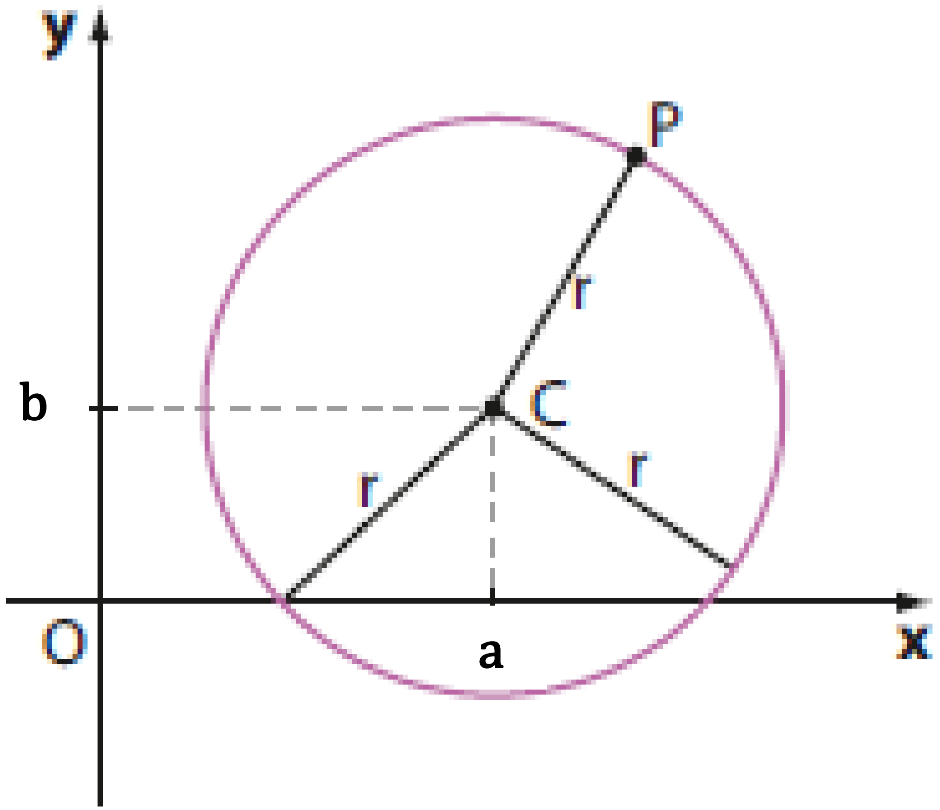
Professor: Sívio Orleans Cruz
Instituto Federal da Paraíba

Circunferência

Equação Reduzida da Circunferência

Uma circunferência $\boldsymbol{\lambda}$ com centro $\mathbf{C}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ e raio de medida **r** é o conjunto de todos os pontos **P(x, y)** do plano que distam **r** de **C**:



$$d_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

***Elevando membro a membro ao quadrado, temos*:**

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

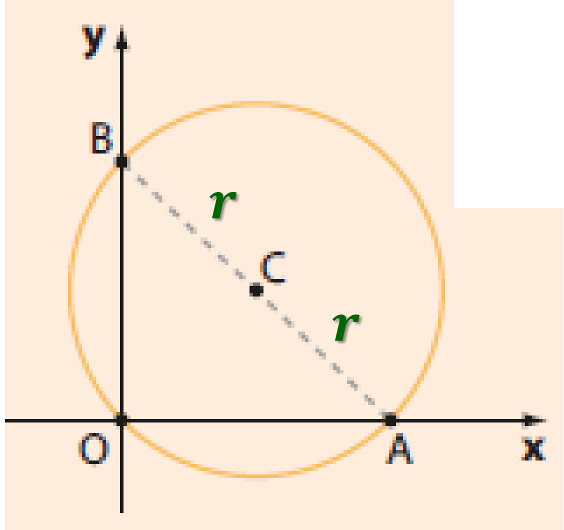
***Chamada de equação reduzida da circunferência, em que*:**

- **a** e **b** são as **coordenadas do centro C** da circunferência;
- **r** é a medida do **raio** da circunferência;
- **x** e **y** são as **coordenadas do ponto genérico P** — um ponto que pode ocupar o lugar de qualquer ponto da circunferência, sempre distando **r** de **C**.

