

# Control moment gyroscope

## 1 Симметричный гироскоп

### 1.1 Вводная и способ вывода Лагранжиана

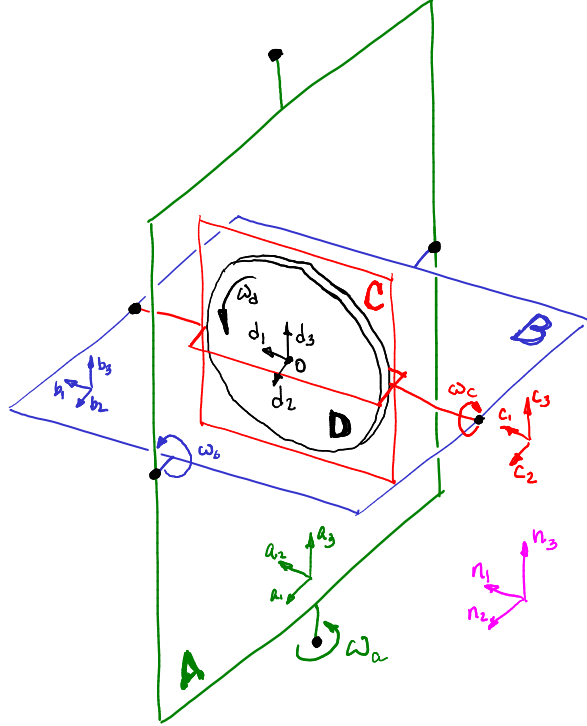


Рис. 1: Control moment gyroscope consists of four rotating bodies:  $A, B, C$  and  $D$ .

Пусть у нас есть гироскоп, который представляет собой вращающийся диск  $D$  внутри трёх рамок  $A, B, C$  (рисунок 1). Для начала давайте предположим, что все рамки симметричны, и центры масс всех рамок и диска совпадают в точке  $O$ . Таким образом мы можем игнорировать силу тяжести (нет потенциальной энергии) и рассматривать только вращения (в кинетической энергии нет линейных скоростей).

В каждом шарнире у нас есть датчик положения, поэтому мы можем измерять углы  $q_d, q_c, q_b, q_a$ , которые полностью определяют конфигурацию системы. Положение при нулевых углах нарисовано на рисунке 1. Заодно введём обозначение угловых скоростей:  $\dot{q}_a = \omega_a$ ,  $\dot{q}_b = \omega_b$ ,  $\dot{q}_c = \omega_c$ ,  $\dot{q}_d = \omega_d$ . Зафиксируем неподвижный репер  $\{O, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}$ , и “вморозим” в каждое из четырёх тел  $A, B, C, D$  реперы  $\{O, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ,  $\{O, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ,  $\{O, \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\}$ ,  $\{O, \vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3\}$ . Давайте определим четыре матрицы преобразования реперов между собой:

$$R_{na} = \begin{bmatrix} \cos(q_a) & \sin(q_a) & 0 \\ -\sin(q_a) & \cos(q_a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{ab} = \begin{bmatrix} \cos(q_b) & 0 & -\sin(q_b) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(q_b) & 0 & \cos(q_b) \end{bmatrix}$$

$$R_{bc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_c) & \sin(q_c) \\ 0 & -\sin(q_c) & \cos(q_c) \end{bmatrix} \quad R_{cd} = \begin{bmatrix} \cos(q_d) & 0 & -\sin(q_d) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(q_d) & 0 & \cos(q_d) \end{bmatrix}$$

Определим скаляры  $I_x, J_x, K_x$  ( $x = a, b, c, d$ ) как моменты инерции при вращении вокруг оси  $k$  каждого тела соответственно. Из-за симметрии рамок произведение моментов не рассматриваем, поэтому матрицы инерции будут диагональными. Тогда кинетическая энергия рамки  $A$  может быть записана как:

$$T_a = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{an}^\top \begin{bmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 \\ 0 & 0 & K_a \end{bmatrix} \vec{\omega}_{an}, \quad \vec{\omega}_{an} := R_{na} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_a \end{bmatrix},$$

