Professor: Sívio Orleans Cruz
Instituto Federal da Paraíba

Pirâmides

Um pouco de História

As **pirâmides** foram construídas em um período em que florescia no Egito uma civilização rica e poderosa. Sua edificação começou no Antigo Império (por volta de 2686 a 2181 a.C.) e perdurou até o século IV d.C., mas o auge das construções é registrado entre a Terceira e a Sexta Dinastia, em torno do ano de 2325 a.C.

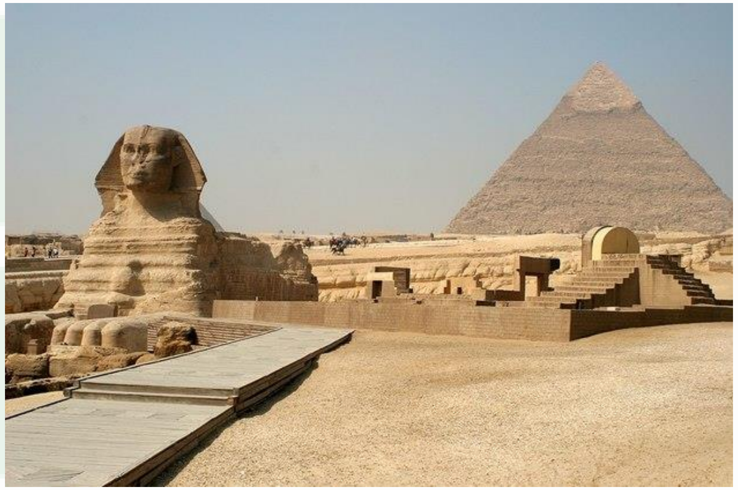
Os egípcios escolheram a forma de pirâmide para facilitar a ascensão do faraó aos céus, onde seria acolhido por **Rá**, a divindade mais poderosa na **mitologia egípcia**.

Pirâmide de Quéops

A pirâmide de **Quéops** é o maior túmulo do mundo com 230 metros de largura na base e sua altura é de 174 metros.

A segunda maior pirâmide na península de Gizé foi edificada para abrigar o corpo do faraó **Quéfren**, com 143 metros de altura. **Quefrén** era filho do faraó **Queóps** e, por respeito ao pai, fez sua pirâmide mais baixa.

Ao lado dela está a Esfinge de **Gizé**, a maior do mundo antigo, com 200 metros de comprimento e 74 de altura.



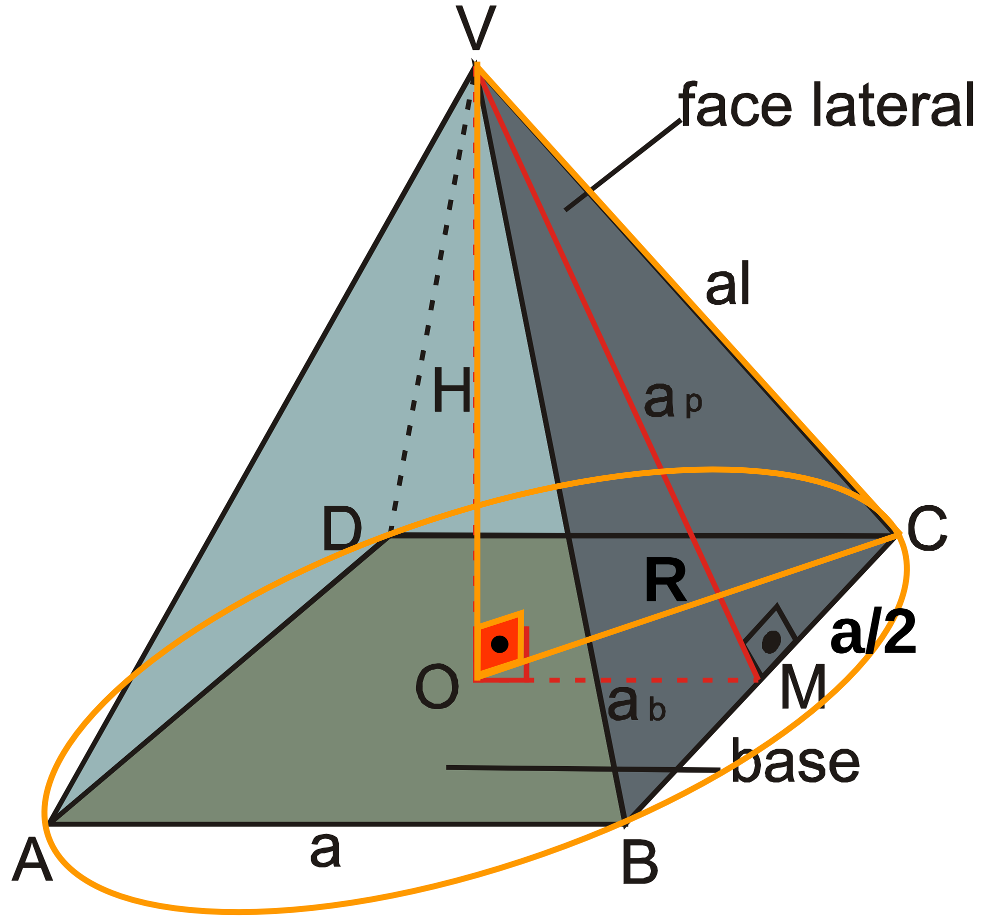
Esfinge de Gizé (Quéfren)

