Reaction wheel 1D pendulum

- m_p - масса маятника
- m_r - масса ротора
- l_p - расстояние от шарнира до центра масс маятника
- l_r - расстояние от шарнира до центра масс ротора
- J_p - момент инерции маятника при вращении вокруг центра масс
- J_r - момент инерции ротора
- θ - угол маятника относительно вертикали
- θ_r - угол ротора **относительно маятника**
- τ - момент, прикладываемый к ротору
- C_p - коэффициент вязкого трения в шарнире маятника
- C_r - коэффициент вязкого трения ротора

Кинетическая энергия маятника:

$$T_p = \frac{1}{2}(m_p l_p^2 + J_p)\dot{\theta}^2$$

Кинетическая энергия маховика:

$$T_r = \frac{1}{2}m_r l_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta})^2$$

Общая потенциальная энергия:

$$P = (m_p l_p + m_r l_r) g \cos\theta$$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = T_p + T_r - P$$

Введём новые обозначения констант, которые нам уменьшат общее количество закорючек в уравнениях:

$$ml := m_p l_p + m_r l_r$$
$$J := J_p + m_p l_p^2 + m_r l_r^2$$

Тогда лагранжиан запишется следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta})^2 - mlg\cos\theta$$

Для удобства выпишем все частные производные:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_r} = J_r(\dot{\theta}_r + \dot{\theta}) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_r} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (J + J_r)\dot{\theta} + J_r\dot{\theta}_r \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mlg\sin\theta$$

Напоминалка про уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i$$

Тогда уравнения движения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} J_r\ddot{\theta}_r + J_r\ddot{\theta} &= -C_r\dot{\theta}_r + \tau \\ (J + J_r)\ddot{\theta} + J_r\ddot{\theta}_r - mlg\sin\theta &= -C_p\dot{\theta} \end{aligned}$$

Перепишем, оставив вторые производные слева:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_r = \frac{J+J_r}{JJ_r}(\tau - C_r\dot{\theta}_r) - \frac{mlg}{J}\sin\theta + \frac{C_p}{J}\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = -\frac{\tau}{J} + \frac{mlg}{J}\sin\theta - \frac{C_p}{J}\dot{\theta} + \frac{C_r}{J}\dot{\theta}_r \end{cases}$$

Наверняка трение в маятнике будет существенно ниже трения в роторе, и вполне возможно, что при этом пренебречь можно будет обоими.

Эти уравнения движения полностью совпадают с уравнениями из The Cubli: A Cube that can Jump Up and Balance, а также с уравнениями из The Reaction Wheel Pendulum (с точностью до выбора переменных, Åström отсчитывает угол ротора от вертикали). Но Åström в уравнения Лагранжа вставляет моменты τ и $-\tau$, а я тут вставляются τ и 0. Подход Острёма интуитивно понятен: если на ротор действует момент τ, то на маятник действует момент $-\tau$. Впрочем, это зависит от выбора репера (θ_r отсчитывается от вертикали или от маятника). Нечего выбирать неортогональные базисы пространства конфигураций.

1 Как выбрать размер маховика?

Здесь я напишу уравнения движения для обычного коллекторного двигателя, но для бесколлекторных уравнения примерно такие же. Подадим на клеммы мотора максимально возможное напряжение, для заданного маховика задача состоит в том, чтобы найти максимально возможный угол начального отклонения маятника, при котором разгоняющийся маховик сможет перекинуть маятник через ноль. Затем будем варьировать размер маховика и смотреть, как будет изменяться максимально возможный угол отклонения.

