Indice

1 Formule sparse

Coefficiente di correlazione lineare: $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2 \sum(y_i-\bar{y})^2}}$ $r \in [-1; 1]$

Covarianza: $\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$

Deviazione std (s.q.m): $s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum(x_i - \overline{x})^2}$ (incertezza sulla singola misura)

Deviazione std della media: $s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum(x_i - \overline{x})^2} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$

Densità di frequenza: $\varPhi_k = \frac{f_k}{\Delta x}$. Δx: ampiezza bin, $f_k = \frac{n_k}{N}$, k: indice del bin.

Media aritmetica: $\frac{\sum x_i}{N}$ oppure $\frac{\sum n_k x_k}{N}$

Scarto quadratico medio (dev std): $s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum d_i^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum(x_i - \overline{x})^2}$

Scarto medio: $\frac{1}{N} \sum |d_i|$. $d_i = x_i - \overline{x}$

Varianza: $s_x^2 = \frac{N}{N-1}(\overline{x^2} - \overline{x}^2)$

2 Calcolo combinatorio

Disposizioni numero di modi diversi di disporre k oggetti, presi da un insieme di n oggetti (n nPr k).

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Combinazioni numero di sottogruppi da k elementi possibili in un gruppo di n elementi (n nCr k).

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

3 Propagazione degli errori

3.1 Propagazione lineare

$a = f(x) \Rightarrow \Delta a = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x\,=\,\overline{x} \\ y\,=\,\overline{y}}} \cdot \Delta x$

3.2 Propagazione in quadratura

data $q(x,y), \sigma_x$ e σ_y allora $\overline{q} = q(\overline{x}, \overline{y})$ e $\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2 + 2\,\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y}\sigma_{xy}}$

se le variabili non sono correlate ($\sigma_{xy} = 0$) allora la formula si riduce a: $\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2}$

3.3 Media pesata

Date due misure $(x_1 \pm \sigma_1)$ e $(x_2 \pm \sigma_2)$ compatibili tra loro, è possibile ricavare la miglior stima del valore $x_p = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2}{w_1 + w_2}$, dove $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ e la dev std $\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2}}$

4 Rigetto dati

4.1 Criterio di Chauvenet

Data la misura sospetta x_s, se $P\left(|z| > \frac{x_s - \mu}{\sigma}\right) \cdot N < 0.5$ allora la misura x_s può essere rigettata.
Successivamente bisogna ricalcolare media e deviazione std (quest'ultima è difficile).

4.2 Caso campioni ridotti

Se $P\left(|t| > \frac{x_s - \overline{x}}{\sigma_x}\right) \cdot N < 0.5$ allora può essere rigettata.
Usa σ_x non $\sigma_{\overline{x}}$

5 Valutazione delle ipotesi

5.1 Test delle ipotesi

Dato un valore accettato v_{acc} e una serie di N misure con media $\overline{x}$ e dev std σ_x, si calcola $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ poi si calcola $z = \frac{\overline{x} - v_{acc}}{\sigma_{\overline{x}}}$ e, se N è grande si usa $G(z)$ altrimenti $S_\nu(z)$.
Bisogna prendere entrambe le code, quindi moltiplicare per 2. Se il valore trovato è minore di 0.05 allora c'è discrepanza, se è minore di 0.01 questa è critica.
Se si deve determinare la compatibilità di due misure, senza la presenza di un valore accettato si calcola:

- se le popolazioni sono ridotte: $t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\left(\frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}\sigma_1^2 + \frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}\sigma_2^2\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ con $\nu = n_1 + n_2 - 2$
- se le popolazioni sono numerose: $z = \frac{|\overline{x_1} - \overline{x_2}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} = \sigma_{\overline{x}}^2\right)$

5.2 Test correlazione lineare

Per verificare l'ipotesi di correlazione lineare calcolo il coefficiente di correlazione lineare:
$r_0 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}$ $r \in [-1; 1]$ e controllo sulla tabella la probabilità $P_N(|r| > r_0)$ se $P < 0.05$ l'ipotesi di correlazione lineare è buona, se $P < 0.01$ è ottima.

