

Professor: Sívio Orleans Cruz

Instituto Federal da Paraíba

Análise Combinatória - Permutações

Permutar é sinônimo de trocar. Intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, isto é, trocar objetos de posição.

Permutações

Aline (A), Bia (B), Claudinha (C) e Diana (D) são alunas do 6º ano de um colégio e, na classe, ocupam a mesma fileira de quatro lugares. Elas vivem brigando por causa da posição em que cada uma quer sentar. Para resolver o problema, a professora sugeriu um rodízio completo das alunas na fileira, trocando a disposição todos os dias. Quantos dias são necessários para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem nas quatro carteiras? Inicialmente, vamos escrever todas as possibilidades de acomodação:

1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
A	B	C	D
B	A	C	D
C	A	B	D
D	A	B	C

1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
A	B	D	C
B	A	D	C
C	A	D	B
D	A	C	B

1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
A	D	C	B
B	C	A	D
C	B	A	D
D	B	A	C

1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
A	D	B	C
B	C	D	A
C	B	D	A
D	B	C	A

1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
A	C	B	D
B	D	A	C
C	D	A	B
D	C	A	B

1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
A	C	D	B
B	D	C	A
C	D	B	A
D	C	B	A





Observe que uma disposição difere das demais apenas pela ordem em que as quatro alunas vão se sentar nas quatro carteiras.

Assim, cada maneira de arrumar as meninas na fileira corresponde a um **agrupamento ordenado** (sequência) formado por quatro elementos.

Dizemos que cada disposição no quadro corresponde a uma **permutação** das quatro crianças.

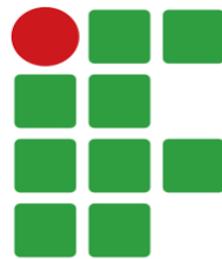
Vamos usar o PFC para contar o número de possibilidades:

- Para ocupar a primeira carteira da fileira, há quatro opções.
- Definida a primeira posição, há três opções de escolha para a menina que vai sentar na segunda posição.
- Definidas a primeira e a segunda posições, há duas opções de escolha para a menina que vai sentar na terceira carteira.
- Escolhidas a primeira, a segunda e a terceira posições, a menina que vai sentar na última carteira fica determinada de maneira única.

Assim, há 24 possibilidades ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$).

Desse modo, são necessários 24 dias para esgotar todas as possibilidades de as quatro meninas se acomodarem na fileira.

Dados n elementos distintos, chama-se **permutação simples** ou simplesmente **permutação** todo **agrupamento ordenado** (sequência) formado por esses n elementos.



Cálculo do número de Permutações Simples

Sejam **n** elementos distintos e P_n o número de permutações possíveis desses **n** elementos.

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ou

$$P_n = n!$$

Exercícios

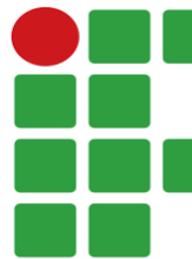
1. Um caso de agrupamento formado por permutação corresponde aos anagramas formados com as letras de uma palavra.

Utilizando todas as letras da palavra PRATO (P, R, A, T, O) e trocando-as de ordem, temos uma sequência de cinco letras que forma uma “palavra” com ou sem sentido. Cada “palavra” formada corresponde a um anagrama, como em: PROTA, ATORP, RAPTO, TROPA etc.

Qual o número de anagramas formados com as letras da palavra PRATO?

Solução

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{P_5 = 120}$$



2. Sejam os anagramas formados com as letras G, R, A, N, I, Z, O. Quantos começam e terminam por vogal?

Solução

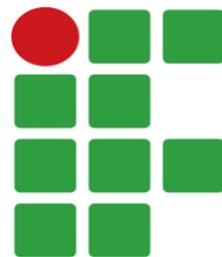
Para iniciar o anagrama, temos três possibilidades (A, I, O).

Definida a vogal do início, sobram duas opções para a vogal que irá ocupar a última letra do anagrama. Definidas as duas extremidades, as outras cinco letras (uma vogal e quatro consoantes) podem ocupar qualquer posição no anagrama, num total de 120 possibilidades ($P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$).

