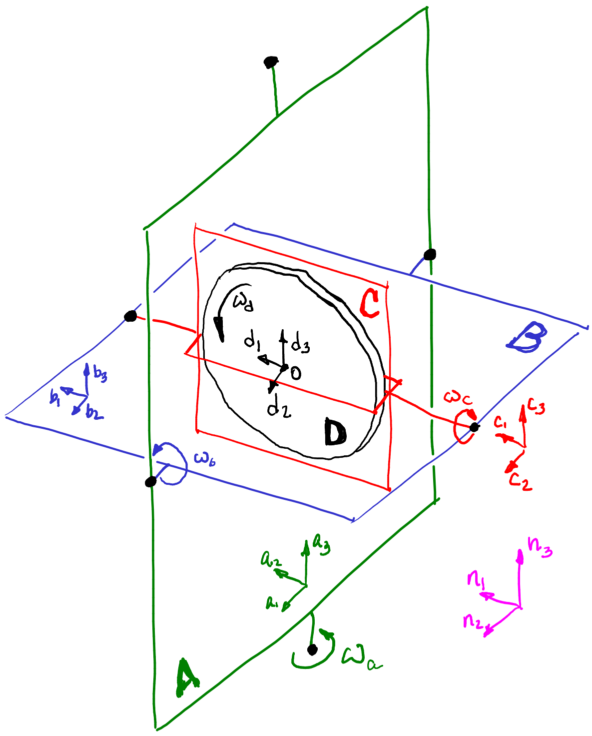

Рис. 1: Control moment gyroscope consists of four rotating bodies: A, B, C and D.

Пусть у нас есть гиродин, который представляет собой вращающийся диск D внутри трёх рамок A, B, C (рисунок 1). Для начала давайте предположим, что все рамки симметричные, и центры масс всех рамок и диска совпадают в точке O. Таким образом мы можем игнорировать силу тяжести (нет потенциальной энергии) и рассматривать только вращения (в кинетической энергии нет линейных скоростей).

В каждом шарнире у нас есть датчик положения, поэтому мы можем измерять углы q_d, q_c, q_b, q_a, которые полностью определяют конфигурацию системы. Положение при нулевых углах нарисовано на рисунке 1. Заодно введём обозначение угловых скоростей: $\dot{q}_a = \omega_a$, $\dot{q}_b = \omega_b$, $\dot{q}_c = \omega_c$, $\dot{q}_d = \omega_d$. Зафиксируем неподвижный репер $\{O, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$, и “вморозим” в каждое из четырёх тел A, B, C, D реперы $\{O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, $\{O, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$, $\{O, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$, $\{O, \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3\}$. Давайте определим четыре матрицы преобразования реперов между собой:

$$R_{na} = \begin{bmatrix} \cos(q_a) & \sin(q_a) & 0 \\ -\sin(q_a) & \cos(q_a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_{ab} = \begin{bmatrix} \cos(q_b) & 0 & -\sin(q_b) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(q_b) & 0 & \cos(q_b) \end{bmatrix}$$

$$R_{bc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_c) & \sin(q_c) \\ 0 & -\sin(q_c) & \cos(q_c) \end{bmatrix} \qquad R_{cd} = \begin{bmatrix} \cos(q_d) & 0 & -\sin(q_d) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(q_d) & 0 & \cos(q_d) \end{bmatrix}$$