5.3 Test del χ^2

5.3.1 Verifica distribuzione di probabilità/PDF

Dato un set di N risultati divisi in n bin del tipo $[a_i; b_i]$ o x_i e una pdf $\Phi(x; \alpha; \dots)$ o una ditribuzione di probabilità $P(k; \alpha; \dots)$ dove $\alpha; \dots$ sono gli altri parametri; chiamo O_i il numero di eventi in un bin, E_i il numero di eventi previsti da Φ o P e σ_i l'errore su O_i

- O_i lo prendo dal set di risultati
- se ho una pdf $E_i = N \int_{a_i}^{b_i} \Phi(x)\, dx = N\, p_i$
- se ho una distr. di prob. $E_i = NP(x_i) = N\, p_i$
- se $p_i \ll 1$ (molti bin) allora $\sigma_i^2 = Np_i = E_i$ (variabile poissoniana)
- altrimenti $\sigma_i^2 = Np_i(1 - p_i)$ (variabile binomiale)

$$\chi^2 = \sum_0^n \frac{(O_i - E_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Ora bisogna determinare i gradi di libertà ν; in genere sono $n - 1$ ma per ogni parametro della pdf/dist. stimato a partire dai risultati se ne perde un'altro.
Se l'ipotesi è corretta $\chi^2 \approx \nu$, se no $\chi^2 \gg \nu$, $\chi^2 \gg \nu$ può voler dire che l'errore è stato sovrastimato.
Per praticità introduciamo il χ^2 ridotto: $\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \approx 1$ se l'ipotesi è corretta.
Se $P_\nu(\chi^2 > \chi_0^2) < 0.05$ c'è discrepanza, se < 0.01 questa è netta.

Attenzione

- il numero di misure in ogni bin dev'essere $\geq 4 - 5$
- bisogna avere abbastanza bin affinché $\nu > 0$

5.3.2 Verifica relazione funzionale

Dato un insieme di N coppie $(x_i, y_i \pm \sigma_i)$ e una funzione $f(x;\alpha;\dots)$

$$\chi^2 = \sum_0^N \left(\frac{y_i - g(x_i)}{\sigma_i}\right)^2$$

I gradi di libertà sono: $\nu = N-$ il numero di parametri $\alpha, \dots$ dedotti dai dati. Ora calcolo il $\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\nu}$ e la trattazione è uguale a quella per il caso precedente.

6 Regressione lineare

6.1 Caso base

Dato un insieme di misure: $x_i(y_i \pm \sigma_{yi})$, nell'ipotesi che:
- y_i siano estratti da popolazioni gaussiane
- $\sigma_y i = \sigma_y j \;\forall\, i, j$

Le migliori stime di m e q e delle loro incertezze sono:

$$m = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta} \qquad q = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta} \qquad \Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$\sigma_m = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{\Delta}} \qquad \sigma_q = \sigma_y\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}$$

Se non ho σ_y posso stimarla (e usarla per calcolare σ_m e σ_q) come $\hat{\sigma_y} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum\left(y_i - mx_i - q\right)^2}$

6.1.1 Intercetta a 0

$$m = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum x_i^2}}$$

6.2 Incertezze sulle y variabili

In questo caso peso i vari punti in base all'errore: peso $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$
E ottengo:

$$m = \frac{\sum w_i \sum w_i x_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i y_i}{\Delta} \quad q = \frac{\sum w_i x_i^2 \sum w_i y_i - \sum w_i x_i \sum w_i x_i y_i}{\Delta} \quad \Delta = \sum w_i \sum w_i x_i^2 - \left(\sum w_i x_i\right)^2$$

(Il cuffia rimanda al par 10.3 del Fornasini per σ_m e σ_q)

6.3 Errori in x non trascurabili

Calcolo m ignorando gli errori su x. Poi calcolo un σ_y equivalente: $\sigma_{y\,eq} = m\sigma_x$.
Infine $\sigma_{y\,tot} = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_{y\,eq}^2}$ e mi riconduco al caso delle sole incertezze sulle y variabili

7 PDF

7.1 caratteristiche PDF

Normalizzazione: $1 = \int \Phi(x)dx$

Media: $\overline{x} = \int x\Phi(x)dx$

Varianza: $s_x^2 = \int (x - \overline{x})^2\Phi(x)dx$

7.2 Gaussiana

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\overline{x} = \mu \qquad s_x^2 = \sigma^2 \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad \hat{\mu} = \overline{x} \qquad \hat{\sigma}^2 = s_x^2 \qquad \text{FWHM} = 2\sigma\sqrt{\ln 4}$$