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Exercício:

01. Qual é a equação reduzida da circunferência em que as extremidades de um diâmetro são A(4, 0) e B(0, 4)?



$$C = M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$$C = (a, b) = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right)$$

$$\boxed{C = (2, 2)}$$

O raio é a metade da medida entre A e B

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (4-0)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{16 + 16} \quad \therefore \quad d_{AB} = \sqrt{2\,.\,16}$$

$$\boxed{d_{AB} = 4\sqrt{2}}$$

$$\boxed{r = 2\sqrt{2}}$$

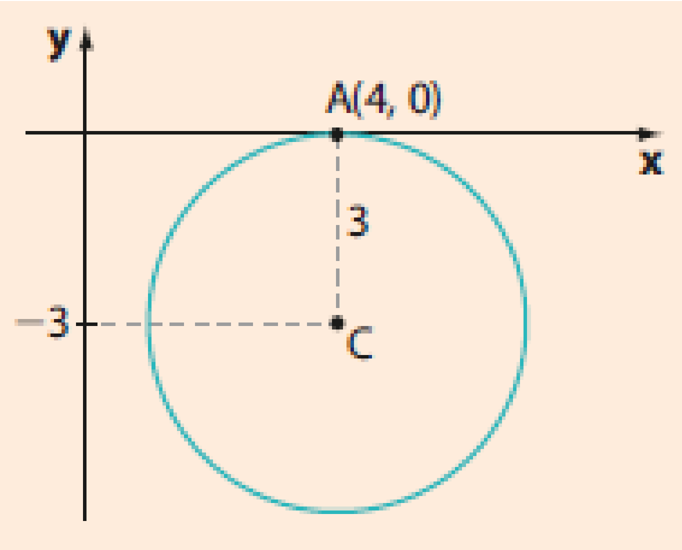
$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

02. Qual é a equação reduzida da circunferência que tem raio de medida 3, tangencia o eixo das abscissas no ponto A(4, 0) e está contida no quarto quadrante?



$$\boldsymbol{O\ centro\ da\ circunferência\ é\ C(4,-3),\ e\ seu\ raio\ mede\ 3}$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

$$\boxed{(x-4)^2+(y+3)^2=3^2}$$

$$\boxed{(x-4)^2+(y+3)^2=9}$$

03. Obtenha a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos A(−3, 0), B(2, 5) e D(1, 6).

$$\boldsymbol{A\ distância\ de\ um\ ponto\ qualquer\ ao\ centro\ C(a,b)\ da\ circunferência\ é\ igual\ a\ r}$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2\,.\,a\,.\,b+b^2$$

$$\begin{cases}(a+3)^2+(b-0)^2=r^2\\(a-2)^2+(b-5)^2=r^2\\(a-1)^2+(b-6)^2=r^2\end{cases}\therefore\begin{cases}a^2+6a+9+b^2=r^2\\a^2-4a+4+b^2-10b+25=r^2\\a^2-2a+1+b^2-12b+36=r^2\end{cases}\therefore\begin{cases}a^2+b^2+6a+9=r^2 & 1\\a^2+b^2-4a-10b+29=r^2 & 2\\a^2+b^2-2a-12b+37=r^2 & 3\end{cases}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

$$\begin{cases} a^2+b^2+6a+9=r^2 & 1 \\ a^2+b^2-4a-10b+29=r^2 & 2 \\ a^2+b^2-2a-12b+37=r^2 & 3 \end{cases}$$

Subtraindo 2 de 1, obtemos:

$$\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+6a+9-\cancel{a^2}-\cancel{b^2}+4a+10b-29=\cancel{r^2}-\cancel{r^2}$$

$$10a+10b=20 \quad :10 \qquad \boxed{a+b=2} \quad 4$$

Subtraindo 2 de 3, obtemos:

$$\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-2a-12b+37-\cancel{a^2}-\cancel{b^2}+4a+10b-29=\cancel{r^2}-\cancel{r^2} \;\therefore\; 2a-2b=-8 \quad :2 \qquad \boxed{a-b=-4} \quad 5$$

Resolvendo o sistema formado por 4 e 5, temos:

$$\begin{cases} a+\cancel{b}=2 \\ a-\cancel{b}=-4 \end{cases} \qquad 2a=-2 \qquad \boxed{a=-1}$$

$$a+b=2$$

$$-1+b=2 \qquad C(-1,3)$$

$$\boxed{b=3}$$

Substituindo a e b em 1, temos:

$$a^2+b^2+6a+9=r^2 \;\therefore\; (-1)^2+3^2+6\,.\,(-1)+9=r^2 \;\therefore\; 1+9-6+9=r^2$$

$$\boxed{r^2=13}$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

$$\boxed{(x+1)^2+(y-3)^2=13}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Equação Geral da Circunferência

A partir da equação reduzida de uma circunferência, $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, podemos desenvolver os produtos notáveis e obter uma equação equivalente. Temos:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

Agrupando os termos, convinientemente, obtemos:

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-r^2)=0}$$

A equação destacada é conhecida como **forma geral da equação da circunferência** ou **equação geral da circunferência**, com centro **(a, b)** e raio de medida **r**.