Pirâmides no nosso cotidiano

Alguns exemplos de **pirâmides** encontradas no nosso dia a dia

Pirâmides

Consideremos, inicialmente, um polígono e um ponto fora dele, chamamos de pirâmide a reunião de todos os segmentos com extremidades nesse ponto e nesse polígono.



Elementos

$a \rightarrow$ aresta da base

$a_\ell \rightarrow$ aresta lateral

$a_b \rightarrow$ apótema da base

$a_p \rightarrow$ apótema da pirâmide

$H \rightarrow$ altura

Relações

$a_p^2 = H^2 + a_b^2$

$a_\ell^2 = (a/2)^2 + a_p^2$

$a_\ell^2 = R^2 + H^2$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Áreas

Área da Base (A_B)

É a área do polígono que a representa.

$$A_T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \qquad A_Q = a^2 \qquad A_H = \frac{6\,.\,a^2\sqrt{3}}{4}$$

Área Lateral (A_L)

É o somatório das áreas das faces laterais.

Obs: Pirâmide Regular :

$A_L = n\ .\ A_{face}$ $\Rightarrow$ $\boxed{A_L = n\,.\,\frac{a\,.\,a_p}{2}}$

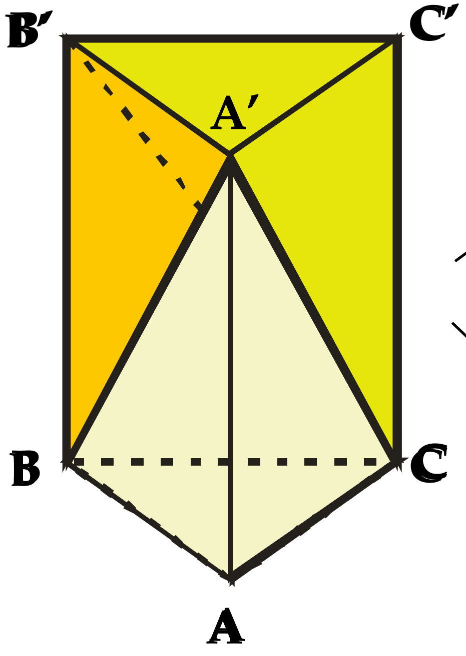
Área Total (A_T)

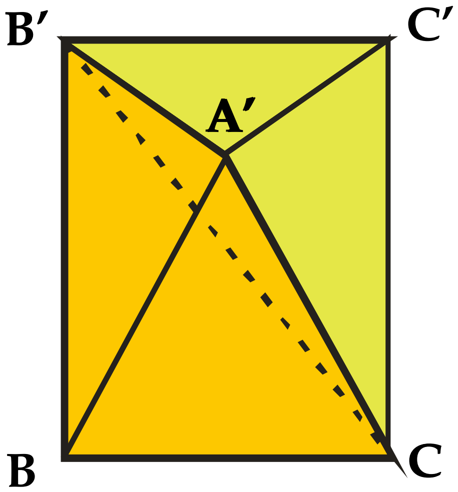
É o somatório da área lateral com a área base.

$$\boxed{A_T = A_L + A_B}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Volume de uma Pirâmide