La combinazione $q = c_1 x + c_2 y$ di due variabili gaussiane è a sua volta gaussiana;
media: $\mu = c_1\mu_x + c_2\mu_y$, varianza: $\sigma^2 = c_1^2\sigma_x^2 + c_2^2\sigma_y^2$

7.2.1 Gaussiana 2D

$\sigma_{xy} = \int\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})(y-\overline{y})\Phi(x,y)dxdy = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}$

7.3 Uniforme

$$\Phi(x) = \frac{1}{b-a}$$

Media $= \frac{a+b}{2}$
Varianza $= \overline{x^2} - \overline{x}^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$
Incertezza std $= s_x = \frac{\text{incertezza massima}}{\sqrt{3}}$

7.4 Student

$$S_\nu(t) = \frac{c_\nu}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

Già per $n \approx 30/35$, $S_\nu(t) \to G(z)$

7.4.1 Intervallo di confidenza

Se data una misura $(\overline{x} \pm \sigma_{\overline{x}})$ che si vuole esprimere con un intervallo di confidenza del (per esempio) 95%, bisogna determinare i gradi di libertà $\nu = N-1$ e ricavare il valore di k dalla tabella, che riporta però $\frac{1-\text{percentuale}}{2}$, quindi in questo caso la colonna da preferire sarebbe quella corrispondente a 0.025.
A questo punto si esprime l'intervallo come: $\overline{x} - k\sigma_{\overline{x}} < \overline{x} < \overline{x} + k\sigma_{\overline{x}}$

7.5 Priori $\longrightarrow$ Posteriori

Supponiamo di avere a priori una variabile reale r distribuita uniformemente su $[0;1]$ e di volerla raffinare sulla base dell'osservazione di un evento successivo E.
Inizialmente la probabilità dell'ipotesi H_i è pari a $P(H_i) = dP(r) = \Phi_{pr}(r)\,dr$ dove Φ_{pr} è la pdf a priori.
Supponiamo che possa calcolare la probabilità $P(E|r)$.
Ora per la formula di Bayes abbiamo che: $\Phi_{po}(r)\,dr = dP(H_i|E) = \frac{P(E|r)\,P(H_i)}{P(E)} = \frac{P(E|r)\,dP(r)}{\int_0^1 P(E|r)\,dr} = \frac{P(E|r)\,dr}{\int_0^1 P(E|r)\,dr} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi_{po}(r) = \frac{P(E|r)}{\int_0^1 P(E|r)\,dr}$

8 Probabilità variabile discreta

Sono tutte normalizzate a 1

8.1 Distribuzione binomiale

$$P(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}$$

Media: $\overline{k} = n \cdot p$
Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p\,(1-p)$
La distribuzione è simmetrica $\Leftrightarrow p = 0.5$
Tende ad una gaussiana per n grandi.

8.1.1 Contatori e la loro efficienza

Dato il numero totale di particelle inviate N e il numero di particelle rilevate n l'efficienza è: $\varepsilon = \frac{n}{N}$ e l'errore assoluto su ε pari ad una dev std è: $\Delta\varepsilon = \frac{\sqrt{N \cdot \varepsilon \cdot (1-\varepsilon)}}{N}$
Posso parlare di un intervallo di CL per esempio del 95% se la probabilità che un certo evento si verifichi con un'ε al di fuori di quell'intervallo è minore del 5%

9 Distribuzione Geometrica

$$P(k,p) = p(1-p)^{k-1}$$

Media: $\overline{k} = \frac{1}{p}$
Deviazione std: $\sigma_k = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$

10 Distribuzione di Poisson

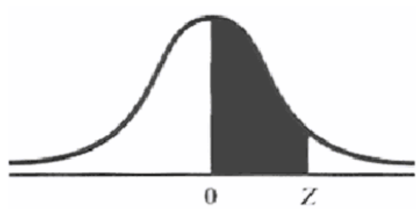
$$P(k,\mu) = \frac{\mu^k \, e^{-\mu}}{k!}$$

