Tema 1

1 Propiedades básicas de funciones.

- Fn pares → $f(x) = f(-x)$
- Fn impares → $f(x) = -f(-x)$
- Fn periódicas → $f(x) = f(x+T)$

2 Cálculo de límites FRVR.

- 'f' infinitésimo en 'a' y 'g' acotada ⇒ $\lim f \cdot g = 0$
- '$\lim\limits_{x\to a} f = +\infty$' y 'g' acotada inferiormente ⇒ $\lim f+g = +\infty$
- '$\lim\limits_{x\to a} f = -\infty$' y 'g' acotada superiormente ⇒ $\lim f+g = -\infty$
- Indeterminaciones:

– $0/0$ y ∞/∞ → L'Hôpital

– $0\cdot\infty$ → Transform. en $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ → $\lim \frac{f(x)}{1/g(x)}$

– $\infty - \infty$ → Conjugado

– 0^0, ∞^0 y 1^∞ → $e^{\lim\limits_{x\to a} [g(x) \cdot \ln f(x)]}$

- Jerarquía de infinitos → $x^{Kx} \gg K^x \gg x^K \gg (\log_b x)^K$

3 Estudio práctico de cont./deriv./ptos. críticos.

- Si 'f' es derivable en $x=a$ → 'f' es continua en $x=a$
- Si 'f' no es continua en $x=a$ → 'f' no es derivable en $x=a$

4 FRVV.

- Curva de nivel → $\boxed{f(a,b) = C}$
- Derivada parcial → $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
- Vector gradiente → $\boxed{\nabla F(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)}$ → ∇F indica crec. $-\nabla F$ indica decrec.
- Plano tangente → $\boxed{Z(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)}$
- Hessiano → $\boxed{H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x \partial y \\ \partial^2 f/\partial x \partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}}$
- Máx y mín →
  - Mín local → $\boxed{|H(x,y)| > 0 \text{ y } \partial^2 f/\partial x^2 > 0}$
  - Máx local → $\boxed{|H(x,y)| > 0 \text{ y } \partial^2 f/\partial x^2 < 0}$
  - Pto de silla → $\boxed{|H(x,y)| < 0}$

Tema 2

1 Propiedades de las integrales definidas.

- Si 'f' es continua en '[a, b]', entonces ∃ área bajo 'f(x)' en '[a, b]'.
- Si 'f' es discontinua en un nº finito de ptos. en '[a, b]', 'f' es integrable.
- $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$ • $\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx}$ • $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$
- Si 'f' es par $(f(x) = f(-x)) \Rightarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx}$
- Si 'f' es impar $(f(x) = -f(-x)) \Rightarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$
- Si '$f(x) \leq g(x)$' $\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$
- Si 'f' es integrable en [a, b], 'F' es continua en [a, b].

2 Teorema fundamental del cálculo.

- Si 'f' es integrable en '[a, b]' y continua en '(a, b)', entonces '$F = \int_a^x f(x)\,dx$' es derivable.

- Si 'f' es continua en '[a, b]', 'F' es derivable y continua en '(a, b)' y '$F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$'.

3 Integrales impropias.

- $\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$ • $\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$
- $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx + \int_{z}^{\infty} f(x)\,dx}$

4 Función Gamma de Euler.

- $\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt} \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \Gamma(1) = 1 \\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ \Gamma(x) = (x-1)! \to x \in \mathbb{N} \\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \end{array}}$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \longrightarrow$ Demostración:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t}\, dt \Rightarrow \begin{array}{l} u = t^x \rightsquigarrow du = xt^{x-1} \\ dv = e^{-t} \rightsquigarrow v = -e^{-t} \end{array}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\left[-t^x e^{-t}\right]_0^b + x\int t^{x-1} e^{-t}\, dt \right] = \lim_{b\to\infty} -\cancel{b^x e^{-b}}^{\,0} - 0 + \lim_{b\to\infty} x \underbrace{\int_0^b t^{x-1} e^{-t}\, dt}_{\Gamma(x)} =$$

$$= x\,\Gamma(x) \Rightarrow \boxed{\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)}$$