3	5	4	3	2	1	2
1 ^a Letra vogal	2 ^a letra	3 ^a letra	4 ^a letra	5 ^a letra	6 ^a letra	7 ^a Letra vogal

$$3 \cdot 2 \cdot P_5 = 3 \cdot 2 \cdot 5! = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

720



3. Giba e Gina têm três filhos: Carla, Luís e Daniel. A família quer tirar uma foto de recordação de uma viagem na qual todos apareçam lado a lado.



- a) De quantas formas distintas os membros da família podem se distribuir?
b) Em quantas possibilidades o casal aparece lado a lado?

Solução

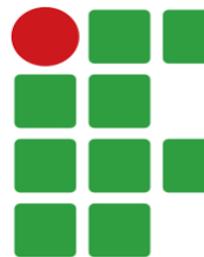
5	4	3	2	1
1^a posição	2^a posição	3^a posição	4^a posição	5^a posição

O número de formas é $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

b) $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! =$

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 =$

48



4. Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

a) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

b) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira de modo que nas extremidades apareçam livros de Álgebra e os livros de Geometria fiquem juntos?



Solução

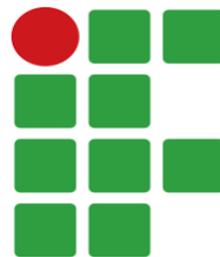
a) $P_5 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 8 640

b)

5	6	5	4	3	2	1	4
1 ^a posição	2 ^a posição	3 ^a posição	4 ^a posição	5 ^a posição	6 ^a posição	7 ^a posição	8 ^a posição

 $\cdot P_3$

$$5 \cdot 4 \cdot P_6 \cdot P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 6! \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
 86 400

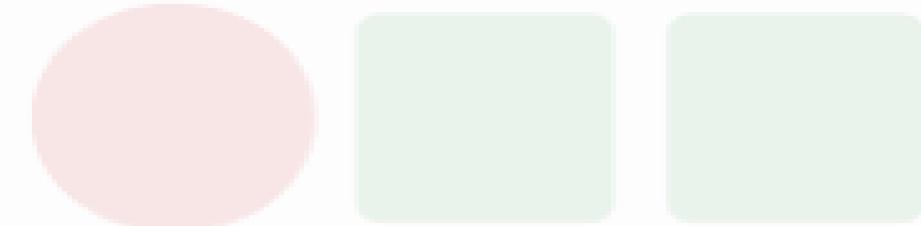


Permutações com elementos repetidos

Estudamos, até aqui, as permutações simples, isto é, aquelas formados por elementos distintos. Vamos agora estudar as permutações com elementos repetidos.

Dados n elementos, dos quais n_1 são iguais a a_1 , n_2 são iguais a a_2 , n_3 são iguais a a_3 , ..., n_r são iguais a a_r (em que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$), o número de permutações desses n elementos é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$



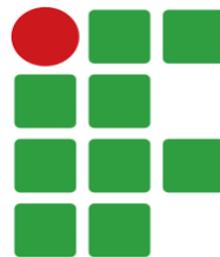
Exemplo:

1. Determine o número de anagramas formados a partir da palavra **CACHORRO**

$$P_8^{(2, 2, 2)} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}!}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2}!} = \boxed{5040}$$

2. Determine o número de anagramas formados a partir da palavra **BABACA**

$$P_6^{(2, 3)} = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{\cancel{6} \cdot \cancel{5}^2 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3}!}{\cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{3}!} = \boxed{60}$$



Permutações circulares

São chamadas permutações circulares de uma dada permutação as que se obtém fazendo-se, na permutação dada, sucessivamente, o primeiro elemento passar para a última posição. Assim, as permutações circulares da permutação (a_1, a_2, a_3, a_4) são:

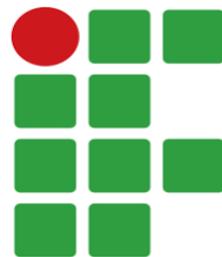
$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_2, a_3, a_4, a_1), (a_3, a_4, a_1, a_2), (a_4, a_1, a_2, a_3)$$

Essas permutações são assim chamadas porque, se dispusermos os seus elementos em torno de um círculo, eles ficarão sempre na mesma posição relativa.