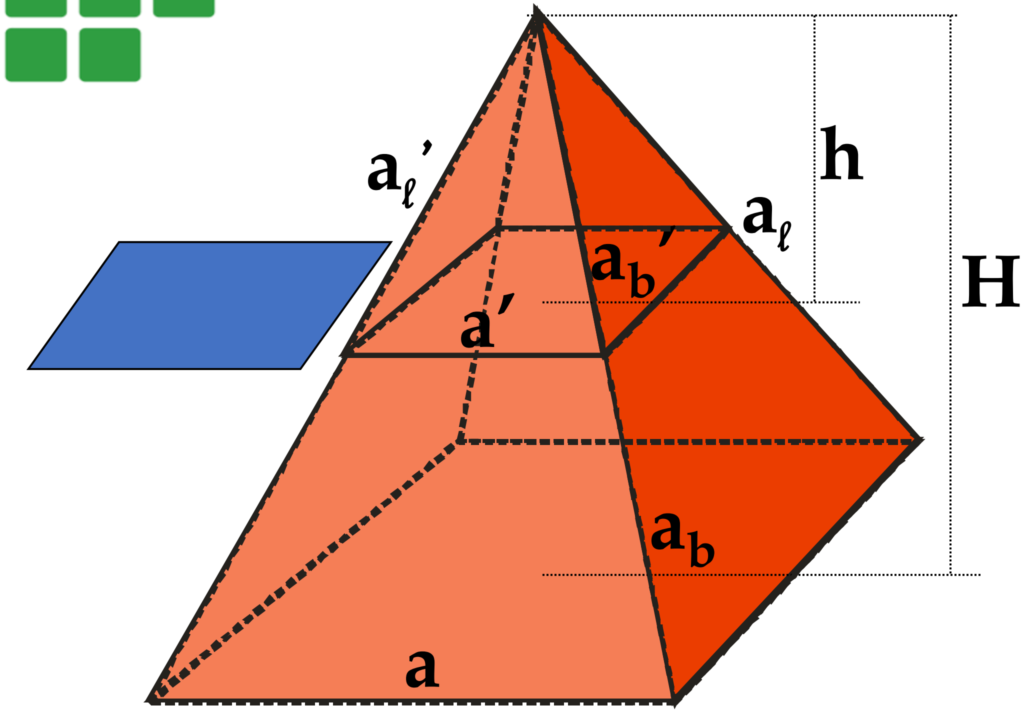


O volume de uma pirâmide é dado por um terço da área da base vezes a altura.

$$\boxed{V = \frac{1}{3} . A_B . H}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Secção Transversal



A pirâmide destacada é semelhante à pirâmide original.

Seus comprimentos são proporcionais.

$$\frac{a'}{a} = \frac{a_l'}{a_l} = \frac{a_b'}{a_b} = \frac{a_p'}{a_p} = \frac{h}{H} = k$$

k = Constante de proporcionalidade.

Suas áreas são proporcionais.

$$\frac{A_b'}{A_b} = \frac{A_l'}{A_l} = \frac{A_t'}{A_t} = k^2$$

$$\frac{A_b}{A_B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

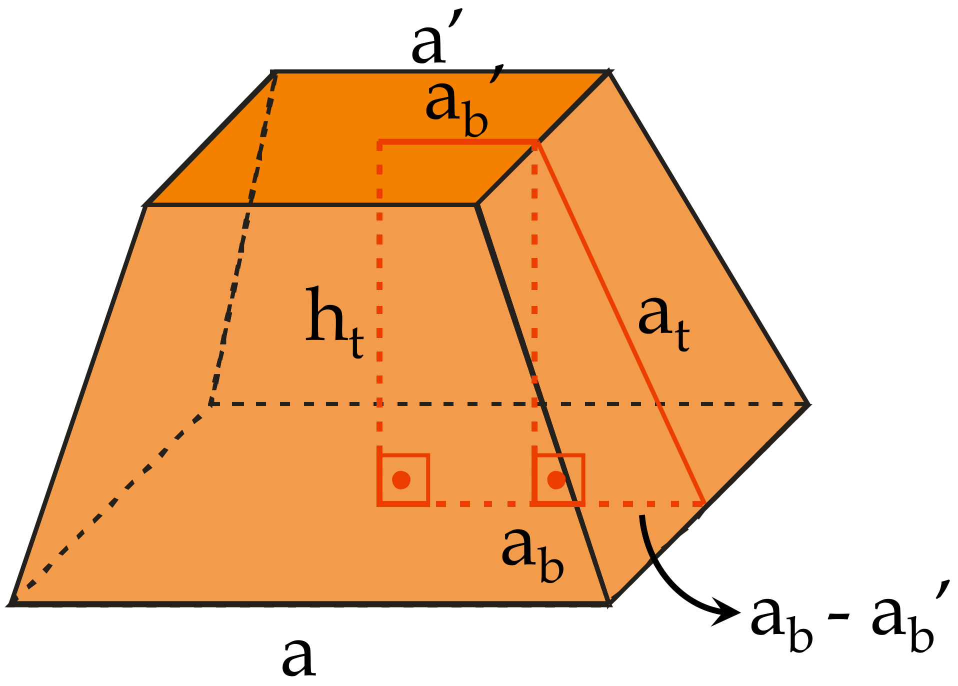
Seus volumes são proporcionais.