где  $\omega_a$  - это угловая скорость вращения рамки  $A$  относительно неподвижной системы координат. Аналогично определяются и кинетические энергии оставшихся трёх тел:

$$\begin{aligned} T_b &= \frac{1}{2} \vec{\omega}_{bn}^\top \begin{bmatrix} I_b & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & K_b \end{bmatrix} \vec{\omega}_{bn}, \\ T_c &= \frac{1}{2} \vec{\omega}_{cn}^\top \begin{bmatrix} I_c & 0 & 0 \\ 0 & J_c & 0 \\ 0 & 0 & K_c \end{bmatrix} \vec{\omega}_{cn}, \\ T_d &= \frac{1}{2} \vec{\omega}_{dn}^\top \begin{bmatrix} I_d & 0 & 0 \\ 0 & J_d & 0 \\ 0 & 0 & K_d \end{bmatrix} \vec{\omega}_{dn}, \end{aligned}$$

где полные (векторные) угловые скорости  $\vec{\omega}_{bn}, \vec{\omega}_{cn}$  и  $\vec{\omega}_{dn}$  определяются как (векторные) суммы частных угловых скоростей следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{bn} &:= R_{ab} R_{na} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_b \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{\omega}_{cn} &:= R_{bc} R_{ab} R_{na} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_a \end{bmatrix} + R_{bc} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{\omega}_{dn} &:= R_{cd} R_{bc} R_{ab} R_{na} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_a \end{bmatrix} + R_{cd} R_{bc} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_b \\ 0 \end{bmatrix} + R_{cd} \begin{bmatrix} \omega_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Таким образом, в отсутствие силы тяжести, Лагранжиан будет равен просто кинетической энергии:

$$L = T_a + T_b + T_c + T_d.$$

## 1.2 Зафиксируем один шарнир

Например, выпишем его явно при зафиксированном угле  $q_b = \omega_b = 0$  (я ещё использовал симметрию диска  $K_d = I_d$ ):

$$L = \frac{1}{2} J_d \omega_d^2 + \frac{1}{2} (I_c + I_d) \omega_c^2 + \frac{1}{2} (K_a + J_c + J_d + K_b - (J_c + J_d - K_c - I_d) \cos^2(q_c)) \omega_a^2 + J_d \sin(q_c) \omega_d \omega_a$$

Обозначим для удобства  $J_1 := J_c + J_d - K_c - I_d$  и  $J_2 := K_a + J_c + J_d + K_b$ , тогда лагранжиан будет выглядеть так:

$$L = \frac{1}{2} J_d \omega_d^2 + \frac{1}{2} (I_c + I_d) \omega_c^2 + \frac{1}{2} (J_2 - J_1 \cos^2(q_c)) \omega_a^2 + J_d \sin(q_c) \omega_d \omega_a$$

Что не может не радовать, это уравнение совпадает с уравнением (3.1) из “Explicit solution of the ODEs describing the 3 DOF Control Moment Gyroscope”.

Напоминалка про уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i$$

Для удобства выпишем все частные производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_d} &= J_d \omega_d + J_d \sin(q_c) \omega_a & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_d} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_c} &= (I_d + I_c) \omega_c & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_c} &= J_d \cos(q_c) \omega_a \omega_d + \frac{1}{2} J_1 \sin(2q_c) \omega_a^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_a} &= (J_2 - J_1 \cos^2(q_c)) \omega_a + J_d \sin(q_c) \omega_d & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_a} &= 0\end{aligned}$$