As permutações distintas de n elementos num círculo são aquelas em que se modificam as posições relativas de seus elementos.

Cada grupo de n permutações circulares deverá ser contado como uma única permutação distinta. Assim, o número de permutações distintas num círculo será:

$$(PC)_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)!}{\cancel{n}} = (n-1)!$$



Exemplo:

De quantos modos 6 pessoas podem sentar-se em torno de uma mesa redonda de 6 lugares?

Resolução:

$$(PC)_n = (n - 1)! = (6 - 1)! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

120

Soluções inteiras não negativas de uma equação linear (Equações Diofantinas)

Consideremos a equação linear $x + y = 7$ e encontremos seu número de soluções inteiras não negativas.

Por tentativas, encontramos:

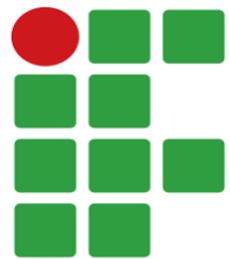
(0, 7); (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1); (7, 0)

Ao todo temos 8 soluções inteiras não negativas

Agora, se tivermos a equação $x + y + z = 7$, resolvendo por tentativas, o trabalho será muito grande, e corremos o risco de “esquecer” alguma solução.

Um raciocínio alternativo seria o seguinte:

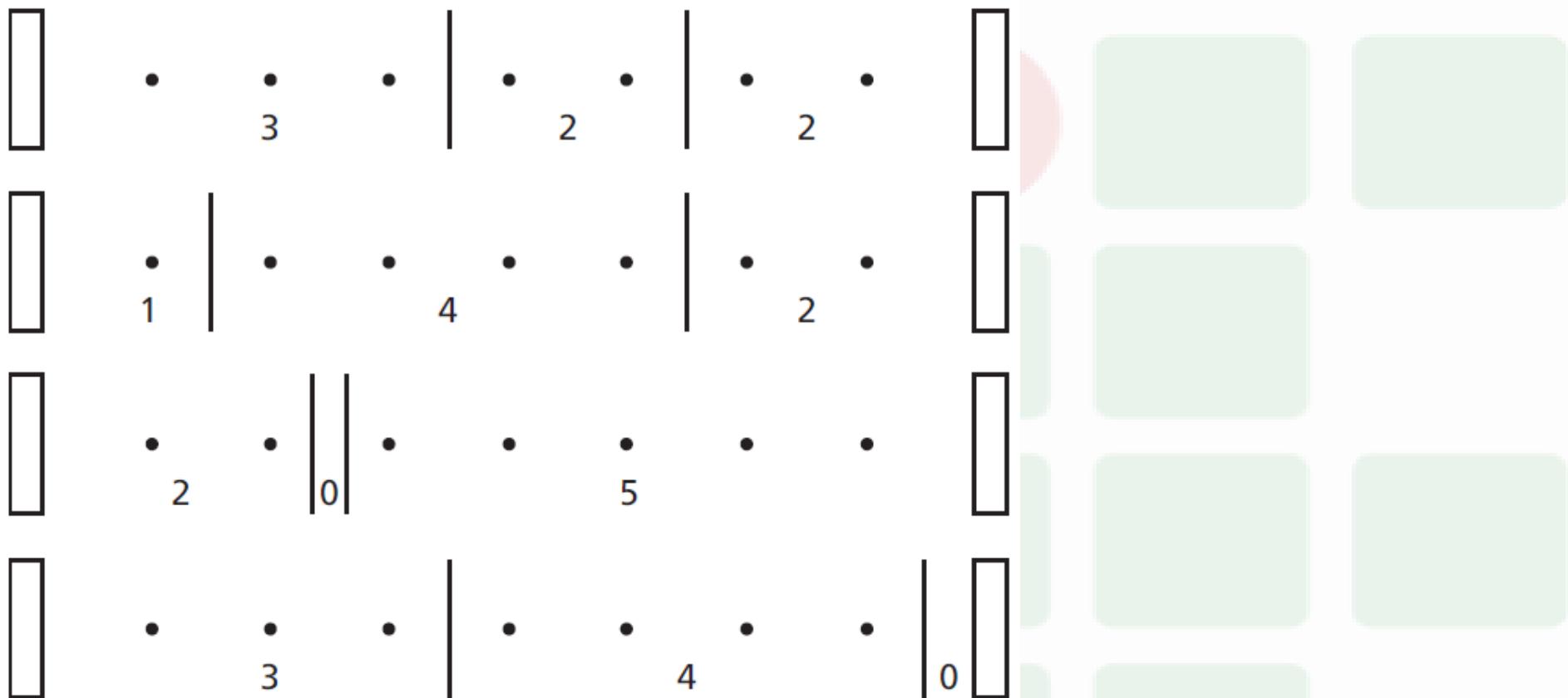
Temos que dividir 7 unidades em 3 partes ordenadas, de modo que fique em cada parte um número maior ou igual a zero.