При помощи этих матриц вращения можно выписать полные (векторные) угловые скорости всех четырёх тел $\vec{\omega}_{an}$, $\vec{\omega}_{bn}$, $\vec{\omega}_{cn}$ и $\vec{\omega}_{dn}$. Эти скорости мы выпишем в координатах соответствующих "вмороженных" реперов. Они находятся как (векторные) суммы частичных угловых скоростей следующим образом:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_{an} &:= R_{na}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_a\end{bmatrix}\\
\vec{\omega}_{bn} &:= R_{ab}R_{na}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\omega_b\\0\end{bmatrix}\\
\vec{\omega}_{cn} &:= R_{bc}R_{ab}R_{na}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_a\end{bmatrix} + R_{bc}\begin{bmatrix}0\\\omega_b\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_c\\0\\0\end{bmatrix}\\
\vec{\omega}_{dn} &:= R_{cd}R_{bc}R_{ab}R_{na}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_a\end{bmatrix} + R_{cd}R_{bc}\begin{bmatrix}0\\\omega_b\\0\end{bmatrix} + R_{cd}\begin{bmatrix}\omega_c\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_d\\0\\0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Определим скаляры I_x, J_x, K_x $(x = a, b, c, d)$ как моменты инерции при вращении вокруг оси k каждого тела соответственно. Из-за симметрии рамок произведение моментов не рассматриваем, поэтому матрицы инерции будут диагональными. Тогда кинетическая энергия каждой из четырёх рамок может быть записана как:

$$\begin{aligned}
T_a &= \frac{1}{2}\vec{\omega}_{an}^\top \begin{bmatrix}I_a & 0 & 0\\0 & J_a & 0\\0 & 0 & K_a\end{bmatrix}\vec{\omega}_{an},\\
T_b &= \frac{1}{2}\vec{\omega}_{bn}^\top \begin{bmatrix}I_b & 0 & 0\\0 & J_b & 0\\0 & 0 & K_b\end{bmatrix}\vec{\omega}_{bn},\\
T_c &= \frac{1}{2}\vec{\omega}_{cn}^\top \begin{bmatrix}I_c & 0 & 0\\0 & J_c & 0\\0 & 0 & K_c\end{bmatrix}\vec{\omega}_{cn},\\
T_d &= \frac{1}{2}\vec{\omega}_{dn}^\top \begin{bmatrix}I_d & 0 & 0\\0 & J_d & 0\\0 & 0 & K_d\end{bmatrix}\vec{\omega}_{dn},
\end{aligned}$$

Таким образом, в отсутствие силы тяжести, лагранжиан будет равен просто кинетической энергии:

$$\mathcal{L} = T_a + T_b + T_c + T_b.$$

В итоге вот так должен выглядеть явно выписанный лагранжиан нашей системы (я использовал симметрию диска $K_d = I_d$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\frac{1}{2}J_d\omega_d^2 + J_d\left(\cos(q_c)\omega_b + \cos(q_b)\sin(q_c)\omega_a\right)\omega_d + \frac{1}{2}\left(I_d + I_c\right)\left(\omega_c^2 - 2\sin(q_b)\omega_a\omega_c\right) + \\
&+ \frac{1}{2}\left(J_1\cos^2(q_c) + K_c + J_b + I_d\right)\omega_b^2 + \frac{1}{2}J_1\cos(q_b)\sin(2q_c)\omega_a\omega_b + \\
&+ \frac{1}{2}\left(J_2 - J_1\cos^2(q_b)\cos^2(q_c) + (I_d + I_c + I_b - K_b - J_d - J_c)\sin^2(q_b)\right)\omega_a^2
\end{aligned}$$

1.2 Зафиксируем один шарнир: $q_b = 0$

Выпишем лагранжиан при зафиксированном угле $q_b = \omega_b = 0$. Обозначим для удобства $J_1 := J_c + J_d - K_c - I_d$ и $J_2 := K_a + J_c + J_d + K_b$, тогда лагранжиан будет выглядеть так:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J_d\omega_d^2 + \frac{1}{2}(I_c + I_d)\omega_c^2 + \frac{1}{2}\left(J_2 - J_1\cos^2(q_c)\right)\omega_a^2 + J_d\sin(q_c)\omega_d\omega_a$$

Что не может не радовать, это уравнение совпадает с уравнением (3.1) из "Explicit solution of the ODEs describing the 3 DOF Control Moment Gyroscope".