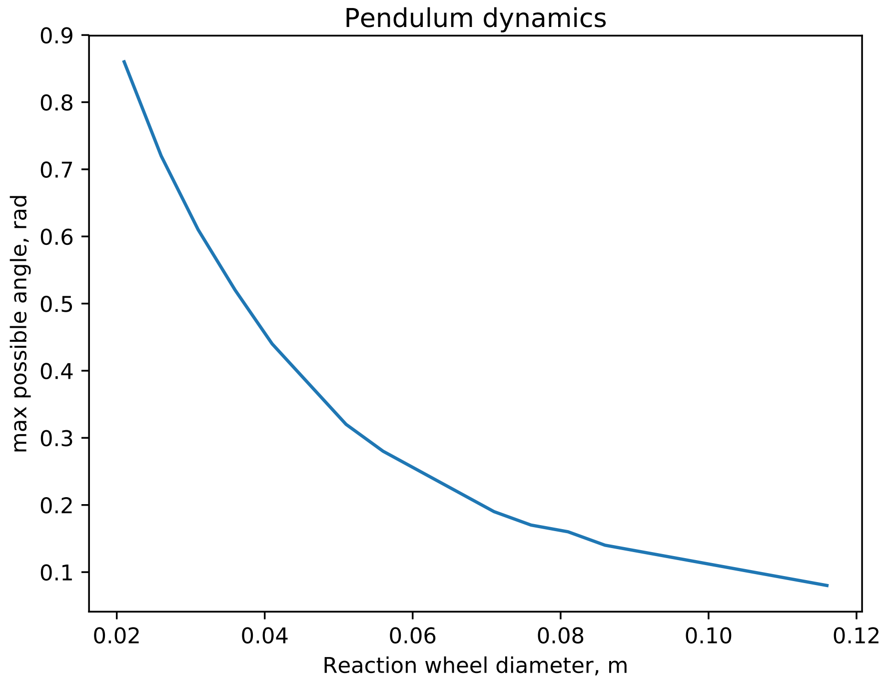
Заглянем в даташит мотора:

- L - индуктивность обмотки
- R - сопротивление обмотки
- k - torque constant (= back-EMF constant)

Добавим в уравнения движения уравнение мотора:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_r = \frac{J+J_r}{JJ_r}(kI - C_r\dot{\theta}_r) - mlg/J\sin\theta + C_p/J\dot{\theta} \\ \ddot{\theta} = -k/JI + mlg/J\sin\theta - C_p/J\dot{\theta} + C_r/J\dot{\theta}_r \\ \dot{I} = U/L - R/LI - k/L\dot{\theta}_r \end{cases}$$

Решаем численно, перебираем значения обычными вложенными циклами. Зависимость максимального угла от радиуса маховика (алюминиевый цилиндр высоты 20мм) выглядит следующим образом (ниже 20мм радиуса не стабилизируется вообще):



Получается, что чем меньше маховик, тем легче стабилизировать (меньше массы поднимать), при этом быстрый подъём противо-ЭДС никого не волнует, системе выгоднее дать короткий, но сильный импульс. В таких условиях мне кажется наиболее разумным выбор маховика диаметром эдак сантиметров 10 (это уже полкило, если что).

2 Давайте разбираться с моментами

Силы тяжести нет, трения нет, все моменты инерции равны единице.

$$q_v = q_p + \theta$$

2.1 Неподвижный репер

Возьмём в качестве обобщённых координат θ и q_v. Тогда лагранжиан запишется так:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_v^2$$

Для удобства выпишем все частные производные:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_v} = \dot{q}_v \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_v} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Выпишем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_v}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_v} = \ddot{q}_v = \tau$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \ddot{\theta} = -\tau$$

2.2 Вращающийся репер

Возьмём в качестве обобщённых координат θ и q_p. Тогда лагранжиан запишется так:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_p + \dot{\theta})^2$$

Для удобства выпишем все частные производные:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_p} = \dot{q}_p + \dot{\theta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_p} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 2\dot{\theta} + \dot{q}_p \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

Выпишем уравнения Лагранжа. Предположим, что я не знаю действующих моментов, обозначу их через x и y, буду их искать так, чтобы уравнения совпали с уравнениями из предыдущего параграфа.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_p} = \ddot{q}_p + \ddot{\theta} = x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2\ddot{\theta} + \ddot{q}_p = y$$

Перепишем наши уравнения движения следующим образом:

$$\ddot{q}_p = 2x - y$$

$$\ddot{\theta} = y - x$$

Очевидно, что если $\ddot{q}_v = \tau$, то $\ddot{q}_p = 2\tau$, поскольку $q_v = q_p + \theta$, а $\ddot{\theta} = -\tau$. Запишем уравнения для x и y:

$$\ddot{q}_p = 2x - y = 2\tau$$
$$\ddot{\theta} = y - x = -\tau$$

Решением является $x = \tau, y = 0$. ЧТД.