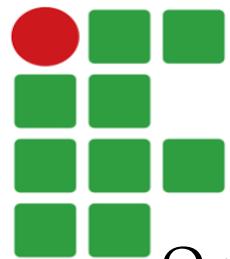


Indiquemos cada unidade por um ponto. Então, elas serão representadas por:



Como queremos dividir as 7 unidades em 3 partes, vamos usar duas barras para fazer a separação. Cada modo de disformos os pontos e as barras dará origem a uma solução. Por exemplo:





Ora, temos 9 símbolos

{ 7.
e
2 |

O número de permutações desses símbolos será:

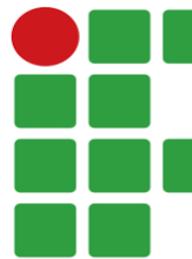
$$P_9^{7,2} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{\cancel{9 \cdot 8 \cdot 7!}}{\cancel{7!2 \cdot 1}} = 36$$

O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ é:

$$\frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

Aplicação:

01. Um bar vende 3 tipos de refrigerantes: guaraná, soda e tônica. De quantas formas uma pessoa pode comprar 5 garrafas de refrigerantes?
02. Uma escola vai doar 15 livros para três ONGs diferentes. Cada ONG pode receber qualquer quantidade, inclusive nenhum livro. De quantas maneiras distintas essa doação pode ser feita?
03. Em uma competição, três times somaram juntos 8 pontos. É possível que um time não marque nenhum ponto. Quantas maneiras diferentes os pontos podem ser distribuídos?



04. Durante uma semana, um nutricionista registrou que uma criança comeu 9 refeições divididas entre café da manhã, almoço e jantar. Em alguns dias, a criança pode ter pulado alguma dessas refeições. De quantas formas diferentes essa quantidade total de refeições pode ter sido dividida?
05. Camila vai comprar exatamente 10 brinquedos, entre bonecas, jogos e bichinhos de pelúcia. Ela quer comprar ao menos um de cada tipo. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer essa escolha?
06. Três amigos estão trocando figurinhas e ao final cada um fica com parte de um total de 12 figurinhas. Todos devem ficar com pelo menos uma figurinha. De quantas formas diferentes essa divisão pode ocorrer?

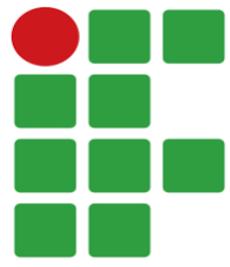
Resolução:

$$x + y + z = 12$$

Como todos devem receber ao menos uma figurinha, vamos chamar $x = a + 1$, $y = b + 1$ e $z = c + 1$

$$a + 1 + b + 1 + c + 1 = 12 \therefore a + b + c = 9$$

$$P_{11}^{9,2} = \frac{11!}{9! 2!} = \frac{\cancel{11}^5 \cdot 10 \cdot 9!}{\cancel{9!}^4 \cdot 2 \cdot 1} = 55$$



É uma pena que acabou...

Obrigado pela
atenção !!!

Professor Sívio Orleans Cruz
sivio.orleans@ifpb.edu.br



sivio.orleans@ifpb.edu.br