Exemplo:

Encontre a equação geral da circunferência com centro em $(-1, 3)$ e cujo raio mede 4.

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4^2 \quad \therefore \quad x^2+2.x.1+1^2+y^2-2.y.3+3^2=4^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9-16=0 \quad \therefore \quad \boxed{x^2+y^2+2x-6y-6=0}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Dada a equação geral da circunferência, como podemos determinar seu centro e a medida do seu raio?

Analisando os coeficientes

Nem sempre, porém, uma equação da forma $\boldsymbol{Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0}$, com coeficientes reais, representa uma circunferência. Vamos analisar as condições que os coeficientes dessa equação devem satisfazer para que ela represente uma circunferência. Inicialmente vamos dividir os dois membros da equação por $\boldsymbol{A \neq 0}$:

$$\boxed{x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0}$$

Comparando com a equação geral da circunferência, $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0}$, obtemos as relações:

1) $\dfrac{B}{A} = 1 \quad \therefore \quad A = B \neq 0$ *(os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais, mas não nulos)*

2) $\dfrac{C}{A} = 0 \quad \therefore \quad C = 0$ *(não há termo em xy)*

sivio.orleans@ifpb.edu.br

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 + \frac{B}{A}y^2 + \frac{C}{A}xy + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

3) $\frac{D}{A} = -2a \therefore$ $\boxed{a = \frac{-D}{2A}}$

4) $\frac{E}{A} = -2b \therefore$ $\boxed{b = \frac{-E}{2A}}$

$C\left(\frac{-D}{2A}, \frac{-E}{2A}\right)$ ou $C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$

5) $\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2 \therefore r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A} \therefore$ $\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{F}{A}}}$ ou $\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2 - F}}$

Prefiro usar: $r^2 = a^2 + b^2 - F$

$$\boxed{a^2 + b^2 - F > 0}$$

São essas as relações que deverão ser satisfeitas para determinar se uma equação é realmente a equação de uma circunferência. Em caso afirmativo, elas servirão também para determinar as coordenadas do centro e a medida do raio.

sivio.orleans@ifpb.edu.br

Exercícios

01. Verifique se a equação $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$ representa uma circunferência e sendo, qual é seu centro, seu raio e sua equação reduzida.

Resolução

1. $A = B = 1 \neq 0$ *Satisfeita*

2. $C = 0$ *Satisfeita*

3. $a = \frac{-D}{2} \therefore a = \frac{-8}{2} \therefore \boxed{a = -4}$ *e* $b = \frac{-E}{2} \therefore b = \frac{6}{2} \therefore \boxed{b = 3}$ $C(-4, 3)$

$r^2 = a^2 + b^2 - F \therefore r^2 = (-4)^2 + 3^2 + 11 \therefore r^2 = 16 + 9 + 11 \therefore r^2 = 36 \therefore r = \sqrt{36}$ $r = 6$

A equação acima representa uma circunferência de centro $C(-4, 3)$ e raio r = 6

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

$$\boxed{(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 6^2}$$

$$\boxed{(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 36}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

02. Verifique se as equações abaixo representam circunferências. Em caso afirmativo, forneça o centro e a medida do raio da circunferência que cada uma representa.

a) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 73 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 + 4x + 18y - 100 = 0$

d) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + 3 = 0$

Resolução

a) $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 17 = 0$

1. $\boldsymbol{A = B = 1 \neq 0}$ ***Satisfeita***

2. $\boldsymbol{C = 0}$ ***Satisfeita***

3. $\boldsymbol{a = \frac{-D}{2} \therefore a = \frac{10}{2} \therefore \boxed{a = 5}}$ ***e*** $\boldsymbol{b = \frac{-E}{2} \therefore b = \frac{2}{2} \therefore \boxed{b = 1}}$ $\boldsymbol{C(5, 1)}$

$\boldsymbol{r^2 = a^2 + b^2 - F \therefore r^2 = 5^2 + 1^2 - 17 \therefore r^2 = 25 + 1 - 17 \therefore r^2 = 9 \therefore r = \sqrt{9}}$ $\boldsymbol{r = 3}$

A equação acima representa uma circunferência de centro C(5, 1) e raio r = 3

sivio.orleans@ifpb.edu.br

b) $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 73 = 0$

1. $\boldsymbol{A = B = 1 \neq 0}$ ***Satisfeita***

2. $\boldsymbol{C = 0}$ ***Satisfeita***

3. $\boldsymbol{a = \frac{-D}{2} \therefore a = \frac{-12}{2} \therefore \boxed{a = -6}}$ ***e*** $\boldsymbol{b = \frac{-E}{2} \therefore b = \frac{12}{2} \therefore \boxed{b = 6}}$ $\boldsymbol{C(-6, 6)}$