Media: $\overline{k} = \mu$
Deviazione std: $\sigma_k = \sqrt{\mu}$

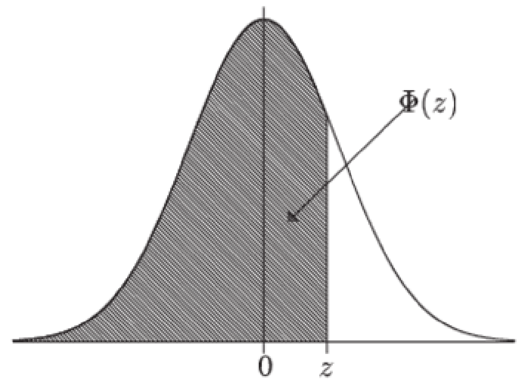
Il parametro μ esprime il numero medio di oggetti in una porzione di spazio/tempo/ecc.
Si usa quando i numeri sono troppo grandi per la binomiale.
Data una singola misura m di una variabile poissoniana, la migliore stima del parametro μ è m stessa; l'incertezza è quindi: $\sigma_m = \sqrt{m} \Rightarrow$ l'errore relativo è $\frac{1}{\sqrt{m}}$

A Gaussiane

Tavola della distribuzione Normale Standardizzata



Area sottesa alla curva di densità normale standardizzata calcolata tra **0** e **Z**										
Z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

B Student

TABLE of CRITICAL VALUES for STUDENT'S *t* DISTRIBUTIONS

Column headings denote probabilities (α) ***above*** tabulated values.

d.f.	**0.40**	**0.25**	**0.10**	**0.05**	**0.04**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**	**0.0005**
1	0.325	1.000	3.078	6.314	7.916	12.706	15.894	31.821	63.656	127.321	318.289	636.578
2	0.289	0.816	1.886	2.920	3.320	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.328	31.600
3	0.277	0.765	1.638	2.353	2.605	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.333	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.191	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.894	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.104	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.046	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.004	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	1.973	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	1.948	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	1.928	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	1.912	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	1.899	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	1.887	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	1.878	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	1.869	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	1.862	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	1.855	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	1.850	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	1.844	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	1.840	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	1.835	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	1.832	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.256	0.685	1.318	1.711	1.828	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	1.825	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	1.822	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	1.819	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.689
28	0.256	0.683	1.313	1.701	1.817	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	1.814	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.660
30	0.256	0.683	1.310	1.697	1.812	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	0.256	0.682	1.309	1.696	1.810	2.040	2.144	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	0.255	0.682	1.309	1.694	1.808	2.037	2.141	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	0.255	0.682	1.308	1.692	1.806	2.035	2.138	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	0.255	0.682	1.307	1.691	1.805	2.032	2.136	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	0.255	0.682	1.306	1.690	1.803	2.030	2.133	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
36	0.255	0.681	1.306	1.688	1.802	2.028	2.131	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	0.255	0.681	1.305	1.687	1.800	2.026	2.129	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	0.255	0.681	1.304	1.686	1.799	2.024	2.127	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	0.255	0.681	1.304	1.685	1.798	2.023	2.125	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	0.255	0.681	1.303	1.684	1.796	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	1.781	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.254	0.678	1.292	1.664	1.773	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.254	0.677	1.290	1.660	1.769	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.766	1.980	2.076	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
140	0.254	0.676	1.288	1.656	1.763	1.977	2.073	2.353	2.611	2.852	3.149	3.361
160	0.254	0.676	1.287	1.654	1.762	1.975	2.071	2.350	2.607	2.847	3.142	3.352
180	0.254	0.676	1.286	1.653	1.761	1.973	2.069	2.347	2.603	2.842	3.136	3.345
200	0.254	0.676	1.286	1.653	1.760	1.972	2.067	2.345	2.601	2.838	3.131	3.340
250	0.254	0.675	1.285	1.651	1.758	1.969	2.065	2.341	2.596	2.832	3.123	3.330
inf	0.253	0.674	1.282	1.645	1.751	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.090	3.290