Если приложить моменты  $\tau_d$  и  $\tau_c$  в соответствующих шарнирах, тогда уравнения движения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}J_d \dot{\omega}_d + J_d \sin(q_c) \dot{\omega}_a + J_d \cos(q_c) \omega_c \omega_a &= \tau_d \\ (I_d + I_c) \dot{\omega}_c - J_d \cos(q_c) \omega_a \omega_d - \frac{1}{2} J_1 \sin(2q_c) \omega_a^2 &= \tau_c \\ (J_2 - J_1 \cos^2(q_c)) \dot{\omega}_a + J_1 \sin(2q_c) \omega_c \omega_a + J_d \sin(q_c) \dot{\omega}_d + J_d \cos(q_c) \omega_c \omega_d &= 0\end{aligned}$$

Эти уравнения опять-таки совпадают с процитированной ранее статьёй (ну, за исключением трения в шарнире рамки  $A$ ). Положим скорость вращения диска  $D$  постоянной ( $\dot{\omega}_d = 0$ ), таким образом, у нас остаётся две степени свободы:  $q_c$  и  $q_a$ . Приведём уравнения к каноническому виду:

$$\begin{cases} \dot{q}_a &= \omega_a \\ \dot{q}_c &= \omega_c \\ \dot{\omega}_c &= \frac{\tau_c + J_d \cos(q_c) \omega_a \omega_d + \frac{1}{2} J_1 \sin(2q_c) \omega_a^2}{I_d + I_c} \\ \dot{\omega}_a &= \frac{-J_1 \sin(2q_c) \omega_c \omega_a - J_d \cos(q_c) \omega_c \omega_d}{J_2 - J_1 \cos^2(q_c)} \end{cases}$$

Что интересно, то при старте из состояния  $q_a(0) = \omega_a(0) = \omega_c(0) = 0$ ,  $q_c(0) = \pi/2$ , рамка  $A$  будет ускоряться в одну и ту же сторону, в какую бы сторону ни вращалась рамка  $C$ . Рисунок 2 показывает два численных эксперимента. В обоих экспериментах я прикладываю постоянный момент к шарниру  $q_c$  (отличается лишь знаком). Рамка  $A$  себя ведёт независимо от знака момента.

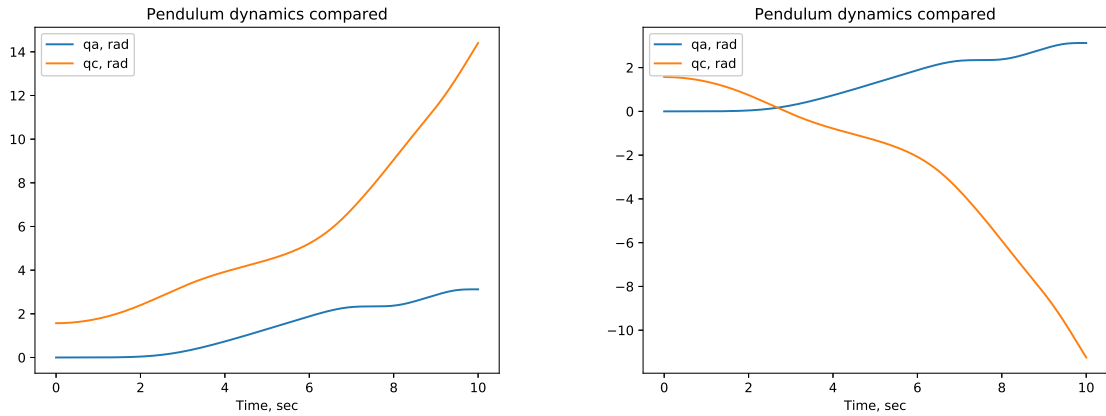


Рис. 2: Два эксперимента с одинаковыми начальными условиями  $q_c(0) = \pi/2$ ,  $q_a(0) = \omega_a(0) = \omega_c(0) = 0$ . Рамка  $A$  ведёт себя одинаково вне зависимости от того, в какую сторону крутится рамка  $C$ .