$$\frac{v}{V} = k^3$$

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{h}{H}\right)^3$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Tronco de Pirâmide



Elementos:

$a \rightarrow$ aresta da base maior

$a' \rightarrow$ aresta da base menor

$a_b \rightarrow$ apótema da base maior

$a_b' \rightarrow$ apótema da base menor

$a_t \rightarrow$ apótema do tronco

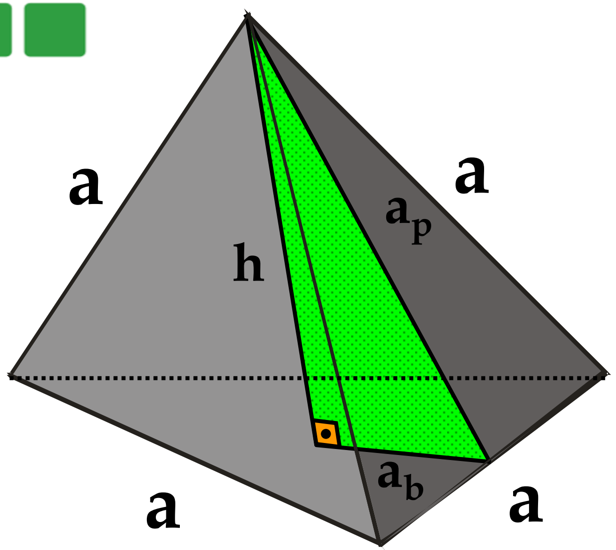
$h_t \rightarrow$ altura do tronco

Relação:

$a_t^2 = h_t^2 + (a_b - a_b')^2$ *e* $h_T = H - h$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Tetraedro Regular



$a_p \rightarrow$ apótema do tetraedro: $\boxed{a_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$a_b \rightarrow$ apótema da base: $\boxed{a_b = \frac{a\sqrt{3}}{6}}$

h $\rightarrow$ altura do tetraedro: $a_p{}^2 = a_b{}^2 + h^2 \Rightarrow$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 \Rightarrow \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = h^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{27a^2 - 3a^2}{36} \Rightarrow h^2 = \frac{24a^2}{36} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4\,.\,6a^2}{36}} \Rightarrow h = \cancel{\frac{2a\sqrt{6}}{6}} \qquad \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Área da Base: $\boxed{A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

Volume: $\boxed{V = \frac{A_B\,.\,H}{3}} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3}} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{18}}{12} \cdot \frac{1}{3}$

Área Lateral: $\boxed{A_L = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}}$

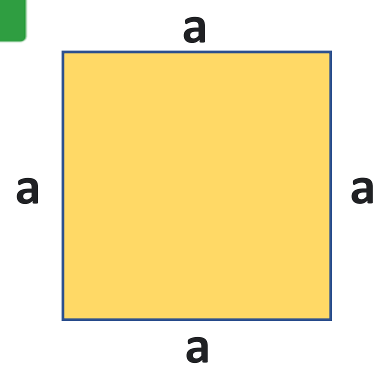
$$V = \cancel{\frac{3a^3\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{1}{3}} \qquad \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

Área Total: $\boxed{A_T = \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}}$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Exercícios