5 EDOs y PVI.

- Proceso de resolución:

Ej. $y' = 2xy$, $y(0) = 1$

1. Separar 'y/x' a cada lado del igual. $1/y \cdot y' = 2x$
2. Poner $y' = \frac{dy}{dx}$ y pasar 'dx' multiplicando. $1/y \cdot \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{1}{y} dy = 2x\, dx$
3. Integrar a ambos lados (NO OLVIDAR C_1). $\int \frac{1}{y} dy = \int 2x\, dx \Rightarrow \ln|y| = x^2 + C_1$
4. Si se puede, despeja 'y'. $y = e^{x^2 + C_1} = e^{x^2} \cdot e^{C_1} = \boxed{e^{x^2} \cdot C_1 = y}$
5. En problemas de PVI, obtener la constante con el valor inicial. $\boxed{C_1 = 1}$

$\Downarrow$

$\boxed{y = e^{x^2}}$

Tema 3

1 Propiedades sucesiones.

- Toda sucesión convergente está acotada.
- Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
- Toda sucesión monótona creciente y no acotada es divergente.
- Toda sucesión monótona creciente está acotada inferiormente.
- Toda sucesión monótona decreciente y no acotada es divergente.
- Toda sucesión monótona decreciente está acotada superiormente.

2 Cálculo de límites.

- Límite de raíces enésimas de polinomios → $\boxed{\lim \sqrt[n]{p(n)} = 1}$
- Límite de un log de un polinomio de grado K → $\boxed{\lim \ln(p_K(n)) = K}$
- Jerarquía de infinitos → $n^n \gg n! \gg K^n \gg n^K \gg \log n$

3 Sucesiones notables.

- Progresión divergente: $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$
  - Expresión explícita → $a_n = a + dn$
  - Siempre divergente
- Progresión geométrica: $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$
  - Expresión explícita → $a_n = ar^n$
  - Convergente si $r \in (-1, 1]$ → $\begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \quad \text{EJ. } a_n = 2 \cdot 3^n \\ 1 & \text{si } r = 1 \quad \text{EJ. } a_n = 4 \cdot 1^n \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \quad \text{EJ. } a_n = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \nexists & \text{si } r \leq -1 \quad \text{EJ. } a_n = 7(-1)^n \end{cases}$

4 Regla del Sándwich.

Tema 4

- **Carácter de las series:** Evaluando $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

  - Convergente $\rightarrow S \in \mathbb{R}$
  - Divergente $\rightarrow \nexists S$ ó $S = \pm\infty$

- **Propiedades:**

  - $\sum \alpha a_n = \alpha \sum a_n$
  - $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=n_0'}^{\infty} a_n$
  - $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$
  - $\sum \alpha a_n \sim \sum a_n$

- **Clasificación de series:**

  - Series de términos positivos (STP) → Responden a las propiedades → Asociativa, Conmutativa
    - $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \Rightarrow$ Se trata como STP
    - $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) \Rightarrow$ STP

  - Series de términos cualesquiera (signos ⊕ y ⊖ en los términos).

    $\boxed{\text{EJ.}}$ $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$

    ✓ Caso especial → Series alternadas $(\operatorname{sign}(a_n) = -\operatorname{sign}(a_{n+1}))$

  - Series notables:

Serie Aritmética	Expresión → $\sum_{n=1}^{\infty} n$ Carácter → Siempre divergente. Orden de magnitud → $S_n = \sum_{K=1}^{n} K = 1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(1+n) \sim n^2$
Serie Geométrica	Expresión → $\sum_{n=n_0}^{\infty} r^n$ Carácter → Convergente si $\lvert r\rvert < 1$ Suma parcial (si converge) → $S_n = \frac{r^{n_0}}{1-r}$ Orden de magnitud (si diverge) → $S_n \sim r^n$ si $\lvert r\rvert > 1$; $S_n \sim n$ si $r = 1$; $S_n \in O(1)$ si $r = -1$
Serie Polinómica	Expresión → $\sum_{n=1}^{\infty} n^p,\ p > 0$ Carácter → Siempre divergente Orden de magnitud → $\sum_{K=1}^{n} K^p \sim n^{p+1}$
Serie Armónica	Expresión → $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ Carácter → Siempre divergente
Serie Armónica Generalizada	Expresión → $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ Carácter → Convergente si $p > 1$, divergente si $p \leq 1$ Orden de sucesión → Si $0 \leq p < 1 \rightarrow \sum_{K=1}^{n} 1/K^n \sim n^{-p+1}$ Si $p = 1 \rightarrow \sum_{K=1}^{n} 1/K^n \sim \ln n$

① Estudio del carácter de las STPs.

- Criterio 0 → Si la serie tiene suma finita, sería convergente. Requiere calcularse la suma

★★★★★ • Criterio general de convergencia de Cauchy:

Si $\sum a_n$ converge $\Rightarrow a_n$ tiende a 0 $(\lim a_n = 0)$.
El recíproco no es cierto → $\lim a_n = 0 \not\Rightarrow \sum a_n$ converge

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Si } \lim a_n \neq 0 \Downarrow a_n \text{ diverge}}$

★★★★★ • Criterio de la raíz:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} <1 \longrightarrow \text{converge} \\ >1 \longrightarrow \text{diverge} \\ =1 \longrightarrow \text{no informa} \end{cases}}$$

★★★★★ • Criterio del cociente:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} <1 \longrightarrow \text{converge} \\ >1 \longrightarrow \text{diverge} \\ =1 \longrightarrow \text{no informa} \end{cases}}$$

★★★★★ • Criterios de comparación: Sean a_n y b_n dos sucesiones positivas:

- Si $\left\{\begin{array}{l} a_n \in O(b_n) \\ a_n << b_n \end{array}\right\}$ y b_n converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- Si $\left\{\begin{array}{l} b_n \in O(a_n) \\ a_n >> b_n \end{array}\right\}$ y b_n diverge $\Rightarrow \sum a_n$ diverge
- Si $\left\{\begin{array}{l} a_n \in \Theta(b_n) \\ a_n \sim b_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_n$ y b_n tienen el mismo carácter.

- Estudio práctico:

a) Hipótesis → a_n converge

$$\boxed{\lim \frac{a_n}{\square} = 0 \text{ y } \sum \square \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}}$$

b) Hipótesis → a_n diverge

$$\boxed{\lim \frac{\square}{a_n} = 0 \text{ y } \sum \square \text{ diverge} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge}}$$

- Si en el término general aparecen sen/cos, los criterios de comparación suelen funcionar bien.

• **Criterio de la integral:** Sea $\sum a_n$ una serie tal q $a_n = f(n)$ → continua, positiva, monótona en $[n_0, \infty)$

$$\boxed{\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} \text{convergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge} \\ \text{divergente} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}}$$

— Ordenes de magnitud si diverge:

√ 'f' es decreciente ⇒ $S_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \sim \int_{n_0} f(x)\,dx$

√ 'f' es creciente:

- $f(n) << \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow S_n = \sum_{K=n_0}^{\infty} f(K) \sim \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$
- $f(n) >> \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow S_n = \sum_{K=n_0}^{\infty} f(K) \sim f(n)$
- $f(n) \sim \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow S_n = \sum_{K=n_0}^{\infty} f(K) \in \Theta(f(n))$

② Series alternadas.

• **Criterio de Leibniz:**

- $\sum a_n$ es una serie alternada
- $\lim a_n = 0$
- $|a_{n+1}| \leq |a_n|$

$\xrightarrow{\text{C. Leibniz}}$ $\sum a_n$ converge

• **Criterio de la convergencia absoluta** → Una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

— Toda sere absolutamente convergente es convergente.
— Que una serie sea convergente, NO implica q sea absolutamente convergente.