C Correlazione lineare

$\|r_o\| \rightarrow$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
N=3	100	94	87	81	74	67	59	51	41	29	0
N=4	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
N=5	100	87	75	62	50	39	28	19	10	3.7	0
N=6	100	85	70	56	43	31	21	12	5.6	1.4	0
N=7	100	83	67	51	37	25	15	8.0	3.1	0.6	0
N=8	100	81	63	47	33	21	12	5.3	1.7	0.2	0
N=9	100	80	61	43	29	17	8.8	3.6	1.0	0.1	0
N=10	100	78	58	40	25	14	6.7	2.4	0.5		0
N=11	100	77	56	37	22	12	5.1	1.6	0.3		0
N=12	100	76	53	34	20	9.8	3.9	1.1	0.2		0
N=13	100	75	51	32	18	8.2	3.0	0.8	0.1		0
N=14	100	73	49	30	16	6.9	2.3	0.5	0.1		0
N=15	100	72	47	28	14	5.8	1.8	0.4			0
N=16	100	71	46	26	12	4.9	1.4	0.3			0
N=17	100	70	44	24	11	4.1	1.1	0.2			0
N=18	100	69	43	23	10	3.5	0.8	0.1			0
N=19	100	68	41	21	9.0	2.9	0.7	0.1			0
N=20	100	67	40	20	8.1	2.5	0.5	0.1			0
N=25	100	63	34	15	4.8	1.1	0.2				0
N=30	100	60	29	11	2.9	0.5					0
N=35	100	57	25	8.0	1.7	0.2					0
N=40	100	54	22	6.0	1.1	0.1					0
N=45	100	51	19	4.5	0.6						0

D χ^2

$\tilde{\chi}_0^2 \rightarrow$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	8.0	10.0
ν=1	100	48	32	22	16	11	8.3	6.1	4.6	3.4	2.5	1.9	1.4	0.5	0.2
ν=2	100	61	37	22	14	8.2	5.0	3.0	1.8	1.1	0.7	0.4	0.2		
ν=3	100	68	39	21	11	5.8	2.9	1.5	0.7	0.4	0.2	0.1			
ν=4	100	74	41	20	9.2	4.0	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1				
ν=5	100	78	42	19	7.5	2.9	1.0	0.4	0.1						

$\tilde{\chi}_0^2 \rightarrow$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
ν=1	100	65	53	44	37	32	27	24	21	18	16	14	12	11	9.4	8.3
ν=2	100	82	67	55	45	37	30	25	20	17	14	11	9.1	7.4	6.1	5.0
ν=3	100	90	75	61	49	39	31	24	19	14	11	8.6	6.6	5.0	3.8	2.9
ν=4	100	94	81	66	52	41	31	23	17	13	9.2	6.6	4.8	3.4	2.4	1.7
ν=5	100	96	85	70	55	42	31	22	16	11	7.5	5.1	3.5	2.3	1.6	1.0
ν=6	100	98	88	73	57	42	30	21	14	9.5	6.2	4.0	2.5	1.6	1.0	0.6
ν=7	100	99	90	76	59	43	30	20	13	8.2	5.1	3.1	1.9	1.1	0.7	0.4
ν=8	100	99	92	78	60	43	29	19	12	7.2	4.2	2.4	1.4	0.8	0.4	0.2
ν=9	100	99	94	80	62	44	29	18	11	6.3	3.5	1.9	1.0	0.5	0.3	0.1
ν=10	100	100	95	82	63	44	29	17	10	5.5	2.9	1.5	0.8	0.4	0.2	0.1
ν=11	100	100	96	83	64	44	28	16	9.1	4.8	2.4	1.2	0.6	0.3	0.1	0.1
ν=12	100	100	96	84	65	45	28	16	8.4	4.2	2.0	0.9	0.4	0.2	0.1	
ν=13	100	100	97	86	66	45	27	15	7.7	3.7	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1	
ν=14	100	100	98	87	67	45	27	14	7.1	3.3	1.4	0.6	0.2	0.1		
ν=15	100	100	98	88	68	45	26	14	6.5	2.9	1.2	0.5	0.2	0.1		
ν=16	100	100	98	89	69	45	26	13	6.0	2.5	1.0	0.4	0.1			
ν=17	100	100	99	90	70	45	25	12	5.5	2.2	0.8	0.3	0.1			
ν=18	100	100	99	90	70	46	25	12	5.1	2.0	0.7	0.2	0.1			
ν=19	100	100	99	91	71	46	25	11	4.7	1.7	0.6	0.2	0.1			
ν=20	100	100	99	92	72	46	24	11	4.3	1.5	0.5	0.1				
ν=22	100	100	99	93	73	46	23	10	3.7	1.2	0.4	0.1				
ν=24	100	100	100	94	74	46	23	9.2	3.2	0.9	0.3	0.1				
ν=26	100	100	100	95	75	46	22	8.5	2.7	0.7	0.2					
ν=28	100	100	100	95	76	46	21	7.8	2.3	0.6	0.1					
ν=30	100	100	100	96	77	47	21	7.2	2.0	0.5	0.1					