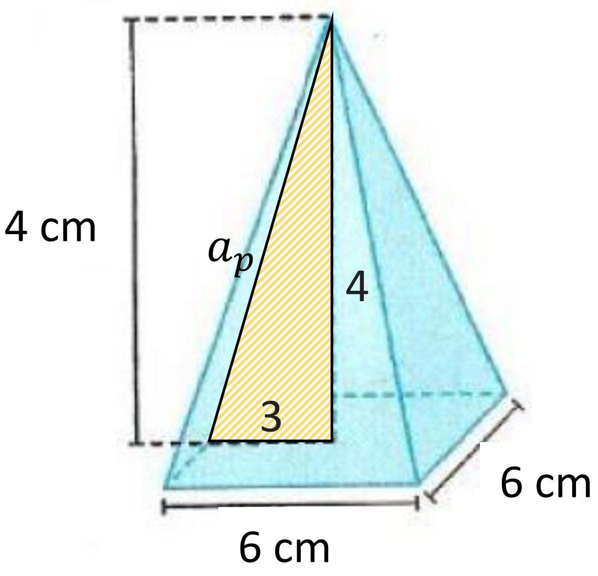
1. A base de uma pirâmide de 5 cm de altura é um quadrado de 12 cm de perímetro. Determine o volume dessa pirâmide:



4 . a = 12 ∴ **a = 3 cm**

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H \therefore V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H \therefore V = \cancel{\frac{1}{3} \cdot 3^2}^{\,3} \cdot 5 \therefore \boxed{V = 15\ cm^3}$$

2. Calcule a área total da pirâmide representada a seguir



$$(a_p)^2 = 3^2 + 4^2$$

$$(a_p)^2 = 9 + 16$$

$$a_p = \sqrt{25}$$

$$\boxed{a_p = 5\ cm}$$

$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = \text{n} \cdot \frac{a \cdot a_p}{2} + a^2$$

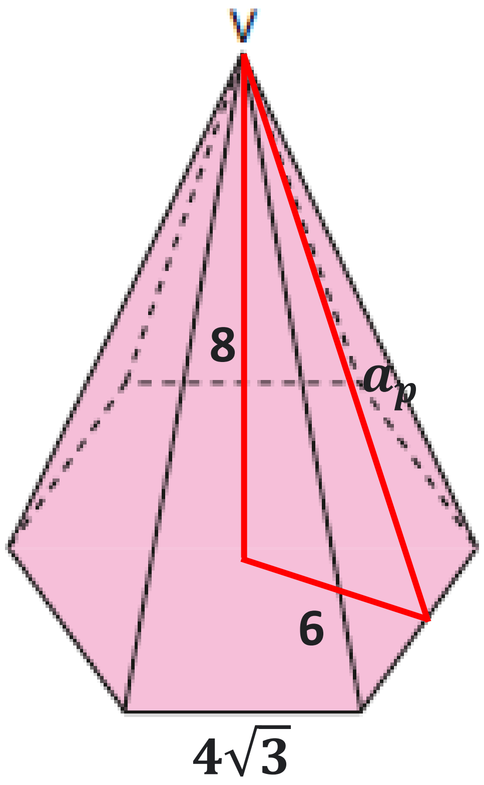
$$A_T = \cancel{4 \frac{6 \cdot 5}{2}}^{\,2} + 6^2$$

$$A_T = 60 + 36$$

$$\boxed{A_T = 96\ cm^2}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

3. Considere uma pirâmide regular hexagonal que tem 8 dm de altura e cuja aresta da base mede $4\sqrt{3}$ dm. Para essa pirâmide, calcule a medida do apótema, da área total e do volume.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = a_b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a_b = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$a_b = 2 . 3$$

$$\boxed{a_b = 6\ dm}$$

$$(a_p)^2 = 6^2 + 8^2$$

$$(a_p)^2 = 36 + 64$$

$$a_p = \sqrt{100}$$

$$\boxed{a_p = 10\ dm}$$

$$A_T = A_L + A_B$$

$$A_T = n . \frac{a . a_p}{2} + 6 . \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = \overset{3}{\cancel{6}} . \frac{4\sqrt{3} . 10}{\cancel{2}} + 6 . \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 120\sqrt{3} + 6 . \frac{\overset{4}{\cancel{16}} . 3\sqrt{3}}{\cancel{4}}$$

$$A_T = 120\sqrt{3} + 72\sqrt{3}$$

$$\boxed{A_T = 192\sqrt{3}\ dm^2}$$

$$V = \frac{1}{3} . A_B . H \therefore V = \frac{1}{3} . 6 . \frac{a^2\sqrt{3}}{4} . H \therefore V = \frac{1}{\cancel{3}} . \overset{2}{\cancel{6}} . \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} . \overset{2}{\cancel{8}} \therefore V = 2 . 16 . 3\sqrt{3} . 2$$

$$\boxed{V = 192\sqrt{3}\ dm^3}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br