Напоминалка про уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i$$

Для удобства выпишем все частные производные:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_d} &= J_d\omega_d + J_d\sin(q_c)\omega_a & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_d} &= 0\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_c} &= (I_d + I_c)\omega_c & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_c} &= J_d\cos(q_c)\omega_a\omega_d + \frac{1}{2}J_1\sin(2q_c)\omega_a^2\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_a} &= \left(J_2 - J_1\cos^2(q_c)\right)\omega_a + J_d\sin(q_c)\omega_d & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} &= 0
\end{aligned}$$

Если приложить моменты τ_d и τ_c в соответствующих шарнирах, тогда уравнения движения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
J_d\dot{\omega}_d + J_d\sin(q_c)\dot{\omega}_a + J_d\cos(q_c)\omega_c\omega_a &= \tau_d\\
(I_d + I_c)\dot{\omega}_c - J_d\cos(q_c)\omega_a\omega_d - \frac{1}{2}J_1\sin(2q_c)\omega_a^2 &= \tau_c\\
\left(J_2 - J_1\cos^2(q_c)\right)\dot{\omega}_a + J_1\sin(2q_c)\omega_c\omega_a + J_d\sin(q_c)\dot{\omega}_d + J_d\cos(q_c)\omega_c\omega_d &= 0
\end{aligned}$$

Эти уравнения опять-таки совпадают с процитированной ранее статьёй (ну, за исключением трения в шарнире рамки A). Положим скорость вращения диска D постоянной ($\dot{\omega}_d = 0$), таким образом, у нас остаётся две степени свободы: q_c и q_a. Приведём уравнения к каноническому виду:

$$\begin{cases}
\dot{q}_a &= \omega_a\\
\dot{q}_c &= \omega_c\\
\dot{\omega}_c &= \frac{\tau_c + J_d\cos(q_c)\omega_a\omega_d + \frac{1}{2}J_1\sin(2q_c)\omega_a^2}{I_d + I_c}\\
\dot{\omega}_a &= \frac{-J_1\sin(2q_c)\omega_c\omega_a - J_d\cos(q_c)\omega_c\omega_d}{J_2 - J_1\cos^2(q_c)}
\end{cases}$$

Что интересно, то при старте из состояния $q_a(0) = \omega_a(0) = \omega_c(0) = 0$, $q_c(0) = \pi/2$, рамка A будет ускоряться в одну и ту же сторону, в какую бы сторону ни вращалась рамка C. Рисунок 2 показывает два численных эксперимента. В обоих экспериментах я прикладываю постоянный момент к шарниру q_c (отличается лишь знаком). Рамка A себя ведёт независимо от знака момента.

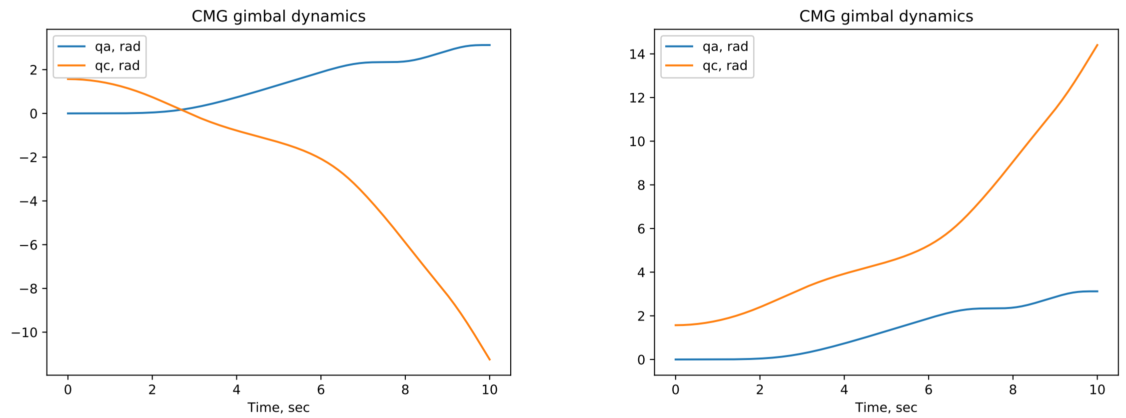

Рис. 2: Два эксперимента с одинаковыми начальными условиями $q_c(0) = \pi/2$, $q_a(0) = \omega_a(0) = \omega_c(0) = 0$. Рамка A ведёт себя одинаково вне зависимости от того, в какую сторону крутится рамка C.