$\boldsymbol{r^2 = a^2 + b^2 - F \therefore r^2 = (-6)^2 + 6^2 - 73 \therefore r^2 = 36 + 36 - 73 \therefore r^2 = -1}$

como o raio $\boldsymbol{r^2 < 0}$, ***a equação acima não representa uma circunferência***

c) $x^2 + 2y^2 + 4x + 18y - 100 = 0$

1. $\boldsymbol{A \neq B}$

A equação acima não representa uma circunferência

sivio.orleans@ifpb.edu.br

d) $(x-1)^2+(y+3)^2+3=0$

A equação reduzida da circunferência é da forma:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

Organizando a equação dada, temos:

$$\boxed{(x-1)^2+(y+3)^2=-3}$$

Note que r^2 não pode ser -3, portanto, a equação acima não representa uma circunferência

03. Determine o centro e o raio da circunferência $2x^2+2y^2+16x-32y+134=0$:

Vamos dividir a equação por 2

$$x^2+y^2+8x-16y+67=0$$

$$a=\frac{-D}{2} \therefore a=\frac{-8}{2} \therefore \boxed{a=-4} \quad e \quad b=\frac{-E}{2} \therefore b=\frac{16}{2} \therefore \boxed{b=8} \qquad C(-4,8)$$

$$r^2=a^2+b^2-F \therefore r^2=(-4)^2+8^2-67 \therefore r^2=16+64-67 \therefore r^2=13 \therefore r=\sqrt{13} \qquad r=\sqrt{13}$$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

04. Determine o maior valor inteiro de **k** de modo que $x^2 + y^2 + 6x + 14y + k = 0$ seja equação de uma circunferência.

Resolução

$a = \frac{-D}{2} \therefore a = \frac{-6}{2} \therefore \boxed{a = -3}$ *e* $b = \frac{-E}{2} \therefore b = \frac{-14}{2} \therefore \boxed{b = -7}$ $C(-3, -7)$

$r^2 = a^2 + b^2 - F \therefore r^2 = (-3)^2 + (-7)^2 - k \therefore r^2 = 9 + 49 - k$ $\boxed{r^2 = 58 - k}$

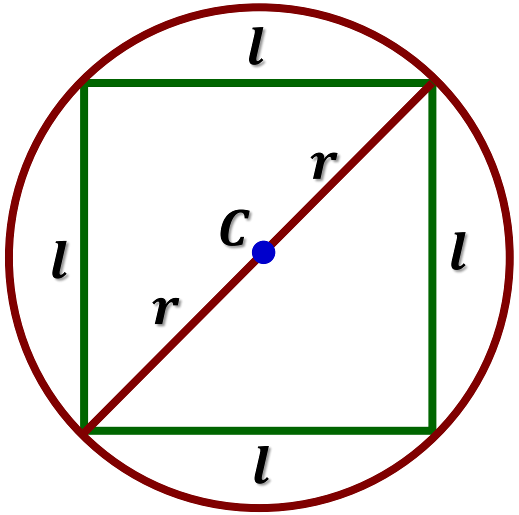
$r^2 > 0 \therefore 58 - k > 0 \therefore -k > -58 \; .(-1)$ $\boxed{k < 58}$

O maior valor inteiro de k que satisfaz a equação da circunferência é $k = 57$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

05. Determine o perímetro do quadrado inscrito na circunferência de equação: $(x-1)^2+(y-3)^2=32$

Resolução



$d = l\sqrt{2}$ $\quad$ $d = diagonal = 2r$ $\quad$ $2r = l\sqrt{2}$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$$

$r^2 = 32 \quad \therefore \quad \boxed{r = \sqrt{32}\ u.c.}$

$2r = l\sqrt{2} \quad \therefore \quad 2\sqrt{32} = l\sqrt{2} \quad \therefore \quad l = \dfrac{2\sqrt{32}}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad l = 2\sqrt{16}$

$l = 2\,.\,4 \quad \therefore \quad \boxed{l = 8\ u.c.}$

O perímetro do quadrado $= 4\,.\,l = 4\,.\,8 = 32\ u.c.$

sivio.orleans@ifpb.edu.br

É uma pena que acabou...

Obrigado pela atenção !!!

Professor Sívio Orleans Cruz

sivio.orleans@ifpb.edu.br

sivio.orleans@ifpb.edu.br