— Procedimiento:

1º) Me defino una serie auxiliar ⇒ $\sum a_n \to \sum |a_n|$ (STP)
2º) Aplico los criterios de las STPs xra ver si converge
3º) Relaciono las dos series con la convergencia absoluta.

— Guión → Se considera la serie $\sum |a_n| =$ ~~~. X el c. de ~~~, ~~~, x lo q $\sum |a_n|$ es convergente. X lo tanto, se puede afirmar q $\sum a_n$ es absolutamente convergente. Ahora x el c. de la CA, como $\sum a_n$ es AC, tmb será convergente.

Tema 5

- <u>Serie de potencias centrada en x</u> → $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots}$

① Estudio de la Convergencia.

- <u>Objetivo</u> → Saber xra q valores de 'x' la serie converge.
- Xra '$x = x_0$' siempre converge ⇒ $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0}$
- <u>ANÁLISIS DIRECTO:</u>

  – Como 'x' puede tomar cualquier valor ⇒ NO es STP
  – Usar <u>criterio de la CA</u> y, xra los valores q no se puedan estudiar así, usar <u>condición necesaria</u>.

- <u>RADIO/INTERVALO DE CONVERGENCIA:</u>

  – Se recomienda usar este método sobre el anterior, salvo en casos donde 'x' está elevada a un exponente distinto de 'n' (como x^{2n-1}, por ejemplo).

  – <u>Intervalo de convergencia</u> → Conjunto de valores de 'x' xra los q la serie converge. $\boxed{[(x_0 - R, x_0 + R)]}$

  – <u>Radio de convergencia</u> → $\boxed{R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{a_n}}}$ ó $\boxed{R = \frac{1}{\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}}$

  Siendo 'a_n' SOLO 'a_n', no '$a_n(x-x_0)$'

  – Si '$R = \infty$' ⇒ $\boxed{\text{Intervalo de convergencia} = \mathbb{R}}$

  – Si '$R \neq \infty$' ⇒ Se estudia las series obtenidas xra '$x = R$' y '$x = -R$' xra estudiar los extremos del intervalo.

  – Además:

  $$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } |x - x_0| < R \Rightarrow \text{La serie converge} \\ \text{Si } |x - x_0| > R \Rightarrow \text{La serie diverge} \\ \text{Si } |x - x_0| = R \Rightarrow \text{No se puede asegurar nada} \end{array}}$$

2 Series de Taylor.

- Se dice q una función '$f(x)$' es desarrollable en serie de potencias centrada en '$x_0 \in Dom(f)$' si existe una sucesión 'a_n' y un subconjunto '$V \subseteq Dom\ f(x)$' si:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \forall\ x \in C.V.}$$

- El conjunto C.V. o campo de validez es el conjunto de ptos. del dominio 'f' xra los q se verifica la siguiente igualdad:

$$\boxed{CV \equiv I \cap Dom(f)}$$

- Si una función '$f(x)$' es desarrollable en serie de ptos en un entorno de '$x_0\ (x_0 + R, x_0 - R)]$', la expresión de dicha serie de potencias es:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - x_0)^n}$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_3)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots}$$

- Se llama polinomio de Taylor de orden 'n' de '$f(x)$' en 'x_0' a la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor de dicha función en 'x_0':

$$\boxed{f(x) \approx T_n(x) = \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(x)}{K!}(x - x_0)^K = f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n}$$

- El resto de Taylor de '$f(x)$' de orden 'n' es:

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$$

- Estudio práctico:

1) Calcular varias derivadas de la función dada.

2) Evaluar dichas derivadas en 'x_0'.

3) Extraer la ley de formación (patrón) y expresar la serie.

4) Cálculo de C.V.

5) Dar respuesta a las preguntas del enunciado sobre cálculos concretos.